МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО НАУЧНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ, КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ:

тезисы докладов
XIII Международной научной конференции
(пос. Дивноморское, 7–14 сентября 2016 г.)

Владикавказ
2016

ББК 22.16+
УДК 517 + 519.372.8

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование: тезисы докладов XIII Международной научной конференции (пос. Дивноморское, 7–14 сентября 2016 г.).—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2016.—255 с.

Сборник содержит тезисы докладов XIII Международной научной конференции «Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование» (пос. Дивноморское, 7–14 сентября 2016 г.).

ISBN 978-5-904695-37-8

СОДЕРЖАНИЕ

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

СЕКЦИЯ I

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

СЕКЦИЯ II

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

СЕКЦИЯ III

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

СЕКЦИЯ IV

ИНФОРМАЦИОННЫЕ И ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Пленарные доклады

ЭФФЕКТИВНЫЕ МНОЖЕСТВА В АЛГЕБРАХ ХЁРМАНДЕРА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ[1]

А. В. Абанин
(Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ)

Определяющие (sampling) множества для банаховых пространств голоморфных в области Ω функций с равномерными или интегральными весовыми оценками — это те подмножества S точек из Ω, для которых исходная норма эквивалентна аналогичной норме, вычисленной по сужениям функций на S. Как объект самостоятельного изучения они исследовались многими авторами (P. Domański, M. Lindström, N. Marco, X. Massaneda, J. Ortega-Cedrà, K. Seip, P. Thomas).

В общей постановке, для локально выпуклых пространств, понятие определяющих множеств совпадает с понятием достаточных множеств, введенных L. Ehrenpreis'ом в 1970 г. Как известно, для случая весовых (LB)-пространств вместо понятия достаточных множеств естественно использовать, как правило эквивалентное ему, понятие слабо достаточных множеств, предложенное в 1974 г. D. M. Schneider'ом. Весомый вклад в изучение (слабо) достаточных множеств и определение поля их применений внесли О. В. Епифанов, Ю. Ф. Коробейник, В. В. Напалков, а систематическая теория была разработана автором (см. диссертацию [1] и библиографию в ней).

В 1997 г. Ч. Горовиц, Б. Коренблюм и Б. Пинчук [2] ввели понятие определяющих множеств для (DFS)-пространства $A^{-\infty}$ голоморфных функций полиномиального роста в единичном круге $\mathbb{D}$ как таких подмножеств S в $\mathbb{D}$, что типы любой функции из $A^{-\infty}$ на всем $\mathbb{D}$ и на S совпадают. Через год L. H. Khoi и P. Thomas [3] показали, что каждое определяющее для $A^{-\infty}$ множество слабо достаточно для него, а вот обратный результат неверен. В 2003 г. Х. Бонет и П. Домански [4] ввели и исследовали (p,q)-определяющие множества и с их помощью получили критерий того, что данное множество является определяющим для $A^{-\infty}(\mathbb{D})$. Это описание оказалось достаточно сложным по форме и трудным для применения. Недавно автором [5] была полностью выяснена топологическая природа определяющих множеств для $A^{-\infty}$.

В докладе будет представлен новый подход к изучению определяющих множеств для алгебр Хёрмандера общего вида, развивающий некоторые идеи из [5]. Следует отметить, что класс таких алгебр достаточно широк и содержит в себе многие известные пространства. Например, к ним относятся $A^{-\infty}$, пространство всех целых функций конечного типа при данном (уточненном) порядке, пространство преобразований Фурье распределений с компактным носителем на вещественной оси и др. По некоторым основаниям, для алгебр Хёрмандера

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 15-01-01404.

мы предпочитаем использовать вместо понятия определяющих понятие эффективных множеств, введенных для случая пространства всех целых функций конечного типа при данном порядке V. G. Iyer'ом в 1937 г. Основные результаты работы показывают, что эффективные (определяющие) множества для алгебры Хёрмандера H общего вида — это в точности универсально слабо достаточные множества для пространств Хёрмандера, сконструированных по H и имеющих H в качестве индуктивного предела. Развернутое изложение большей части результатов доклада представлено в работе [6].

Литература

1. *Абанин А. В.* Слабо достаточные множества и абсолютно представляющие системы: Дис. …докт. физ.-мат. наук.— Ростов-на-Дону, 1995.—268 с.
2. *Horowitz C., Korenblum B., Pinchuk B.* Sampling sequences for $A^{-\infty}$ // Michigan Math. J.—1997.—Vol. 44, № 2.—P. 389–398.
3. *Khoi L. H., Thomas P.* Weakly sufficient sets for $A^{-\infty}(\mathbb{D})$ // Publ. Mat.—1998.—Vol. 42, № 2.—P. 435–448.
4. *Bonet J., Domański P.* Sampling sets and sufficient sets for $A^{-\infty}$ // J. Math. Anal. Appl.—2003.—Vol. 277, № 2.—P. 651–669.
5. *Abanin A. V.* Sampling sets for the space of holomorphic functions of polynomial growth in a ball // Ufa Math. J.—2015.—Vol. 7, № 4.—P. 3–13.
6. *Abanin A. V.* Effective and sampling sets for Hörmander spaces // Complex Anal. Oper. Theory.—2016.—(Принята к печати; DOI:10.1007/s11785-016-0560-5).

ГЛОБАЛЬНАЯ ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ПОВЕРХНОСТИ НИКОНОРОВА

А. Б. Батхин
(Россия, Москва; ИПМ им. М. В. Келдыша РАН)

В серии работ Ю. Г. Никонорова с соавторами (см., например, [1] и библиографию в ней) рассматривалось некоторое вещественное алгебраическое многообразие Ω в $\mathbb{R}^3$. Особые точки этого многообразия играют важную роль в изучении свойств нормализованного потока Риччи на обобщенных пространствах Уоллаха [2]. Показано, что многообразие Ω описывается уравнением

$$\begin{gathered} Q(a_1,a_2,a_3) \stackrel{\text{def}}{=} (2s_1+4s_3-1)(64s_1^5-64s_1^4+8s_1^3+240s_1^2s_3- \\ -1536s_1s_3^2-4096s_3^3+12s_1^2-240s_1s_3+768s_3^2-6s_1+60s_3+1)- \\ -8s_1s_2(2s_1+4s_3-1)(2s_1-32s_3-1)(10s_1+32s_3-5)- \\ -16s_1^2s_2^2(52s_1^2+640s_1s_3+1024s_3^2-52s_1-320s_3+13)+ \\ +64(2s_1-1)s_2^3(2s_1-32s_3-1)+2048s_1(2s_1-1)s_2^4=0, \end{gathered} \tag{1}$$

где s_1, s_2, s_3 — элементарные симметрические многочлены, равные соответственно $s_1=a_1+a_2+a_3$, $s_2=a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3$, $s_3=a_1a_2a_3$.

В указанных выше работах была исследована особая точка $P_1 = (1/4,1/4,1/4)$. В [3] дано исследование всех особых точек порядков 1, 2, 3 многообразия Ω и показана его структура в целом. Основной акцент при исследовании был сделан на применении методов компьютерной алгебры. Данная работа предлагает метод получения глобальной параметризации многообразия Ω как в переменных s_i, так и в переменных a_i, $i=1,2,3$.

Переменные a_i являются вещественными корнями кубического многочлена

$$\chi(y) \stackrel{\text{def}}{=} y^3-s_1y^2+s_2y-s_3, \tag{2}$$

когда его дискриминант $D(\chi) \stackrel{\text{def}}{=} -4s_1^3s_3+s_1^2s_2^2+18s_1s_2s_3-4s_2^3-27s_3^2 \geqslant 0$. Рассмотрим идеал $\mathcal{J}$, образованный многочленом (1) и дискриминантом $D(\chi)$. Нулями идеала $\mathcal{J}$ являются три одномерных многообразия $\mathcal{Z}_j$, $j=1,2,3$, на каждом из которых многочлен (2) имеет кратные корни. Многообразие $\mathcal{Z}_1$ имеет полиномиальную параметризацию $\mathcal{Z}_1 : \{s_1=2t_1-1/2,\ s_2=t_1^2-t_1,\ s_3=-t_1^2/2\}$ и реализуется при любых значениях s_1. Выполним такую замену переменных

$$s_2=\frac{S_2}{4}+\frac{(2s_1+1)(2s_1-3)}{16}, \quad s_3=\frac{S_3}{4}-\frac{(2s_1+1)^2}{32}, \tag{3}$$

чтобы при каждом фиксированном s_1 новые переменные S_2 и S_3 задавали отклонение от многообразия $\mathcal{Z}_1$. Тогда в новых переменных (S_2,S_3) многочлен Q

имеет вид

$$\widetilde{Q} \stackrel{\text{def}}{=} 8s_1(2s_1-1)S_2^4 + (-16s_1+8)S_2^3S_3 - 64s_1^2S_2^2S_3^2 + 128s_1S_2S_3^3 - 64S_3^4 +$$
$$+2(2s_1-1)s_1(16s_1^2-14s_1-9)S_2^3 + (64s_1^4-144s_1^3+168s_1^2+12s_1-18)S_2^2S_3 -$$
$$-16s_1(8s_1^3+4s_1^2-18s_1+15)S_2S_3^2 + 16(3+2s_1)(4s_1^2-6s_1+3)S_3^3 + \frac{1}{2}s_1(160s_1^5 -$$
$$-336s_1^4+24s_1^3+264s_1^2-84s_1-27)S_2^2 + \Big(216s_1^4+96s_1^3-272s_1^5-300s_1^2+117s_1+$$
$$+128s_1^6+\frac{27}{2}\Big)S_2S_3 + (-64s_1^6-64s_1^5+320s_1^4-240s_1^3-48s_1^2+180s_1-81)S_3^2 +$$
$$+\frac{1}{8}s_1(3+2s_1)(4s_1-3)(2s_1-3)(2s_1-1)^4S_2 +$$
$$+\frac{1}{8}(3+2s_1)(4s_1-3)(4s_1^2-4s_1+3)(2s_1-1)^4S_3.$$

При каждом фиксированном s_1 кривая $\widetilde{Q}(S_2,S_3)=0$ имеет род 0 и допускает рациональную параметризацию $S_2=\varphi(s_1,t)$, $S_3=\psi(s_1,t)$. При этом параметр t удается выбрать таким образом, что для каждого s_1 при малом t получаем малые значения S_2, S_3. Полученная параметризация глобальна за исключением особых значений $s_1 \in \{-3/2, 1/2, 3/4\}$, при которых структура многочлена $\widetilde{Q}$ существенно меняется. Для этих особых значений явное представление многообразия Ω дано в [3].

Для получения глобальной параметризации многообразия Ω в переменных a_i, $i=1,2,3$, достаточно воспользоваться известными формулами корней кубического многочлена для т. н. «неприводимого случая» Кардано:

$$z_1 = 2\sqrt{-p/3}\,\cos\frac{\alpha}{3}, \quad z_{2,3} = -2\sqrt{p/3}\,\cos\left(\frac{\alpha}{3}\pm\frac{\pi}{3}\right), \quad \cos\alpha = -\frac{q}{2\sqrt{-p^3/27}}, \quad (4)$$

где p и q — коэффициенты «неполного» кубического уравнения, полученного из (2) заменой $y = z + s_1/3$, равны соответственно

$$p = -\frac{s_1^2}{3} + s_2, \quad q = -\frac{2s_1^3}{27} + \frac{s_1s_2}{3} - s_3.$$

Итоговая параметризация восстанавливается по формулам (3) и (4).

Литература

1. *Abiev N. A., Nikonorov Yu. G.* The evolution of positively curved invariant Riemannian metrics on the Wallach spaces under the Ricci flow // Ann. Global Anal. Geom. —2016.— Vol. 50, № 1.—P. 65–84.
2. *Абиев Н. А., Арванитойоргос А., Никоноров Ю. Г., Сиасос П.* Нормализованный поток Риччи на обобщенных пространствах Уоллаха // Мат. форум. Т. 8, ч. 1. Исслед. по мат. анализу.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014.—С. 25–42.
3. *Батхин А. Б., Брюно А. Д.* Исследование одной вещественной алгебраической поверхности // Программирование.—2015.—№ 2.—С. 7–17. Engl. transl.: Investigation of a real algebraic surface // Programming and Computer Software.—2015.—Vol. 41, № 2.—P. 74–83.— DOI: 10.1134/S0361768815020036.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XIII Междунар. науч. конф. (пос. Дивноморское, 7–14 сентября 2016 г.)

ОСОБЕННОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНОГО РОСТА ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

Г. Г. Брайчев

(Россия, Москва; МПГУ)

Сравнение бесконечно больших функций дает следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$ выпукла на интервале (a,b), $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, функция $g(x)$ положительна и дифференцируема на нем, причем $g'(x) > 0$. Пусть, далее, при всех $x \in (a,b)$ выполнено условие*

$$m \leqslant \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant M. \tag{1}$$

Тогда справедлива двусторонняя оценка

$$Mc_1(\theta) \leqslant \frac{f'(x)}{g'(x)} \leqslant Mc_2(\theta), \quad x \in (a,b),$$

где

$$\theta = \frac{m}{M},$$

$$c_1(\theta) = \inf_{x\in(a,b)} \frac{1}{g'(x)} \sup_{a<t<x} \frac{g(t)-\theta g(x)}{t-x}, \quad c_2(\theta) = \sup_{x\in(a,b)} \frac{1}{g'(x)} \inf_{b>t>x} \frac{g(t)-\theta g(x)}{t-x}.$$

Вопрос сравнения убывающих бесконечно малых положительных функций решает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x)$ выпукла на интервале (a,b), $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, функция $g(x)$ положительна и дифференцируема на нем, причем $g'(x) < 0$. Пусть при всех $x \in (a,b)$ выполнено условие* (1). *Тогда справедлива двусторонняя оценка*

$$M\, d_1(\theta) \leqslant \frac{f'(x)}{g'(x)} \leqslant Md_2(\theta), \quad x \in (a,b),$$

где

$$\theta = \frac{m}{M},$$

$$d_1(\theta) = \inf_{x\in(a,b)} \frac{1}{g'(x)} \inf_{b>t>x} \frac{g(t)-\theta g(x)}{t-x}, \quad d_2(\theta) = \sup_{x\in(a,\,b)} \frac{1}{g'(x)} \sup_{a<t<x} \frac{g(t)-\theta g(x)}{t-x}.$$

Приведем несколько простых илюстраций к приведенным теоремам.

Пример 1. Теорема 1 утверждает, что для производной всякой выпуклой функции $f(x)$ с условием

$$m \leqslant \frac{f(x)}{x^2} \leqslant M, \quad x \in (0,+\infty),$$

выполняется двусторонняя оценка

$$2M\bigl(1-\sqrt{1-m/M}\,\bigr)\leqslant\frac{f'(x)}{x}\leqslant 2M\bigl(1+\sqrt{1-m/M}\,\bigr),\quad x\in(0,+\infty).$$

Пример 2. Теорема 2 гарантирует, что производная любой выпуклой функции $f(x)$ с условием

$$m\leqslant xf(x)\leqslant M,\quad x\in(0,+\infty),$$

подчинена оценке

$$\bigl(\sqrt{M}-\sqrt{M-m}\,\bigr)^2\leqslant\bigl(-x^2\bigr)f'(x)\leqslant\bigl(\sqrt{M}+\sqrt{M-m}\,\bigr)^2,\quad x\in(0,+\infty).$$

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XIII Междунар. науч. конф. (пос. Дивноморское, 7–14 сентября 2016 г.)

ВЫПУКЛЫЙ МНОГОГРАННИК В АСИМПТОТИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ

А. Д. Брюно
(Россия, Москва; ИПМ им. М. В. Келдыша РАН)

1. Многогранник. Пусть в n-мерном вещественном пространстве $\mathbb{R}^n = \{Q = (q_1, \ldots, q_n)\}$, $n \geqslant 2$, задано конечное множество точек $\mathbf{S} = \{Q_1, \ldots, Q_k\}$. Их выпуклая оболочка

$$\mathbf{\Gamma} = \left\{ Q = \sum_{i=1}^{k} \mu_i Q_i,\ 0 \leqslant \mu_i \leqslant 1,\ \sum_{i=1}^{k} \mu_i = 1 \right\} \tag{1}$$

является выпуклым многогранником. Его граница $\partial\mathbf{\Gamma}$ состоит из граней $\mathbf{\Gamma}_j^{(d)}$ размерностей $d = 0, 1, \ldots, n-1$. Нульмерные грани — это вершины, одномерные — ребра и $(n-1)$-мерные — гиперграни. Каждая грань $\mathbf{\Gamma}_j^{(d)}$ является выпуклым многогранником. Каждой грани $\mathbf{\Gamma}_j^{(d)}$ соответствуют граничное подмножество $\mathbf{S}_j^{(d)} = \mathbf{\Gamma}_j^{(d)} \cap \mathbf{S}$ и нормальный конус

$$\mathbf{U}_j^{(d)} = \left\{ P : \langle P, Q' \rangle = \langle P, Q'' \rangle > \langle P, Q''' \rangle,\ Q', Q'' \in \mathbf{S}_j^{(d)},\ Q''' \in \mathbf{S} \backslash \mathbf{S}_j^{(d)} \right\}, \tag{2}$$

где $P = (p_1, \ldots, p_n)$ — точка сопряженного к $\mathbb{R}^n$ пространства $\mathbb{R}_*^n$, а $\langle P, Q \rangle = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i$ — скалярное произведение. Это ситуация афинной геометрии [1, гл. I].

2. Алгебраическое уравнение. Пусть $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$, а $f(X)$ — многочлен. Корни уравнения $f(X) = 0$ образуют алгебраическое многообразие. Его точка X^0 называется особой, если в ней многочлен $f(X)$ и все его частные производные обращаются в ноль. Если $X^0 = 0$, то

$$f(X) = \sum_{i=1}^{k} a_i X^{Q_i}, \tag{3}$$

где $a_i = \mathrm{const} \neq 0$, $X^Q = x_1^{q_1} \cdots x_n^{q_n}$. При $X \to 0$ по разным путям разные слагаемые суммы (3) дают ведущие члены суммы (3).

Чтобы их выделить, рассмотрим множество векторных показателей степени $\{Q_1, \ldots, Q_k\} = \mathbf{S}$, его выпуклую оболочку $\mathbf{\Gamma}$. Каждой грани $\mathbf{\Gamma}_j^{(d)}$ соответствуют граничное подмножество $\mathbf{S}_j^{(d)}$, укороченный многочлен

$$\hat{f}_j^{(d)} = \sum a_i X^{Q_i} \quad \text{по} \quad Q_i \in \mathbf{S}_j^{(d)} \tag{4}$$

и нормальный конус $\mathbf{U}_j^{(d)}$. Если $x_i = b_i \tau^{p_i}$, $b_i, p_i = \mathrm{const} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, $\tau \to \infty$ и $P = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbf{U}_j^{(d)}$, то ведущие слагаемые в сумме (3) объединены в укороченную сумму (4), которая квазиоднородна. Пусть вещественные постоянные

$\alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1} > 0$ и $z_i = x_i/x_1^{\alpha_i}$, $i = 2, \ldots, n-1$. Будем искать решение уравнения $f(X) = 0$ в виде ряда

$$x_n = x_1^{\lambda} \sum_{l=0}^{\infty} \varphi_l(z_2, \ldots, z_{n-1}) x_1^{l\varkappa}, \tag{5}$$

где $\varkappa, \lambda = \mathrm{const} > 0$.

Теорема 1. *Если уравнение $f(X) = 0$ имеет решением разложение вида* (5) *и $P = -(1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \lambda) \in \mathbf{U}_j^{(d)}$, то укороченное уравнение $\hat{f}_j^{(d)}(X) = 0$ имеет решение $x_n = x_1^{\lambda}\varphi_0(z_2, \ldots, z_{n-1})$.*

Используя описанную выше конструкцию и степенные преобразования координат [1], можно вычислить разложения решений вида (5) [2, § 2].

3. Уравнение в частных производных. Пусть $x_1, \ldots, x_{n-1}$ — независимые, а x_n — зависимая переменные. Дифференциальным мономом $a(X)$ назовем конечное произведение ненулевой постоянной, обычного монома X^Q и частных производных вида $\partial^{\|K\|} x_n / \partial^K X$, где $K = (k_1, \ldots, k_{n-1}) \in \mathbb{Z}^{n-1}$, $K \geqslant 0$, $\|K\| = k_1 + \cdots + k_{n-1}$. Каждому дифференциальному моному $a(X)$ соответствует его векторный показатель степени $Q(a) = (q_1, \ldots, q_n)$:

$$Q(\mathrm{const}) = 0, \quad Q\big(X^R\big) = R, \quad Q\big(\partial^{\|K\|} x_n / \partial^K X\big) = (-K, 1).$$

При умножении мономов их векторные показатели складываются как векторы.

Рассмотрим конечную сумму дифференциальных мономов

$$f(X) = \sum_{i=1}^{k} a_i(X). \tag{6}$$

Точки $Q(a_1), \ldots, Q(a_k) \in \mathbb{R}^n$ образуют исходное множество $\mathbf{S}$. По нему вычисляем многогранник $\mathbf{\Gamma}$ с гранями $\mathbf{\Gamma}_j^{(d)}$, граничными подмножествами $\mathbf{S}_j^{(d)} = \mathbf{\Gamma}_j^{(d)} \cap \mathbf{S}$, укороченными суммами

$$\hat{f}_j^{(d)}(X) = \sum a_i(X) \quad \text{по} \quad Q(a_i) \in \mathbf{S}_j^{(d)} \tag{7}$$

с нормальными конусами $\mathbf{U}_j^{(d)}$. Вблизи точки $X^0 = 0$ для решений вида (5) уравнения $f(X) = 0$ справедлива теорема 1 с заменой (3) на (6) и (4) на (7). При этом для алгебраического уравнения функции $\varphi_l(z_2, \ldots, z_{n-1})$ — рациональные, а для дифференциального уравнения функции φ_l — более общей природы [1, гл. VI, § 5].

4. Диофантовы приближения. Пусть в вещественном n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n = \{X\}$ задано m однородных вещественных форм $f_i(X)$, $i = 1, \ldots, m$, $2 \leqslant m \leqslant n$. Выпуклая оболочка множества значений $Q(X) = (|f_1(X)|, \ldots, |f_m(X)|) \in \mathbb{R}_+^m$ для целочисленных $X \in \mathbb{Z}^n$ во многих случаях является выпуклым многогранным множеством, граница которого для $\|X\| < \mathrm{const}$ вычисляется с помощью стандартной программы. Точки $X \in \mathbb{Z}^n$, для которых значения $Q(X)$ лежат на этой границе, названы граничными. Они являются наилучшими диофантовыми приближениями для корневых множеств указанных форм. Их вычисление дает глобальное обобщение цепной дроби.

Пусть $p(\xi)$ — целый неприводимый в $\mathbb{Q}$ многочлен степени n и λ — его корень. Набор основных единиц кольца $\mathbb{Z}[\lambda]$ можно вычислить по граничным точкам некоторой совокупности линейных и квадратичных форм, построенных по корням многочлена $p(\xi)$. Каждая единица определяет автоморфизмы граничных точек в $\mathbb{R}^n$ и в $\mathbb{R}^m_+$. В логарифмической проекции $\mathbb{R}^m_+$ на $\mathbb{R}^{m-1}$ можно найти фундаментальную область для группы автоморфизмов, соответствующих единицам. С помощью этих конструкций можно находить целочисленные решения диофантовых уравнений специального вида [3, 4].

Литература

1. *Брюно А. Д.* Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях.—М.: Наука, 1998.— 288 с.
2. *Bruno A. D.* Asymptotic solution of nonlinear algebraic and differential equations // Inter. Math. Forum.—2015.—Vol. 10, № 11.—P. 535–564.—URL: http://dx.doi.org/10.12988/imf.2015.5974.
3. *Брюно А. Д.* От диофантовых приближений к диофантовым уравнениям // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша.—2016.—№ 1.—20 с.—URL: http://library.keldysh.ru/preprints.asp?id=2016-01.
4. *Брюно А. Д.* Вычисление наилучших диофантовых приближений и основных единиц алгебраических полей // Докл. АН.—2016.—Т. 468, № 1.—С. 7–11.

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ[1]

А. О. Ватульян (Россия, Владикавказ, ВНЦ РАН; Ростов-на-Дону, ЮФУ),
С. А. Нестеров (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Задачи о нестационарном поведении термоэлектроупругих тел составляют основу моделирования и оптимального проектирования пироэлектрических датчиков. В последнее время в технике кроме однородных и слоистых пироматериалов широко применяются и функционально-градиентные пироматериалы, в которых материальные свойства изменяются непрерывно. В настоящее время задачи термоэлектроупругости для однородных и слоистых материалов хорошо изучены. Для неоднородных материалов получены аналитические решения только для степенных и экспоненциального законов неоднородности. В данной работе исследуется задача термоэлектроупругости при произвольных законах неоднородности.

Предложена общая постановка задачи движения неоднородного термоэлектроупругого тела под действием теплового потока и заданной температуры. После обезразмеривания в силу малости параметра при инерционном члене рассмотрены две постановки задачи: динамическая и квазистатическая.

В качестве примера рассмотрена задача термоэлектроупругости для неоднородного слоя из пьезокерамики класса 6 mm. На верхней и нижней плоскостях слоя компоненты вектора напряжений равны нулю, а тепловой поток изменяется по определенному закону. В силу пироэффекта на электродах наводится разность потенциалов, подлежащая определению из условия включения электродов в электрическую цепь. После исключения электрического потенциала и преобразования Лапласа, получена краевая задача термоупругости в трансформантах с модифицированными термомеханическими характеристиками. Для решения системы дифференциальных уравнений применяется метод пристрелки для набора значений параметра преобразования Лапласа. Обращение преобразования Лапласа осуществлено на основе разложения оригинала в ряд по смещенным многочленам Лежандра.

В ходе вычислительных экспериментов исследовалось влияние различных типов тепловой нагрузки и законов неоднородности на характер изменения наведенного электрического потенциала однородного слоя. Проведено сравнение результатов точного и приближенного подходов, определены временные интервалы, при которых точный и приближенный подходы дают практически одинаковые результаты.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-01-00354-а.

О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ АНАЛОГИИ И ЕЕ МЕТОДИЧЕСКИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ

А. Л. Жохов (Россия, Ярославль; ЯГПУ),
А. А. Юнусова (Казахстан, Шимкент; МГТУ),
А. А. Юнусов (Казахстан, Шимкент; МГТУ)

В науке известны три основные точки зрения: аналогия – это: 1) отношение *особого рода* сходства между объектами [1, 7]; 2) вид умозаключения как перенос информации с вспомогательного объекта (*модели*) на изучаемый объект (*оригинал*) [6, 9, 10]; 3) один из эвристических методов познания (обучения), в основе которого лежит сходство между двумя объектами [7].

В сообщении вначале детализируется и уточняется первая трактовка аналогии. С привлечением таких понятий, как алгебраическая система (сокращенно — а. с.), различного рода морфизмы, классы аналогии и др. Математически строго даются определения, вначале вспомогательному понятию — *отношению корреляции на множестве а. с. E*, затем — *аналогии как сужения отношения корреляции на E_A*. А именно: *две системы аналогичны* тогда и только тогда, когда, по определению, они коррелируют с фиксированной системой A и между собой. Это позволяет с достаточной степенью математической строгости построить основы теории аналогии как бинарного отношения на множестве алгебраических систем. Во-вторых, на этой базе доказываются теоретически необходимые утверждения, в том числе описывающие *пространство аналогии.* На этой основе открываются определенные возможности развития намеченной тематики в методическом плане.

По поводу введенного выше определения аналогии возникают, прежде всего, вопросы чисто математического характера: 1) как это определение согласуется с другими математическими понятиями: алгебраическая система [7], толерантность и другие; 2) какова его целесообразность и польза, хотя бы для приложений математики; 3) каким может быть дальнейшее развитие представленной системы понятий?

Теорема 1. *Отношение k на множестве $E \times E$ рефлексивно и симметрично.*

Теорема 2. *Чтобы две системы A и B коррелировали, необходимо и достаточно существования систем A^* и B^*, вторичных данным и изоморфных между собой.*

Теорема 3. *Отношение аналогии на множестве систем рефлексивно и симметрично.*

Теорема 4. *В пространстве аналогии можно выделить ядра аналогии* (*они играют роль системообразующих факторов*).

Построенный теоретический аппарат позволяет наметить следующие действия для получения объектов, аналогичных уже известному (эти действия стали основой построения методики систематического применения аналогии, см. [5]

и др.): а) запись данного объекта с использованием какого-либо иного набора символов (*кода записи и переработки информации*); б) сужение или расширение набора главных отношений изучаемого объекта-системы, либо сужение или расширение множества-носителя этой системы; в) построение объекта-аналога с использованием одного из видов морфизмов; г) переход к новой интерпретации теории, в рамках которой задан объект-оригинал. Дальнейшее развитие намеченного в докладе *теоретического аппарата аналогии* может идти в таких направлениях: 1) развитие самого математического аппарата, в частности, более подробного описания свойств *ядер аналогии*, определенной на множестве выбранных алгебраических систем. Начало, далекое от завершения, положено этому в [4, 5]. 2) Развитие какой-либо известной теории с использованием описанного аппарата аналогии и другие. Эти направления могут стать предметом дальнейшей математической работы.

В методическом плане намеченный аппарат, включая описание умственных действий O_1–O_9 [3, 5], составляет, по сути, теоретическую основу *методики обучения* и учителей, и учащихся систематическому использованию аналогии в познании как математики, так и других учебных дисциплин. Она намечает следующие действия для получения объектов, аналогичных уже известному (см. [3, 5] и др.): а) запись данного объекта с использованием какого-либо иного кода *записи информации* — знаковой модели [8]; б) построение объекта-аналога с использованием одного из видов морфизмов (очень важный и существенный для математического мышления шаг); в) переход к новой интерпретации теории, в рамках которой задан объект-оригинал и др. В заключение приводится процессуальная *модель метода аналогии как метода познания и обучения.*

Литература

1. *Адамар Ж.* Исследование психологии процесса изобретения в области математики.—М.: Сов. Радио, 1970.—150 с.
2. *Болтянский В. Г.* Аналогия — общность аксиоматики // Совет. педагогика, 1975.—№ 1.—С. 73–78.
3. *Жохов А. Л.* Математическая модель понятия аналогии и некоторые ее следствия // Сб. тр. «4-е Колмогоровские чтения».—Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2006.—С. 167–173.
4. *Жохов А. Л., Юнусов А. А., Юнусова А. А.* Аналогия с точки зрения высшей математики и возможности ее использования в процессе обучения математи-ческим понятиям, метод аналогий // Соврем. наукоемкие технологии.—2015.—№ 12, ч. 2.—С. 384–390.
5. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы.—М.: Наука, 1970.
6. *Пойа Д.* Математика и правдоподобные рассуждения.—М..: Наука, 1975.—496 с.
7. *Салмина Н. Г.* Знак и символ в обучении.—М.: Просвещение, 1988.—С. 12—67.
8. *Уемов А. И.* Аналогия в практике научного исследования.—М.: Наука, 1970.—264 с.
9. *Шрейдер Ю. А.* Равенство. Сходство. Порядок.—М.: Наука, 1971.—256 с.
10. *Эрдниев П. М., Эрдниев Б. П.* Аналогия в задачах: (Укрупнение дидактических единиц во внеклассной работе по математике).—Элиста: Калмыц. кн. изд-во, 1989.—187 с.

СПОСОБЫ ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЙ НЕКАНОНИЧЕСКИХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

С. Б. Климентов

(Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ВНЦ РАН)

Доклад представляет собой обзор работ по различным способам построения решений эллиптических систем первого порядка в односвязной плоской области. Рассмотрены случаи непрерывных (регулярных) вплоть до края решений, а также случаи обобщенных классов Харди, Смирнова и BMO (Bounded Mean Oscillation). Приведены также новые, еще не опубликованные результаты. Сформулированы некоторые нерешенные задачи.

INTEGRABILITY OF MINIMIZERS OF ANISOTROPIC VARIATIONAL PROBLEMS

A. A. Kovalevsky
(Russia, Ekaterinburg; IMM UrB RAS)

In this talk, we present a general result on the improved integrability of minimizers of variational problems for a class of integral functionals whose integrands satisfy an anisotropic growth and coercivity condition.

Let Ω be a bounded open set of $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$, and let, for every $i \in \{1, \dots, n\}$, $p_i \in (1, +\infty)$. We assume that $\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} > 1$ and define $\overline{p}$ by $\frac{1}{\overline{p}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}$. In addition, we define $\overline{p}^* = \frac{n\overline{p}}{n-\overline{p}}$, $p_m = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} p_i$,

$$W^{1,(p_i)}(\Omega) = \Big\{ v \in W^{1,1}(\Omega) : \; D_i v \in L^{p_i}(\Omega), \, i = 1, \dots, n \Big\},$$

$$W_0^{1,(p_i)}(\Omega) = \Big\{ v \in W_0^{1,1}(\Omega) : \; D_i v \in L^{p_i}(\Omega), \, i = 1, \dots, n \Big\}.$$

Let $c_1, c_2 > 0$ and $g_1, g_2 \in L^1(\Omega)$, $g_1, g_2 \geqslant 0$ in Ω. Let $F : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be a Carathéodory function such that, for almost every $x \in \Omega$ and for every $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$c_1 \sum_{i=1}^n |\xi_i|^{p_i} - g_1(x) \leqslant F(x, \xi) \leqslant c_2 \sum_{i=1}^n |\xi_i|^{p_i} + g_2(x). \tag{1}$$

Let $\mathcal{F} : W^{1,(p_i)}(\Omega) \to \mathbb{R}$ be the functional such that

$$\forall\, v \in W^{1,(p_i)}(\Omega), \quad \mathcal{F}(v) = \int\limits_{\Omega} F(x, \nabla v)\, dx,$$

and let $g \in W^{1,(p_i)}(\Omega)$.

We note that if, in addition to (1), for almost every $x \in \Omega$, the function $F(x, \cdot)$ is convex in $\mathbb{R}^n$, and if U is a nonempty sequentially weakly closed set in $W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$, then there exists a minimizer of the functional $\mathcal{F}$ on the set $g + U$.

Let, for every $k > 0$, $T_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be the function such that $T_k(s) = s$ if $|s| \leqslant k$ and $T_k(s) = k \operatorname{sign} s$ if $|s| > k$.

We recall that, for every $\lambda > 0$, the weak Lebesgue space $L^\lambda_{\text{weak}}(\Omega)$ is defined as the set of all measurable functions $v : \Omega \to \mathbb{R}$ such that $\sup_{s>0} s^\lambda \text{meas}\{|v| \geqslant s\} < +\infty$.

Theorem. *Let U be a nonempty set in $W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$. Let $\sigma > 1$ and $g_1, g_2 \in L^\sigma(\Omega)$. Let $h \in g + W_0^{1,1}(\Omega)$, and let, for every $i \in \{1, \dots, n\}$, $D_i h \in L^{\sigma p_i}(\Omega)$. Let $k_0 \geqslant 0$, and let the following condition be satisfied:*

$$\textit{if} \quad v \in g + U \quad \textit{and} \quad k > k_0, \quad \textit{then} \quad h + T_k(v - h) \in g + U. \tag{2}$$

Finally, let u be a minimizer of the functional $\mathcal{F}$ on the set $g+U$. Then the following assertions hold:

(i) *if* $\sigma < \frac{n}{\overline{\overline{p}}}$, *then* $u-h \in L^{n\overline{p}\sigma/(n-\overline{p}\sigma)}_{\text{weak}}(\Omega)$;

(ii) *if* $\sigma = \frac{n}{\overline{\overline{p}}}$, *then there exists* $\alpha > 0$ *such that* $e^{\alpha|u-h|} \in L^1(\Omega)$;

(iii) *if* $\sigma > \frac{n}{\overline{\overline{p}}}$, *then* $u-h \in L^\infty(\Omega)$.

For every $q \in \mathbb{R}^n$ such that $q_i \in (p_i, +\infty)$, $i = 1, \ldots, n$, we set

$$q_* = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{q_i}{p_i}, \qquad \beta(q) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(1 - \frac{p_i}{q_i}\right).$$

Corollary 1. *Let U be a nonempty set in $W^{1,(p_i)}_0(\Omega)$. Let $q \in \mathbb{R}^n$, and let, for every $i \in \{1, \ldots, n\}$, $q_i \in (p_i, +\infty)$ and $D_i g \in L^{q_i}(\Omega)$. Let $g_1, g_2 \in L^{q_*}(\Omega)$. Let $k_0 \geqslant 0$, and let the following condition be satisfied:*

$$if \quad v \in U \quad and \quad k > k_0, \quad then \quad T_k(v) \in U. \tag{3}$$

Finally, let u be a minimizer of the functional $\mathcal{F}$ on the set $g+U$. Then the following assertions hold:

(i) *if* $\beta(q) < \frac{\overline{p}}{\overline{p}^*}$, *then* $u-g \in L^t_{\text{weak}}(\Omega)$, *where* $t = \frac{\overline{p}\,\overline{p}^*}{\overline{p}-\beta(q)\overline{p}^*}$;

(ii) *if* $\beta(q) = \frac{\overline{p}}{\overline{p}^*}$, *then there exists* $\alpha > 0$ *such that* $e^{\alpha|u-g|} \in L^1(\Omega)$;

(iii) *if* $\beta(q) > \frac{\overline{p}}{\overline{p}^*}$, *then* $u-g \in L^\infty(\Omega)$.

Corollary 2. *Let $q \in \mathbb{R}^n$, and let, for every $i \in \{1, \ldots, n\}$, $q_i \in (p_i, +\infty)$ and $D_i g \in L^{q_i}(\Omega)$. Let $g_1, g_2 \in L^{q_*}(\Omega)$. Let u be a minimizer of the functional $\mathcal{F}$ on the set $g + W^{1,(p_i)}_0(\Omega)$. Then $u - g \in L^t_{\text{weak}}(\Omega)$, where $t = \frac{\overline{p}\,\overline{p}^*}{\overline{p}-b\overline{p}^*}$ and b is any positive number such that $b < \frac{\overline{p}}{\overline{p}^*}$ and $b \leqslant \beta(q)$.*

As far as conditions (2) and (3) are concerned, we note that if condition (3) is satisfied, then condition (2) is satisfied (with $h = g$). Some examples show that the converse is not true. We also note that conditions (2) and (3) are satisfied, for instance, for sets defined by unilateral and bilateral obstacles and by some integral constraints.

The results presented in the talk were published in [1].

References

1. *Kovalevsky A. A.* Integrability and boundedness of solutions to some anisotropic problems // J. Math. Anal. Appl.—2015.—Vol. 432, № 2.—P. 820–843.

ПРОБЛЕМА ГЛОБАЛЬНОЙ РЕГУЛЯРНОСТИ РЕШЕНИЙ ОСНОВНОЙ НАЧАЛЬНО КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А. Б. Моргулис

(Россия, Владикавказ, ЮМИ; Ростов-на-Дону, ЮФУ)

В докладе будет дан обзор важной нерешенной проблемы: продолжаемо ли любое гладкое решение основной начально краевой задачи динамики идеальной несжимаемой жидкости неограниченно, или возможно возникновение сингулярностей за конечное время.

Поясним постановку вопроса. Речь пойдет об уравнениях

$$\mathbf{v}_t + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\nabla H, \quad \boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{v} \ \text{ в } \ Q = \big\{(x,t) : t \in \mathbb{R}, \ x \in D \subset \mathbb{R}^3\big\}; \qquad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \ \text{ в } \ D \quad \forall t \in \mathbb{R}. \qquad (2)$$

Здесь неизвестные — векторное поле $\mathbf{v}$ (скорость течения) и скалярное поле H (функция Бернулли); нижний индекс t означает частную производную по времени t;

$$\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{v} = (v_{3x_2} - v_{2x_3})\mathbf{e}_1 + (v_{1x_3} - v_{3x_1})\mathbf{e}_2 + (v_{2x_1} - v_{1x_2})\mathbf{e}_3, \qquad (3)$$

где $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ базис декартовых координат x_1, x_2, x_3, $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$, и нижний индекс x_j означает частную производную по одноименной координате; $\times$ — знак векторного произведения, D — некоторая область (область течения), заданная и постоянная, $\mathbf{n}$ — поле ортов внешней нормали на S.

Жидкость предполагается однородной, и ее плотность считается равной 1. (Динамика стратифицированной жидкости останется вне нашего обсуждения.) Ввиду однородности жидкости, уравнение (2), выражающее ее несжимаемость, представляет собой уравнение неразрывности — закон сохранения массы.

Уравнение (1) известно как уравнение движения в форме Громеки — Ламба. Подстановка $H = P + \mathbf{v}^2/2$ приводит его к стандартному уравнению Эйлера

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = -\nabla P, \quad \big((\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v}\big)_k \overset{\text{def}}{=} v_j v_{kx_j}, \quad k = 1, 2, 3. \qquad (4)$$

Уравнение (4), как и (1), рассматривается в классе полей, удовлетворяющих уравнению неразрывности (2), ввиду чего (4) записывается в дивергентном виде:

$$\mathbf{v}_t + \operatorname{Div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = -\nabla P, \qquad (5)$$

где, в координатах,

$$(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})_{jk} \overset{\text{def}}{=} v_j v_k, \quad j,k = 1,2,3; \qquad (\operatorname{Div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}))_k \overset{\text{def}}{=} (v_k v_j)_{x_j}, \quad k = 1,2,3.$$

Таким образом, уравнение движения (4) есть не что иное, как закон сохранения импульса, и скаляр P представляет собой гидродинамическое давление.

Для уравнений (1)–(2) ставятся как задача Коши, так и начально-краевые задачи, а также задачи со свободными границами. Наиболее простое граничное условие ставится на неподвижной непроницаемой границе:

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=0 \quad \text{на} \quad S=\partial D \quad \forall\, t\in\mathbb{R}. \tag{6}$$

Начальное условие ставится для скорости

$$\mathbf{v}\big|_{t=0}=\mathbf{v}^0, \tag{7}$$

причем поле $\mathbf{v}^0$ должно быть согласовано с уравнением неразрывности, и с граничными условиями (если граница непуста).

Мы ограничимся рассмотрением начально-краевой задачи в ограниченной гладкой области D с граничным условием (6), либо задачи Коши для уравнений (1)–(2) на торе $\mathbb{T}^3$, которая сводится к задаче Коши в классе пространственно периодических полей:

$$(\mathbf{v},H)(x+m)=(\mathbf{v},H)(x+m), \quad \forall\,(x,m)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{Z}^3; \qquad \int\limits_{(0,1)^3}\mathbf{v}\,dx=0. \tag{8}$$

Начальное поле $\mathbf{v}^0$ всегда будем считать гладким.

Известно, что для любого $\mathbf{v}^0$ найдется $T>0$ такое, что задача Коши для уравнений (1)–(2) на торе имеет гладкое решение, определенное на $\mathbb{T}^3\times(-T,T)$. Вопрос: продолжаемо ли это решение на $\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}$ при любом $\mathbf{v}^0$? Ответ неизвестен.

В докладе будут освещены следующие темы.

1. Глобальное решение двумерной задачи. Гладкие решения и вихревые пятна.

2. Локальные решения общей задачи.

3. Коллапс гладкого решения или постепенная потеря гладкости?

4. Проблема слабого решения.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XIII Междунар. науч. конф. (пос. Дивноморское, 7–14 сентября 2016 г.)

МАТЕМАТИКА И ЯЗЫК: РОЛЬ ЯЗЫКА В ПОСТРОЕНИИ И ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ

А. Х. Назиев

(Россия, Рязань; РГУ им. С. А. Есенина)

1. «Математика — наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира... Количественные отношения (в общем философском понимании этого термина) характеризуются, в отличие от качественных, лишь своим безразличным отношением к конкретной природе тех объектов, которые они связывают... пространственные формы можно рассматривать как частный случай количественных отношений... М[атематика] изучает только отношения, безразличные к конкретной природе связываемых ими объектов... В указанном широком понимании изучаемые М[атематикой] отношения всегда являются количественными» (А. Н. Колмогоров [1]).

Все вместе это эквивалентно замечательному определению математики, приведенному у Кассиодора [2] (VI в. н. э.!; А. Н. почему-то его не упоминает):

«Математика — наука об абстрактном количестве; абстрактное количество же есть то, что мы изучаем лишь умозрительно, отделяя его в уме от материи и случайных проявлений».

2. Абстрактный характер математики предопределяет особую роль языка в ней. Умозрительные объекты можно увидеть лишь «очами умственными» (выражение Галилея). Информацию же о том, *что* надлежит увидеть очами умственными, можно получить только при помощи языка. Язык делает абстрактные объекты математики осязаемыми. Язык помогает математикам вести дела с миром абстрактных объектов при помощи конкретных знаков.

«...без языка... для нашей души не существует ни одного предмета, потому что даже любой внешний предмет для нее обретает полноту реальности только через посредство понятия... Вся работа по субъективному восприятию предметов воплощается в построении и применении языка... человек... живет с предметами так, как их преподносит ему язык» (Вильгельм фон Гумбольдт).

3. Цель науки — истина. В объектах (неважно, абстрактных или конкретных) истины нет. Истина заключена в утверждениях об объектах и радикально зависит от того, как употребляется язык. В современных российских школьных учебниках геометрии трапецией называется четырехугольник, у которого ровно одна пара параллельных сторон. При таком употреблении слова «трапеция» не существует ни одной трапеции, являющейся параллелограммом. А в англоязычных учебниках геометрии Канады и США трапецией называется выпуклый четырехугольник, у которого имеется хотя бы одна пара параллельных сторон. Тогда существуют трапеции, являющиеся параллелограммами.

4. Истина не очевидна. Истину открывают с помощью рассуждений. Рассуждение, убеждающее в истинности предложения, называют доказательством этого предложения. Математика — единственная наука, в которой только доказательство является средством подтверждения истинности. Это приводит в определению математики с точки зрения метода (в отличие от данного выше определения с точки зрения объекта):

«Математика — это доказательство» [4, 5]. Более подробно:

«Пределы математики — это вся область доказательных рассуждений, относящихся к любой науке, достигшей такого уровня развития, при котором относящиеся к этой науке понятия могут быть выражены в абстрактной форме» (Д. Пойа [3]).

5. «Искусство рассуждать сводится к хорошо разработанному языку ... Слово должно порождать идею; идея должна выражать дело; это три оттиска одной и той же печати; и так как идеи сохраняются и передаются словами, то нельзя ни совершенствовать язык, не совершенствуя науку, ни совершенствовать науку, не совершенствуя язык; и сколь бы достоверны ни были факты, и как бы правильны ни были порожденные ими идеи, они все же вызвали бы ложные представления, не обладай мы точными выражениями для их передачи ... » (Антуан Лавуазье).

6. Казалось бы, все это должно вызывать уважение и повышенный интерес к языку в преподавании математики. Ничего подобного не наблюдается. Практика преподавания математики в школе (и не только в школе) больна пренебрежительным отношением к языку. В докладе будут описаны проявления этого отношения, отмечены их негативные последствия и указаны способы преодоления связанных с этим явлением недостатков традиционного преподавания математики.

Литература

1. *Колмогоров А. Н.* Математика в ее историческом развитии.—М.: Наука, 1991.—224 с.
2. *Кассиодор Сенатор, Флавий Магн Аврелий.* Институции.—URL: http://individual.utoronto.ca/pking/ resources/cassiodorus/institutiones.txt.
3. *Пойа Д.* Математическое открытие.—М.: Наука, 1970.
4. *Назиев А. Х.* Гуманитаризация основ специальной подготовки учителей математики в педагогических вузах: Дисс. ...д-ра. пед. наук.—М.: МПГУ, 2000.—URL: http://people.rsu.edu.ru/∼a.naziev/DissB/DissB.pdf.
5. *Назиев А. Х.* Гуманитарно ориентированное преподавание математики в общеобразовательной школе.—Рязань: Изд-во РИРО, 1999.—URL: http://people.rsu.edu.ru/∼a.naziev/HumEd/HumEd.pdf.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XIII Междунар. науч. конф. (пос. Дивноморское, 7–14 сентября 2016 г.)

ЭВОЛЮЦИЯ ИНВАРИАНТНЫХ РИМАНОВЫХ МЕТРИК ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ НА ПРОСТРАНСТВАХ УОЛЛАХА ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ПОТОКА РИЧЧИ

Ю. Г. Никоноров

(Россия, Владикавказ; ЮМИ)

Этот доклад основан работах [1, 2] и на недавней работе [3], которая посвящена исследованию потока Риччи на пространствах Уоллаха

$$W_6 := SU(3)/T_{\max}, \quad W_{12} := Sp(3)/Sp(1) \times Sp(1) \times Sp(1), \quad W_{24} := F_4/Spin(8).$$

Эти пространства примечательны тем, что они допускают инвариантные римановы метрики положительной секционной кривизны [4]. Основными результатами работы [3] являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Поток Риччи на пространствах Уоллаха W_6, W_{12} и W_{24} преобразует все инвариантные метрики общего положения с положительной секционной кривизной в метрики со смешанной секционной кривизной.*

Теорема 2. *Поток Риччи на пространствах Уоллаха W_{12} и W_{24} преобразует все инвариантные метрики общего положения с положительной кривизной Риччи в метрики со смешанной кривизной Риччи.*

Следует отметить, что утверждение последней теоремы перестает быть верным для пространства Уоллаха W_6. Этот эффект предполагается обсудить в докладе более подробно.

В работе [3] также получены некоторые результаты по эволюции инвариантных римановых метрик по воздействием потока Риччи на некоторых пространствах, представляющих собой естественное обобщение пространств Уоллаха, см. подробности в [1, 2].

Работа [3] выполнена при поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан, грант 1452/GF4.

Литература

1. *Abiev N. A., Arvanitoyeorgos A., Nikonorov Yu. G., Siasos P.* The dynamics of the Ricci flow on generalized Wallach spaces // Differ. Geom. Appl.—2014.—Vol. 35—P. 26–43.
2. *Abiev N. A., Arvanitoyeorgos A., Nikonorov Yu. G., Siasos P.* The Ricci flow on some generalized Wallach spaces // Geom. and its Appl. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics.—Switzerland: Springer, 2014.—Vol. 72.—P. 3–37.
3. *Abiev N. A., Nikonorov Yu. G.* The evolution of positively curved invariant Riemannian metrics on the Wallach spaces under the Ricci flow // Ann. Glob. Anal. Geom.—2016.—Vol. 50.—P. 65–84.
4. *Wallach N. R.* Compact homogeneous Riemannian manifolds with strictly positive curvature // Annals of Mathematics. Second Ser.—1972.—Vol. 96.—P. 277–295.

МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ И ФИНАНСОВЫХ РЫНКОВ НА ДЕФОРМИРОВАННЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ БАЗИСАХ[1]

И. В. Павлов

(Россия, Ростов-на-Дону; ДГТУ)

Настоящий доклад посвящен процессам с дискретным временем, определенных на структурах, более общих, чем классические стохастические базисы. Именно, пусть $(\Omega, \mathbf{F})$ — фильтрованное пространство с дискретным временем, где Ω — произвольное множество и $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ — возрастающая последовательность σ-алгебр. Семейство $\mathbf{Q} = (Q^{(n)}, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ вероятностных мер $Q^{(n)}$, определенных на $\mathcal{F}_n$, называется D1 — деформацией 1-го рода (соответственно, D2 — деформацией 2-го рода), если $\forall\, n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ $Q^{(n+1)}\big|\, \mathcal{F}_n \ll Q^{(n)}$ (соответственно, $Q^{(n+1)}\big|\, \mathcal{F}_n \gg Q^{(n)}$).

Фундаментальная роль классических мартингалов в различных областях математики (в частности, в финансовой математике) хорошо известна. Используя деформации, мы вводим понятия деформированных мартингалов 1-го и 2-го рода. Пусть $\forall\, n \in \mathbb{N}$ с. в. Z_n принадлежит $L_1(\Omega, \mathcal{F}_n, Q^n)$, а $\mathbf{Q}$ есть D1 (соответственно, D2). Процесс $\mathbf{Z} = (Z_n, \mathcal{F}_n, Q^n)_{n=0}^{\infty}$ называется DM1 — деформированным мартингалом 1-го (соответственно, DM2 — 2-го) рода, если $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $Q^{(n+1)}$-п. н. (соответственно, $Q^{(n)}$-п. н.) $Z_n = E^{Q^{(n+1)}}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n]$. Аналогично определяются деформированные супермартингалы и субмартингалы (DSupM1, DSupM2, DSubM1, DSubM2), деформированные локальные мартингалы (DLM1, DLM2) и деформированные потенциалы (DP1, DP2).

В докладе анализируется и дополняется ряд результатов, опубликованных автором в последние 3 года (в соавторстве с О. В. Назарько): 1) разложение Дуба для DSubM1; 2) разложение Крикеберга для DM2 и разложение Рисса для DSupM2; 3) теорема Дуба о преобразовании свободного выбора для DSubM1 and DSubM2; 4) характеризация DLM1 в терминах деформированных мартингальных преобразований и деформированных обобщенных мартингалов; 5) сведение деформаций 1-го рода к слабым деформациям; 6) приложения к финансовой математике; 7) понятия деформированных стохастических базисов и деформированных мартингалов в непрерывном времени. Формулировки большинства из этих результатов можно найти в [1].

Литература

1. *Pavlov I. V.* Some Processes and models on deformed stochastic bases // Proc. of the 2nd Inter. Symp. on Stochastic Models in Reliability Engineering, Life Science and Operations Management (SMRLO 16) / Eds. I. Frenkel and A. Lisnianski.—Beer Sheva, Israel: IEEE, 2016.—P. 432–437.—(DOI 10.1109/SMRLO.2016.75).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 16-01-00184, № 16-07-00888.

О ПРОДОЛЖЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕШЕТОЧНЫХ ГОМОМОРФИЗМОВ

М. А. Плиев

(Россия, Владикавказ; ЮМИ)

Ортогонально аддитивные операторы в векторных решетках являются активной областью исследований [1, 2, 3]. Результаты, представленные в докладе, продолжают данное направление. Введем необходимые понятия.

Пусть E, F — векторные решетки, D — нормальная подрешетка E_+. Ортогонально аддитивное порядковое ограниченное отображение $T : D \to F_+$ называется решеточным пред-гомоморфизмом Урысона, если выполняются следующие условия:

1) $T(x \vee y) = T(x) \vee T(y)$ для любых $x, y \in D$,

2) $T(x \wedge y) = T(x) \wedge T(y)$ для любых $x, y \in D$.

В случае когда D совпадает с E_+, оператор T задан на всем пространстве E и $T \in \mathcal{U}_+^{ev}(E, F)$, T называется *решеточным гомоморфизмом Урысона*. Множество всех решеточных гомоморфизмов Урысона из E в F обозначается $\mathcal{UH}(E, F)$. Имеет место следующий результат.

Теорема. *Пусть E, F — векторные решетки, решетка F порядково полна, $D \subset E$ — нормальная подрешетка E_+ и $T : D \to F_+$ — решеточный пред-гомоморфизм Урысона. Тогда существует решеточный гомоморфизм Урысона $\widetilde{T}_D : E \to F$ такой, что $\widetilde{T}_D e = Te$ для любого $e \in D$. Кроме того имеют место формулы*

$$\widetilde{T}_D e = \sup\big\{Tf :\ f \in D \cap [0, e]\big\}, \quad e \in E_+;$$

$$\widetilde{T}_D e = \widetilde{T}_D(e_+) + \widetilde{T}_D(e_-), \quad e \in E.$$

Литература

1. *Pliev M.* Domination problem for narrow orthogonally additive operators // Positivity.—DOI: 10.1007/s11117-016-0401-9.
2. *Pliev M., Popov M.* Narrow orthogonally additive operators // Positivity.—2014.—Vol. 18, № 4.—P. 641–667.
3. *Pliev M. A., Weber M. R.* Disjointness and order projections in the vector lattices of abstract Uryson operators // Positivity.—DOI: 10.1007/s11117-015-0381-1.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XIII Междунар. науч. конф. (пос. Дивноморское, 7–14 сентября 2016 г.)

СЕТЕВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБРАЗОВАНИИ: ПЕРЕХОД К СИНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ПАРАДИГМЕ[1]

Н. Е. Смирнов (Россия, Ярославль; ЯГПУ),
В. А. Тестов (Россия, Вологда; ВоГУ)

Двадцать первый век все больше связывают с развитием и преобладанием сетевых технологий, проникновением их во все большее число сфер социальной жизни. Широкое распространение сетевых технологий несомненно облегчило доступ каждому человеку к самой современной информации, но вместе с тем привело к тому, что человек наряду с действительно нужной и полезной информацией получает много совершенно бесполезной, искаженной и даже ложной информации, так называемых «информационных шумов».

Учащиеся попадают в своего рода ножницы, когда знания, получаемые от учителя из учебника, перекрываются потоком хаотичной информации, идущей, прежде всего, от Интернета и СМИ. Причем эта информация оказывает на восприятие гораздо большее влияние, поскольку опосредована более высоким уровнем мотивации и более значимым эмоциональным фоном. Именно эта сфера в значительной степени формирует у человека когнитивные, коммуникативные и эмоциональные стереотипы, определяющие его деятельность. Этим объясняется то, что в процессе интенсивного применения современных информационных технологий происходит «паралич человеческого мышления», полное подчинение сознания интернету или телевидению, человек утрачивает способность думать, понимать и чувствовать.

Сетевое пространство становится второй виртуальной реальностью личности, а для многих людей оно становится основным полем жизнедеятельности, где люди проводят большую часть своей жизни. Сетевое пространство в одном случае обеспечивает условия для саморазвития студентов, а в другом — оказывает негативное влияние на их личностное развитие. Определяющим фактором того, что это будет — позитивное или негативное влияние, является уровень развития личности, ее ценностно-смысловой сферы и субъектности как способности управлять своей жизнью.

Широкое использование информационно-коммуникационных технологий в обучении происходит без достаточного научно-педагогического осмысления происходящих процессов. Отказ от классических подходов в образовании означает, прежде всего, использование беспорядочной, хаотической основы, когда в учебный процесс вводится фактор творческой непредсказуемости, а главные усилия направляются на создание мощной образовательной среды, в рамках которой каждый обучающийся наделяется правом активно выбирать свою образовательную траекторию. В этих условиях образовательные системы, во всяком случае,

[1]Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда, проект № 16-18-10304.

их основные подсистемы, связанные с передачей информации, усвоением нового, творчеством, должны быть отнесены к сложным нелинейным самоорганизующимся системам. Тем самым методологической основой педагогической парадигмы в сетевом обществе должна стать постнеклассическая методология, которая основана на синергетическом мировидении.

Однако пока только отдельные энтузиасты совершают попытки перейти от освоения теории самоорганизации к педагогической практике. Дело в том, что условия классно-урочной системы и использование всеми одного и того же учебника регламентирует настолько сильно учебный процесс, что только в отдельных исключительных случаях можно говорить об использовании синергетического подхода. Одним из главных препятствий для соединения синергетического мировидения и развития инновационных педагогических систем является преодоление в сознании педагогов неизбежных рецидивов ньютоновского детерминизма и линейного мышления. Более того, «в условиях современного мира линейное мышление, до сих пор доминирующее в некоторых областях науки, становится принципиально недостаточным, и даже опасным» (Е. Н. Князева и С. П. Курдюмов).

Синергетический подход в образовании — это подход, основанный на поиске и использовании внутренних тенденций развития образовательных систем, их саморазвития, самоорганизации, не навязывающий этим системам не свойственных им путей развития. Для субъекта саморазвитие в учебном процессе принимает форму самообразования. Ведь главное — не передача знаний (всего передать невозможно!), а овладение способами пополнения знаний и быстрой ориентации в сложно организованных и разветвленных системах знания и способами самообразования. Вопросы самообразования в отечественной педагогике мало разработаны, а на этапе школьного образования практика самообразования учащихся почти полностью отсутствует.

В эпоху сетевого общества становится все более очевидным конструктивная роль хаоса. Хаос предстает в качестве механизма выхода на структуры-аттракторы эволюции. Стало быть, бессмысленно бороться против хаоса, стремиться полностью вытеснить деструктивные элементы из образовательного процесса. Синергетика утверждает, что хаос имеет конструктивное начало, что это путь к инновации. Синергетический подход в педагогике основан на нескольких основных принципах.

Принцип неопределенности. Этот принцип предполагает нелинейный стиль мышления, неоднозначность теоретических построений. Учитель не может быть вполне уверен в своем понимании ученика; сам ученик не может точно знать, что ему необходимо в данный момент; невозможно с полной определенностью предсказать направление и темп развития ученика; только вместе, в процессе диалога, субъекты образовательного взаимодействия могут находить приближенные решения текущих проблем, позволяющие двигаться дальше.

Принцип открытости. В силу этого принципа необходима открытость соответствующей образовательной системы (среды), открытость каждой отдельной личности. Личность должна иметь возможность свободно перемещаться во всех измерениях пространства информационного взаимодействия, иметь доступ к многообразию учебных текстов, поэтому невозможно обходиться одним учебником — одно и то же руководство для всех учеников заведомо лишает их свободы выбора.

Принцип когерентности — согласованность взаимодействия элементов, которая проявляется в масштабе всей образовательной среды. Объединение развивающихся в разном темпе структур происходит через синхронизацию их скорости развития. Пример реализации этого принципа в сетевом пространстве — это участие в коллективных учебных проектах. Благодаря согласованным коллективным действиям ученики попадают в один темпомир, начинают развиваться с оптимальной скоростью.

Процесс восприятия учеником нового материала в условиях сетевого пространства становится все чаще нелинейным. Садясь за компьютер, ученик, не задумываясь, перескакивает с одного на другое, уходит в незнакомое будущее и возвращается в забытое или пропущенное прошлое. Поэтому добиться строгой последовательности и систематичности в освоении социального опыта обучающимися уже не удастся. В этих условиях большую помощь может оказать методология синергетического мировидения.

Секция I

Математический анализ и его приложения

СОПРЯЖЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА С ВЕСОВЫМИ ПРОСТРАНСТВАМИ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАННОГО РОСТА В ВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЯХ[1]

А. В. Абанин (Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ),
Т. М. Андреева (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Пусть G — выпуклая ограниченная область в $\mathbb{C}$, $H(G)$ — пространство всех функций, голоморфных в G.

Рассмотрим весовую последовательность $(w_n)_{n=1}^{\infty}$, определяемую следующим образом. Положим $w_n(z) := v_n\big(\ln \frac{1}{d(z)}\big)$, $n \in \mathbb{N}$, где $d(z)$ — функция расстояния от точки $z \in G$ до границы области G, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность неотрицательных выпуклых монотонно возрастающих функций на $(t_0, +\infty)$, $t_0 \geqslant 0$, удовлетворяющих следующим условиям:

(1) $v_j(t) \geqslant v_{j+1}(t) + t$, $t \geqslant t_0$, $j = 1, 2, \ldots$;

(2) $\forall\, j \in \mathbb{N}$, $\forall\, \alpha$ $\exists\, s = s(j, \alpha)$: $v_{j+1}(t + \alpha) \leqslant v_j(t) + s$, $t \geqslant t_0$.

С каждым весом $w_n, n \in \mathbb{N}$, свяжем соответствующее банахово пространство

$$H_{w_n}(G) := \left\{ f \in H(G) : \|f\|_{w_n} := \sup_{z\in G} \frac{|f(z)|}{e^{w_n(z)}} < \infty \right\}.$$

По весовой последовательности $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ образуем индуктивный предел $\mathcal{V}H(G) := \operatorname{ind} H_{w_n}(G)$. Возникает вопрос об описании сопряженного с $\mathcal{V}H(G)$ в терминах преобразования Лапласа, удобного для дальнейшего получения приложений (например, для представления функций из исходного пространства рядами экспонент). Похожие исследования уже проводились ранее для реализации сопряженного с пространством $A^{-\infty}(G)$ (G — ограниченная выпуклая область) голоморфных в G функций полиномиального роста [1, 2], а в данной работе рассматривается более общий случай. Отметим также, что случай проективного предела ($\operatorname{proj} H_{w_n}(G)$) детально изучен в [3] при сходных условиях на последовательность весов.

Пусть F — аналитический функционал в $\mathcal{V}H(G)$. Напомним, что его преобразование Лапласа имеет вид

$$\mathcal{F}_F(\zeta) := F_z(e^{z\zeta}), \quad \zeta \in G.$$

Основным результатом данной работы является

Теорема. *Пусть G — выпуклая ограниченная область комплексной плоскости. Тогда преобразование Лапласа является топологическим изоморфизмом из $(\mathcal{V}H(G))'$ на пространство Фреше*

$$\mathcal{V}H_G := \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : |f|_n := \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|\, e^{w_n^*(|z|)}}{e^{H_G(z)}} < \infty \ \ \forall\, n \in \mathbb{N} \right\},$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 15-01-01404.

где $H_G(z) := \sup_{\xi \in G} \operatorname{Re}(\xi, z)$ — *опорная функция области* G; $r := \min_{z \in S} H_G(z)$; $S := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ *и* $w_n^*(|z|) := \inf_{0<t<r} \left[|z|t + v_n\left(\ln \frac{1}{t}\right)\right]$ — *сопряженная функция к* $w_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$.

Литература

1. *Abanin A. V., Le Hai Khoi.* Dual of the function algebra $A^{-\infty}(D)$ and representation of functions in Dirichlet series // Proc. Amer. Math. Soc.—2010.—Vol. 138, № 10—P. 3623–3635.
2. *Melikhov S. N.* (DFS)-spaces of holomorphic functions invariant under differentiation // J. Math. Anal. Appl.—2004.—Vol. 297.—P. 577–586.
3. *Напалков В. В.* Пространства аналитических функций заданного роста вблизи границы // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1988.—Т. 30, № 2.—С. 287–305.

ОБ ОДНОМ НОВОМ ПРИЗНАКЕ СЛАБОЙ ДОСТАТОЧНОСТИ[1]

А. В. Абанин (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
С. В. Петров (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Слабо достаточные множества, введенные Шнайдером в 1974 г., являются мощным инструментом в исследовании представляющих систем, уравнений свертки и роста голоморфных функций. В пространствах Хермандера они тесно связаны с эффективными по Ийеру множествами. Например, пусть h — непрерывная субгармоническая в $\mathbb{C}$ функция, растущая на бесконечности быстрее $\ln|z|$, для которой $\max\{h(z+\zeta) : |\zeta| \leqslant 1\} \sim h(z)$ при $z \to \infty$. Тогда [1] в любом пространстве Хермандера

$$H_h^p := \big\{ f \in H(\mathbb{C}) :\ \exists\, q < p, \exists\, C > 0 :\ |f(z)| \leqslant C \exp qh(z),\ \forall\, z \in \mathbb{C} \big\}$$

нормального типа ($0 < p < \infty$) классы слабо достаточных и эффективных по Ийеру множеств совпадают. В случае алгебр Хермандера, т. е. при $p = \infty$, всякое эффективное для H_h^∞ множество слабо достаточно для него, а обратное утверждение неверно. Таким образом, вопрос об описании слабо достаточных множеств для H_h^∞ в терминах роста на них функций остается открытым. В докладе будет представлен новый подход к исследованию данной проблемы для алгебры Хермандера E_ρ всех целых функций конечного типа при порядке $\rho > 0$, позволяющий установить критериальную связь между слабо достаточными для E_ρ множествами и введенными нами для этой цели ослабленно эффективными по Ийеру множествами. Последние определяются как те неограниченные подмножества S комплексной плоскости, для которых при некотором $C > 0$ для любой функции $f \in E_\rho$ имеет место неравенство

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^\rho} \leqslant C \limsup_{z\to\infty,\, z\in S} \frac{\ln|f(z)|}{|z|^\rho}.$$

Другими словами, для таких множеств тип любой функции f может быть оценен через тип f на S с помощью одной для всего пространства мультипликативной постоянной.

Литература

1. *Абанин А. В.* О некоторых признаках слабой достаточности // Мат. заметки.—1986.— Т. 40, № 4.—С. 442–454.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 15-01-01404.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XIII Междунар. науч. конф. (пос. Дивноморское, 7–14 сентября 2016 г.)

МОДУЛЯРНЫЕ И РЕГУЛЯРНЫЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕРЫ (ВЕРОЯТНОСТИ) И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Н. М. Абасов

(Россия, Москва; МАИ (НИУ))

Пусть X — произвольное, вполне регулярное (тихоновское) пространство, E — некоторое K-пространство с базой B и порядковой единицей $\mathbf{1}$, совпадающей с единицей умножения в нем. Как обычно $O(X)$ и $F(X)$ — классы всех открытых и замкнутых подмножеств пространства X. Для дальнейшего изложения удобно множество $G \in O(X)$ отождествить с соответствующей характеристической функцией $\chi_G : X \to B$. Для любых $b \in B$ и $G \in O(X)$ можно определить отображение $b_{\chi_G} : X \to B$, где $b_{\chi_G}(x) = b(\chi_G(x))$ и пусть $BO(X)$ — класс всех таких отображений. Счетно-аддитивную алгебру, порожденную классом $BO(X)$ в произведении X^B, рассматриваемом с поточечными решеточными операциями для точных верхних и нижних границ, обозначим через $\mathfrak{B}^B(X)$ и назовем B-борелевой алгеброй пространства X. Далее пользуемся терминологией и обозначениями из [1, 4]. Итак, пусть $C_b(X, E)$ — решетка Банаха — Канторовича ограниченных, (bo)-непрерывных отображений $f : X \to E$, а $\mathrm{scyc}(O(X))$ — сильная циклическая оболочка $O(X)$, т. е. совокупность перемешиваний $\mathrm{mix}(b_\xi G_\xi)$ всевозможных разбиений единицы $(b_\xi) \subset B$ и всевозможных семейств $(G_\xi) \subset O(X)$. Нижеизложенное составляет содержание предлагаемого доклада.

Доказывается, что любой порядково непрерывный, положительный оператор $l : C_b(X, E) \to E$, удовлетворяющий условию $l(\mathbf{1}) = 1$, это в точности интеграл относительно единственной модулярной и регулярной вероятностной меры P, заданной на σ-алгебре $\mathfrak{B}^B(X)$. Вероятностная мера P восстанавливается по оператору l по следующим формулам:

1. $P(G) = \sup\{l(f) : f \in C_b^+(X, E) : \ f \leqslant \chi_G\}$;
2. $P(\mathrm{mix}\, b_\xi G_\xi) = \mathrm{mix}(b_\xi P(G_\xi))$;
3. $P(B) = \inf\{(o)\lim P(V_n) : (V_n) \subset \mathrm{scyc}(O(X)), B \leqslant (o)\lim V_n,$
   $(V_n)\ \text{возрастает}, (B \in \mathfrak{B}^B(X))\}$.

Статья [5] — одна из первых работ о модулярных и регулярных мерах с значениями в K-пространствах ограниченных элементов, где изложены некоторые результаты полученные с их помощью. Что касается вопроса конструкции таких мер, то этот вопрос оставался открытым. Приведенные выше формулы полностью закрывают этот вопрос даже в более общей ситуации так как E является произвольным K-пространством. В работе [3] изложена схема построения булевой компактификации Стоуна — Чеха в терминах решеточных гомоморфизмов и даны некоторые ее приложения. В докладе схема построения упомянутой компактификации изложена с помощью модулярных и регулярных вероятностей. В докладе также освящены вопросы касающиеся экстремальной структуры выпуклых множеств порядково-непрерывных операторов, определчных на M-решетках Банаха — Канторовича (см. [2]) и явных описаний их крайних точек.

Литература

1. *Абасов Н. М.* Конструкция модулярных вероятностей // Междунар. конф. «Порядковый анализ и смежные вопросы мат. моделирования».—Владикавказ: ВНЦ РАН, 2015.—С. 13–15.
2. *Абасов Н. М.* Теорема Какутани для M-решеток Банаха — Канторовича // Тр. по анализу и геометрии.—Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2000.—С. 31–35.
3. *Абасов Н. М., Кусраев А. Г.* Циклическая компактификация и пространства непрерывных вектор-функций // Сиб. мат. журн.—1987.—Т. 28, № 1.—С. 17–22.
4. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциальное исчисление. Теория и приложения.—М.: Наука, 2007.—559 с.
5. *Maharam D.* An algebraic characterization of measure algebras // Ann. math.—1947.—Vol. 48, № 1.—P. 154–167.

ON EVOLUTION OF POSITIVELY CURVED INVARIANT RIEMANNIAN METRICS ON SPECIAL WALLACH SPACES

N. A. Abiev
(Kazakhstan, Taraz; TarSU)

In the papers [2] and [3] the normalized Ricci flow equation

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\mathbf{g}(t) = -2\operatorname{Ric}_{\mathbf{g}} + 2\mathbf{g}(t)\frac{S_{\mathbf{g}}}{n}$$

were studied on one special class of Riemannian manifolds M^n called generalized Wallach spaces (or three-locally-symmetric spaces in other terms) according to the definitions of [5] and [8], where $\mathbf{g}(t)$ means a 1-parameter family of Riemannian metrics, $\operatorname{Ric}_{\mathbf{g}}$ is the Ricci tensor and $S_{\mathbf{g}}$ is the scalar curvature of the Riemannian metric $\mathbf{g}$. Generalized Wallach spaces are characterized as compact homogeneous spaces G/H whose isotropy representation decomposes into a direct sum $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{p}_2 \oplus \mathfrak{p}_3$ of three $\operatorname{Ad}(H)$-invariant irreducible modules satisfying $[\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_i] \subset \mathfrak{h}$ $(i \in \{1, 2, 3\})$ [5, 6].

Note that the complete classification of generalized Wallach spaces is obtained recently (independently) in the papers [4] and [7]. For a fixed bi-invariant inner product $\langle\cdot,\cdot\rangle$ on the Lie algebra $\mathfrak{g}$ of the Lie group G, any G-invariant Riemannian metric $\mathbf{g}$ on G/H is determined by an $\operatorname{Ad}(H)$-invariant inner product

$$(\cdot,\cdot) = x_1\langle\cdot,\cdot\rangle\big|_{\mathfrak{p}_1} + x_2\langle\cdot,\cdot\rangle\big|_{\mathfrak{p}_2} + x_3\langle\cdot,\cdot\rangle\big|_{\mathfrak{p}_3}, \tag{1}$$

where x_1, x_2, x_3 are positive real numbers. Metrics with pairwise distinct x_i, $i = 1, 2, 3$, we call *generic*.

A given generalized Wallach space can be determined by special parameters $a_i := A/\mathbf{d_i}$, where $\mathbf{d_i} = \dim(\mathfrak{p}_i)$, $i = 1, 2, 3$, and A is some special non-negative number (see details in [6]).

Our main result is the following

Theorem 1. *On a generalized Wallach space G/H with $a_1 = a_2 = a_3 := a = 1/4$ the normalized Ricci flow evolves all generic metrics into metrics with positive Ricci curvature.*

It should be noted that the case $a \in (0, 1/2) \setminus \{1/4\}$ was studied in [1].

The author is indebted to Prof. Yu. G. Nikonorov for helpful discussions concerning this project. The project was supported by Grant 1452/GF4 of Ministry of Education and Sciences of the Republic of Kazakhstan for 2015-2017.

References

1. *Abiev N. A., Nikonorov Yu. G.* The evolution of positively curved invariant Riemannian metrics on the Wallach spaces under the Ricci flow // Ann. Glob. Anal. Geom.—2016.—DOI: 10.1007/s10455-016-9502-8.
2. *Abiev N. A., Arvanitoyeorgos A., Nikonorov Yu. G., Siasos P.* The dynamics of the Ricci flow on generalized Wallach spaces // Differ. Geom. Appl.—2014.—Vol. 35 (Suppl.).—P. 26–43.
3. *Abiev N. A., Arvanitoyeorgos A., Nikonorov Yu. G., Siasos P.* The Ricci flow on some generalized Wallach spaces // Geometry and its Applications. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics.—Switzerland: Springer, 2014.—Vol. 72.—P. 3–37.
4. *Chen Zhiqi, Kang Yifang, Liang Ke.* Invariant Einstein metrics on three-locally-symmetric spaces // Commun. Anal. Geom.—(To appear).—arXiv:1411.2694.
5. *Lomshakov A. M., Nikonorov Yu. G., Firsov E. V.* Invariant Einstein metrics on three-locally-symmetric spaces // Sib. Adv. Math.—2004.—Vol. 14, № 3.—P. 43–62.
6. *Nikonorov Yu. G.* On a class of homogeneous compact Einstein manifolds // Sib. Math. J.—2000.—Vol. 41, № 1.—P. 168–172.
7. *Nikonorov Yu. G.* Classification of generalized Wallach spaces // Geom. Dedicata.—2016.—Vol. 181, № 1.—P. 193–212.
8. *Nikonorov Yu. G., Rodionov E. D., Slavskii V. V.* Geometry of homogeneous Riemannian manifolds // J. Math. Sci. (N. Y.).—2007.—Vol. 146, № 7.—P. 6313–6390.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XIII Междунар. науч. конф. (пос. Дивноморское, 7–14 сентября 2016 г.)

О НАИЛУЧШЕМ ВОССТАНОВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

Е. В. Абрамова
(Россия, Москва; МЭИ (НИУ))

Постановка задачи оптимального восстановления линейного функционала по неточной информации впервые появилась в работе С. А. Смоляка [1]. С дальнейшим развитием этой темы можно ознакомиться в работах Г. Г. Магарил-Ильяева и К. Ю. Осипенко [2–5]. В таких постановках оптимальные методы ищутся сразу для всех функций из данного класса и в этом смысле задача оптимального восстановления идейно восходит к работам А. Н. Колмогорова 30-х гг. прошлого века о нахождении наилучшего подпространства среди всех подпространств фиксированной размерности, приближающего данный класс функций. С точки зрения приложений вполне естественно считать, что мы имеем дело не с индивидуальным элементом, а (в силу неизбежных погрешностей измерения) лишь с представителем некоторого семейства.

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y)=0, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y>0, \\ u(\cdot,0)=f(\cdot), \end{cases}$$

здесь граничная функция $f(\cdot)$ принадлежит соболевскому классу

$$W^r_{2\,\infty}(\mathbb{R}^2)=\Big\{f(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}):\ f^{(r-1)}(\cdot)\in \mathrm{LAC}\,(\mathbb{R}^2), \\ \big\|f^{(r)}(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{R})}\leqslant 1,\ F[f](\cdot)\in L_\infty(\mathbb{R}^2)\Big\},$$

где LAC — локально абсолютно непрерывные функции, $F[f]$ — преобразование Фурье функции $f(\cdot)$.

Мы полагаем, что у нас нет полной информации о граничной функции $f(\cdot)$, а известно лишь ее приближенно заданное (в метрике $L_\infty\,([-\sigma;\sigma])$) преобразование Фурье, т. е. известна функция $g(\cdot)\in L_\infty([-\sigma,\sigma])$ такая, что $\|F[f](\cdot)-g(\cdot)\|_{L_\infty([-\sigma,\sigma])}\leqslant\delta$, где $\delta>0$.

Требуется восстановить оптимальным образом функцию $u(\cdot,Y)$ — решение задачи Дирихле на прямой $y=Y$, $Y>0$, — по имеющейся информации.

Задача оптимального восстановления $u(\cdot,Y)$ в этом случае понимается следующим образом. Любое отображение $m\colon L_\infty\,([-\sigma,\,\sigma])\to L_2(\mathbb{R})$ называется *методом восстановления*, а величина

$$e\,(Y,W^r_{2\infty}(\mathbb{R}),\delta,\sigma,m)=\sup_{\substack{f(\cdot)\in W^r_{2\infty}(\mathbb{R}),\ g(\cdot)\in L_\infty([-\sigma,\sigma]),\\ \|F[f](\cdot)-g(\cdot)\|_{L_\infty([-\sigma,\sigma])}\leqslant\delta}}\|u(\cdot,Y)-m(g(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}$$

— *погрешностью метода* m.

Метод, на котором погрешность принимает минимальное значение, называется *оптимальным методом.* Величина

$$E\left(Y, W^r_{2\infty}(\mathbb{R}), \delta, \sigma\right) = \inf_{m\colon L_\infty([-\sigma,\sigma])\to L_2(\mathbb{R})} e(Y, W^r_{2\infty}(\mathbb{R}), \delta, \sigma, m)$$

называется *погрешностью оптимального восстановления.*

Теорема 1. *Метод вида*

$$m(g(\xi)) = \begin{cases} F^{-1}\left[e^{-Y|\xi|}\left(1 - e^{-2Y(\alpha-|\xi|)}\cdot\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^{2r}\right)\cdot g(\xi)\right], & |\xi| \leqslant \alpha, \\ 0, & |\xi| > \alpha, \end{cases}$$

где $F^{-1}[\cdot]$ — обратное преобразование Фурье,

$$\alpha = \min\left\{\sigma, \left(\frac{\pi(2r+1)}{\delta^2}\right)^{1/(2r+1)}\right\},$$

является оптимальным.

Погрешность оптимального восстановления имеет вид:

$$E(Y, W^r_{2\infty}(\mathbb{R}), \delta, \sigma) = \begin{cases} \frac{\delta^2}{2\pi Y}\left(1 - e^{-2Y\alpha}\right), & \alpha \leqslant \sigma, \\ \\ \frac{\delta^2}{2\pi Y}\left(1 - e^{-2Y\alpha}\right) + e^{-2Y\sigma}\left(\frac{1}{\sigma^{2r}} - \frac{\delta^2\cdot\sigma}{\pi(2r+1)}\right), & \alpha > \sigma. \end{cases}$$

Литература

1. *Смоляк С. А.* Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них: Дис. . . . канд. физ.-мат. наук.—М: МГУ, 1965.
2. *Марчук А. Г., Осипенко К. Ю.* Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек // Мат. заметки.—1975.—Т. 17, № 3.—С. 359–368.
3. *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* Lectures on Optimal Recovery.—Berlin: Springer-Verlag, 1985.—P. 21–93.
4. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их проиводных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функциональный анализ и его прил.—2003.—Т. 37.—С. 51–64.
5. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* О восстановлении операторов сверточного типа по неточной информации // Тр. МИАН.—2010.—С. 181–192.

К АНАЛИЗУ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК НА ОСНОВЕ ФРАКТАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ[1]

А. А. Аливердиев (Россия, Махачкала; ДГУ, ИПГ ДНЦ РАН),
Э. Н. Ахмедов (Россия, Махачкала; ИПГ ДНЦ РАН),
В. Д. Бейбалаев (Россия, Махачкала; ДГУ, ИПГ ДНЦ РАН),
Р. А. Магомедов (Россия, Махачкала; ИПГ ДНЦ РАН),
Р. П. Мейланов (Россия, Махачкала; ИПГ ДНЦ РАН),
Р. Р. Мейланов (Россия, Махачкала; ИПГ ДНЦ РАН)

В продолжение наших недавних исследований [1–3] в докладе дается обобщение термодинамики в формализме производных дробного порядка. Выведено однопараметрическое «фрактальное» уравнение состояния с учетом второго вириального коэффициента $B(T)$, на основе которого получены аналитические выражения энтропии и теплоемкости при постоянном объеме:

$$S = \frac{3}{2}Nk\left[\frac{1}{2-\alpha} + lnqT + \psi(2) - \psi(3-\alpha)\right] -$$

$$- Nk\left[\frac{Nb}{V} - (1-\alpha)\frac{5-2\alpha}{(2-\alpha)(3-\alpha)}\frac{Na}{VkT}\right],$$

$$C_V = \frac{3}{2}Nk\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\Bigg\{1 - \frac{2}{3}\frac{Na}{VkT} + (1-\alpha)\Bigg(\ln qT - \frac{2}{3}\frac{Nb}{V} +$$

$$+ \frac{4}{3}\frac{5-\alpha(5-\alpha)}{(2-\alpha)(3-\alpha)}\frac{Na}{VkT}\Bigg) + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}[1 + 2(\psi(1) - \psi(2-\alpha))]\Bigg\},$$

где $q = \left(\left(\frac{eV}{N}\right)\frac{mk}{2\pi\hbar^2}\right)^{2/3}$, $B(T) = \left(b - \frac{a}{kT}\right)$ — температурная зависимость второго вириального коэффициента, $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера, $\psi(x)$ — пси-функция, а производные дробного порядка с показателем α $(0 < \alpha \leqslant 1)$ определены как

$$\frac{\partial^\alpha L(x,y)}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^x \frac{L(\xi,y)}{(x-\xi)^\alpha}\,d\xi.$$

Показано, что переход от обычных производных к производным дробного порядка представляет один из способов учета принципа локального неравновесия, когда в термодинамический процесс дают вклад флуктуации термодинамических параметров. Можно предположить, что переход к производным дробного порядка по термодинамическому параметру соответствует неявному учету нелокальности взаимодействия между частицами.

[1]Работа частично поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-08-00067.

Литература

1. *Мейланов Р. П., Магомедов Р. А.* Термодинамика в дробном исчислении // Инженерно-физический журн.—2014.—Т. 87, № 6.—С. 1455–1465.
2. *Мейланов Р. П., Шабанова М. Р.* Особенности решений уравнения теплопереноса в производных дробного порядка // Журн. технической физики.—2014.—Т. 81, № 1.—С. 1–6.
3. *Meilanov R. P., Shabanova M. R., Akhmedov E. N.* Some peculiarities of the solution of the heat conduction equation in fractional calculus // Chaos, Solitions end Fractals.—2015.—№ 75.—P. 29–33.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XIII Междунар. науч. конф. (пос. Дивноморское, 7–14 сентября 2016 г.)

ОПЕРАТОРЫ, ФАКТОРИЗАЦИЯ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ[1]

В. Б. Васильев

(Россия, Липецк; ЛГТУ)

Рассматриваются некоторые типы дискретных уравнений, являющиеся соответствующими аналогами континуальных уравнений и играющие важную промежуточную роль в обосновании численных методов решения краевых задач для (псевдо)дифференциальных уравнений.

Общий вид рассматриваемых классов уравнений следующий:

$$(Au)(x) = v(x), \quad x \in D, \tag{1}$$

где D — некоторое многообразие, и оператор A действует в пространствах функций, определенных на этом многообразии D. Если D обладает дискретной структурой, появляется возможность приспособить наработанную технику исследования [1, 2] к модельным уравнениям в канонических (уже дискретных) областях. В последние годы внимание автора привлекли дискретные и разностные уравнения [3–5], которые составляют не менее важный класс уравнений и которые в известном смысле можно трактовать как псевдодифференциальные уравнения. Основной вопрос, как и прежде, заключается в описании условий разрешимости (или хотя бы фредгольмовости) таких уравнений в подходящих функциональных пространствах. Выяснилось, что метод факторизации и здесь позволяет получить содержательные результаты.

Если (1) — простейшее уравнение вида

$$au_d(\tilde{x}) + \sum_{\tilde{y} \in D \cap \mathbb{Z}^m} A(\tilde{x} - \tilde{y}) u_d(\tilde{y}) = v_d(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in D \cap \mathbb{Z}^m, \tag{2}$$

где $A(\tilde{x})$ — заданная функция дискретного аргумента, рассматриваемое в узлах решетки $D \cap \mathbb{Z}^m$ относительно неизвестной функции дискретной переменной u_d, то картина разрешимости этого уравнения будет существенно зависеть от геометрии области D. Три варианта канонического вида области $D = \mathbb{R}^m$, $D = \mathbb{R}^m_+ \equiv \{x \in \mathbb{R}^m : x_m > 0\}$, $D = C^a_+ \equiv \{x \in \mathbb{R}^m : x_m > a|x'|, x' = (x_1, \dots, x_{m-1}), a > 0\}$ можно исследовать с единых позиций, опираясь на понятие символа эллиптического оператора и соответствующей факторизации.

Используется дискретное преобразование Фурье (как многомерный ряд Фурье), которое в случае $D = \mathbb{R}^m$ немедленно сводит уравнение (2) к уравнению

$$\widetilde{A}_d(\xi)\widetilde{u}_d(\xi) = \widetilde{v}_d(\xi), \quad \xi \in \mathbb{T}^m; \tag{3}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и администрации Липецкой области, проект № 14-41-03595-р-центр-а.

функция $\widetilde{A}_d(\xi)$ называется символом оператора A, который по определению эллиптичен, если $\widetilde{A}_d(\xi) \neq 0$ $(\forall\, \xi \in \mathbb{T}^m)$. Из вида (3) сразу вытекает критерий однозначной разрешимости уравнения (2) в пространстве $L_2(\mathbb{Z}^m)$: для этого необходимо и достаточно эллиптичности символа $\widetilde{A}_d(\xi)$.

В случае $D = \mathbb{R}^m_+$ одной эллиптичности уже недостаточно, и, чтобы в этом убедиться, потребовалось привлечь специальный периодический аналог краевой задачи Римана [6, 7]. Однозначная разрешимость (2) уравнения в пространстве $L_2(\mathbb{R}^m_+ \cap \mathbb{Z}^m)$ возможна только в том случае, когда вместе с эллиптичностью выполнено условие обнуления индекса соответствующей периодической краевой задачи Римана с параметром.

Наиболее трудной типично многомерной ситуацией является случай $D = C^a_+$. Однако здесь также возможно описание условий разрешимости уравнения (2) в пространстве $L_2(C^a_+ \cap \mathbb{Z}^m)$ с привлечением понятия *периодической волновой факторизации* — описаны достаточные условия, которые при наличии периодической волновой факторизации эллиптического символа гарантируют однозначную разрешимость.

Литература

1. *Эскин Г. И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений.—М.: Наука, 1973.—234 с.
2. *Васильев В. Б.* Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи.—М.: КомКнига, 2010.—135 с.
3. *Васильев А. В., Васильев В. Б.* Разностные и дискретные уравнения на прямой и полупрямой // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ.—2015.—Вып. 2 (46).—С. 29–37.
4. *Vasilyev A. V., Vasilyev V. B.* On solvability of some difference-discrete equations // Opuscula Math.—2016.—Vol. 36, № 4.—P. 525–539.
5. *Vasilyev A. V., Vasilyev V. B.* Difference equations in a multidimensional space // Math. Model. Anal.—2016.—Vol. 21, № 3.—P. 336–349.
6. *Васильев А. В., Васильев В. Б.* Периодическая задача Римана и дискретные уравнения в свертках // Диф. уравнения.—2015.—Т. 51, № 5.—С. 642–649.
7. *Vasilyev A. V., Vasilyev V. B.* Discrete singular operators and equations in a half-space // Azerbaijan J. Math.—2013.—Vol. 3, № 1.—P. 84–93.

ТЕОРЕМА О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ В АМАЛЬГАМАХ МОДУЛЯРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Н. П. Величко (Россия, Шахты; ИСОиП (филиал) ДГТУ),
Ф. Г. Фетисов (Россия, Шахты; ИСОиП (филиал) ДГТУ)

Вопросы, связанные с существованием и единственностью решений уравнений того или иного типа, обычно можно сформулировать в виде вопроса о существовании и единственности неподвижной точки при некотором отображении соответствующего полного метрического пространства в себя. Среди различных критериев существования и единственности неподвижной точки одним из наиболее важных является принцип сжимающих отображений Банаха. В последние сто лет стали активно возникать различные обобщения классических понятий нормы и метрики, наиболее значимым из которых считается модуляр, введенный Х. Накано [1]. Другим важным обобщением является понятие амальгамы пространств, которое ввел Н. Винер в 1926 г., рассмотрев некоторые случаи амальгам пространств. В дальнейшем изучение амальгам предпринималось разными авторами [2], однако, в основном для банахова случая. В настоящей работе построена амальгама модулярных пространств и получены условия существования неподвижной точки в такого рода пространствах.

Пусть X и Y — некоторые векторные пространства над полем K. Обозначим через Θ_X, Θ_Y нули пространств X и Y соответствено, через $\mathbf{R}^+ = [0,\infty)$, $\bar{\mathbf{R}}^+ = [0,\infty]$.

По аналогии с известными [3] определениями модуляра $\rho(x)$ и модулярного пространства X_ρ введем следующие понятия.

Определение 1. Оператор $M : X \to Y$ называется *модулярным оператором*, если выполняются условия:

(1) $M(x) = \Theta_Y$ тогда и только тогда, когда $x = \Theta_X$;

(2) $M(-x) = M(x)$;

(3) $M(\alpha x_1 + \beta x_2) \leqslant \alpha(x_1) + \beta(x_2)$ $(x_1, x_2 \in X,\ \alpha, \beta \geqslant 0,\ \alpha + \beta = 1)$.

Определение 2. Композицию ρM будем называть *модулярной амальгамой*, если модуляр $\rho : Y \to \bar{\mathbf{R}}^+$ и модулярный оператор $M : X \to Y$ таковы, что композиция $\rho M = \rho(M(x)) : X \to \bar{\mathbf{R}}^+$ является модуляром.

Определение 3. Модулярное пространство

$$X_{\rho M} = \{x \in X : \lim_{\lambda \to 0} \rho M(\lambda x) = 0\},$$

порождаемое модулярной амальгамой ρM, будем называть *амальгамой модулярных пространств*.

По аналогии с [4] введем следующие понятия.

Определение 4. Последовательность $\{x_n\}$ элементов из амальгамы модулярных пространств $X_{\rho M}$ называется:

1) ρM*-сходящейся* к элементу x, если $\rho M(x - x_n) \to 0$ при $n \to +\infty$;
2) ρM*-фундаментальной*, если $\rho M(x_m - x_n) \to 0$ при $m, n \to +\infty$.

Определение 5. Амальгама модулярных пространств $X_{\rho M}$ называется ρM*-полной*, если в ней любая ρM-фундаментальная последовательность является ρM-сходящейся.

Определение 6. Будем говорить, что амальгама модулярных пространств $X_{\rho M}$ обладает свойством Фату, если

$$\rho M(x - y) \leqslant \liminf \rho M(x_n - y_n)$$

всякий раз, когда $\{x_n\}$ ρM-сходится к x и $\{y_n\}$ ρM-сходится к y.

Определение 7. Будем говорить, что амальгама модулярных пространств $X_{\rho M}$ удовлетворяет Δ_2-условию, если $\rho M(2x_n) \to 0$ при $n \to \infty$ всякий раз, когда $\rho M(x_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Определение 8. Подмножество B пространства $X_{\rho M}$ называется ρM*-замкнутым*, если из того что последовательность $\{x_n\} \subset B$ ρM-сходится к элементу x, следует, что $x \in B$.

Приведем условия существования неподвижной точки в амальгаме молулярных пространств.

Теорема 1. *Пусть амальгама модулярных пространств $X_{\rho M}$ является полной, обладает свойством Фату и удовлетворяет Δ_2-условию. Пусть B — ρM-замкнутое подмножество пространства $X_{\rho M}$. Предположим, что для отображения $T : B \to B$ существуют $c, k \in \mathbf{R}^+ : c > 1$, $k < 1$ такие, что*

$$\rho M(c(Tx - Ty)) \leqslant k\rho M(x - y)$$

для любых $x, y \in B$, тогда у отображения T существует неподвижная точка $Tx_0 = x_0$.

Литература

1. *Nakano H.* Modulared Semi-Ordered Linear Spaces.—Tokyo: Maruzen, 1950.
2. *Fournier J. F., Stewart J.* Amalgams of L^p and l^q // Bull. Amer. Math. Soc.—1985.—Vol. 13, № 1.—P. 1–21.
3. *Musielak J.* Orlicz Spaces and Modular Spaces.—Berlin–Heidelberg–N. Y.–Tokyo: Springer-Verlag, 1983.
4. *Taleb A., Hanebaly E.* A fixed point theorem and its application to integral equations // Proc. Amer. Math. Soc.—1999.—Vol. 127, № 8.—P. 2335–2342.

CONSTRUCTION OF CHEBYSHEV POLYNOMIALS OF THE FIRST AND SECOND KINDS IN TERMS OF THE DETERMINANT OF TRIDIAGONAL MATRICES

T. Goy

(Ukraine, Ivano-Frankivsk; PNU)

Chebyshev polynomials crop up in virtually every area of numerical analysis, and they hold particular importance in recent advances in subjects such as orthogonal polynomials, polynomial approximation, numerical integration, combinatorics, statistics, and spectral methods. There are many interesting and unique properties of these polynomials, which can be found in several textbooks and articles, for example [1–4].

The Chebyshev polynomials $T_n(x)$ of the first kind are defined by the two-order recurrence relation

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x),$$

while the Chebyshev polynomials $U_n(x)$ of the second kind are defined by the recurrence relation

$$U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x, \quad U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x).$$

Using the apparatus of triangular matrices [5, 6], we obtain the recurrent formulas for Chebyshev polynomials of the first and second kinds with even (odd) indices via determinant of tridiagonal matrices.

Theorem 1. *For $n \geqslant 1$ the following recurrent formulas are hold:*

$$T_{2n-2}(x) = (-1)^n \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2xT_1(x) & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2x\frac{T_3(x)}{T_0(x)} & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2x\frac{T_{2n-5}(x)}{T_{2n-8}(x)} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2x\frac{T_{2n-3}(x)}{T_{2n-6}(x)} & 1 \end{vmatrix}$$

and

$$T_{2n-1}(x) = (-1)^n \begin{vmatrix} -x & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2xT_2(x) & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2x\frac{T_4(x)}{T_1(x)} & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2x\frac{T_{2n-4}(x)}{T_{2n-7}(x)} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2x\frac{T_{2n-2}(x)}{T_{2n-5}(x)} & 1 \end{vmatrix}.$$

Theorem 2. *For $n \geqslant 1$ the following recurrent formulas are hold:*

$$U_{2n-2}(x) = (-1)^n \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2xU_1(x) & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2x\frac{U_3(x)}{U_0(x)} & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2x\frac{U_{2n-5}(x)}{U_{2n-8}(x)} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2x\frac{U_{2n-3}(x)}{U_{2n-6}(x)} & 1 \end{vmatrix}$$

and

$$U_{2n-1}(x) = (-1)^n \begin{vmatrix} -2x & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2xU_2(x) & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2x\frac{U_4(x)}{U_1(x)} & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2x\frac{U_{2n-4}(x)}{U_{2n-7}(x)} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2x\frac{U_{2n-2}(x)}{U_{2n-5}(x)} & 1 \end{vmatrix}.$$

A similar formulas can be obtained for Chebyshev polynomials of the third and fourth kinds. Recall that the n-th Chebyshev polynomials of the third and fourth kinds are defined to be the polynomials $V_n(x)$ and $W_n(x)$ satisfying the same recurrent relation

$$X_{n+1}(x) = 2xX_n(x) - X_{n-1}(x),$$

where $n \geqslant 1$, with initial conditions $V_0(x) = 0$, $V_1(x) = 2x - 1$ and $W_0(x) = 0$, $W_1(x) = 2x + 1$, respectively.

References

1. *Fox L., Parker I. B.* Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis.—Oxford: Oxford Univ. Press, 1968.—205 p.
2. *Mason J. C., Handscomb D. C.* Chebyshev Polynomials.—N. Y.: CRC Press, 2002.—360 p.
3. *Rivlin T. J.* Chebyshev Polynomials: From Approximation Theory to Algebra and Number Theory.—N. Y.: Wiley-Interscience, 1990.—249 p.
4. *Udrea G.* Chebyshev polynomials and some methods of approximation // Portugaliae Math.—1998.—Vol. 55, № 3.—P. 261–269.
5. *Zatorsky R. A.* Theory of paradeterminants and its applications // Algebra and Discrete Math.—2007.—№ 1.—P. 108–137.
6. *Zatorsky R., Goy T.* Parapermanents of triangular matrices and some general theorems on number sequences // J. Integer Sequences.—2016.—Vol. 19, № 2.—Article 16.2.2.

НЕТЕРОВОСТЬ И ИНДЕКС НЕКОТОРЫХ ДВУМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПО ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Г. Джангибеков

(Таджикистан, Душанбе; ТНУ)

Пусть D — конечная односвязная область комплексной плоскости, ограниченная замкнутой кривой Ляпунова Γ. В лебеговом пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(1<p<\infty,\ 0<\beta<2)$

$$L^p_{\beta-\frac{2}{p}} = \left\{ f(z) :\ |z|^{\beta-\frac{2}{p}} f(z) = F(z) \in L^p(D),\ \|f\|_{L^p_{\beta-\frac{2}{p}}} = \|F\|_{L^p} \right\}$$

рассматривается следующий двумерный сингулярный интегральный оператор:

$$A \equiv aI + bK + (cI + dK)S_m + (eI + hK)S_{-m} + \\ + \sum_{n=1}^{m} \big[(\nu_{-n}I + \nu_n K)B_{-n} + (\mu_n I + \mu_{-n}K)B_n \big] + T,$$

где $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$, $d(z)$, $e(z)$, $h(z)$, $\nu_{-n}(z)$, $\nu_n(z)$, $\mu_n(z)$, $\mu_{-n}(z)$ $(n = 1, 2, \ldots, m)$ — непрерывные в $\overline{D} = D \cup \Gamma$ комплекснозначные функции, I — тождественный оператор, $(Kf)(z) = \overline{f(z)}$, черта над функцией означает переход к комплексно-сопряженным значениям, T — вполне непрерывный в $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ оператор;

$$(S_m f)(z) = \frac{m(-1)^m}{\pi} \iint_D \frac{e^{-2im\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta)\, ds_\zeta, \qquad \theta = \arg(\zeta - z),\ z \in D,$$

ds_ζ — элемент плоской меры Лебега, интеграл понимается в смысле главного значения по Коши;

$$(B_m f)(z) = \iint_D B_m(z,\zeta) f(\zeta)\, ds_\zeta, \quad S_{-m} = KS_mK, \quad B_{-m} = KB_mK,$$

$B_m(z,\zeta)$ — поликерн-функция порядка m;

$$B_m(z,\zeta) = \frac{1}{\pi((m-1)!)^2} \frac{\partial^{2m} G_m(z,\zeta)}{\partial z^m \partial \overline{\zeta}^{\,m}},$$

$G_m(z,\zeta)$ — функция Грина для степени оператора Лапласа Δ^m в области D. В частности, если $D = \{z : |z| < 1\}$, то функция $B_m(z,\zeta)$ имеет вид

$$B_m(z,\zeta) = \frac{1}{\pi((m-1)!)^2} \frac{\partial^{2m}}{\partial z^m \partial \overline{\zeta}^{\,m}} |\zeta - z|^{2(m-1)} \ln \left| \frac{\zeta - z}{1 - z\overline{\zeta}} \right|^2 = \\ = \frac{1}{\pi(1 - z\overline{\zeta}\,)^{2m}} \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} k \big(C_m^k\big)^2 |\zeta - z|^{2(k-1)} \big((1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2) \big)^{m-k}.$$

Известно [1–3], что операторы типа A играют важную роль в теории обобщенных аналитических функций, а также тесно связаны с различными краевыми задачами для эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости. Поэтому получение эффективных условий нетеровости и формулы для индекса оператора A представляет практический интерес.

Исследование оператора A ведется по следующей схеме. Сначала изучается алгебра операторов частного вида A, где $b \equiv c \equiv e \equiv h \equiv 0:$

$$\mathcal{M} \equiv aI + dS_{-m}K + \sum_{n=1}^{m} \big[(\nu_{-n}I + \nu_n K)B_{-n} + (\mu_n I + \mu_{-n}K)B_n\big] + T,$$

Рассмотривая алгебру $\mathcal{R}$, порожденную всеми действующими в пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2)$ операторами вида $\mathcal{M}$, выясняется, что указанная алгебра $\mathcal{R}$ не исчерпывается одними операторами вида $\mathcal{M}$. В эту алгебру входят, например, операторы $B_n S_m$, $S_{-m}B_{-n}$, которые не являются вполне непрерывными в $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$. Поэтому при описании алгебры $\mathcal{R}$ возникает необходимость в изучении операторов более сложной природы. Для операторов из указанной алгебры получены необходимые и достаточные условия нетеровости в терминах коэффициентов входящих в $\mathcal{R}$ операторов и дана формула для вычисления индекса. Затем, оператор A эквивалентным образом сводится к более простым операторам и далее указанные операторы представляются в виде композиции обратимых операторов и операторов из алгебры $\mathcal{R}$.

Литература

1. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции.—М.: Физматгиз, 1959.—672 с.
2. *Боярский Б. В.* Исследование по уравнениям эллиптического типа на плоскости и граничным задачам теории функций: Дис. . . . докт. физ.-мат. наук.—М., 1960.
3. *Джураев А.* Метод сингулярных интегральных уравнений.—М.: Наука, 1987.—415 с.

ON SOME ESTIMATES OF THE NUMBER OF CONNECTED COMPONENTS OF THE COMPLEMENT OF BANDED TOEPLITZ MATRICES LIMITING SPECTRUM

S. A. Zolotykh (Russia, Rostov-on-Don; DSTU),
V. A. Stukopin (Russia, Rostov-on-Don; DSTU)

We consider the problem of the lower estimate of the maximum number of connected components of complement limiting spectrum banded Toeplitz matrices, which are symbols of polynomials of a given degree. This problem is a part of general research problem of study of geometry limiting spectrum. The limiting spectrum of band Toeplitz matrices was described in [1] (see also the book [2]). In this note we continue research which was began in [3–5].

Let a be a complex valued Laurent polynomial: $f(z) = \sum_{k=-r}^{h} f_k z^k$.

We'll denote by $T_n(f)$ the $n \times n$ matrix generated by the function f (symbol) and is defined by $f_{i,j} = f_{i-j}$.

Let's order the eigenvalues $\{\lambda_{n,i}\}_{i=-n+1}^{n-1}$ of matrix $T_n(f)$ so that $\{\lambda_{n,i}\} \leqslant \{\lambda_{n,j}\}$ at $i < j$. The set of limit points of sequences will be called the limiting spectrum of the sequence of Toeplitz matrices $\{T_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ and denote by $\sigma_l(f)$.

Let
$$a(t) = t^{-1}\bigl(\varepsilon + (t-1)(t-e^{\mathrm{i}\varphi})(t-e^{-\mathrm{i}\varphi})\bigr), \quad b(t) = (a(t))^k.$$

If $X \subset \mathbb{C}$ — subset of complex plane $\mathbb{C}$, we shall denote by $CC[X]$ the number of connected components of set X. The brackets applied to an real number α: $[\alpha]$ — would mean, as usual, the integral part of α.

Theorem. 1. *If $k < 2$, then the set $\mathbb{C} \setminus \sigma_l(b)$ be connected.*
2. *If $k \geqslant 2$, then*

$$CC[\mathbb{C} \setminus \sigma_l(b)] \geqslant CC\bigl[\mathbb{C} \setminus (\sigma_l(a))^k\bigr] = 2\left[\frac{k+1}{4}\right]^2 + \left[\frac{2k+1}{3}\right]$$

connected components (including unlimited component).

References

1. *Bottcher A. C., Grudsky S. M.* Spectral Properties of Banded Toeplitz Matrices.—Philadelphia: SIAM, 2005.—422 p.
2. *Schmidt P., Spitzer F.* The Teoplitz matrices of an arbitrary Laurent polynomial // Math. Scand.—1960.—Vol. 8.—P. 15–38.
3. *Золотых С. А., Стукопин В. А.* Об описании предельного спектра ленточных тёплицевых матриц // Вестн. ДГТУ.—2012.—Т. 13, № 8.—С. 5–11.
4. *Золотых С. А.* Об алгоритме построения тёплицевых матриц с заданным числом компонент связности дополнения предельного спектра // Вестн. ДГТУ.—2015.—Т. 15, № 4.—С. 116–122.
5. *Золотых С. А., Стукопин В. А.* К вопросу о числе компонент связности дополнения предельного спектра ленточных тёплицевых матриц // Владикавк. мат. журн.—2016.—Т. 18, вып. 2.—С. 41–48.

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА ОПЕРАТОРА ОБОБЩЕННОГО СДВИГА ВЛЕВО

О. А. Иванова (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
С. Н. Мелихов (Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ)

Пусть Q — выпуклое локально замкнутое множество в $\mathbb{C}$; $H(Q)$ — пространство ростков всех функций, аналитических на Q, с его естественной проективной топологией. Преобразование Лапласа $\varphi \mapsto \varphi_t(e^{tz})$, $z \in \mathbb{C}$, является линейным топологическим изоморфизмом сильного сопряженного к $H(Q)$ на некоторый счетный индуктивный предел E весовых пространств Фреше целых функций.

Зафиксируем $\lambda \in Q$. Оператор Поммье (оператор обобщенного сдвига влево)

$$D_{0,e^{\lambda}}(f)(t) := \begin{cases} \dfrac{f(t) - e^{\lambda t} f(0)}{t}, & t \neq 0, \\ f'(0) - \lambda f(0), & t = 0, \end{cases}$$

$f \in E$, линейно и непрерывно отображает E в себя.

Пусть $\mathbb{C}[z]_n$ — пространство всех многочленов степени не выше n;

$$\mathcal{P}_n(e^{\lambda}) := e^{\lambda} \cdot \mathbb{C}[z]_n := \left\{ e^{\lambda} P \,\middle|\, P \in \mathbb{C}[z]_n \right\}.$$

Описаны собственные замкнутые $D_{0,e^{\lambda}}$-инвариантные подпространства E.

Теорема. (i) *Для любого целого $n \geqslant 0$ подпространство $\mathcal{P}_n(e^{\lambda})$ является собственным замкнутым $D_{0,e^{\lambda}}$-инвариантным подпространством E.*

(ii) *Для любого собственного замкнутого $D_{0,e^{\lambda}}$-инвариантного подпространства $\mathcal{P}$ пространства E существует целое $n \geqslant 0$ такое, что $\mathcal{P} = \mathcal{P}_n(e^{\lambda})$.*

Эта теорема применяется к описанию собственных замкнутых идеалов в алгебре $H(Q)$ с операцией умножения $*$:

$$f * g(z) := f(0)g(z) + \int_0^z g(\xi) f'(z - \xi)\, d\xi, \quad f, g \in H(Q).$$

ОДНОМЕРНЫЕ КОНФОРМНО-ПЛОСКИЕ МЕТРИКИ[1]

М. В. Куркина (Россия, Ханты-Мансийск; ЮГУ),
О. В. Самарина (Россия, Ханты-Мансийск; ЮГУ)

В работах [2–4] изучались многомерные конформно-плоские метрики, также было отмечено, что определение конформно-плоских метрик имеет смысл и в одномерном случае. Рассмотрение одномерных конформно-плоских метрик позволяет сделать многомерный случай геометрически более наглядным, а также представляет независимый интерес при получения более точных и полных результатов.

Пусть $ds^2 = \frac{d\varphi^2}{f^2(\varphi)}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, — одномерная конформно-плоская метрика, определенная на единичной окружности, $f(\varphi)$ — периодическая функция.

Определение 1. Одномерная секционная кривизна [2] вычисляется по формуле

$$K_{1/2}(\varphi, f) = f\,\frac{d^2 f}{d\varphi^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{df}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{2}\,f^2.$$

Теорема 1. *Пусть $f(\varphi)$ — положительная функция, два раза непрерывно дифференцируемая. Тогда выполняется неравенство*

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{f(\varphi)} \int\limits_0^{2\pi} \frac{K_{1/2}(\varphi, f)d\varphi}{f(\varphi)} \leqslant 2\pi^2. \tag{1}$$

Равенство достигается лишь в случае, когда функция $f(\varphi)$ имеет вид

$$f(\varphi) = A + B\cos(\varphi) + C\sin(\varphi).$$

Замечание 1. Неравенство (1) выводится из изопериметрического неравенства $L^2 - K\cdot F^2 - 4\pi\cdot F \geqslant 0$ для плоскости Лобачевского [1] кривизны K, где L — длина кривой (K-сферического изображения одномерной конформно-плоской метрики в плоскости Лобачевского [2]), F — площадь области ограниченной кривой. Равенству соответствует круг в плоскости Лобачевского.

Замечание 2. Неравенство (1) имеет также другую геометрическую интерпретацию. Заметим, что интегралы

$$V[f] = \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{f(\varphi)}, \quad V[f^*] = \int\limits_0^{2\pi} \frac{K_{1/2}(\varphi, f)d\varphi}{f(\varphi)}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке грантов правительства Российской Федерации: (14.B25.31.0029, Nsh of RF (2263.2014.1)), the RFBR (15-41-00092-r–Urals, 15-41-00063-r–Urals, 15-01-06582-a, 16-01-00336-a).

есть объем (длина) конформно-плоской метрики $ds^2 = \frac{d\varphi^2}{f^2(\varphi)}$ и соответственно сопряженной к ней конформно-плоской метрики $ds^{*2} = \frac{d\varphi^{*2}}{f^{*2}(\varphi^*)}$. Общее определение сопряженной конформно-плоской метрики имеется в [2].

В случае одномерной конформно-плоской метрики можно дать более простое определение для сопряженной конформно-плоской метрики.

Определение 2. Сопряженная к $ds^2 = \frac{d\varphi^2}{f^2(\varphi)}$ одномерная конформно-плоская метрика $ds^{*2} = \frac{d\varphi^{*2}}{f^{*2}(\varphi^*)}$ определяется из равенств

$$\cos(\varphi^*) = \frac{[f'^2(\varphi) - f^2(\varphi)]\cos(\varphi) + 2f(\varphi)f'(\varphi)\sin(\varphi)}{f^2(\varphi) + f'^2(\varphi)},$$

$$\sin(\varphi^*) = \frac{-2f(\varphi)f'(\varphi)\cos(\varphi) + [f'^2(\varphi) - f^2(\varphi)]\sin(\varphi)}{f^2(\varphi) + f'^2(\varphi)},$$

$$f(\varphi^*) = \frac{2f(\varphi)}{f^2(\varphi) + f'^2(\varphi)}.$$

Литература

1. *Сантало Луи А.* Интегральная геометрия и геометрические вероятности.—М.: Наука, 1983.—360 с.
2. *Куркина М. В., Родионов Е. Д., Славский В. В.* Численные методы интерполяции для решения некоторых задач выпуклой геометрии в пространстве Лобачевского // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика.—2013.—Т. 13, № 1.—С. 76–90.
3. *Kurkina M. V., Rodionov E. D., Slavsky V. V.* Conformally convex functions and conformally flat metrics of nonnegative curvature // Dokl. Math.—2015.—Vol. 91, № 3.—P. 1–3.
4. *Куркина М. В., Родионов Е. Д., Славский В. В.* Конформно-плоские метрики и теория потенциалов // Математика и ее приложения: фундаментальные проблемы науки и техники.—Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2015.—С. 59–68.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XIII Междунар. науч. конф. (пос. Дивноморское, 7–14 сентября 2016 г.)

О НЕКОТОРЫХ АСПЕКТАХ, СВЯЗАННЫХ С БУЛЕВОЗНАЧНЫМИ МЕТРИКАМИ

Ю. Н. Ловягин
(Россия, Санкт-Петербург; СПбГУ)

Метрики и нормы со значениями в булевой алгебре естественным образом возникают как композиция метрики со значениями в архимедовой векторной решетке и проэктирвания на компоненты базы векторной решетки. Не умаляя общности считаем, что метризующая булева алгебра является полной. Решеточнозначные нормы и метрики введены и исследованы в [1–3].

С другой стороны, булевозначные метрики естественным образом появляются в спусках множеств в булевозначных моделях теории множеств [4]. При этом метрика удовлетворяет условию цикличности, которое фактически обобщает условие разложимости решеточнозначной нормы.

Определение 1. Пусть X — некоторое множество, $\mathfrak{B}$ — полная булева алгебра. $\mathfrak{B}$-*метрикой* на X называется функция $\rho:\ X \times X \longrightarrow \mathfrak{B}$ со свойствами:

(1) $\rho\,(x,y)=0$ тогда и только тогда, когда $x=y$;

(2) $\rho\,(x,y)=\rho\,(y,x)$;

(3) $\rho\,(x,y) \leqslant \rho\,(x,z) \vee \rho\,(z,y)$ для любых $x,y,z \in X$.

Определение 2. $\mathfrak{B}$-метрика называется *циклической*, если для любого разбиения единицы $\{b_\xi\} \subset \mathfrak{B}$ и любого семейства $\{x_\xi\} \subset X$ существует (единственный) элемент $x \in X$ такой, что $\rho\,(x,x_\xi) \wedge b_\xi = 0$.

Определение 3. Пусть σ — некоторая сходимость в $\mathfrak{B}$. $\mathfrak{B}$-метрика называется *ρσ-полной*, если из $\rho\,(x_n,x_m) \xrightarrow{\sigma} 0$ следует, что существует $x \in X$ такой, что $\rho\,(x_n,x) \xrightarrow{\sigma} 0$. Ясен смысл понятия $\rho\sigma$-пополнения.

Определение 4. *Принципом диагонали в булевой алгебре* $\mathfrak{B}$ называется свойство: из $b_{nm} \xrightarrow{\sigma} b_n$,$b_n \xrightarrow{\sigma} b$ следует, что существует строго возрастающая последовательность n_k такая, что $b_{n_k k} \xrightarrow{\sigma} b$.

Теорема 1. *Если в метризующей булевой алгебре $\mathfrak{B}$ для некоторой σ-сходимости выполнен принцип диагонали, то всякое множество, метризованное посредством этой алгебры имеет единственное с точностью до изометрии $\rho\sigma$-пополнение.*

Теорема 2. *Для всякого множества X, метризованного посредством полной булевой алгебры $\mathfrak{B}$ существует циклическое множество Y, метризованное посредством той же алгебры такое, что X изометрически вкладывается в Y.*

Теорема 3. *Всякое множество, метризованное посредством полной булевой алгебры, в которой имеет место принцип диагонали для некоторой σ-сходимости, имеет циклическое пополнение: циклическое $\rho\sigma$-полное множество, метризованное посредством той же алгебры, в которое исходное множество изометрически вкладывается.*

Теорема 4. *Пусть в полной булевой алгебре $\mathfrak{B}$ существует по крайней мере счетное разбиение единицы. Пусть, далее, X — циклическое множество, метризованное посредством $\mathfrak{B}$. Пусть $f: X \longrightarrow X$ — функция, удовлетворяющая условию: $\rho(f(x), f(y)) \leqslant \rho(x, y)$ для любых $x, y \in X$. Тогда существует элемент $x^* \in X$ такой, что $f(x^*) = x^*$.*

Литература

1. *Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г.* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах.—М.–Л.: Гостехиздат, 1950.—546 с.
2. *Кусраев А. Г.* О пространствах Банаха — Канторовича // Сиб. мат. журн.—1985.—Т. 24, № 2.—С. 119–126.
3. *Ловягин Ю. Н.* Об абстрактных аналогах метрических пространств // Тр. Сыктывкарского лесного института. Сер. Математика. Физика.—Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского лесного института, 2000.—Т. 2.—С. 19–40.
4. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Нестандартные методы в анализе.—Новосибирск: Наука, 1990.—412 с.

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СЕМЕЙСТВА РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ[1]

С. Р. Насыров

(Россия, Казань; КФУ)

Мы описываем однопараметрические семейства рациональных функций $R(z,t)$, гладко зависящие от вещественного параметра $t \in [0;1]$. При фиксированном t функция $R(z,t)$ отображает конформно сферу Римана $\widehat{\mathbb{C}}$ на риманову поверхность $S(t)$, расположенную над $\widehat{\mathbb{C}}$. Пусть критические точки $a_k = a_k(t)$ функции $R(z,t)$ имеют кратности m_k и соответствующие критические значения $A_k(t) = R(a_k(t),t)$ зависят гладко от параметра t. Будем также предполагать, что функции $R(z,t)$ имеют полюсы порядков n_j в точках $b_j = b_j(t)$. При условии, что нам известны зависимости $A_k(t)$, мы находим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют критические точки $a_k(t)$ и полюсы $b_j(t)$.

В случае отсутствия полюсов в конечных точках плоскости, т. е. когда функции являются полиномами, подобная задача была решена в [1]. В [2] были рассмотрены семейства рациональных функций с простыми точками ветвления над конечной часть комплексной плоскости. Здесь мы рассматриваем случай точек ветвления произвольных кратностей. Отметим также, что в [3, 4] был рассмотрен случай однопараметрических семейств эллиптических функций с одним полюсом в параллелограмме периодов и простыми критическими точками.

Итак, пусть

$$R(z,t) = C_0 \int\limits_{z_0}^{z} \frac{\prod\limits_{k=1}^{M} (\zeta - a_k(t))^{m_k - 1}\, d\zeta}{\prod\limits_{j=1}^{N} (\zeta - b_j(t))^{n_j+1}} + C_1 \tag{1}$$

— семейство рациональных функций с критическими точками $a_k(t)$ порядка m_k и полюсами $b_j(t)$ порядка n_j. Без ограничения общности мы можем считать, что $C_0 = 1$, поскольку этого всегда можно добиться линейным преобразованием $z \mapsto \alpha z$. Значение $C_1 = R(z_0,t)$ также можно определить: к примеру, если положить $z_0 = a_1$, тогда $C_1 = A_1$. Мы также будем предполагать выполнение условия

$$\sum_{k=1}^{M} (m_k - 1)\, a_k(t) - \sum_{j=1}^{N} (n_j + 1)\, b_j(t) = 0 \tag{2}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 01-14-00351.

для всех $t \in [0,1]$. Действительно, если числа

$$m := \sum_{k=1}^{M}(m_k - 1), \quad n := \sum_{j=1}^{N}(n_j + 1)$$

равны, то это условие имеет место в силу того, что вычет производной функции $R(z,t)$ в бесконечно удаленной точке равен нулю. Если же $m \neq n$, мы можем применить дополнительный сдвиг z-плоскости на величину α_0, при этом значение $\sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{j=1}^{N}(n_j+1)b_j$ изменится на величину $(m-n)\alpha_0$, и мы можем добиться выполнения равенства (2) за счет подбора константы α_0.

Теорема 1. *Критические значения* $a_k = a_k(t)$ *и полюсы* $b_j = b_j(t)$ *рациональных функций* (1) *удовлетворяют системе дифференциальных уравнений*

$$\dot{a}_l = \frac{H_l^{(m_l-1)}(a_l)}{(m_l-1)!}\,\dot{A}_l + \sum_{\substack{k=1,\\ k\neq l}}^{M} \frac{G_{kl}^{(m_k-2)}(a_k)}{(m_k-2)!}\,\dot{A}_k, \tag{3}$$

$$\dot{b}_j = \sum_{k=1}^{M} \frac{I_{kj}^{(m_k-2)}(a_k)}{(m_k-2)!}\,\dot{A}_k, \tag{4}$$

где

$$H_l(x) = \frac{\prod\limits_{j=1}^{N}(x-b_j)^{n_j+1}}{\prod\limits_{\substack{k=1,\\ k\neq l}}^{M}(x-a_k)^{m_k-1}}, \quad G_{kl}(x) = \frac{H_k(x)}{x-a_l}, \quad I_{kj}(x) = \frac{H_k(x)}{x-b_j}.$$

Здесь точка сверху означает дифференцирование по параметру t.

На основании теоремы 1 можно предложить приближенный способ униформизации односвязных компактных римановых поверхностей, разветвленно накрывающих сферу Римана. Пусть нам требуется найти рациональную функцию, униформизирующую поверхность S_1. Мы соединяем в пространстве римановых поверхностей S_1 с некоторой поверхностью S_0 гладкой кривой $S(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, так, что $S(0) = S_0$, $S(1) = S_1$. Пусть поверхность S_0 выбрана таким образом, что для нее известны критические точки a_{k0} и полюсы b_{j0} соответствующей рациональной функции. Тогда мы решаем задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3), (4) с начальными данными $a_k(0) = a_{k0}$, $b_j(0) = b_{j0}$. При $t = 1$ мы находим положения критических точек $a_k(1)$ и полюсов $b_j(1)$ рациональной функции, униформизирующей нашу поверхность S_1.

Отметим, что (3), (4) можно рассматривать как вариационные формулы которые связывают изменения критических значений рациональных функций с изменением положения критических точек и полюсов. Эти формулы можно использовать для решения экстремальных проблем теории рациональных функций.

Литература

1. *Насыров С. Р.* Нахождение полинома, униформизирующего заданную компактную риманову поверхность // Мат. заметки.—2012.—Т. 91, № 3.—С. 558–567.
2. *Nasyrov S. R.* Uniformization of simply connected compact Riemann surfaces by rational functions // Proc. of VII Petrozavodsk Int. Conf. “Complex analysis and applications”.—Petrozavodsk: Petr. Univ., 2016.—P. 54–56.
3. *Nasyrov S. R.* One-parametric families of elliptic functions uniformizing complex tori // Proc. of VII Petrozavodsk Int. Conf. “Complex analysis and applications”.—Petrozavodsk: Petr. Univ., 2014.—P. 78–79.
4. *Насыров С. Р.* Однопараметрические семейства многолистных функций и римановых поверхностей // Тр. междунар. конф. «Современные методы теории функций и смежные вопросы».—Воронеж: Изд-во ВГУ, 2015.—С. 83–85.

О НЕСТАНДАРТНОЙ ЧАСТИЧНОЙ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОСТИ В ТЕОРИИ ДВУМЕРНЫХ ОПЕРАТОРОВ ТЕПЛИЦА

А. Э. Пасенчук

(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Через C будем обозначать множество комплексных чисел. Положим, $\Gamma = \{\xi \in C : |\xi| = 1\}$, $\Gamma^2 = \Gamma \times \Gamma$. Будем пользоваться следующими обозначениями для определенных на Γ, Γ^2 функций: $L_2(\Gamma)$, $L_2(\Gamma^2)$ — гильбертовы пространства измеримых суммируемых с квадратом функций; $W(\Gamma)$, $W(\Gamma^2)$ — банаховы алгебры функций, разлагающихся в абсолютно сходящиеся ряды Фурье. Будем считать, что в указанных пространствах определены естественные операции и топологии (см. [3, 4]). Хорошо известно, что оператор S сингулярного интегрирования вдоль Γ ограничен и инволютивен в пространствах $L_2(\Gamma)$, $W(\Gamma)$. Это обстоятельство позволяет ввести операторы проектирования $P^{\pm} = \frac{1}{2}(I \pm S)$, действующие в этих пространствах, а также порождаемые ими проекторы в пространствах $W(\Gamma^2)$, $L_2(\Gamma^2)$: $P^{\pm\mp} = P^{\pm} \otimes P^{\mp}$, $P^{\pm\bullet} = P^{\pm} \otimes I$, $P^{\bullet\pm} = I \otimes P^{\pm}$. Для образов этих проекторов условимся использовать тот же набор «+» и «−», которым обладает соответствующий проектор. Например, $L_2^{\pm}(\Gamma) = P^{\pm}(L_2(\Gamma))$, $W^{\pm\bullet}(\Gamma^2) = P^{\pm\bullet}(W(\Gamma^2)), \ldots$

Пусть $a(\xi, \eta) \in W(\Gamma^2)$. В пространстве $L_2^{++}(\Gamma^2)$ будем рассматривать теплицев оператор $T_a = P^{++}a(\xi, \eta)I$. При этом функцию $a(\xi, \eta)$ называют символом оператора T_a. Наиболее общим результатом для оператора T_a является критерий нетеровости, полученный И. Б. Симоненко в качестве следствия к разработанному им локальному принципу исследования операторов локального типа [14].

Теорема 1. *Оператор T_a нетеров в пространстве $L_2^{++}(\Gamma^2)$ тогда и только тогда, когда его символ удовлетворяет условиям:*

1) $a(\xi, \eta) \neq 0$, $(\xi, \eta) \in \Gamma^2$,

2) $\operatorname*{ind}_{\xi} a(\xi, \eta) = \operatorname*{ind}_{\eta} a(\xi, \eta) = 0$.

При выполнении этих условий индекс оператора T_a равен нулю.

Отметим, что при выполнении условий теоремы символ $a(\xi, \eta) \in W(\Gamma^2)$ допускает каноническую факторизацию [6]

$$a(\xi, \eta) = a^{--}(\xi, \eta)a^{+-}(\xi, \eta)a^{-+}(\xi, \eta)a^{++}(\xi, \eta), \tag{1}$$

где $a^{\pm\mp} \in GW^{\pm\mp}(\Gamma^2)$. Представление (1) называют частичной мультипликативностью. Отметим, что аналогичное свойство имеет место м в одномерном случае (см., например, [3]). Из представления (1) следует, что $T_a = T_{a^{--}}T_{a^{-+}a^{+-}}T_{a^{++}}$, и, хотя операторы $T_{a^{--}}$, $T_{a^{++}}$ и обратимы, оператор $T_{a^{-+}a^{+-}}$, в отличие от одномерного случая, не проще, чем исходный оператор T_a.

В последующих исследованиях этот результат в серии работ В. С. Пилиди [9], В. С. Пилиди и Л. И. Сазонова [10, 11], Л. И. Сазонова [13], а также Р. Г. Дугласа [5] и других был обобщен в различных направлениях. Работы И. Б. Симоненко и его последователей посвящены качественному исследованию и практически не содержат никаких конструкций, исключая конструкции регуляризаторов. Однако, имеются и некоторые работы, посвященные конструктивному подходу при исследовании двумерного оператора Теплица. Укажем некоторые из этих работ. В. С. Рабинович [12] заметил, что если в представлении (1) отсутствует $a^{-+}(\xi,\eta)$ или $a^{+-}(\xi,\eta)$, то оператор T_a обратим. Л. И. Сазонов обобщил этот результат на случай, когда $a^{+-}(\xi,\eta)=(1-\alpha^{+}(\xi)\eta^{-1})^{-1}$, $|\alpha^{+}(\xi)|<1$, $\xi\in\Gamma$. В работах С. Ошера [7], В. А. Малышева [6], А. Беттхера [1], А. Беттхера, А. Э. Пасенчука [2], А. Э. Пасенчука [8] рассмотрены двумерные операторы Теплица со специальными символами. В этих работах показано, что нетеровость рассматриваемых операторов равносильна их обратимости и предприняты попытки построения решений соответствующих уравнений. В работе Р. Г. Дугласа [5] приведен пример, показывающий, что нетеровость двумерных операторов Теплица не равносильна их обратимости.

Мы рассматриваем нетеров оператор $T_a : L_2^{++}\left(\Gamma^2\right)\to L_2^{++}\left(\Gamma^2\right)$, символ которого допускает одно из представлений

$$a(\xi,\eta)=\xi^{\mp n}a^{\pm\bullet}(\xi,\eta), \tag{2}$$

где $a^{\pm\bullet}(\xi,\eta)\in W^{\pm\bullet}(\Gamma^2)$ а n — натуральное число. Для таких операторов устанавливается свойство нестандартной частичной мультипликативности, состоящее в том, что некоторому мультипликативному представлению символа отвечает мультипликативное представление операторов Теплица. Однако, порядок следования элементарных операторов Теплица в этом представлении отличается от стандартного. Точнее говоря, имеют место следующие утверждения:

1) если функция $a(\xi,\eta)=\xi^{-n}a^{+\bullet}(\xi,\eta)$ удовлетворяет условиям теоремы И. Б. Симоненко и (2) ее каноническая факторизация в алгебре $W(\Gamma^2)$, то имеет место равенство $T_a=T_{\xi^{-n}}T_{a^{+-}}T_{a^{--}}T_{a^{-+}}T_{a^{++}}T_{\xi^{n}}$;

2) если функция $a(\xi,\eta)=\xi^{n}a^{-\bullet}(\xi,\eta)$ удовлетворяет условиям теоремы И. Б. Симоненко и (2) ее каноническая факторизация в алгебре $W(\Gamma^2)$, то имеет место равенство $T_a=T_{\xi^{-n}}T_{a^{-+}}T_{a^{--}}T_{a^{+-}}T_{a^{++}}T_{\xi^{n}}$.

Приводятся некоторые приложения этого результата.

Литература

1. *Беттхер А.* Двумерные свертки в углах с ядрами, имеющими носитель в полуплоскости // Мат. заметки.—1983.—Т. 34, № 2.—С. 207–218.
2. *Беттхер А., Пасенчук А. Э.* Об обратимости теплицевых операторов на квадранте, носители которых лежат в полуплоскости // Дифференц. и интегр. уравнения и их прилож.—Элиста: Изд-во КГУ, 1982.—С. 9–19.
3. *Гохберг И. Ц., Фельдман И. А.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения.—М.: Наука, 1971.—352 с.
4. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов.—Кишинев: Штиинца, 1973.—453 с.
5. *Douglas R. G.* On the invertibility of a class Toeplitz operators on the quater-plane // Ind. Univ. Math. J.—1972.—Vol. 1, № 1.—P. 1031–1035.
6. *Малышев В. А.* Решении уравнений Винера — Хопфа в четверти плоскости // Докл. АН СССР.—1969.—Т. 187, № 6.—С. 1066–1069.
7. *Osher S. J.* On certain Toeplitz operators in two variables // Pacif. J. Math.—1970.—Vol. 34, № 1.—P. 123–129.

8. *Pasenchuk A. E. On.* On certain Classes of Invertible Two-Dimensional Convolution operators // Sel. Math. Sov.—1982.—Vol. 2, № 1.—P. 1–7.
9. *Пилиди В. С.* О бисингулярном уравнении в пространстве L_p // Мат. исслед.—Кишинев: Штиинца, 1971.—Т. 7, № 3.—С. 167–175.
10. *Пилиди В. С., Сазонов Л. И.* О бисингулярных операторах в пространстве гельдеровских функйций. // Докл. АН СССР.—1979.—Т. 246, № 2.—С. 278–282.
11. *Пилиди В. С., Сазонов. Л. И.* Локальный метод в теории операторов типа бисингулярных // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. «Псевдодифференциальные уравнения и некоторые проблемы математической физики», спецвып.—2015.—С. 100–106.
12. *Рабинович В. С.* Многомерное уравнение Винера — Хопфа для конусов // Теория функций, функцон. анализ и их прилож.—Харьков: Изд-во Харьков. гос. ун-та, 1967.—С. 59–67.
13. *Сазонов. Л. И.* Двумерные операторы Теплица с измеримыми символами // Мат. заметки.—2003.—Т. 74, № 1.—С. 88–98.
14. *Симоненко И. Б.* О многомерных дискретных свертках // Мат. исслед.—Кишинев: Штиинца, 1968.—Вып. 1.—С. 298–313.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XIII Междунар. науч. конф. (пос. Дивноморское, 7–14 сентября 2016 г.)

ОБ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ДОПОЛНЕНИЯ ШУРА ОДНОЙ БЛОЧНО-ОПЕРАТОРНОЙ МАТРИЦЫ РАЗМЕРА 3×3

Т. Х. Расулов (Узбекистан, Бухара; БухГУ)

Через $\mathbb{T}^{\mathrm{d}} := (-\pi, \pi]^{\mathrm{d}}$ обозначим d-мерный куб с соответствующим отождествлением противоположных граней. Пусть $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$ — одномерное комплексное пространство, $\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ — гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ и $\mathcal{H}_2 := L_2^{\mathrm{sym}}((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)$ — гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) симметричных функций, определенных на $(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2$.

В гильбертовом пространстве $\mathcal{H} := \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ рассмотрим следующую блочно-операторную матрицу:

$$H := \begin{pmatrix} H_{00} & H_{01} & 0 \\ H_{01}^* & H_{11} & H_{12} \\ 0 & H_{12}^* & H_{22} \end{pmatrix}$$

с матричными элементами

$$H_{00}f_0 = w_0 f_0, \quad H_{01}f_1 = \int\limits_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v_0(t)\, f_1(t)\, dt,$$

$$(H_{11}f_1)(p) = w_1(p) f_1(p), \quad (H_{12}f_2)(p) = \int\limits_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v_1(t)\, f_2(p,t)\, dt,$$

$$(H_{22}f_2)(p,q) = (w_2(p) + w_2(q)) f_2(p,q), \quad f_i \in \mathcal{H}_i, \quad i = 0,1,2.$$

Здесь w_0 — фиксированное вещественное число, $v_i(\cdot)$, $i = 0,1$ — вещественнозначные ограниченные функции на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, $w_1(\cdot)$ — вещественнозначная кусочно-непрерывная и ограниченная функция на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, а $w_2(\cdot)$ — вещественнозначная положительная непрерывная функция на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$. В этих предположениях на параметры оператор H, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, является ограниченным и самосопряженным.

Элементы пространтсва $\mathcal{H}$ представляются как векторы $F = (f_0, f_1, f_2)$, где $f_i \in \mathcal{H}_i$, $i = 0,1,2$. Для двух элементов $F = (f_0, f_1, f_2), G = (g_0, g_1, g_2) \in \mathcal{H}$ их скалярное произведение

$$(F, G)_{\mathcal{H}} := (f_0, g_0)_0 + (f_1, g_1)_1 + (f_1, g_1)_2$$

в $\mathcal{H}$ естественно определяется через скалярные произведения

$$(f_0, g_0)_0 := f_0\, \overline{g_0}, \quad (f_1, g_1)_1 := \int\limits_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} f_1(t)\, \overline{g_1(t)}\, dt,$$

$$(f_2, g_2)_2 := \int\limits_{(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2} f_2(s,t)\, \overline{g_2(s,t)}\, ds\, dt.$$

Далее, пространство $\mathcal{H}$ представим в виде ортогональной суммы гильбертовых пространств $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$. Тогда первое дополнение Шура блочно-операторной матрицы H, соответствующее разложению $\mathcal{H} = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1\} \oplus \mathcal{H}_2$, определяется следующим образом (см., например, [1]):

$$S(\lambda) := \begin{pmatrix} H_{00} - \lambda & H_{01} \\ H_{01}^* & H_{11} - \lambda - H_{12}(H_{22} - \lambda)^{-1} H_{12}^* \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \rho(H_{22})$$

и оно играет важную роль в спектральном анализе оператора H. Видно, что первое дополнение Шура является операторно-значной регулярной функцией, определенной вне спектра оператора H_{22}. Дополнение Шура сначала использовано в теории матриц [2].

Пусть B — ограниченный самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}_B(\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{R}$ — подпространство пространства $\mathcal{H}$, элементы которого удовлетворяют условию $(Bf, f) > \gamma \|f\|$, $f \neq 0$.

Положим

$$n(\gamma, B) := \sup_{\mathcal{H}_B(\gamma)} \dim \mathcal{H}_B(\gamma).$$

Число $n(\gamma, B)$ равно бесконечности, если $\gamma < \max \sigma_{\mathrm{ess}}(B)$ и если число $n(\gamma, B)$ конечно, то оно равно числу собственных значений (с учетом кратности) оператора B, больших чем γ.

Обозначим через $N_{(\alpha,\beta)}(B)$ — число собственных значений оператора B (с учетом кратности), лежащих на $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(B)$.

Теорема. *Для любого* $\lambda < E_{\min} := \min \sigma_{\mathrm{ess}}(H)$ *имеет место равенство*

$$N_{(-\infty,\lambda)}(H) = N_{(-\infty,0)}(S(\lambda)).$$

Литература

1. *Tretter C.* Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications // Imperial College Press, 2008.—296 p.
2. *Schur I.* Über potenzreihen, die im innern des einheitskreises beschränkt sint // J. Reine Angew. Math.—1917.—Vol. 147.—P. 205–232.

О СПЕКТРЕ РЕШЕТЧАТОЙ МОДЕЛИ СПИН-БОЗОН С НЕ БОЛЕЕ ЧЕМ ДВУМЯ ФОТОНАМИ

Т. Х. Расулов

(Узбекистан, Бухара; БухГУ)

В хорошо известной модели светового излучения (так называемой модели «спин-бозон», см. [1, 2]) предполагается, что атом, который может находиться в двух состояниях — основном с энергией $-\varepsilon$ и возбужденном с энергией ε — испускает и поглощает фотоны, переходя из одного состояния в другое. Рассмотрим «урезанный» модель $\mathcal{A}_2$, отличающиеся от оператор энергии такой системы тем, что возможное число фотонов не превосходит 2. Гильбертовым пространством состояний такой модели служит пространство $\mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{H}$, где $\mathcal{H} := \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ такое, что $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$ — одномерное комплексное пространство, $\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{T}^{\rm d})$ — гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций, определенных на d-мерном торе $\mathbb{T}^{\rm d}$ и $\mathcal{H}_1 := L_2^{\rm sym}((\mathbb{T}^{\rm d})^2)$ — гильбертово пространство квадратично-интегрируемых симметричных функций двух переменных, определенных на $(\mathbb{T}^{\rm d})^2$.

Оператор $\mathcal{A}_2$ действует в гильбертовом пространстве $\mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{H}$ и записывается как ограниченная самосопряженная тридиагональная блочно-операторная матрица размера 3×3 :

$$\mathcal{A}_2 := \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{00} & \mathcal{A}_{01} & 0 \\ \mathcal{A}_{01}^* & \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} \\ 0 & \mathcal{A}_{12}^* & \mathcal{A}_{22} \end{pmatrix}$$

с матричными элементами

$$\mathcal{A}_{00} f_0^{({\rm s})} = {\rm s}\,\varepsilon f_0^{({\rm s})}, \quad \mathcal{A}_{01} f_1^{({\rm s})} = \alpha \int\limits_{\mathbb{T}^{\rm d}} v(t) f_1^{(-{\rm s})}(t)\,dt,$$

$$\left(\mathcal{A}_{11} f_1^{({\rm s})}\right)(p) = ({\rm s}\,\varepsilon + w(p)) f_1^{({\rm s})}(p),$$

$$\left(\mathcal{A}_{12} f_2^{({\rm s})}\right)(p) = \alpha \int\limits_{\mathbb{T}^{\rm d}} v(t) f_2^{(-{\rm s})}(p,t)\,dt,$$

$$\left(\mathcal{A}_{22} f_2^{({\rm s})}\right)(p,q) = ({\rm s}\,\varepsilon + w(p) + w(q)) f_2^{({\rm s})}(p,q).$$

Здесь $\mathcal{A}_{ij}^*$ — сопряженный оператор к $\mathcal{A}_{ij}$, $i < j$, а норма элемента $F = \left\{f_0^{({\rm s})}, f_1^{({\rm s})}, f_2^{({\rm s})}, {\rm s} = \pm\right\} \in \mathcal{H}$ задается формулой

$$\|F\|^2 = \sum_{{\rm s}=\pm} \left(\left|f_0^{({\rm s})}\right|^2 + \int\limits_{\mathbb{T}^{\rm d}} \left|f_1^{({\rm s})}(p)\right|^2 dp + \frac{1}{2} \int\limits_{(\mathbb{T}^{\rm d})^2} \left|f_2^{({\rm s})}(p,q)\right|^2 dp\,dq \right);$$

$\varepsilon > 0$, $w(x)$ — энергия фотона с импульсом x, $v(\cdot)$ — вещественнозначная непрерывная функция на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ и $\alpha > 0$ — «параметр взаимодействия». При этом $w(\cdot)$ есть вещественно-значная непрерывная функция на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$.

С целью изучения спектральных свойств оператора $\mathcal{A}_2$ рассмотрим также ограниченные самосопряженные операторы $\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})}$, $\mathrm{s} = \pm$, действующие в $\mathcal{H}$ как блочно-операторные матрицы 3×3 :

$$\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})} := \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{A}}_{00}^{(\mathrm{s})} & \widehat{\mathcal{A}}_{01} & 0 \\ \widehat{\mathcal{A}}_{01}^{*} & \widehat{\mathcal{A}}_{11}^{(\mathrm{s})} & \widehat{\mathcal{A}}_{12} \\ 0 & \widehat{\mathcal{A}}_{12}^{*} & \widehat{\mathcal{A}}_{22}^{(\mathrm{s})} \end{pmatrix}$$

с элементами

$$\widehat{\mathcal{A}}_{00}^{(\mathrm{s})} f_0 = \mathrm{s}\,\varepsilon f_0, \quad \widehat{\mathcal{A}}_{01} f_1 = \alpha \int\limits_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t)\, f_1(t)\, dt,$$

$$\left(\widehat{\mathcal{A}}_{11}^{(\mathrm{s})} f_1\right)(p) = (-\mathrm{s}\,\varepsilon + w(p)) f_1(p),$$

$$\left(\widehat{\mathcal{A}}_{12} f_2\right)(p) = \alpha \int\limits_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t)\, f_2(p,t)\, dt,$$

$$\left(\widehat{\mathcal{A}}_{22}^{(\mathrm{s})} f_2\right)(p,q) = (\mathrm{s}\,\varepsilon + w(p) + w(q)) f_2(p,q), \quad (f_0, f_1, f_2) \in \mathcal{H}.$$

Установим связь между спектрами операторов $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})}$, $\mathrm{s} = \pm$.

Теорема. *Имеет место равенство* $\sigma(\mathcal{A}_2) = \sigma\big(\mathcal{A}_2^{(+)}\big) \cup \sigma\big(\mathcal{A}_2^{(-)}\big)$. *Более того,*

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2) = \sigma_{\mathrm{ess}}\left(\mathcal{A}_2^{(+)}\right) \cup \sigma_{\mathrm{ess}}\left(\mathcal{A}_2^{(-)}\right),$$

$$\sigma_{\mathrm{p}}(\mathcal{A}_2) = \sigma_{\mathrm{p}}\left(\mathcal{A}_2^{(+)}\right) \cup \sigma_{\mathrm{p}}\left(\mathcal{A}_2^{(-)}\right),$$

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_2) = \bigcup_{\mathrm{s}=\pm} \left\{\sigma_{\mathrm{disc}}\left(\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})}\right) \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}\left(\mathcal{A}_2^{(-\mathrm{s})}\right)\right\}.$$

Причем для любого $\alpha > 0$ *имеет место оценка:* $\min \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2) < -\varepsilon$.

Литература

1. *Spohn H.* Ground state of the spin-boson Hamiltonian // Comm. Math. Phys.—1989.—Vol. 123.—P. 277–304.
2. *Жуков Ю. В., Минлос Р. А.* Спектр и рассеяния в модели «спин-бозон» с не более чем тремя фотонами // Теоретическая и мат. физика.—1995.—Т. 103, № 1.—С. 63–81.

ПРОБЛЕМА МАЖОРАЦИИ ДЛЯ AM-КОМПАКТНЫХ АБСТРАКТНЫХ ОПЕРАТОРОВ УРЫСОНА

Д. А. Роде

(Россия, Воронеж; ВГУ)

Пусть E — векторная решетка и X — действительное векторное пространство. Оператор $T : E \to X$ называется *ортогонально аддитивным*, если $T(x+y) = T(x) + T(y)$ для любых дизъюнктных элементов $x, y \in E$.

Из определения ясно, что $T(0) = 0$. Множество всех ортогонально аддитивных операторов является действительным векторным пространством, относительно сложения операторов и умножения на скаляры.

Пусть E и F — векторные решетки. Ортогонально аддитивный оператор $T : E \to F$ называется: *порядково ограниченным*, если T отображает порядково ограниченные множества в E в порядково ограниченные множества в F. Порядково ограниченный, ортогонально аддитивный оператор $T\colon E \to F$ называется *абстрактным оператором Урысона*.

Векторное пространство всех абстрактных операторов Урысона из E в F обозначается $\mathcal{U}(E,F)$.

Одним из самых важных примеров является нелинейный интегральный оператор Урысона (см. [1], часть 5).

Пусть E — это снова векторная решетка, X — банахово пространство. Ортогонально аддитивный оператор $T : E \to X$ называется AM*-компактным*, если для любого порядково ограниченного множества $M \subset E$ его образ $T(M)$ — предкомпактное множество в X;

Используя описание булевой алгебры осколоков положительного абстрактного оператора Урысона, полученное в [2] мы можем доказать следующую теорему

Теорема. *Пусть E — порядково полная векторная решетка, F — банахова решетка с порядково непрерывной нормой, $T \in \mathcal{U}_+(E,F)$ — AM-компактный оператор. Тогда каждый оператор $S \in \mathcal{U}_+(E,F)$, такой что $0 \leqslant S \leqslant T$ также является AM-компактным.*

Литература

1. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространстве суммируемых функций.—М.: Наука, 1966.—501 с.
2. *Pliev M.* Domination problem for narrow orthogonally additive operators // Positivity.—(DOI: 10.1007/s11117-016-0401-9).

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ, ОСРЕДНЕННОЙ ПО ТОНКОМУ СЛОЮ

Л. В. Сахарова

(Россия, Ростов-на-Дону; РГЭУ (РИНХ))

Построены аналитические решения асимптотической модели невязкой, нетемпературопроводной капли, полученной осреднением приближения Обербека — Буссинеска по тонкому слою испаряющейся (либо конденсирующейся) жидкости [1]:

$$h_t + \operatorname{div}(h^2 s) = -V_0\varphi; \tag{1}$$

$$s_t + (\beta_r - 1)h\, s \operatorname{div} s + (\beta_r - 1)hs\nabla s = 0; \tag{2}$$

$$\varphi_t + (\beta_r - 1)h\, \varphi \operatorname{div} s + (\beta_r - 1)hs\nabla \varphi = 0; \tag{3}$$

$$c_t + hs\nabla c = D\triangle c. \tag{4}$$

Здесь: h — толщина слоя жидкости, $s = (s_1, s_2)$, φ, c — осредненные функции поля скоростей жидкости, потока тепла и концентрации твердой примеси, зависящие от координат x_1, x_2 и времени t. Установлено, что для задачи (5)–(4) может быть построен ряд аналитических решений, представляющих собой как классические автомодельные решения, так и специальные, связанные с особенностями рассматриваемой задачи. Выделены следующие основные типы решений.

1. Классические автомодельные решения, основанные на степенных заменах переменных, например: $x/\sqrt{t} = z$, где $x = (x_1, x_2)$, $z = (z_1, z_2)$ — новые переменные. Установлено, что данные замены допускают переход к новым неизвестным функциям $u = (u_1, u_2)$ и v, связаным со старыми посредством одной из следующих пар формул:

1) $s = u/\sqrt{t}$, $\varphi = v/t$;
2) $h = u/\sqrt{t}$, $\varphi = v/\sqrt{t^3}$;
3) $h = tu$, $s = v/\sqrt{t^3}$.

Замены позволяют понизить размерность задачи и получить аналитические решения, представляющие собой зависимости толщины капли, поля скоростей, потока тепла и концентрации твердой примеси от времени и координат. Проанализирована их применимость к моделированию различных ситуаций: испарение, конденсация, пиннининг (закрепление границы трехфазного контакта), депиннинг (ее отрыв).

2. Степенные автомодельные решения для задачи (5)–(4), предварительно преобразованной к инвариантам Римана. Получены несколько типов решений, применимых к моделированию испарения-конденсации капли в различных геометрических условиях.

3. Экспоненциальное решение вида: $h = H(x, y)\exp(\lambda t)$, $s = S(x, y)\exp(-\lambda t)$, $\varphi = \Phi(x, y)\exp(\lambda t)$, $c = C(x, y)\exp(\lambda t)$, где λ — параметр, определяемый краевыми условиями. Данное автомодельное решение может быть использовано для описания как испарения, так и конденсации жидкой пленки в двух случаях:

1) если жидкость расположена неравномерным слоем между двумя твердыми стенками;

2) если на левой границе трехфазного контакта (жидкость-атмосфера-твердое основание) происходит протекание жидкости с экспоненциально заданой скоростью (т. е. имеет место дренаж).

4. Автомодельное решение типа бегущей волны, основанной на переходе к новой переменной: $\xi = x - vt$, где $v = (v_1, v_2)$ — скорость волны, $x = (x_1, x_2)$. Решение соответствует испарению-конденсации капли (пленки) жидкости в условиях направленного внешнего воздействия.

Построенные решения могут найти применение в моделировании современных технологических процессов, связанных с испарением-конденсацией капель и пленок жидкостей: в медицинской диагностике, фармакологических исследованиях, кристаллографии, полиграфии и т. п.

Литература

1. *Жуков М. Ю., Ширяева Е. В., Полякова Н. М.* Моделирование испарения капли жидкости.—Ростов н/Д.: Изд-во Южного федерального ун-та, 2015.—208 с.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XIII Междунар. науч. конф. (пос. Дивноморское, 7–14 сентября 2016 г.)

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛЕЖАНДРА КОНФОРМНО-ПЛОСКИХ МЕТРИК[1]

Е. Д. Родионов (Россия, Барнаул; АлтГУ),
В. В. Славский (Россия, Ханты-Мансийск; ЮГУ)

В теории выпуклых множеств [1] важную роль играет двойственность Минковского (преобразование Лежандра). Конформно-плоские метрики можно рассматривать в некотором смысле как раздел теории выпуклых множеств [2–4].

Теорема 1. *Пусть $f : R^{n+1} \to R$ — произвольная однородная степени один функция на R^{n+1}, $\vec{\nabla} f$ — обычный градиент функции f в евклидовом $(n+1)$-мерном арифметическом пространстве R^{n+1}. Тогда отображение $H_f(\vec{x})$, определяемое формулой*

$$H_f(\vec{x}) = \vec{x} - 2f(x)\frac{\vec{\nabla} f}{|\nabla f|^2} \in S^n, \tag{1}$$

будет отображением единичной сферы в себя $H_f : S^n \to S^n$. Будем называть H_f конформным градиентом функции f.

Определение 1. Пусть конформно-плоская метрика $ds^2 = \frac{dx^2}{f^2(x)}$ класса C^1 определена на n-мерной сфере $x \in S^n \subset R^{n+1}$, функция $f(x)$ по однородности ($f(\lambda x) \equiv \lambda f(x)$, $\lambda > 0$) продолжена на все пространство R^{n+1}. Предположим, что конформный градиент $H_f : S^n \to S^n$ — взаимнооднозначное отображение. Преобразованием Лежандра метрики $ds^2 = \frac{dx^2}{f^2(x)}$ назовем конформно-плоскую метрику $ds^{*2} = \frac{dy^2}{f^{*2}(y)}$ на сфере $y \in S^n \subset R^{n+1}$, определяемую из равенств

$$f^{*2}(y) = \frac{2f(x)}{|\nabla f(x)|^2}, \quad y = H_f(x). \tag{2}$$

Теорема 2. *Пусть конформно-плоская метрика ds^2 принадлежит классу C^2 и имеет положительную одномерную секционную кривизну [2], т. е. неравенство*

$$K_{1/2}(x,\xi) = f(x)\frac{d^2 f}{d\xi^2} - \frac{1}{2}|\nabla f|^2 > 0 \tag{3}$$

выполняется для любой точки $x \in S^n \subset R^{n+1}$ и любого касательного единичного вектора $\xi \in T_x(S^n)$, здесь ∇f — градиент функции f в R^{n+1}, $\frac{d^2 f}{d\xi^2}$ — вторая производная функции f в R^{n+1} вдоль вектора ξ. Тогда конформный градиент $H_f : S^n \to S^n$ — диффеоморфизм сферы и преобразование Лежандра $ds^{*2} = \frac{dy^2}{f^{*2}(y)}$ обладает свойствами:

- *одномерная секционная кривизна метрики $ds^{*2} = \frac{dy^2}{f^{*2}(y)}$ положительна;*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке грантов правительства Российской Федерации: (14.B25.31.0029, Nsh of RF (2263.2014.1)), the RFBR (15-41-00092-r–Urals, 15-41-00063-r–Urals, 15-01-06582-a, 16-01-00336-a).

• *главные значения одномерных секционных кривизн метрик ds^2 и ds^{*2} в соответствующих точках и направлениях связаны равенствами $k_i k_i^* = 1$, $i = 1, \ldots, n$;*

• *преобразование Лежандра инволютивно $f^{**} = f$.*

Замечание 1. Неотрицательность (3) одномерной секционной кривизны конформно-плоской метрики эквивалентному [2] следующему свойству:

$$\sqrt{f(x)} \leqslant \sqrt{f(x_1)}\,\frac{|x_2 - x|}{|x_2 - x_1|} + \sqrt{f(x_2)}\,\frac{|x - x_1|}{|x_2 - x_1|}, \tag{4}$$

для любых трех точек x_1, x, x_2 сферы. Здесь $|b - a|$ – обычное хордовое расстояние между точками a и b в евклидовом пространстве R^{n+1}.

Двойственная к конформно-плоской метрике с неотрицательной одномерной секционной кривизной (4) может быть определена без требования гладкости метрики.

Литература

1. *Кутателадзе С. С., Рубинов А. М.* Двойственность Минковского и ее приложения.—Новосибирск: Наука, 1976.—257 с.
2. *Куркина М. В., Родионов Е. Д., Славский В. В.* Численные методы интерполяции для решения некоторых задач выпуклой геометрии в пространстве Лобачевского // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика.—2013.—Т. 13, № 1.—С. 76–90.
3. *Kurkina M. V., Rodionov E. D., Slavsky V. V.* Conformally Convex Functions and Conformally Flat Metrics of Nonnegative Curvature // Dokl. Math.—2015.—Vol. 91, № 3.—P. 1–3.
4. *Куркина М. В., Родионов Е. Д., Славский В. В.* Конформно-плоские метрики и теория потенциалов // Мат. и ее прил.: фундам. проблемы науки и техники.—Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2015.—С. 59–68.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ ПО ПРОИЗВОДНЫМ ДРУГИХ ПОРЯДКОВ

С. А. Унучек

(Россия, Москва; РАНХиГС)

Рассмотрим соболевское пространство функций $\mathcal{W}_2^n(\mathbb{R}) = \{x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}) : x^{(n-1)}(\cdot)$ — локально абсолютно непрерывна, $x^{(n)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $n_0 = 0$, $n_1, n_2, k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, $0 < k_1 < n_1 < k_2 < n_2$. Предположим, что для каждой функции $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R})$ приближенно известны ее производные n_1-го и n_2-го порядков и сама функция, т. е. известны функции $y_0(\cdot)$, $y_1(\cdot)$ и $y_2(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ такие, что $\|x^{(n_j)}(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \delta_j$, $j = 0, 1, 2$. Задача состоит в одновременном оптимальном восстановлении производных k_1-го и k_2-го порядков функции $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R})$, $0 < k_1 < n_1 < k_2 < n_2$.

В качестве методов восстановления рассмотрим всевозможные отображения $\varphi\colon (L_2(\mathbb{R}))^3 \to (L_2(\mathbb{R}))^2$. Погрешностью методов φ будем называть величину

$$e\big(\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}, \varphi\big) = \sup_{\substack{x(\cdot)\in\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}),\, \overline{Y}\in(L_2(\mathbb{R}))^3,\\ \|x^{(n_j)}(\cdot)-y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\leqslant\delta_j,\, j=0,1,2}} \sqrt{\sum_{j=1}^{2} p_j \big\|x^{(k_j)}(\cdot) - \varphi_j(\overline{Y})(\cdot)\big\|^2_{L_2(\mathbb{R})}},$$

где $\overline{K} = (k_1, k_2)$, $\overline{\delta} = (\delta_0, \delta_1, \delta_2)$, $\overline{Y} = (y_0(\cdot), y_1(\cdot), y_2(\cdot))$, $\varphi = (\varphi_1(\overline{Y}), \varphi_2(\overline{Y}))$. Здесь $p = (p_1, p_2)$, $p_1, p_2 \geqslant 0$ — весовые коэффициенты, варьируя которые можно отдавать предпочтение более точному восстановлению производной какого-либо порядка.

Погрешностью оптимального восстановления называется величина $E(\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}) = \inf_{\varphi\colon (L_2(\mathbb{R}))^3\to(L_2(\mathbb{R}))^2} e(\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}, \varphi)$. Методы $\widehat{\varphi}$, на которых достигается нижняя грань, будем называть оптимальными методами.

Теорема 1. *Если $\delta_1 \geqslant \delta_2^{n_1/n_2}\delta_0^{1-n_1/n_2}$, погрешность оптимального восстановления равна $E(\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}) = \sqrt{\widehat{\lambda}_0\delta_0^2 + \widehat{\lambda}_2\delta_2^2}$, где*

$$\widehat{\lambda}_0 = p_1 \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2k_1/n_2} \left(1 - \frac{k_1}{n_2}\right) + p_2 \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2k_2/n_2} \left(1 - \frac{k_2}{n_2}\right),$$

$$\widehat{\lambda}_2 = p_1 \frac{k_1}{n_2} \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2(k_1/n_2-1)} + p_2 \frac{k_2}{n_2} \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2(k_2/n_2-1)}.$$

Метод $\widehat{\varphi} = (\widehat{\varphi}_1(\overline{Y}), \widehat{\varphi}_2(\overline{Y}))$ такой, что его преобразование Фурье $F\widehat{\varphi}_s(\overline{Y}) = (i\xi)^{k_s}\,(1 - \alpha_s(\xi))\,Fy_0(\xi) + (i\xi)^{k_s-n_2}\alpha_s(\xi)Fy_2(\xi)$, $s = 1, 2$, где

$$\alpha_s(\xi) = \frac{\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2} + \theta_s(\xi)|\xi|^{n_2}\sqrt{\widehat{\lambda}_0\widehat{\lambda}_2\big(\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2} - p_1\xi^{2k_1} - p_2\xi^{2k_2}\big)}}{\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}},$$

а $\theta_s(\cdot)$ — *произвольные функции из* $\mathbf{L}_\infty(\mathbf{R})$, *удовлетворяющие условию* $p_1\xi^{2k_1}\theta_1^2(\xi)+p_2\xi^{2k_2}\theta_2^2(\xi)\leqslant 1$, *является оптимальным.*

Положим

$$W=\sqrt{p_1^2\delta_0^2+2p_1p_2\delta_1^2+p_2^2\delta_2^2},$$

$$\widehat{\lambda}_0=\begin{cases}\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{\delta_2}{\delta_0}}\left(3p_1+p_2\dfrac{\delta_2}{\delta_0}\right), & \delta_1\geqslant\sqrt{\delta_0\delta_2},\\ \dfrac{p_1^2\delta_1}{2W}, & \delta_1\leqslant\sqrt{\delta_0\delta_2},\end{cases}$$

$$\widehat{\lambda}_1=\begin{cases}0, & \delta_1\geqslant\sqrt{\delta_0\delta_2},\\ \dfrac{p_2^2W^2+2p_1p_2\delta_1^2}{2\delta_1W}, & \delta_1\leqslant\sqrt{\delta_0\delta_2},\end{cases}$$

$$\widehat{\lambda}_2=\begin{cases}\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{\delta_0}{\delta_2}}\left(p_1\dfrac{\delta_0}{\delta_2}+3p_2\right), & \delta_1\geqslant\sqrt{\delta_0\delta_2},\\ \dfrac{p_2^2\delta_1}{2W}, & \delta_1\leqslant\sqrt{\delta_0\delta_2}.\end{cases}$$

Теорема 2. *Пусть* $k_1=1$, $n_1=2$, $k_2=3$, $n_2=4$. *Тогда*

$$E\big(\mathcal{W}_2^4(\mathbb{R}),\overline{K},\overline{\delta}\,\big)=\begin{cases}\sqrt[4]{\delta_0\delta_2}\,\sqrt{p_1\delta_0+p_2\delta_2}, & \delta_1\geqslant\sqrt{\delta_0\delta_2},\\ \sqrt{\delta_1W}, & \delta_1\leqslant\sqrt{\delta_0\delta_2}.\end{cases}$$

Метод $\widehat{\varphi}=(\widehat{\varphi}_1(\overline{Y}\,),\widehat{\varphi}_2(\overline{Y}\,))$ *такой, что его преобразование Фурье* $F\widehat{\varphi}_s(\overline{Y})=\sum_{j=0}^2\alpha_j^s(\xi)Fy_j(\xi)$, $s=1,2$, *где* $\alpha_j^s(\cdot)$ — *любые функции из* $\mathbf{L}_\infty(\mathbf{R})$, *удовлетворяющие в случае* $\delta_1\geqslant\sqrt{\delta_0\delta_2}$ *условиям*

$$\alpha_0^s(\xi)=(i\xi)^{2s-1}\,\frac{\widehat{\lambda}_0-\theta_s(\xi)\xi^4\sqrt{\widehat{\lambda}_0\widehat{\lambda}_2\big(\widehat{\lambda}_0+\widehat{\lambda}_2\xi^8-p_1\xi^2-p_2\xi^6\big)}}{\widehat{\lambda}_0+\widehat{\lambda}_2\xi^8},$$

$$\alpha_1^s(\xi)=0,$$

$$\alpha_2^s(\xi)=(i\xi)^{2s-5}\,\frac{\widehat{\lambda}_2\xi^8+\theta_s(\xi)\xi^4\sqrt{\widehat{\lambda}_0\widehat{\lambda}_2\big(\widehat{\lambda}_0+\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}-p_1\xi^2-p_2\xi^6\big)}}{\widehat{\lambda}_0+\widehat{\lambda}_2\xi^8},$$

$$s=1,2,$$

а $\theta_s(\cdot)$ — *произвольные функции из* $\mathbf{L}_\infty(\mathbf{R})$, *удовлетворяющие условию* $p_1\xi^2\theta_1^2(\xi)+p_2\xi^6\theta_2^2(\xi)\leqslant 1$, *в случае* $\delta_1<\sqrt{\delta_0\delta_2}$ *условиям*

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=0}^{2}(i\xi)^{2j}\alpha_j^s(\xi)=(i\xi)^{2s-1}, & s=1,2,\\ p_1\left(\sum\limits_{j=0}^{2}\dfrac{|\alpha_j^1(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_j}\right)+p_2\left(\sum_{j=0}^{2}\dfrac{|\alpha_j^2(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_j}\right)\leqslant 1,\end{cases}$$

является оптимальным.

Литература

1. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* О наилучших методах восстановления производных на соболевских классах // Изв. РАН. Сер. мат.— 2014.—Т. 78, № 6.—С. 83–102.
2. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации // Функц. анализ и его прил.—2003.—№ 37.—С. 51–64.
3. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Неравенство Харди — Литтлвуда — Полиа и восстановление производных по неточной информации // Докл. РАН.—2011.—Т. 438, № 3.—С. 300–302.

ОБОБЩЕННЫЕ ВЕСОВЫЕ ГРАНД-ПРОСТРАНСТВА ОРЛИЧА

А. Ф. Чувенков
(Россия, Ростов-на-Дону; РГЭУ (РИНХ))

Пусть M есть функция в смысле Юнга. Обозначаем класс измеримых функций $f(x)$ на произвольном открытом множестве $\Omega \subset R^n$ с весом $w(x)$ как

$$K_M(\Omega, w) = \left\{ f : \ \rho(f, M, w) = \int\limits_{\Omega} M(|f(x)|)\, w(x)\, dx < \infty \right\},$$

соответственно весовое пространство Орлича $L_M(\Omega, w)$ [1].

Обозначаем:

$$p = \min\{p_0, p_\infty\}, \quad p_0 = \lim_{u\to 0} \inf \varphi_M(u), \quad p_\infty = \lim_{u\to 0} \sup \varphi_M(u),$$

где $\varphi_M(u) = \frac{uM'(u)}{M(u)}$.

Предполагаем $1 < p_0 \leqslant \infty$, $1 < p_\infty \leqslant \infty$, $1 < p < \infty$.

Для любого веса $a(x)$ из пространства $K_M(\Omega, w)$ определяем новый (дополнительный) вес формулой:

$$w_\delta(x) \equiv w_\delta(a, M) = (\rho\delta)^{\frac{1}{p}} M^\delta(a(x)) \cdot w(x), \quad 0 < \delta < 1 - \frac{1}{p}.$$

Через $L^a_{M),s}(\Omega, w)$ обозначим обобщенное весовое гранд-пространство Орлича с весом $w_\delta(x)$:

$$\left\{ f : \ \rho_{a,s}(f, M, w) \equiv \left| \int\limits_0^{1-\frac{1}{p}} \left[\int\limits_\Omega M^{1-\delta}(|f(x)|)\, w_\delta(a, M)\, dx \right]^{\frac{s}{1-\delta}} d\delta \right|^{\frac{1}{s}} < \infty \right\},$$

где $f \in L_M(\Omega, w)$, $s \in [1, \infty]$.

В случае, когда $M(u) = \frac{u^p}{p}$, $1 < p < \infty$, $s = \infty$ получаем гранд-пространства Лебега: для ограниченных множеств $L^{p)}(\Omega)$ [2], для неограниченных — $L^{p)}_a(\Omega, w)$ [3]. Введенное обобщенное весовое гранд-пространство Орлича является непрерывным расширением (в смысле квазиметрики) исходного весового пространства Орлича.

Теорема 1. *Пусть функция f принадлежит классу Орлича $K_M(\Omega, w)$, $1 < p = \min\{p_0, p_\infty\} < \infty$, a — положительный вес. Для верной оценки*

$$\rho_a(f, M, w) \leqslant C_{p,a} \cdot \rho(f, M, w)$$

с точной константой $C_{p,a}$ достаточно, чтобы $a \in K_M(\Omega, w)$.

При $s = \infty$ достаточное условие является и необходимым.

Литература

1. *Rao M. M., Ren Z. D.* Theory of Orlicz Spaces: Crc Press, 1991.—472 p.
2. *Iwaniec T, Sbordone C.* On the integrability of the Jacobian under minimal hypotheses // Arch. Rational Mech. Anal.—1992.—№ 192.—P. 129–143.
3. *Умархаджиев С. М.* Обобщение понятия гранд-пространства Лебега // Изв. вузов. Математика.—2014.—№ 4.—С. 42–51.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XIII Междунар. науч. конф. (пос. Дивноморское, 7–14 сентября 2016 г.)

КАКИМИ БЫВАЮТ «ТУПИКОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА» И ЗАЧЕМ ОНИ НУЖНЫ?

М. Шубарин

(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

1. Если E, F — локально выпуклые пространства (в частности нормируемые или метризуемые), то через $L(E,F)$ обозначают множество всех линейных, непрерывных операторов, действующих из E в F. Для локально выпуклых пространств E, F будем писать $E \hookrightarrow F$, если E является векторным подпространством в F, оператор вложения $j : E \to F$ непрерывен и образ этого оператора всюду плотен в F.

2. В докладе содержится обзор различных подходов к определению понятия «тупиковое пространство», возникшего при изучении проблемы существования базиса в пространстве Фреше (в частности — дополняемых подпостранствах специального вида).

Тупиковые пространства в работах Б. С. Митягин [1] и Б. С. Митягина, Г. М. Хенкина [2] (модифицированный метод тупикового пространства сформулирован в работе Ф. Хаслингера [3]) использовались для доказательства существования базиса в пространстве Фреше при дополнительном условии, которое описывается терминах принадлежности этого пространства пространственным идеалам $(\underline{DN})$ и $(\overline{\Omega})$.

Другой подход к определению тупикового пространства (в докладе эти пространства будут называться почти тупиковыми) был использован Кондаковым В. П., который сформулировал критерий существования базиса в счетно гильбертовом пространстве в терминах существования почти тупикового пространства.

Пусть X — пространство Фреше, X_∞ — банахово пространство.

Определение 1. Пространство X_∞ будем называть *тупиковым* для X, если $X_\infty \hookrightarrow X$ и существует «хорошее» семейство $[F_\tau]_{\tau\in(0,1)}$ интерполяционных функторов (определенных на категории интерполяционных пар банаховых пространств) такое, что

$$X = \lim_{\tau\in(0,1)} \mathrm{pr}\, F_\tau(X_0, X_\infty)$$

для подходящего банахова пространств X_0 такого, что $X \hookrightarrow X_0$.

Определение 2. Пространство X_∞ будем называть *сильно тупиковым* для X, если выполняются следующие условия:

1. X_∞ является слабо тупиковым для X;
2. $L(X_\infty, X_\infty) \hookrightarrow L(X, X)$.

Определение 3. Пространство X_∞ будем называть *почти тупиковым* для X, если выполняются следующие условия:

1. X_∞ является слабо тупиковым для X;

2. X интерполяционно между X_0 и X_∞.

Если X — счетно гильбертово, то пространства X_0 и X_∞ из определений 1 и 2 предполагаются гильбертовыми.

В докладе предполагается ответить на следующие вопросы:

• При каких условиях для пространства Фрееш существует тупиковое пространство (в том или ином смысле)?

• Как тупиковые пространства можно применять для доказательства существования базиса в пространстве Фреше?

Самым простым будет ответ на последний вопрос:

Теорема 1. *Пусть X — счетно гильбертово пространство Фреше, для которого существует тупиковое или сильно тупиковое гильберотово пространство. Тогда в X существует безусловный базис.*

Литература

1. *Митягин Б. С.* Эквивалентность базисов в гильбертовых шкалах // Stud. Math.—1970.—Vol. 37.—P. 111–137.
2. *Митягин Б. С., Хенкин Г. М.* Линейные задачи комплексного анализа // Успехи мат. наук.—1971.—Т. 26, вып. 4.—С. 93–152.
3. *Haslinger F.* Weighted Spaces of Entire Functons // Indiana Univ. Math. J.—1986.—Vol. 35, № 1.—P. 193–208.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XIII Междунар. науч. конф. (пос. Дивноморское, 7–14 сентября 2016 г.)

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ИНТЕГРАЛОВ ЗНАЧЕНИЯМИ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРОИЗВОДНЫХ НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ДВУХТОЧЕЧНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ ЭРМИТА

В. В. Шустов
(Россия, Москва; ГосНИИАС)

В традиционных методах вычисления определенных интегралов — методах трапеций, Симпсона, Гаусса [1–2] и др. используются только значения функции на отрезке интегрирования и не учитываются значения ее производных. При этом подходе обычно осуществляется замена данной функции, другой, более простой и, далее, вычисляется интеграл от этой упрощенной функции. За приближенное значение интеграла от заданной функции принимается значение интеграла от приближающей функции.

Одним из направлений приближения функций является использование интерполяционных многочленов Эрмита, в которых используются данные о значениях не только функции, но и о ее производных до определенного порядка, заданных в узловых точках. Приближение функций с использованием частного вида многочленов Эрмита, именно двухточечных многочленов, когда значения функции и ее производных заданы на концах отрезка, рассмотрено в [3].

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[x_0, x_1]$ и имеет достаточный набор производных на этом отрезке. Пусть также в обеих концевых точках отрезка $[x_0, x_1]$ заданы значения функции $f(x)$ и ее производных до порядка m включительно:

$$f^{(j)}(x_i) = f_i^{(j)}, \quad j = 0, 1, \ldots, m, \quad i = 0, 1. \tag{1}$$

Из условия существования производных следует, что для функции $f(x)$ существует определенный интеграл

$$I = \int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx.$$

В докладе рассматривается приближение этого интеграла интегралом, построенным для функции, которая является приближением к заданной функции $f(x)$. В качестве приближающей функции используется двухточечный интерполяционный многочлен Эрмита $H_m(x)$ [3]. Интеграл I представляется в виде

$$I = I_m + r_m,$$

где

$$I_m = \int\limits_{x_0}^{x_1} H_m(x)\, dx$$

и r_m — остаточный член.

В докладе доказывается следующая теорема.

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям* (1). *Тогда для определенного интеграла для этой функции имеет место формула*

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{m} D_m^j\, L^{j+1}\left[f_0^{(j)} + (-1)^j f_1^{(j)}\right] + r_m,$$

где

$$D_m^j = \frac{1}{j!}\sum_{k=0}^{m-j}\frac{c_{m+k}^k}{(2+m+j+k)c_{m+1+j+k}^{j+k}} = \frac{c_{m+1}^{j+1}}{(j+1)!c_{2m+2}^{j+1}},$$

$$r_m = \frac{(-1)^{m+1}f^{(2m+2)}(\eta)L^{2m+3}}{(2m+2)!}\,\frac{(m+1)!(m+1)!}{(2m+3)!},$$

$L = x_1 - x_0$ *и точка* $\eta \in (x_0, x_1)$.

Следствие. *Пусть производная функции порядка* $2m+2$ *включительно на отрезке* $[x_0, x_1]$ *ограничена некоторой константой* $M_{2m+2} > 0$, *т. е. считаем, что*

$$\left|f^{(2m+2)}(x)\right| \leqslant M_{2m+2}, \quad x \in (x_0, x_1).$$

Тогда для погрешности приближения интеграла функции $\delta_m = |r_m|$ *имеет место*

$$\delta_m \leqslant \Delta_m,$$

где Δ_m *обозначена оценка погрешности приближения*

$$\Delta_m = \frac{M_{2m+2}L^{2m+3}}{(2m+2)!}\,\frac{(m+1)!(m+1)!}{(2m+3)!}.$$

В таблице приведены формулы представления интеграла I_m и оценки его погрешности Δ_m для начальных значений m.

m	Формулы для интеграла I_m	Δ_m
0	$I_0 = \frac{L}{2}(f_0 + f_1)$	$\frac{M_2L^3}{12}$
1	$I_1 = \frac{L}{2}(f_0 + f_1) + \frac{L^2}{12}(f_0' - f_1')$	$\frac{M_4L^5}{720}$
2	$I_2 = \frac{L}{2}(f_0 + f_1) + \frac{L^2}{10}(f_0' - f_1') + \frac{L^3}{120}(f_0'' + f_1'')$	$\frac{M_6L^7}{100800}$
3	$I_3 = \frac{L}{2}(f_0 + f_1) + \frac{3L^2}{28}(f_0' - f_1') + \frac{L^3}{84}(f_0'' + f_1'') + \frac{L^4}{1680}(f_0''' - f_1''')$	$\frac{M_8L^9}{25401600}$
4	$I_4 = \frac{L}{2}(f_0 + f_1) + \frac{L^2}{9}(f_0' - f_1') + \frac{L^3}{72}(f_0'' + f_1'') + \frac{L^4}{1008}(f_0''' - f_1''') + \frac{L^5}{30240}(f_0^{(4)} + f_1^{(4)})$	$\frac{M_{10}L^{11}}{10059033600}$

В докладе полученные результаты сопоставляются с формулой Эйлера — Маклорена [4], даются примеры вычисления определенного интеграла заданной функции для различных порядков используемых производных, приводятся численные данные о погрешности и о ее оценке.

Литература

1. *Крылов В. И.* Приближенное вычисление интегралов.—М.: Наука, 1967.—500 с.
2. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы.—М.: Наука, 1988.—256 с.
3. *Шустов В.В.* О приближении функций двухточечными интерполяционными многочленами Эрмита // Журн. вычисл. математики и мат. физики.—2015.—Т. 55, № 7.—С. 1091–1108.
4. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений. Т. 1.—М.: Физматлит, 1962.—464 с.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XIII Междунар. науч. конф. (пос. Дивноморское, 7–14 сентября 2016 г.)

ТЕОРЕМА РАДОНА — НИКОДИМА ДЛЯ ВПОЛНЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ A-МОДУЛЯХ

Я. В. Эльсаев

(Россия, Владикавказ; ЮМИ)

Теория гильбертовых модулей над локальными $C^\star$-алгебрами изложена в [1]. Результаты, представленные в докладе, продолжают работу [2]. Введем необходимые понятия. Пусть A — локальная $C^\star$-алгебра. *Предгильбертовым A-модулем* называется комплексное векторное пространство $\mathcal{M}$, которое также является правым A-модулем, снабженным полуторалинейной формой $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{M}\times\mathcal{M} \to A$, называемой A-значным скалярным произведением, удовлетворяющей следующим свойствам:

$\langle x,x\rangle \geqslant 0$ для любого $x \in \mathcal{M}$;

$\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ для любого $x \in \mathcal{M}$;

$\langle x,y\rangle^\star = \langle y,x\rangle$ для любых $x, y \in \mathcal{M}$;

$\langle x,ya\rangle = \langle y,x\rangle a$ для любых $x, y \in \mathcal{M}$, $a \in A$.

Будем говорить, что $\mathcal{M}$ — это *гильбертов* A-модуль, если $\mathcal{M}$ является полным топологическим векторным пространством относительно топологии, задаваемой семейством полунорм:

$$\|x\|_\alpha := \sqrt{\|\langle x,x\rangle\|_\alpha}, \quad x \in \mathcal{M}.$$

Мы будем обозначать локальные гильбертовы пространства буквами H, K. Линейное отображение $\Phi : \mathcal{M} \to L(H,K)$ называется *вполне положительным* отображением гильбертовых модулей, если существует линейное, вполне положительное отображение локальных $C^\star$-алгебр $\varphi : A \to L(H)$ такое, что

$$\big\langle \Phi(x), \Phi(y)\big\rangle = \varphi(\langle x,y\rangle)$$

для любых $x, y \in \mathcal{M}$. Множество всех вполне положительных линейных отображений из $\mathcal{M}$ в $L(H,K)$ обозначается $\mathcal{C}(\mathcal{M}, L(H,K))$. Множество

$$\pi(\mathcal{M})' := \big\{T \oplus N \in L(H\oplus K) : \ \pi(x)T = N\pi(x); \ \pi(x)^\star N = T\pi(x)^\star; \ x \in \mathcal{M}\big\}$$

называется *коммутантом* $\pi(\mathcal{M})$. Отметим, что $\pi(\mathcal{M})'$ является локальной $C^\star$-алгеброй. Имеет место следующий результат.

Теорема. *Пусть $\Phi, \Psi \in \mathcal{C}(\mathcal{M}, L(H,K))$ и $\Psi \preceq \Phi$. Тогда существует однозначно определенный положительный линейный оператор $\Delta_\Psi^\Phi \in (\pi^\Phi(\mathcal{M})')$ такой, что $\Psi \sim \Phi_{\sqrt{\Delta_\Phi^\Psi}}$.*

Литература

1. *Joita M.* Hilbert modules over locally $C^\star$-algebras.—Bucharest: Bucharest Univ. Press, 2006.—147 p.
2. *Плиев М. А., Малиев И. Н.* О представлении типа Стайнспринга для операторов в гильбертовых модулях над локальными $C^\star$-алгебрами // Изв. вузов. Мат-ка.—2012.—№ 12.—С. 51–58.

Секция II

Дифференциальные уравнения

OPTIMAL CONTROL FOR A CLASS OF NON-NEWTONIAN FLUIDS[1]

M. A. Artemov (Russia, Voronezh; VSU),
E. S. Baranovskii (Russia, Voronezh; VSU)

We consider the following optimal control problem for equations describing the steady motion of a nonlinear-viscous incompressible fluid [1] in a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ or 3) with impermeable boundary $\Gamma \in \mathcal{C}^2$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} - \operatorname{div} \boldsymbol{S} + \nabla p = \boldsymbol{f} & \text{in } \Omega, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 & \text{in } \Omega, \\ \boldsymbol{S} = \psi(I_2(\boldsymbol{v}))\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}) & \text{in } \Omega, \\ \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{on } \Gamma, \\ \boldsymbol{v} = \mathbf{0} & \text{on } \Gamma \setminus \Gamma_c, \\ (\boldsymbol{S}\mathbf{n})_\tau = \boldsymbol{u} & \text{on } \Gamma_c, \\ \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}, & \\ J(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{u}) \to \inf, & \end{cases} \tag{P}$$

where $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ is the flow velocity at a point $\boldsymbol{x} \in \Omega$, $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})$ is the rate of deformation tensor, $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}) = (\nabla \boldsymbol{v} + (\nabla \boldsymbol{v})^{\mathrm{T}})/2$, $I_2(\boldsymbol{v})$ is the second invariant of the tensor $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})$, $I_2(\boldsymbol{v}) = \operatorname{trace}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})^2)$, $p = p(\boldsymbol{x})$ is the pressure, $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})$ is the extra-stress tensor, $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ is the body force, ψ is a given function, $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\boldsymbol{x})$ is the unit vector of the outer normal to Γ, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ is the control, $\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{n}$ is the scalar product of the vectors $\boldsymbol{v}$ and $\mathbf{n}$ in space $\mathbb{R}^n$, the symbol $[\,\cdot\,]_\tau$ denotes the tangential component of a vector, Γ_c is a part of Γ from which the control is realized, $\boldsymbol{U}$ is the set of admissible controls, and $J = J(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{u})$ is a given cost functional.

A specific feature of control problem (P) is that the surface force at the boundary of the flow domain is used as a control parameter instead of the non-homogeneous Dirichlet boundary condition for the velocity field. Such an approach makes it possible to consider the case of flow control in a domain with impermeable solid walls without using external body forces as control parameters.

In this paper we present sufficient conditions for the solvability of problem (P) in a weak formulation.

Let us introduce the following notation. By $\mathbb{M}_s^{n\times n}$ denote the space of symmetric $n \times n$-matrices with the norm $\|\boldsymbol{A}\|_{\mathbb{M}_s^{n\times n}} = (\operatorname{trace}(\boldsymbol{A}^2))^{1/2}$. We use the standard notations $\boldsymbol{L}_q(\Omega, \boldsymbol{E})$, $\boldsymbol{W}_q^m(\Omega, \boldsymbol{E})$ for the Lebesgue and Sobolev spaces of vector functions defined on Ω with values in a finite-dimensional space $\boldsymbol{E}$. The scalar product in the space $\boldsymbol{L}_2(\Omega, \boldsymbol{E})$ is denoted by $(\cdot, \cdot)$. Moreover, we introduce the spaces

$$\boldsymbol{L}_2^\tau(\Gamma_c, \mathbb{R}^n) = \big\{\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{L}_2(\Gamma_c, \mathbb{R}^n) :\ \boldsymbol{w} \cdot \mathbf{n} = 0\big\},$$

$$\boldsymbol{X}(\Omega, \mathbb{R}^n) = \big\{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{W}_2^1(\Omega, \mathbb{R}^n) :\ \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0,\ \boldsymbol{v}|_\Gamma \cdot \mathbf{n} = 0,\ \boldsymbol{v}|_{\Gamma\setminus\Gamma_c} = \mathbf{0}\big\}.$$

[1]The work of the second author was supported by RFBR according to grant 16-31-00182 mol_a.

Suppose that

(i) the function ψ is measurable and there exist constants a_1 and a_2 such that $0 < a_1 \leqslant \psi(t) \leqslant a_2$, $t \in [0, +\infty)$;

(ii) for any $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{M}_s^{n\times n}$ we have

$$\sum_{i,j=1}^{n} \Big(\psi\big(\|\boldsymbol{A}\|^2_{\mathbb{M}_s^{n\times n}}\big)A_{ij} - \psi\big(\|\boldsymbol{B}\|^2_{\mathbb{M}_s^{n\times n}}\big)B_{ij}\Big)\big(A_{ij} - B_{ij}\big) \geqslant 0;$$

(iii) the set $\boldsymbol{U}$ is bounded and sequentially weakly closed in $\boldsymbol{L}_2^{\tau}(\Gamma_c, \mathbb{R}^n)$;

(iv) the functional $J : \boldsymbol{X}(\Omega, \mathbb{R}^n) \times \boldsymbol{L}_2(\Omega, \mathbb{M}_s^{n\times n}) \times \boldsymbol{L}_2^{\tau}(\Gamma_c, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ is lower weakly semicontinuous, i. e., for any sequence $\{(\boldsymbol{v}^k, \boldsymbol{S}^k, \boldsymbol{u}^k)\}_{k=1}^{\infty}$ such that $\boldsymbol{v}^k \to \boldsymbol{v}$ weakly in $\boldsymbol{X}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\boldsymbol{S}^k \to \boldsymbol{S}$ weakly in $\boldsymbol{L}_2(\Omega, \mathbb{M}_s^{n\times n})$, and $\boldsymbol{u}^k \to \boldsymbol{u}$ weakly in $\boldsymbol{L}_{\tau}^2(\Gamma_c, \mathbb{R}^n)$, we have

$$J(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{u}) \leqslant \varliminf_{k\to\infty} J\big(\boldsymbol{v}^k, \boldsymbol{S}^k, \boldsymbol{u}^k\big).$$

Now we introduce the concept of admissible triplets to problem (P) by analogy with the definition of generalized (weak) solutions to hydrodynamic models with slip boundary conditions (see, e. g., [1–3]).

Let $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}_2(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Definition 1. We say that a triplet $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{u}) \in \boldsymbol{X}(\Omega, \mathbb{R}^n) \times \boldsymbol{L}_2(\Omega, \mathbb{M}_s^{n\times n}) \times \boldsymbol{L}_2^{\tau}(\Gamma_c, \mathbb{R}^n)$ is an *admissible triplet* of control system (P) if

$$-\sum_{i=1}^{n} \Big(v_i \boldsymbol{v}, \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x_i}\Big) + \big(\psi(I_2(\boldsymbol{v}))\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\varphi})\big) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\varphi}) + \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\varphi}\, d\Gamma_c$$

for any $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{X}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ and if the relations $\boldsymbol{S} = \psi(I_2(\boldsymbol{v}))\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})$ and $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}$ hold.

Let $\boldsymbol{M}$ be the set of admissible triplets to problem (P).

Definition 2. By a *solution* to problem (P) we mean a triplet $(\boldsymbol{v}_*, \boldsymbol{S}_*, \boldsymbol{u}_*) \in \boldsymbol{M}$ at which the functional J attains the minimum:

$$J(\boldsymbol{v}_*, \boldsymbol{S}_*, \boldsymbol{u}_*) = \inf_{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{u}) \in \boldsymbol{M}} J(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{u}).$$

Our main result is the following theorem.

Theorem. *If conditions* (i), (ii), (iii), (iv) *hold, then problem* (P) *has at least one solution.*

Remark. For flows of nonlinear-viscous fluids in a two-dimensional domain, the optimal control problems were analyzed in the papers [4, 5].

References

1. *Litvinov V. G.* Motion of a Nonlinear-Viscous Fluid.—M.: Nauka, 1982.—376 p.
2. *Baranovskii E. S.* Existence results for regularized equations of second-grade fluids with wall slip // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.—2015.—№ 91.—P. 1–12.
3. *Artemov M. A., Baranovskii E. S.* Mixed boundary-value problems for motion equations of a viscoelastic medium // Electron. J. Differ. Equ.—2015.—№ 252.—P. 1–9.
4. *Slawig T.* Distributed control for a class of non-Newtonian fluids // J. Differ. Equ.—2005.—Vol. 219.—P. 116–143.
5. *Wachsmuth D., Roubicek T.* Optimal control of planar flow of incompressible non-Newtonian fluids // Z. Anal. Anwend.—2010.—Vol. 29.—P. 351–376.

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С МОНОТОННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

С. Н. Асхабов

(Россия, Грозный; ЧГУ)

Применяя методы теории максимальных монотонных операторов [1], в вещественном пространстве Лебега $L_p(\varrho)$ со степенным весом $\varrho(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ при достаточно легко обозримых ограничениях на нелинейность доказаны теоремы о существовании и единственности решения для трех различных классов нелинейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с произвольным положительным параметром. При этом, в отличие от работ [2] и [3], где рассмотрены другие классы нелинейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений, не используются формулы обращения сингулярных интегральных операторов. Следует отметить, что применение к нелинейным сингулярным интегро-дифференциальным уравнениям других методов, основанных на принципах Банаха или Шаудера, либо на теореме о неявной функции, приводит (см., например, [4]), соответственно, или к жестким ограничениям на параметр, либо к вырождению нелинейности (в случае пространств Лебега) или к мало обозримым ограничениям на нелинейность (в случае пространств Гёльдера).

Полученные в данной работе результаты при $p = 2$ охватывают, в частности, и случай линейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений. В этой связи отметим, что интерес к сингулярным интегро-дифференциальным уравнениям (линейным и нелинейным) вызван также их многочисленными и разнообразными приложениями в гидро и аэродинамике («уравнение крыла самолета», известное как «уравнение Прандтля»), теории упругости и автоматического управления, в области устойчивых процессов с независимыми приращениями и других (подробнее см., например, [3]).

Пусть $1 < p < \infty$ и $p' = p/(p-1)$. Обозначим через $L_p(\varrho)$ множество всех измеримых по Лебегу на отрезке $[-1, 1]$ вещественных функций с конечной нормой $\|u\|_{p,\varrho} = \left(\int_{-1}^{1} \varrho(x) \cdot |u(x)|^p\, dx\right)^{1/p}$, где вес $\varrho(x) = (1-x^2)^{-1/2}$. Известно (см., например, [4]), что $L_p(\varrho)$ есть рефлексивное банахово пространство и сопряженным с ним является пространство $L_{p'}(\sigma)$, где $\sigma(x) = (1-x^2)^{(p'-1)/2}$. Обозначим через $L_p^+(\varrho)$ множество всех неотрицательных функций из $L_p(\varrho)$, а через $C^1[-1, 1]$ — множество всех вещественных непрерывно дифференцируемых на отрезке $[-1, 1]$ функций.

Пусть вещественнозначная функция $F(x, u)$ определена при $x \in [-1, 1]$, $u \in (-\infty, \infty)$ и удовлетворяет условиям Каратеодори: она измерима по x при каждом фиксированном $u \in (-\infty, \infty)$ и непрерывна по u почти для всех $x \in [-1, 1]$.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть $p \geqslant 2$, $\varrho(x) = (1-x^2)^{-1/2}$, $b(x) \in C^1[-1, 1]$ и $f(x) \in L_{p'}(\sigma)$. Если для почти всех $x \in [-1, 1]$ и всех $u \in (-\infty, \infty)$ выполняются условия:*

1) $|F(x,u)| \leqslant a(x) + d_1 \cdot \varrho(x)\,|u|^{p-1}$, *где* $a(x) \in L^+_{p'}(\sigma)$, $d_1 > 0$;

2) $F(x,u)$ *не убывает по* u *почти при каждом фиксированном* $x \in [-1,1]$;

3) $F(x,u) \cdot u \geqslant d_2 \cdot \varrho(x)\,|u|^p - D(x)$, *где* $D(x) \in L^+_1(-1,1)$, $d_2 > 0$,

то при любых значениях параметра $\lambda > 0$ *уравнение*

$$\lambda \cdot F(x,u(x)) - \frac{b(x)}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{[b(s)\cdot u(s)]'}{s-x}\,ds = f(x)$$

имеет решение $u(x) \in L_p(\varrho)$ *с* $u'(x) \in L_{p'}(\sigma)$ *и* $u(\pm 1) = 0$. *Это решение единственно, если* $b(x) \neq 0$ *почти всюду на отрезке* $[-1,1]$ *или если в условии 2)* $F(x,u)$ *строго возрастает по* u.

Теорема 2. *Пусть* $p \geqslant 2$, $\varrho(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ *и* $f(x) \in L_p(\varrho)$. *Если для почти всех* $x \in [-1,1]$ *и всех* $u \in (-\infty,\infty)$ *выполняются условия:*

4) $|F(x,u)| \leqslant g(x) + d_3 \cdot (\varrho^{-1}(x)\,|u|)^{1/(p-1)}$, *где* $g(x) \in L^+_p(\varrho^{-1})$, $d_3 > 0$;

5) $F(x,u)$ *не убывает по* u *почти при каждом фиксированном* $x \in [-1,1]$;

6) $F(x,u) \cdot u \geqslant d_4 \cdot (\varrho^{-1}(x)\,|u|)^{1/(p-1)}|u| - D(x)$, *где* $D(x) \in L^+_1(-1,1)$, $d_4 > 0$,

то при любых значениях параметра $\lambda > 0$ *уравнение*

$$\lambda \cdot F(x,u'(x)) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{u(s)}{s-x}\,ds = f(x)$$

имеет единственное решение $u(x) \in L_p(\varrho)$ *с* $u'(x) \in L_{p'}(\sigma)$ *и* $u(\pm 1) = 0$.

Теорема 3. *Пусть* $p \geqslant 2$, $\varrho(x) = (1-x^2)^{-1/2}$, *функция* $f(x) \in L_p(\varrho)$ *определена в точках* ± 1 *и* $f'(x) \in L_{p'}(\sigma)$. *Если для почти всех* $x \in [-1,1]$ *и всех* $u \in (-\infty,\infty)$ *выполняются условия 4)–6) теоремы 2, причем в условии 4)* $g(\pm 1) = 0$, *а в условии 5)* $F(x,u)$ *строго возрастает по* u, *то при любых значениях параметра* $\lambda \geqslant 0$ *уравнение*

$$u(x) + \lambda \cdot F\left(x, -\frac{b(x)}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{[b(s)\cdot u(s)]'\,ds}{s-x}\right) = f(x)$$

имеет единственное решение $u(x) \in L_p(\varrho)$ *с* $u'(x) \in L_{p'}(\sigma)$ *и* $u(\pm 1) = f(\pm 1)$.

Заметим, что функция $F(x,u) = \left(\sqrt{1-x^2}\cdot u\right)^{1/(p-1)}$, где $p \geqslant 2$ — любое четное число, удовлетворяет всем требованиям теорем 2 и 3.

Литература

1. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.—М.: Мир, 1978.—336 с.
2. *Магомедов Г. М.* Метод монотонности в теории нелинейных сингулярных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения.—1977.—Т. 13, № 6.—С. 1106–1112.
3. *Wolfersdorf L. V.* Monotonicity methods for nonlinear singular integral and integro-differential equations // Z. angew. Math. u. Mech.—1983.—Bd. 63, № 6.—С. 249–259.
4. *Асхабов С. Н.* Нелинейные сингулярные интегральные уравнения в пространствах Лебега.—Грозный: Чеченский гос. ун-т, 2013.—136 с.

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МОДЕЛИ ВОДНЫХ РАСТВОРОВ ПОЛИМЕРОВ С УСЛОВИЕМ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ НА ГРАНИЦЕ[1]

Е. С. Барановский

(Россия, Воронеж; ВГУ)

Рассматривается начально-краевая задача для уравнений модели движения слабоконцентрированных водных растворов полимеров [1] в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с локально-липшицевой границей Γ при условии проскальзывания Навье на границе:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} - \operatorname{Div}\left(\nu \boldsymbol{D}\boldsymbol{v} + \varkappa\frac{\partial \boldsymbol{D}\boldsymbol{v}}{\partial t} + \varkappa(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{D}\boldsymbol{v}\right) + \nabla p = \boldsymbol{f} \quad \text{в} \quad \Omega\times(0,T), \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega\times(0,T), \tag{2}$$

$$\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{n} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma\times(0,T), \tag{3}$$

$$\left[\left(\nu \boldsymbol{D}\boldsymbol{v} + \varkappa\frac{\partial \boldsymbol{D}\boldsymbol{v}}{\partial t} + \varkappa(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{D}\boldsymbol{v}\right)\mathbf{n}\right]_\tau = -\mu\boldsymbol{v} \quad \text{на} \quad \Gamma\times(0,T), \tag{4}$$

$$\boldsymbol{v}(\cdot,0) = \boldsymbol{u} \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{5}$$

Здесь $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ — скорость жидкости в точке $\boldsymbol{x}\in\Omega$ в момент времени $t\in[0,T]$, $\boldsymbol{D}\boldsymbol{v} = (\nabla\boldsymbol{v} + (\nabla\boldsymbol{v})^{\mathrm{T}})/2$ — тензор скоростей деформации, $p = p(\boldsymbol{x},t)$ — давление, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ — скорость в начальный момент времени, $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)$ — внешние силы, $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\boldsymbol{x})$ — единичный вектор внешней нормали к Γ, символ $[\,\cdot\,]_\tau$ обозначает касательную составляющую вектора, функция $\mu\colon\Gamma\to[0,\infty)$ характеризует интенсивность пристенного проскальзывания, ν — коэффициент вязкости, $\nu>0$, $\varkappa$ — коэффициент, характеризующий релаксационные свойства среды, $\varkappa>0$.

В настоящей заметке представлены результаты о существовании и единственности глобальных (по времени и данным) слабых решений задачи (1)–(5).

Введем необходимые обозначения. Через $\boldsymbol{L}_q(\Omega)$ и $\boldsymbol{W}_q^m(\Omega)$ обозначаются пространства Лебега и Соболева функций, определенных на Ω со значениями в $\mathbb{R}^3$. Скалярное произведение в $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$ обозначается с помощью $(\cdot,\cdot)$. Пусть

$$\mathcal{X}(\Omega) = \left\{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{C}^\infty(\overline{\Omega}) : \nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0,\ \boldsymbol{v}|_\Gamma\cdot\mathbf{n} = 0\right\},$$

$$\boldsymbol{X}_m(\Omega) = \text{замыкание } \mathcal{X}(\Omega) \text{ в } \boldsymbol{W}_2^m(\Omega), \quad \text{где} \quad m\in\{0,1,2,\dots\}.$$

В пространстве $\boldsymbol{X}_1(\Omega)$ введем скалярное произведение по формуле $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})_{\boldsymbol{X}_1(\Omega)} = (\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) + \varkappa(\boldsymbol{D}\boldsymbol{v},\boldsymbol{D}\boldsymbol{w})$. Соответствующая норма $\|\cdot\|_{\boldsymbol{X}_1(\Omega)} = (\cdot,\cdot)^{1/2}_{\boldsymbol{X}_1(\Omega)}$ эквивалентна норме, индуцированной из пространства $\boldsymbol{W}_2^1(\Omega)$.

Предположим, что $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{X}_1(\Omega)$, $\boldsymbol{f}\in\boldsymbol{L}_2(0,T;\boldsymbol{L}_2(\Omega))$, $\mu\in L_\infty(\Gamma)$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект №16-31-00182 мол_а.

Определение. Пусть $k \in \{1,2\}$. Вектор-функцию $\boldsymbol{v}\colon \overline{\Omega} \times [0,T] \to \mathbb{R}^3$ будем называть *k-слабым решением* задачи (1)–(5), если

$$\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}_2\big(0,T;\boldsymbol{X}_k(\Omega)\big) \cap \boldsymbol{C}\big([0,T],\boldsymbol{X}_{k-1}(\Omega)\big),$$

выполнено начальное условие (5) и равенство

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\varphi}) - \sum_{i=1}^{3}\left(v_i\boldsymbol{v}, \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial x_i}\right) + \nu(\boldsymbol{D}\boldsymbol{v},\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varphi}) + \varkappa\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{D}\boldsymbol{v},\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varphi}\right) -$$
$$- \sum_{i=1}^{3}\left(\boldsymbol{D}\boldsymbol{v}, v_i\frac{\partial \boldsymbol{D}\boldsymbol{\varphi}}{\partial x_i}\right) + \int\limits_{\Gamma}\mu\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,d\Gamma = (\boldsymbol{f},\boldsymbol{\varphi}), \quad \forall\,\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{X}_{4-k}(\Omega),$$

в смысле распределений на $(0,T)$.

Сформулируем теперь основной результат работы.

Теорема. 1) *Задача* (1)–(5) *имеет по крайней мере одно* 1*-слабое решение, удовлетворяющее оценке*

$$\|\boldsymbol{v}\|^2_{\boldsymbol{L}_\infty(0,T;\boldsymbol{X}_1(\Omega))} \leqslant 2\int\limits_0^T \|\boldsymbol{f}(t)\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)}\,\|\boldsymbol{v}(t)\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)}\,dt + \|\boldsymbol{u}\|^2_{\boldsymbol{X}_1(\Omega)}.$$

2) *Если $\boldsymbol{v}$ —* 2*-слабое решение задачи* (1)–(5) *и $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}_2(0,T;\boldsymbol{W}^2_3(\Omega))$, то это решение является единственным* 2*-слабым решением задачи* (1)–(5).

Для доказательства существования 1-слабых решений используется метод Фаэдо — Галеркина со специальным базисом, который строится с помощью результатов спектральной теории компактных самосопряженных операторов.

Замечание. Результаты о существовании и свойствах решений уравнений движения растворов полимеров с условием прилипания на границе ($\boldsymbol{v}|_\Gamma = \boldsymbol{0}$) получены А. П. Осколковым [2]. В [3] рассматривается двумерная задача при «условии проскальзывания частиц и вихрей». Разрешимость неоднородной задачи Дирихле в области с непроницаемой границей доказана в [4]. Краевые задачи, описывающие стационарные течения растворов полимеров и жидкостей второго порядка при условии проскальзывания Навье, рассматриваются в [5, 6].

Литература

1. *Павловский В. А.* К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров // Докл. АН СССР.—1971.—Т. 200, № 4.—С. 809–812.
2. *Осколков А. П.* О нестационарных течениях вязко-упругих жидкостей // Тр. МИАН СССР / Краевые задачи мат. физики, 12.—1983.—Т. 159.—С. 103–131.
3. *Ладыженская О. А.* О глобальной однозначной разрешимости двумерных задач для водных растворов полимеров // Зап. науч. сем. ПОМИ.—1997.—Т. 243.—С. 138–153.
4. *Барановский Е. С.* О течении полимерной жидкости в области с непроницаемыми границами // Журн. вычисл. математики и мат. физики.—2014.—Т. 54, № 10.—С. 1648–1655.
5. *Артемов М. А., Барановский Е. С.* Граничные задачи для уравнений движения полимерных жидкостей с нелинейным условием проскальзывания вдоль твердых стенок // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.—2015.—Т. 21, № 1.—С. 14–24.
6. *Baranovskii E. S.* Existence results for regularized equations of second-grade fluids with wall slip // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.—2015.—№ 91.—P. 1–12.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XIII Междунар. науч. конф. (пос. Дивноморское, 7–14 сентября 2016 г.)

ЛЕВОИНВАРИАНТНЫЕ КАНОНИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ НА СПЕЦИАЛЬНЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУППАХ ЛИ[1]

В. В. Балащенко

(Беларусь, Минск; БелГУ)

Левоинвариантные структуры на группах Ли образуют важный класс в теории инвариантных структур на однородных многообразиях. Особенно интересны случаи, когда заданная группа Ли G допускает автоморфизм Φ порядка k с единственной неподвижной точкой, т. е. может быть реализована как однородное Φ-пространство порядка k (однородное k-симметрическое пространство) [1]. Этот автоморфизм позволяет эффективно строить на G дифференциально-геометрические структуры классических типов (почти произведения P, почти комплексные J, f-структуры К. Яно и др.), используя общие результаты о канонических структурах для однородных k-симметрических пространств [1, 2].

Одним из первых примеров стала 6-мерная обобщенная (в смысле А. Каплана) группа Гейзенберга (N, g), которая была представлена в [3] как однородное риманово 3- и 4-симметрическое пространство. При этом для $k = 3$ соответствующая каноническая структура J оказалась не приближенно келеровой, а исследованный автором случай $k = 4$ для позднее обнаруженной канонической f-структуры показал ее принадлежность классам приближенно келеровых и эрмитовых f-структур. Такие классы (**NKf** и **Hf** соответственно) входят в число важнейших в обобщенной эрмитовой геометрии [2, 4]. Более того, группа (N, g), рассмотренная уже как риманово 6-симметрическое пространство, обладает [5] не только другими каноническими структурами классов **NKf** и **Hf**, но и классической почти эрмитовой структурой J класса $\mathbf{G_1}$ (в классификации Грея — Хервеллы).

Классические матричные обобщения $H(n, 1)$ 3-мерной группы Гейзенберга $H(1, 1)$ также допускают представление в виде однородных k-симметрических пространств. Например, 5-мерная группа $H(2, 1)$, реализованная как 4- и 6-симметрическое пространство, обладает каноническими эрмитовыми f-структурами, одни из которых интегрируемы, другие — нет [6]. Из недавних результатов отметим построение канонических f-структур на более широком блочном обобщении матричных групп Гейзенберга. В частности, рассмотрена 8-мерная группа Ли этого типа.

К настоящему времени получена серия общих результатов о левоинвариантных f-структурах на нильпотентных группах Ли индекса 2 и их связях с обобщенной эрмитовой геометрией. Наряду с этим, интерес представляют филиформные группы Ли, которые в ином ключе обобщают классическую 3-мерную группу Гейзенберга. В частности, широкий спектр примеров эрмитовых f-структур предъявлен на 6-мерных филиформных группах Ли [7].

[1]Работа выполнена при частичной поддержке государственных программ научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция» (2011–2015) и «Конвергенция-2020» (2016–2020).

Ряд результатов данной работы получен совместно с П. А. Дубовиком и О. Н. Радиванович.

Литература

1. *Балащенко В. В., Степанов Н. А.* Канонические аффинорные структуры классического типа на регулярных Ф-пространствах // Мат. сб.—1995.—Т. 186, № 11.—С. 3–34.
2. *Балащенко В. В., Никоноров Ю. Г., Родионов Е. Д., Славский В. В.* Однородные пространства: теория и приложения.—Ханты-Мансийск: Полиграфист, 2008.—280 с.
3. *Tricerri F., Vanhecke L.* Homogeneous structures on Riemannian manifolds.—Cambridge etc.: Cambridge Univ. Press, 1983.—125 p.—(London Math. Soc. Lecture Note Ser.; Vol. 83).
4. *Кириченко В. Ф.* Квазиоднородные многообразия и обобщенные почти эрмитовы структуры // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1983.—Т. 47, № 6.—С. 1208–1223.
5. *Balashchenko V. V.* Invariant structures on the 6-dimensional generalized Heisenberg group // Kragujevac J. of Math.—2011.—Vol. 35, № 2.—P. 209–222.
6. *Балащенко В. В., Дубовик П. А.* Левоинвариантные f-структуры на 5-мерной группе Гейзенберга $H(2,1)$ // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1. Физика, математика, информатика.—2013.—№ 3.—С. 112–117.
7. *Дубовик П. А.* Эрмитовы f-структуры на 6-мерных филиформных группах Ли // Изв. вузов. Математика.—2016.—№ 7.—С. 34–43.

МЕТОД ФУРЬЕ. ИЗУЧЕНИЕ ВОПРОСА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТОЧЕЧНОГО ТИПА С ПОМОЩЬЮ ВЫДЕЛЕНИЯ МАТРИЧНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТИ[1]

Ф. А. Белоусов
(Россия, Москва; ЦЭМИ РАН)

Рассматриваются функционально-дифференциальные уравнения вида

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t+\tau_1), \ldots, x(t+\tau_s)), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где правая часть $g(\cdot) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n\times s}, \mathbb{R}^n)$ является 2π-периодической по времени функцией, удовлетворяющая условию Липшица с положительной константой L_g, т. е. для любых t, x_j и $\overline{x}_j$, $j \in \{1, \ldots, s\}$ из $\mathbb{R}^n$ имеет место оценка

$$\|g(t, x_1, \ldots, x_s) - g(t, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_s)\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant L_g \sum_{j=1}^{s} \|x_j - \overline{x}_j\|_{\mathbb{R}^n}. \tag{2}$$

В силу 2π-периодичности правой части (1), не ограничивая общности будем считать, что отклонения τ_j, $j \in \{1, \ldots, s\}$ лежат в пределах $[0, 2\pi)$. Кроме этого предполагается, что отклонения соизмеримы, т. е. для любых τ_i и τ_j, $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ должны существовать n_1 и n_2 из $\mathbb{N} \cup \{0\}$ такие, что $n_1 + n_2 \neq 0$ и $n_1|\tau_i| = n_2|\tau_j|$.

Такой тип функционально-дифференциальных уравнений исследовался в работах Л. А. Бекларяна [1]. В работе приведены условия, обеспечивающие существование и единственность решения из специального класса функций для соответствующей задачи Коши. Всюду далее будет считаться, что эти условия выполнены.

Выделяется линейная часть правой части функционально-дифференциального уравнения (1) в следующем виде:

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^{s} A_j\, x(t+\tau_j) + f(t, x(t+\tau_1), \ldots, x(t+\tau_n)), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

где $f(\cdot) \in \mathbb{C}^{(1),n}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n\times s}; \mathbb{R}^n)$ — 2π-периодическая по времени функция ($f(\cdot) = g(\cdot) - \sum_{j=1}^{s} A_j\, x(t+\tau_j)$) со своей константой Липшица L_f. Матрицы $A_j \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $j \in \{1, \ldots, s\}$ — некоторые матрицы, с помощью которых осуществляется линеаризация.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 16-01-00110, № 15-37-20265.

Получены достаточные условия существования и единственности 2π-периодических решений уравнений вида (1), сформулированные в терминах параметров выделенной линейной части (матриц $A_j \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $j \in \{1, \ldots, s\}$) и константы Липшица L_f нелинейной функции $f(\cdot)$.

Литература

1. *Бекларян Л. А.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. Групповой подход.—М.: Факториал Пресс, 2007.—288 с.—(Методы современной математики; Вып. 5).
2. *Бекларян Л. А., Белоусов Ф. А.* Периодические решения для функционально-дифференциальных уравнений точечного типа. Дифференциальные уравнения.—2015.—Т. 51, № 12.—С. 1565–1579.
3. *Полякова Л. А.* Периодические решения нелинейных дифференциально-разносных уравнений // Изв. РАЕН. Диф. уравнения.—2006.—№ 11.—С. 179–182.
4. *Полякова Л. А.* Общий принцип сжимающих отображений и периодические решения нелинейных дифференциальных уравнений: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02, РГР ОД, 61:07-1/387.—Воронеж, 2006.—126 с.

АГЕНТ-ОРИЕНТИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ДОВЕРИЯ В ОБЩЕСТВЕ[1]

Ф. А. Белоусов (Россия, Москва; ЦЭМИ РАН),
В. А. Истратов (Россия, Москва; ЦЭМИ РАН)

С помощью представленной модели изучается вопрос распространения доверия в обществе. На некотором ареале живут и перемещаются агенты, которые по средствам общения взаимодействуют друг с другом. Взаимодействуя, у агентов изменяются их уровни доверия. Результат взаимодействия двух простых агентов в период k с уровнем доверия $\mathrm{trust}_1(k)$ и $\mathrm{trust}_2(k)$ определяется по правилу (1). Уровни доверия варьируются в диапазоне значений от 0 до 100. При этом 0 соответствует полному отсутствию доверия, а 100 соответствует абсолютному доверию.

$$\mathrm{trust}_1(k+1) = \mathrm{trust}_2(k+1) = \alpha\,\mathrm{trust}_1(k) + (1-\alpha)\,\mathrm{trust}_2(k), \quad \alpha \in [0,1], \tag{1}$$

где $\mathrm{trust}_1(k+1)$ и $\mathrm{trust}_2(k+1)$ — уровни доверия каждого из агентов в период $k+1$. Параметром модели является $\alpha \in [0,1]$. Рассматриваются такие его значения как 0.5, 0.7, 0.9 и 0.99. При $\alpha = 0.5$ взаимодействие агентов считается симметричным.

Помимо этого в модели кроме простых агентов присутствуют так называемые устойчивые агенты, уровень доверия которых не меняется ни при каких обстоятельствах. В случае взаимодействия простого агента с устойчивым агентом правило взаимодействия схоже с правилом (1) с той лишь разницей, что уровень доверия меняется только у простого агента.

С помощью вариации параметров в работе проводится серия экспериментов и анализ полученных результатов в том числе и с использованием статистических методов.

Модель выполнена в программном продукте AnyLogic.

Литература

1. *Epstein J., Axtell R.* Growing Artificial Societies: Social Science from the Bottom Up.— Washington, D.C.: Brookings Institution Press, 1996.—223 p.
2. *Alesina A., La Ferrara E.* Who trust others? // J. of Public Economics.—2002.—Vol. 85.— P. 207–234.
3. *Aghion P., Algan Y., Cahuc P., Shleifer A.* Regulation and Distrust // NBER Working Paper.—2009.—№ 14648.
4. *Edward C.* Banfield, with the Assistance of Laura Danfield L. The Moral Basis of a Backward Society.—Glencoe, IL: The Free Press, 1958.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-36-00338.

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРОМ ДЖРБАШЯНА — НЕРСЕСЯНА[1]

Ф. Т. Богатырева

(Россия, Нальчик; ИПМА)

Рассмотрим уравнение

$$D_{0x}^{\{\gamma_0,\gamma_1,\dots,\gamma_n\}}u(x)-\lambda u(x)=f(x),\quad x\in]0,1[\,, \tag{1}$$

где $D_{0x}^{\{\gamma_0,\gamma_1,\dots,\gamma_n\}}$ — оператор дробного дифференцирования Джрбашяна — Нерсесяна порядка $\alpha=\sum_{k=0}^{n}\gamma_k-1>0$, $\lambda=\mathrm{const}$.

Оператор дробного дифференцирования Джрбашяна — Нерсесяна порядка α, ассоциированный с последовательностью $\{\gamma_0,\gamma_1,\dots,\gamma_n\}$, $\gamma_k\ \in]0,1]$, $k=0,\dots,n$, определяется соотношением [1]

$$D_{0x}^{\{\gamma_0,\gamma_1,\dots,\gamma_n\}}u(x)=D_{0x}^{\gamma_n-1}D_{0x}^{\gamma_{n-1}}\dots D_{0x}^{\gamma_1}D_{0x}^{\gamma_0}u(x), \tag{2}$$

где D_{0x}^{γ} — оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана–Лиувилля [2].

Оператор (2) введен в работе [1], где доказана теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения (1). В данной работе исследуется краевая задача с локальным смещением, связывающим значения искомого решения на концах рассматриваемого интервала со значениями во внутренних точках. Доказательство существование конечного числа собственных значений исследуемой задачи.

Регулярным решением уравнения (1) называется функция $u=u(x)$ из класса $D_{0x}^{\{\gamma_0,\gamma_1,\dots,\gamma_k\}}u(x)\in C^1]0,1[\cap C[0,1]$ $(k=0,\dots,n-1)$, $D_{0x}^{\{\gamma_0,\gamma_1,\dots,\gamma_n\}}u(x)\in C(0,1)$, удовлетворяющая уравнению (1) в интервале $(0,1)$.

Задача. Найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$\lim_{x\to0}D_{0x}^{\{\gamma_0,\gamma_1,\dots,\gamma_k\}}u(x)=u_k,\quad 1\leqslant k\leqslant n-1, \tag{3}$$

$$u(1)-\sum_{i=1}^{m}a_i\,u(x_i)=b,\quad x_i\in[0,1[\,, \tag{4}$$

где u_k, a_i, b — заданные действительные числа.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-01-00462-а.

Введем следующие обозначения:

$$(g*h)(x)=\int\limits_0^x g(x-t)h(t)\,dt,\quad e_{\alpha,\mu}(x,\lambda)=x^{\mu-1}E_{\alpha,\mu}(\lambda x^{\alpha}),$$

$$K_\mu(t)=e_{\alpha,\mu}(1-t,\lambda)-\sum_{i=1}^{m}a_i e_{\alpha,\mu}(x_i-t,\lambda)H(x_i-t), \tag{5}$$

$$G_\mu(x,t)=e_{\alpha,\mu}(x-t,\lambda)H(x-t)-e_{\alpha,\mu_0}(x,\lambda)\frac{K_\mu(t)}{K_{\mu_0}(0)},$$

где $E_{\alpha,\mu}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}z^k/\Gamma(\alpha k+\mu)$ — функция Миттаг — Леффлера, $\mu_0=\gamma_0$, $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера, $H(x)$ — функция Хевисайда.

Теорема 1. 1) *Пусть функция $f(x)\in C\,]0,1[$ представима в виде $f(x)=D_{0x}^{\gamma_n-1}g(x)$, где $g(x)\in L[0,1]$, и выполняются условия $\gamma_0+\gamma_n>1$,*

$$K_{\mu_0}(0)\neq 0. \tag{6}$$

Тогда существует регулярное решение задачи (3), (4) для уравнения (1), определяемое равенством

$$u(x)=\int\limits_0^1 f(t)\,G_\alpha(x,t)\,dt+\sum_{j=1}^{n-1}G_{\mu_j}(x,0)u_j+\frac{e_{\alpha,\mu_0}(x,\lambda)}{K_{\mu_0}(0)}b, \tag{7}$$

где $\mu_j=\sum_{i=0}^{j}\gamma_i$, $j=1,\dots,n-1$.

2) *Решение задачи (1), (3), (4) единственно тогда и только тогда, когда $K_{\mu_0}(0)\neq 0$.*

Определение. *Собственным значением* задачи (1), (3), (4) будем называть $\lambda\in\mathbb{C}$, при котором однородная задача

$$D_{0x}^{\{\gamma_0,\gamma_1,\dots,\gamma_n\}}u(x)-\lambda u(x)=0,\quad x\in]0,1[,$$

$$\lim_{x\to 0}D_{0x}^{\{\gamma_0,\gamma_1,\dots,\gamma_k\}}u(x)=0,\quad 1\leqslant k\leqslant n-1,$$

$$u(1)-\sum_{i=1}^{m}a_i\,u(x_i)=0,\quad x_i\in[0,1[\,,$$

имеет нетривиальное решение.

Теорема 2. *Задача* (1), (3), (4) *может иметь лишь конечное число вещественных собственных значений.*

Литература

1. *Джрбашян М. М., Нерсесян А. Б.* Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. Акад. наук Арм. ССР.—1968.—Т. 3, № 1.—С. 3–28.
2. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение.—М.: Физматлит, 2003.—272 с.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ ДРОБНОГО ДИСКРЕТНО РАСПРЕДЕЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ[1]

Л. Х. Гадзова

(Россия, Нальчик; ИПМА)

В интервале $0 < x < 1$ рассмотрим уравнение

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_j \, \partial_{0x}^{\alpha_j} \, u(x) + \lambda u(x) = f(x), \tag{1}$$

где $\alpha_j \in]1, 2[$, $\lambda, \beta_j \in \mathbb{R}$, $\beta_1 > 0$, $\alpha_1 > \ldots > \alpha_m$, $\partial_{0x}^{\gamma} u(x)$ — производная Капуто (см. [1, с. 11]):

$$\partial_{0x}^{\gamma} u(x) = D_{0x}^{\gamma - n} u^{(n)}(x), \quad n - 1 < \gamma \leqslant n,$$

где D_{0x}^{γ} — оператор дробного интегро-дифференцирования порядка γ в смысле Римана — Лиувилля [1, с. 11] по переменной x.

В работах [2–6] исследовались линейные обыкновенные дифференциальные уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами. Для уравнения (1) решены задачи Дирихле и Неймана для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с постоянными коэфициентами [7].

Решена двухточечная краевая задача с условиями третьего рода, доказана теорема существования и единственности решения, получено явное представление решения и построена функция Грина. Доказана конечность числа вещественных собственных значений.

Литература

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение.—М.: Физматлит, 2003.—272 с.
2. *Ozturk I.* On the theory of fractional differential equation // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. акад. наук.—1998.—Т. 3, № 2.—С. 35–39.
3. *Псху А. В.* Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка // Мат. сб.—2011.—Т. 200, № 4.—С. 111–122.
4. *Псху А. В.* К теории задачи Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. акад. наук.—2009.—Т. 11, № 1.—С. 61–65.
5. *Гадзова Л. Х.* Обобщенная задача Дирихле для линейного дифференциального уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения.—2014.—Т. 50, № 1.—С. 121–125.
6. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and applications of fractional differential equations // North-Holland Math. Stud.—Amsterdam: Elsevier, 2006.—Т. 204.—С. ??–??.
7. *Гадзова Л. Х.* Задачи Дирихле и Неймана для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения.—2015.—Т. 51, № 12.—С. 1580–1586.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-01-00462-А.

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Д. Н. Гулджонов (Таджикистан, Душанбе; ЦИРННТ АН РТ, ИМ АН РТ),
В. Н. Козоброд (Россия, Волгодонск; ИТ (филиал) ДГТУ)

Пусть (Ω, U_Ω, P) — полное вероятностное пространство. Обозначим через $F_{t_1,\dots,t_n}(\xi, B_1, \dots, B_n)$ конечномерные распределения случайного процесса $\xi(t) = \xi(t,\omega)$, $t \in (R)$, $\omega \in \Omega$ в фазовом банаховом пространстве (X, U_X) (U_X — борелевская σ-алгебра), т. е.

$$F_{t_1,\dots,t_n}(\xi, B_1, \dots, B_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{\omega \mid \xi(t_i,\omega) \in B_i|\}\right),$$

где $B_i \in U_X$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Через $L(\Omega \to X)$ обозначим банахово пространство случайных величин со значениями в (X, U_X) с нормой $\|\cdot\|_L = M[\|\cdot\|_X]$, где через $M[\cdot]$ обозначено математическое ожидание.

Случайный процесс $\xi(t)$ в (X, U_X) называется *T-периодически распределенным*, если для любых фиксированных $n, t_1, \dots, t_n, B_1, \dots, B_n$ функция $F_{t_1+\theta,\dots,t_n+\theta}(\xi, B_1, \dots, B_n)$ переменной θ является T-периодической. Случайные процессы $\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)$ в пространствах $(X_1, U_{X_1}), \dots, (X_n, U_{X_n})$ называются *T-периодически связанными*, если для любых фиксированных n_i, t_{ij}, b_{ij} ($i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, n_i$) функция

$$F(\theta) = P\left(\bigcap_{i=1}^{k}\bigcap_{j=1}^{n_i} \{\omega | \, \xi_i(t_{ij}+\theta) \in B_{ij}|\}\right)$$

является T-периодической.

Пусть $\eta(t)$ является T-периодически распределенным случайным процессом в фазовом пространстве (Y, U_Y) и пусть $F_s(\eta, X)$ означает максимальную по включению совокупность непрерывных в среднем случайных процессов $\xi(t)$ из пространства $C(R \to L(\Omega \to X))$ таких, что любая конечная совокупность из них вместе с $\eta(t)$ является T-периодически связанной. Аналогично определим $F_r(\eta, X)$ максимальную по включению совокупность случайных процессов $\{\xi(t)\}$ из пространства $L(\Omega \to C(R \to X))$ таких, что любая конечная совокупность из них вместе с $\eta(t)$ является T-периодически связанной.

В работе [1] доказано, что множество $F_s(\eta, X)$ является банаховым пространством с нормой $\|\xi\|_{F_s} = \sup M\{\|\xi(t)\|_X\}$ и множество $F_r(\eta, X)$ банахово пространство с нормой $\|\xi\|_{F_r} = M[\sup_t \|\xi(t,\omega)\|_X]$.

Рассмотрим уравнение

$$\dot{\xi}(t) = A(t,\lambda)\xi(t) + \varphi(t, \xi(t-\lambda_1), \dots, \xi(t-\lambda_{k-1}), \xi(t), \eta(t), \lambda), \tag{1}$$

где $A(t,\lambda)$ — непрерывное T-периодическое семейство линейных ограниченных операторов из X в X и T-периодически зависящие от t, и пусть отображение

$$\varphi(\cdot,\ldots,\cdot,\lambda): R\times X\times\ldots\times X\times Y\to X$$

непрерывное по совокупности переменных, T-периодическое по t.

Теорема. *Пусть $A(t,\lambda_0)$ — непрерывное по t семейство линейных ограниченных операторов из X в X и пусть спектр оператора монодромии $\sigma(U(t))$ уравнения*

$$\dot{\xi}(t)=A(t,\lambda)\xi(t) \tag{2}$$

не пересекается с единичной окружностью и имеет компоненты лежащие как внутри, так и вне единичной окружности. Пусть, далее, случайный процесс $\eta(t)$ является T-периодически распределенным, почти сепарабельнозначным и для любого t при $\Delta t\to 0$ $\eta(t+\Delta t)$ сходится почти всюду к $\eta(t)$. Предположим также, что для любого t существует функция $\delta(t)>0$ и случайный процесс $\eta(t)$, имеющий для любого t конечное математическое ожидание такое, что

$$\sup_{t-\delta(t)<\tau<t+\delta(t)}\|\varphi(t,\theta,\ldots,\theta,\eta(t))\lambda\|_X\leqslant\gamma(t)$$

и функция

$$M\left[\sup_{t\in R}\|\;\varphi(t,\Theta,\ldots,\Theta,\eta(t),\lambda)\;\|_X\right]$$

непрерывна по λ.

Пусть, наконец, для функции Грина $G(t,\tau)$ уравнения (2) выполнено неравенство

$$\sup_t\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\|G(t,\tau)\|_{[X,X]}\,dt\;\sum_{i=1}^{k}\beta_i<1,$$

причем β_i не зависит от λ.

Тогда нулевое T-периодически распределенное случайное решение уравнения (1) продолжимо по параметру в среднем смысле.

Литература

1. *Илолов М. И., Козоброд В. Н., Гулджонов Д. Н.* О периодических случайных возмущениях дифференциальных уравнений с параметром // Мат. анализ, дифференц. уравнения и теория чисел.—Душанбе, 2015.—С. 97–104.

О ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СУМУДУ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

М. Илолов (Таджикистан, Душанбе; ЦИРННТ АН РТ),
В. Н. Козоброд (Россия, Волгодонск; ИТ (филиал) ДГТУ)

1. В работе [1] введено интегральное преобразование Сумуду и указано его применение к обыкновенным дифференциальным уравнениям в задачах управления высокими технологиями. Преобразование Сумуду задается на множесте функций

$$A = \left\{ f(t):\ \exists\, M, \tau_1, \tau_2 > 0,\ |f(t)| < M e^{\frac{t}{\tau_i}},\ \text{если } t \in (-1)^j \times [0, \infty) \right\} \tag{1}$$

с помощью следующей формулы:

$$S[f(t), u] = \int\limits_{\infty}^{0} f(ut)\, e^{-t}\, dt, \quad u \in (-\tau_1 \tau_2). \tag{2}$$

Функция $f(t)$ предполагается, в общем, непрерывно дифференцируемой. Мы здесь будем считать, что она непрерывная и имеет дробных производных порядка α, $0 < \alpha < 1$, но не имеет производных целого порядка. В этом случае преобразование (2) теряет смысли и приходится ввести дробное преобразование Сумуду. Подобное преобразование введено в [2] с помощью модифицированных дробных производных Римана — Лиувилля. Оно определяется с помощью равенства

$$S_\alpha[f(t)] = \int\limits_{0}^{\infty} E_\alpha(-t^\alpha)\, f(ut)\, (dt)^\alpha, \tag{3}$$

где функция $f(x)$ равна нулю при $t < 0$, $u \in \mathcal{C}$, $E_\alpha(x)$ — функция Миттага-Лиффлера, интеграл по $(dt)^\alpha$ определяется как решение уравнения дробного порядка

$$dy = f(x)\, (dx)^\alpha.$$

2. Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения с импулсными воздействиями и производной дробного порядка

$$\begin{gathered} y^{(\alpha)}(x) + y(x) = f(x),\ x \neq x_i, \\ \Delta y|_{x=x_i} = y(x_i + 0) - y(x_i) = a_i y(x_i) + b_i, \\ y(0) = y_0, \end{gathered} \tag{4}$$

где a_i, b_i, x_0, y_0 — заданные вещественные числа, $f(x)$ — кусочно непрерывная функция.

Функция Грина $G_\alpha(x,x_0)$ соответствующего однородного уравнения (4) имеет вид

$$G_\alpha(x,x_0) = E_\alpha((x_0 - x_i)^\alpha) \prod_{x_0<x_\nu<x_i} (1+a_i)E_2((x_{\nu-1} - x_\nu)^\alpha).$$

Тогда решение задачи (4)–(5) имеет следующее представление:

$$y(x,x_0) = G_\alpha(x,x_0)y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} G_\alpha(x,t)\, f(t)\, dt + \sum_{x_0<x_i<x} G_\alpha(x,x_i)\, b_i.$$

Литература

1. *Watugala G. K.* Sumudu trausform: a new integral transform to solve differential equations and control engineering problems // International J. of Math. Education in Sci. and Technology.—1993.—Vol. 24, № 1.—P. 35–43.
2. *Kilicman A. Eltayeb H. and Agarwal P. R.* On Sumudu transform and system of differential equations // Abstract and Appl. Analysis.—2010.—Vol. 2010.—11 p.—(Article ID 598702).
3. *Самойленко А. М., Илолов М.* Неоднородные эволюционные уравнения с импульсными воздействиями // Укр. мат. журн.—1992.—Т. 44, № 1.— С. 93–100.

АСИМПТОТИКА ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ С ДЕШЕВЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ РАЗНОЙ ЦЕНЫ

М. А. Калашникова
(Россия, Воронеж; ВГУ)

Для задачи оптимального управления вида

$$J\Big(\overset{(1)}{v},\overset{(2)}{v}\Big)=\frac{1}{2}\int\limits_0^T\bigg(\big\langle z,W(t,\varepsilon)z\big\rangle+\sum_{k=1}^{2}\varepsilon^{2k}\Big\langle\overset{(k)}{v},\overset{(k)}{R}(t,\varepsilon)\overset{(k)}{v}\Big\rangle\bigg)dt\to\min,$$

$$\frac{dz}{dt}=A(t,\varepsilon)z+C(t,\varepsilon)v,\quad t\in[0,T],\quad z(0,\varepsilon)=z^0,$$

где $\overset{(k)}{v}(t,\varepsilon)\in R^{n_k}$, $z(t,\varepsilon)\in R^n$, матрицы $W(t,\varepsilon)$, $\overset{(k)}{R}(t,\varepsilon)$, $A(t,\varepsilon)$, $C(t,\varepsilon)$ предполагаются достаточно гладкими по своим аргументам, причем $W(t,\varepsilon)$, $\overset{(k)}{R}(t,\varepsilon)$ — симметричны, $W(t,0)$, $\overset{(k)}{R}(t,0)$ — положительно определены, $k=1,2$, $n=n_1+n_2$, а матрица $C(t,0)$ обратима при всех $t\in[0,T]$, в [1] получено приближение первого порядка асимптотического решения, состоящего из регулярных и пограничных функций экспоненциального типа четырех видов. Особенность задачи заключается в том, что при $\varepsilon=0$ управление не выражается из принципа максимума Л. С. Понтрягина через переменную состояния и сопряженную переменную.

Как показано в [1], с помощью замены переменных

$$\overset{(k)}{u}(t,\varepsilon)=\varepsilon^k\overset{(k)}{v}(t,\varepsilon),\quad \overset{(k)}{y}(t,\varepsilon)=\int\limits_0^t\overset{(k)}{v}(s,\varepsilon)\,ds,$$

$$y(t,\varepsilon)=\Big(\overset{(1)}{y}(t,\varepsilon)',\overset{(2)}{y}(t,\varepsilon)'\Big)',\quad x(t,\varepsilon)=z(t,\varepsilon)-C(t,\varepsilon)y(t,\varepsilon),$$

$$w(t,\varepsilon)=\big(x(t,\varepsilon)',y(t,\varepsilon)'\big)',\quad u(t,\varepsilon)=\Big(\overset{(1)}{u}(t,\varepsilon)',\overset{(2)}{u}(t,\varepsilon)'\Big)'$$

исходная задача сводится к трехтемповой сингулярно возмущенной задаче оптимального управления в критическом случае. Методом прямой схемы, заключающимся в непосредственной подстановке постулируемого асимптотического разложения решения из пяти компонент в условие преобразованной задачи и последующего определения серии задач оптимального управления для нахождения членов асимптотики, построено приближение n-го порядка асимптотического решения преобразованной задачи. На основе полученного решения для исходной задачи получено приближенное решение n-го порядка, доказаны асимптотические оценки близости приближенного решения к точному и невозрастание значений минимизируемого функционала при использовании нового приближения оптимального управления.

Литература

1. *Калашникова М. А., Курина Г. А.* Асимптотическое решение линейно-квадратичных задач с дешевыми управлениями разной цены // Тр. ИММ УрО РАН.—2016.—Т. 22, № 1.—С. 124–139.

ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ[1]

Л. Л. Карашева

(Россия, Нальчик; ИПМА)

Рассмотрим уравнение

$$D_{0t}^{\alpha}u(x,t) + (-1)^n \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}} = f(x,t), \tag{1}$$

где $n \in \mathbb{N}$, D_{0t}^{α} — оператор дробного (в смысле Римана — Лиувилля) интегро-дифференцирования порядка α, $0 < \alpha < 1$ [1].

При $\alpha = 1$ в работе [2] для уравнения (1) доказана единственность решения задачи Коши в классе функций быстрого роста. При $n = 1$ для уравнения (1) в работе [3] построено фундаментальное решение, дано решение задачи Коши и доказана теорема единственности в классе функций, удовлетворяющих аналогу условия А. Н. Тихонова. В работе [4] найдено решение диффузионно-волнового уравнения четвертого порядка с регуляризованной дробной производной по времени. Для дробного диффузионно-волнового уравнения с помощью интегральных преобразований в работе [5] найдено решение задачи Коши.

В данной работе для уравнения (1) построено фундаментальное решение, получены различные его представления, изучены его свойства, построено решение задачи Коши и доказана теорема единственности решения в классе функций быстрого роста.

Литература

1. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии.—М.: Высш. шк., 1995.—301 с.
2. *Ладыженская О. А.* О единственности решения задачи Коши для линейного параболического уравнения // Мат. сб.—1950.—Т. 27 (69), № 2.— С. 175–184.
3. *Псху А. В.* Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка // Изв. РАН. Сер. мат.—2009.—Т. 73, № 2.—С. 141–182.
4. *Agrawal O. P.* A general solution for a fourth-order fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain // Computers and Structures.—2001.—Vol. 79.—P. 1497–1501.
5. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies.—Vol. 204.—Amsterdam: Elsevier, 2006.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-01-00462 А.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XIII Междунар. науч. конф. (пос. Дивноморское, 7–14 сентября 2016 г.)

ПРИЛОЖЕНИЕ ОПЕРАТОРА ЭРДЕЙИ — КОБЕРА К РЕШЕНИЮ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛИПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ

Ш. Т. Каримов

(Узбекистан, Фергана; ФерГУ)

На важность исследования уравнений высокого порядка вида $L^m u = 0$, $m = 1, 2, \dots$, указал А. В. Бицадзе [1], где L — линейный дифференциальный оператор второго порядка, а $L^m = L^{m-1}L$ — m-я композиция этого оператора.

В данной работе для сингулярного полипараболического уравнения, т. е. уравнения с оператором Бесселя высокого порядка вида

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - B_\gamma^x\right)^m u(x,t) = 0, \quad x > 0,\ t > 0, \tag{1}$$

где $B_\gamma^x \equiv x^{-2\gamma-1}\frac{\partial}{\partial x}\,x^{2\gamma+1}\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2\gamma+1}{x}\frac{\partial}{\partial x}$ — сингулярный дифференциальный оператор Бесселя, $\gamma \in R$, $|\gamma| < 1/2$, m — натуральное число, исследована следующая задача нахождения классического решения $u(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющего начальным

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = \varphi_k(x), \quad x > 0,\ \ k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{2}$$

и граничным условиям

$$\left.\frac{\partial^{2k+1} u}{\partial x^{2k+1}}\right|_{x=0} = 0, \quad t > 0,\ \ k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{3}$$

здесь $\varphi_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, — заданные гладкие функции.

Сингулярные параболические уравнения с оператором Бесселя относятся к классу уравнений, вырождающихся по пространственным переменным на границе области, и они часто встречаются в приложениях. Например, в задачах теплопереноса в неподвижной среде (твердом теле), в задачах диффузионного пограничного слоя, в задачах распространения тепла при закачке горячей жидкости в нефтяной пласт и в других разделах науки и техники.

Вырождающиеся уравнения представляют собой один из важных разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными и число опубликованных работ по этой тематике весьма значительно. Однако, начальные и краевые задачи для полипараболических уравнений высокого порядка с оператором Бесселя изучены сравнительно мало.

Надо отметить, что в задачах общей теории дифференциальных уравнений с частными производными, содержащих по одной или нескольким переменным оператор Бесселя, основным аппаратом исследования является соответствующее интегральное преобразование Фурье — Бесселя.

В отличие от традиционных методов, для решения поставленной задачи применим оператор Эрдейи — Кобера дробного порядка [2]

$$I_{\eta,\alpha}f(x)=\frac{2x^{-2(\eta+\alpha)}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x\left(x^2-\xi^2\right)^{\alpha-1}\xi^{2\eta+1}f(\xi)\,d\xi, \tag{4}$$

где $\alpha,\eta\in R$, $\alpha>0$, $\eta\geqslant-(1/2)$, $f(x)\in L_1(0,b)$, $b>0$, $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера.

Основные свойства оператора (4) можно найти в работе [2].

Пусть $[B_\eta^x]^0=E$, E — единичный оператор, $[B_\eta^x]^m=[B_\eta^x]^{m-1}[B_\eta^x]=[B_\eta^x][B_\eta^x]\dots[B_\eta^x]$ — m-я степень оператора Бесселя. Функция $u(x,t)$ непрерывно дифференцируема включительно до порядка $2m$ по переменной x и порядка не меньше, чем m по t. L — не зависящий от x линейный дифференциальный оператор любого конечного порядка по переменной t.

В работе [3] доказано следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\alpha>0$, $\eta\geqslant-(1/2)$, $x^{2\eta+1}[B_\eta^x]^k u(x,t)$ интегрируемы при $x\to0$ и*

$$\lim_{x\to0}x^{2\eta+1}\frac{\partial}{\partial x}[B_\eta^x]^k u(x,t)=0,\quad k=0,1,\dots,m-1.$$

Тогда

$$\left(L\pm B_{\eta+\alpha}^x\right)^m I_{\eta,\alpha}^x u(x,t)=I_{\eta,\alpha}^x\left(L\pm B_\eta^x\right)^m u(x,t),$$

здесь верхний индекс x в операторе означает переменную, по которой действует этот оператор.

Применяя теорему 1, найдена явная формула решения исследуемой задачи в виде

$$u(x,t)=\frac{x^{-\gamma}}{2t}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}\int\limits_0^{+\infty}f_k(s)s^{\gamma+1}\exp\left(-\frac{x^2+s^2}{4t}\right)I_\gamma\left(\frac{xs}{2t}\right)ds,$$

где $f_k(x)=\sum_{j=0}^k(-1)^jC_k^j[B_\gamma^x]^j\varphi_{k-j}(x)$, $C_k^j=k!/[j!(k-j)!]$ — биномиальные коэффициенты, $I_v(z)$ — модифицированная функция Бесселя.

Доказано, что полученная формула является единственным классическим решением исследуемой задачи (1)–(3).

Замечание. Этот метод с таким же успехом можно применить и для многомерного уравнения полипараболического типа с оператором Бесселя, действующим по всем пространственным переменным.

Литература

1. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных.—М.: Наука, 1981.—448 с.
2. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и их приложения.—Минск: Наука и техника, 1987.—702 с.
3. *Каримов Ш. Т.* Новые свойства обощенного оператора Эрдейи — Кобера и их приложения // Докл. АН РУз.—2014.—№ 5.—С. 11–13.

CONDITIONS FOR THE CONVERGENCE OF SOLUTIONS OF VARIATIONAL PROBLEMS WITH BILATERAL CONSTRAINTS IN VARIABLE DOMAINS

A. A. Kovalevsky

(Russia, Ekaterinburg; IMM UrB RAS, UrFU)

In this talk, we discuss sufficient conditions for the convergence of minimizers and minimum values of integral and more general functionals on sets of functions defined by bilateral constraints in variable domains. The given constraints are elements of the corresponding Sobolev space, and the degeneration on a set of measure zero is admitted for the difference of the upper and lower constraints.

Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, let Ω be a bounded domain in $\mathbb{R}^n$, and let $p > 1$. Let $\{\Omega_s\}$ be a sequence of domains in $\mathbb{R}^n$ contained in Ω.

Definition 1. If $s \in \mathbb{N}$, then q_s is the mapping from $W^{1,p}(\Omega)$ into $W^{1,p}(\Omega_s)$ such that, for every function $v \in W^{1,p}(\Omega)$, $q_s v = v|_{\Omega_s}$.

Definition 2. We say that the sequence of the spaces $W^{1,p}(\Omega_s)$ is strongly connected with the space $W^{1,p}(\Omega)$ if there exists a sequence of linear continuous operators $l_s : W^{1,p}(\Omega_s) \to W^{1,p}(\Omega)$ such that:

(a) the sequence of the norms $\|l_s\|$ is bounded;

(b) for every $s \in \mathbb{N}$ and for every $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$, we have $q_s(l_s v) = v$ a. e. in Ω_s.

Definition 3. Let, for every $s \in \mathbb{N}$, $I_s : W^{1,p}(\Omega_s) \to \mathbb{R}$, and let $I : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$. We say that the sequence $\{I_s\}$ Γ-converges to the functional I if the following conditions are satisfied:

(a) for every function $v \in W^{1,p}(\Omega)$, there exists a sequence $w_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$ such that $\|w_s - q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$ and $I_s(w_s) \to I(v)$;

(b) for every function $v \in W^{1,p}(\Omega)$ and for every sequence $v_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$ such that $\|v_s - q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$, we have $\liminf\limits_{s\to\infty} I_s(v_s) \geqslant I(v)$.

Let $c_1, c_2 > 0$, and let, for every $s \in \mathbb{N}$, $\mu_s \in L^1(\Omega_s)$ and $\mu_s \geqslant 0$ in Ω_s. We assume that the sequence of the norms $\|\mu_s\|_{L^1(\Omega_s)}$ is bounded.

Let, for every $s \in \mathbb{N}$, $f_s : \Omega_s \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be a function satisfying the following conditions: for every $\xi \in \mathbb{R}^n$, the function $f_s(\cdot, \xi)$ is measurable on Ω_s; for almost every $x \in \Omega_s$, the function $f_s(x, \cdot)$ is convex on $\mathbb{R}^n$; for almost every $x \in \Omega_s$ and for every $\xi \in \mathbb{R}^n$, we have $c_1|\xi|^p - \mu_s(x) \leqslant f_s(x, \xi) \leqslant c_2|\xi|^p + \mu_s(x)$.

Definition 4. If $s \in \mathbb{N}$, then $F_s : W^{1,p}(\Omega_s) \to \mathbb{R}$ be the functional such that, for every function $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$,

$$F_s(v) = \int\limits_{\Omega_s} f_s(x, \nabla v)\, dx.$$

Next, let $c_3, c_4 > 0$, and let, for every $s \in \mathbb{N}$, $G_s : W^{1,p}(\Omega_s) \to \mathbb{R}$ be a weakly continuous functional. We assume that, for every$s \in \mathbb{N}$ and for every $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$, $G_s(v) \geqslant c_3\|v\|^p_{L^p(\Omega_s)} - c_4$.

Now, let $\varphi, \psi \in W^{1,p}(\Omega)$, and let $\varphi \leqslant \psi$ a. e. in Ω. We define

$$V(\varphi, \psi) = \bigl\{ v \in W^{1,p}(\Omega) : \ \varphi \leqslant v \leqslant \psi \ \text{ a. e. in } \ \Omega \bigr\},$$

and let, for every $s \in \mathbb{N}$,

$$V_s(\varphi, \psi) = \bigl\{ v \in W^{1,p}(\Omega_s) : \ \varphi \leqslant v \leqslant \psi \ \text{ a. e. in } \ \Omega_s \bigr\}.$$

Theorem. *Assume that the following conditions are satisfied:*

($*_1$) *the embedding of $W^{1,p}(\Omega)$ into $L^p(\Omega)$ is compact;*

($*_2$) *the sequence of the spaces $W^{1,p}(\Omega_s)$ is strongly connected with the space $W^{1,p}(\Omega)$;*

($*_3$) *for every sequence of measurable sets $H_s \subset \Omega_s$ such that $\operatorname{meas} H_s \to 0$, we have*

$$\int\limits_{H_s} \mu_s \, dx \to 0;$$

($*_4$) *the sequence $\{F_s\}$ Γ-converges to a functional $F : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$;*

($*_5$) *there exists a functional $G : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ such that, for every function $v \in W^{1,p}(\Omega)$ and for every sequence $v_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$ with the property $\|v_s - q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$, we have $G_s(v_s) \to G(v)$;*

($*_6$) *$\psi - \varphi > 0$ a. e. in Ω.*

Let, for every $s \in \mathbb{N}$, u_s be a function in $V_s(\varphi, \psi)$ minimizing the functional $F_s + G_s$ on the set $V_s(\varphi, \psi)$.

Then there exist an increasing sequence $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ and a function $u \in V(\varphi, \psi)$ such that the following assertions hold:

1) *the function u minimizes the functional $F + G$ on the set $V(\varphi, \psi)$;*

2) *$\|u_{s_j} - q_{s_j} u\|_{L^p(\Omega_{s_j})} \to 0$;*

3) *$(F_{s_j} + G_{s_j})(u_{s_j}) \to (F + G)(u)$.*

This result is published in [1]. We note that a weakening of the condition of positivity of the difference $\psi - \varphi$ on a set of full measure may lead to a certain violation of the conclusion of the theorem.

We also discuss the case where the lower constraint is zero and the upper constraint is an arbitrary irregular function.

References

1. *Kovalevsky A. A.* On the convergence of solutions of variational problems with bilateral obstacles in variable domains // Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN.—2016.—Vol. 22, № 1.—P. 140–152.

СУЩЕСТВОВАНИЕ ЭНТРОПИЙНЫХ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Л. М. Кожевникова

(Россия, Стерлитамак; СФ БашГУ)

Пусть Ω — произвольная область пространства $\mathbb{R}^n = \{\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$, $n \geqslant 2$. Для анизотропного эллиптического уравнения рассматривается задача Дирихле

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i(\mathrm{x}, u, \nabla u))_{x_i} = a_0(\mathrm{x}, u), \quad \mathrm{x} \in \Omega; \tag{1}$$

$$u(\mathrm{x})\big|_{\partial\Omega} = \psi(\mathrm{x})\big|_{\partial\Omega}. \tag{2}$$

В работе [1] для эллиптических уравнений со степенными нелинейностями с L_1-правой частью было предложено понятие энтропийного решения задачи Дирихле с нулевым граничным условием и доказаны его существование и единственность в произвольной области Ω. Изучению существования энтропийных решений задачи Дирихле для эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями второго порядка с L_1-правой частью в ограниченной области Ω посвящена статья [2]. В настоящей работе анонсирована теорема существования энтропийного решения задачи Дирихле (1), (2) в анизотропном пространстве Соболева — Орлича для произвольной неограниченной области Ω, $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$.

Предполагается, что функции $\mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) = (a_1(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}), \ldots, a_n(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}))$, $a_0(\mathrm{x}, s_0)$, $\mathrm{x} \in \Omega$, $s_0 \in \mathbb{R}$, $\mathrm{s} \in \mathbb{R}^n$ каратеодориевы. Функция $a_0(\mathrm{x}, s_0)$ неубывающая по $s_0 \in \mathbb{R}$. Пусть существуют неотрицательные функции $\phi(\mathrm{x})$, $\Phi(\mathrm{x}) \in L_1(\Omega)$, положительная непрерывная функция $\widehat{a}(k)$ и положительная константа $\overline{a}$ такие, что справедливы неравенства:

$$\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})) \leqslant \widehat{a}(k)(\Phi(\mathrm{x}) + \mathrm{B}(\mathrm{s})), \quad \overline{\mathrm{B}}(\mathrm{a}) = \sum_{i=1}^{n} \overline{B}_i(a_i), \quad \mathrm{B}(\mathrm{s}) = \sum_{i=1}^{n} B_i(s_i); \tag{3}$$

$$(\mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) - \mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{t})) \cdot (\mathrm{s} - \mathrm{t}) > 0 \tag{4}$$

при п. в. $\mathrm{x} \in \Omega$ и любых $s_0 \in [-k, k]$, $\mathrm{s}, \mathrm{t} \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{s} \neq \mathrm{t}$. Следующее неравенство

$$\mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) \cdot (\mathrm{s} - \nabla\psi) \geqslant \bar{a}\mathrm{B}(\mathrm{s}) - \phi(\mathrm{x}) \tag{5}$$

предполагается выполненным при п. в. $\mathrm{x} \in \Omega$ и всех $s_0 \in \mathbb{R}$, $\mathrm{s} \in \mathbb{R}^n$.

Функции $a_i(\mathrm{x},\ s_0,\ \mathrm{s})$, $i = 1, \ldots, n$, удовлетворяют условию Гельдера по переменной s_0, а именно, существует непрерывная функция $\widehat{A}(R, \rho)$ и $\alpha \in (0, 1)$ такие, что для любых $\mathrm{x} \in \Omega(R) = \{\mathrm{x} \in \Omega : |\mathrm{x}| < R\}$, $s_0, t_0 \in \mathbb{R}$, $|s_0| < \rho$, $|t_0| < \rho$, $\mathrm{s} \in \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства

$$\overline{B}_i\left(\frac{|a_i(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) - a_i(\mathrm{x}, t_0, \mathrm{s})|}{|s_0 - t_0|^\alpha}\right) \leqslant \widehat{A}(R, \rho)\mathrm{B}(\mathrm{s}), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{6}$$

Здесь $\mathrm{s}\cdot\mathrm{t}$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. $B_1(z),\ldots,B_n(z)$ — N-функции, $\overline{B}_1(z),\ldots,\overline{B}_n(z)$ — дополнительные к ним, для всех предполагается выполненным Δ_2-условие.

Положим $a_0(\mathrm{x},s_0)=a_0(\mathrm{x},\psi)+b(\mathrm{x},s_0)$, считаем, что

$$a_0(\mathrm{x},\psi)\in L_1(\Omega),\quad \sup_{|s_0|\leqslant k}|b(\mathrm{x},s_0)|=G_k(\mathrm{x})\in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega). \tag{7}$$

Кроме того, потребуем существование $\delta_0>0$ такого, что

$$b(\mathrm{x},\psi\pm\delta_0)\in L_1(\Omega). \tag{8}$$

Определим пространство Соболева — Орлича $\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega)$ как пополнение $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $\|v\|_{\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega)}=\sum_{i=1}^n\|v_{x_i}\|_{B_i}$, где $\|\cdot\|_{B_i}$ — норма Люксембурга в пространстве Орлича $L_{B_i}(\Omega)$, $i=1,\ldots,n$. Через $\mathrm{L_B}(\Omega)$ обозначим пространство $L_{B_1}(\Omega)\times\cdots\times L_{B_n}(\Omega)$ с нормой

$$\|\mathrm{v}\|_{\mathrm{B}}=\|v_1\|_{B_1}+\cdots+\|v_n\|_{B_n},\quad \mathrm{v}=(v_1,\ldots,v_n)\in\mathrm{L_B}(\Omega).$$

Считаем, что $\psi(\mathrm{x})\in L_\infty(\Omega)$, $\nabla\psi(\mathrm{x})\in\mathrm{L_B}(\Omega)$.

Обозначим $h(\theta)=\left(\prod_{i=1}^n B_i^{-1}(\theta)/\theta\right)^{1/n}$, предполагаем, что

$$\int_0^1\frac{h(\theta)}{\theta}\,d\theta<\infty,\quad \int_1^\infty\frac{h(\theta)}{\theta}\,d\theta=\infty. \tag{9}$$

Определим функцию $T_k(r)=\operatorname{sign}r\min(|r|,k)$, положим $\langle uv\rangle=\int_\Omega uv d\mathrm{x}$.

Определение. Энтропийным решением задачи (1), (2) называется измеримая функция $u:\Omega\to\mathbb{R}$ такая, что

$$A_0(\mathrm{x})=a_0(\mathrm{x},u)\in L_1(\Omega);\quad \text{при всех}\quad k>0\quad T_k(u-\psi)\in\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega)$$

и при любых $k>0$, $\xi(\mathrm{x})\in C_0^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\big\langle a_0(\mathrm{x},u)T_k(u-\psi-\xi)\big\rangle+\big\langle \mathrm{a}(\mathrm{x},u,\nabla u)\cdot\nabla T_k(u-\psi-\xi)\big\rangle\leqslant 0.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (3)–(9), *тогда энтропийное решение задачи* (1), (2) *существует.*

Литература

1. *Benilan Ph., Boccardo L., Galluet Th., Pierre M., Vazquez J. L.* An L_1-theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations // Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze.—1995.—Vol. 22, № 2.—P. 241–273.
2. *Benkirane A., Bennouna J.* Existence of entropy solutions for some elliptic problems involving derivatives of nonlinear terms in Orlicz spaces // Abstr. Appl. Anal.—2002.—Vol. 7, № 2.—P. 85–102.

ON ASYMPTOTICS OF SOLUTIONS FOR A CLASS OF DIFFERENTIAL INCLUSIONS WITH A REGULAR RIGHT-HAND PART[1]

S. Kornev

(Russia, Voronezh; VSPU)

The method of guiding functions, whose foundations were laid by M. A. Krasnosel'skii and A. I. Perov (see, for example, [1]) was extended to differential inclusions and demonstrated its effectiveness to the study of periodic problems (see, e. g., [2–4]). It should be mentioned that the role of differential inclusions in the description of problems in mathematical control theory and optimization is well known (see, e. g., [3–6]). In the present paper we define a guiding function for a differential inclusion with nonconvex-valued right-hand part and apply it to the study of the asymptotic behavior of its solutions.

Recall some notions from the theory of multivalued maps (see, e. g., [2, 3, 5]).

Let (X, d_X) and (Y, d_Y) be metric spaces. By the symbol $K(Y)$ we will denote the collection of all nonempty compact subsets of the space Y. If Y is a normed space, the symbol $Kv(Y)$ will denote the collection of all nonempty convex compact subsets of Y.

A multivalued map (multimap) $F : X \to K(Y)$ is called *upper semicontinuous* (*u. s. c.*) *at a point* $x_0 \in X$ if for every $\varepsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that $d_X(x_0, x) < \delta$ implies $F(x) \subset U_\varepsilon(F(x_0))$, where the symbol U_ε denotes ε-neighborhood of a set.

A multimap $F : X \to K(Y)$ is called *u. s. c.* if it is u. s. c. at each point $x \in X$.

A multimap $F : X \to P(Y)$ is called *lower semicontinuous* (*l. s. c.*) *at a point* $x \in X$, if for each open set $V \subset Y$ such that $F(x) \cap V \neq \varnothing$ there exists $\delta > 0$ such that $d_X(x, x') < \delta$ implies $F(x') \cap V \neq \varnothing$.

A multimap $F : X \to P(Y)$ is called *l. s. c.* if it is l. s. c. at each point $x \in X$.

Let I be a closed subset of $\mathbb{R}$, endowed with the Lebesgue measure; Y a Banach space. A multifunction $F : I \to K(Y)$ is called *measurable* if for each open set $W \subset Y$, its pre-image $F^{-1}(W) = \{t \in I : F(t) \subset Y\}$ is a measurable subset of I.

A multimap $F : I \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ is called *the upper* (*lower*) *Carathéodory multimap* if

(*i*) for each $x \in \mathbb{R}^n$ the multifunction $F(\cdot, x) : I \to Kv(\mathbb{R}^n)$ is measurable;

(*ii*) for a. e. $t \in I$ the multimap $F(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ is u. s. c. (l. s. c.).

A multimap $F : I \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ satisfies *the sublinear growth condition* if there exists a positive Lebesgue integrable function $\alpha(\cdot)$ such that $\|F(t,x)\| := \max_{y \in F(t,x)} \|y\| \leqslant \alpha(t)(1 + \|x\|)$ a. e. $t \in I$.

A multimap $F : I \times X \to K(Y)$ is called *almost lower semicontinuous* if there exists a sequence of disjoint compact sets $\{I_n\}, I_n \subseteq I$, such that

[1]This research is supported by the joint Taiwan NSC–Russia RFBR grant 14-01-92004 and the RFBR grants 14-01-00468, 16-01-00386, as well as RSF grant 14-21-00066 (in Voronezh State University).

(i) $\mu(I \setminus \bigcup_n I_n) = 0$, where μ is the Lebesgue measure;

(ii) the restriction of F to each set $J_n = I_n \times Y$ is a l. s. c. multimap.

A bounded multimap $R : I \times \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ is called *regular* if there exists a multimap $F : I \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$, called a regular quasi-selection of the multimap R, satisfying:

(i) the multimap F is an upper Carathéodory multimap, satisfying the sublinear growth condition;

(ii) $F(t,x) \cap R(t,x) \neq \varnothing$ for all $t \in I$, $x \in \mathbb{R}^n$;

(iii) every solution $x : I \to \mathbb{R}^n$ of the differential inclusion $x'(t) \in F(t, x(t))$ is a solution of the differential inclusion $x'(t) \in R(t, x(t))$.

Every bounded almost l. s. c. multimap $F : I \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ is a regular multimap.

Let us consider the Cauchy problem for a differential inclusion of the form:

$$x'(t) \in R(t, x(t)) \quad \text{a. e. } t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

under assumption that the right-hand part $R : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ is a regular multimap satisfying the sublinear growth condition.

By a *solution of problem* (1), (2) we mean an absolutely continuous function $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, satisfying condition (2) and inclusion (1) for a. e. $t \in \mathbb{R}$.

Denote by $\mathfrak{V}$ the collection of all C^1-functions $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ satisfying the coercivity condition $\lim_{\|x\| \to +\infty} V(x) = -\infty$. Now, let $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a given even C^1-function such that $\inf\{g(t), t \in \mathbb{R}\} \geqslant 1$.

Let us give the following definition (cf. [7, 8]).

Definition. A function $V \in \mathfrak{V}$ is called a guiding function for inclusion (1) along the function g if there exists $r_0 > 0$ such that condition $g(t)\|x\| \geqslant r_0$, $t \in \mathbb{R}$, implies for all $y \in R(t, x)$ the estimates:

$$\big\langle \nabla V(x),\, g'(t)x + g(t)y \big\rangle \geqslant 0, \quad \text{if } t > 0;$$

$$\big\langle \nabla V(x),\, g'(t)x + g(t)y \big\rangle \leqslant 0, \quad \text{if } t < 0.$$

Theorem. *If $V \in \mathfrak{V}$ is a guiding function for inclusion* (1) *along the function g then there exists at least one solution to Cauchy problem* (1), (2) *satisfying for some $k_0 > 0$ the estimate*

$$\|x(t)\| \leqslant k_0 \cdot \frac{1}{g(t)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

References

1. *Krasnosel'skii M. A.* The Operator of Translation Along the Trajectories of Differential Equations.—Moscow: Nauka, 1966.—332 p.—(in Russian).
2. *Górniewicz L.* Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings.—Dordrecht: Springer, 2006.—556 p.
3. *Borisovich Yu. G., Gel'man B. D., Myshkis A. D. and Obukhovskii V. V.* Introduction to the Theory of Multivalued Maps and Differential Inclusions.—Moscow: Librokom, 2011.—226 p.—(in Russian).

4. *Obukhovskii V., Zecca P., Loi N. V., Kornev S.* Method of Guiding Functions in Problems of Nonlinear Analysis.—Berlin: Springer, 2013.— 177 p.
5. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P.* Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces.—Berlin–N. Y.: Walter de Gruyter, 2001.—231 p.
6. *Arutyunov A. V., Blagodatskikh V. I.* Maximum-principle for differential inclusions with space constraints // Trudy Mat. Inst. Steklov.—1991.—Vol. 200.—P. 4–26.—(in Russian).
7. *Kornev S., Obukhovskii V.* On Asymptotics of Solutions for a Class of Functional Differential Inclusions // Discussiones Math. Differential Inclusions, Control and Optimization.—2014.—Vol. 34, № 2.—P. 219–227.
8. *Kornev S. V., Obukhovskii V. V.* On Asymptotic Behavior of Solutions of Differential Inclusions and the Method of Guiding Functions // Differ. Eq.—2015.—Vol. 51, № 6.—P. 711–716.—(in Russian).

ТЕОРЕМА О ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНОМ ВЛОЖЕНИИ ПРОСТРАНСТВА ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

М. В. Кукушкин
(Россия, Нальчик; ИПМА)

Наверное одна из наиболее известных теорем о вполне непрерывном вложении — это теорема Реллиха в которой утверждается, что множество ограниченное в пространстве Соболева является компактным в пространстве Лебега суммируемых с квадратом функций. Как известно из классической теории положительно определенных операторов (см., например, [1, с. 111]), теорема о вполне непрерывном вложении энергетического пространства порожденного положительно определенным оператором в исходное пространство дает возможность, с помощью введения отношения частичного порядка на множестве положительно определенных операторов, оценить собственные значения оператора собственными значениями оператора более простого типа (целесообразность данного подхода исходит из того, что есть возможность вычисления собственных значений оператора более простого типа). В работе [2] 2015 г. доказана полуограниченность снизу оператора дробного дифференцирования действующего в весовом пространстве Лебега суммируемых с квадратом функций. Ввиду чего приобретает актуальность вопрос переноса классических результатов теории положительно определенных операторов, на случай полуограниченного снизу оператора. Особое место занимает вопрос о вполне непрерывном вложении энергетического пространства порожденного оператором дробного дифференцирования в исходное пространство. В данной работе доказана теорема о вполне непрерывном вложении энергетического пространства порожденного полуограниченным снизу оператором дробного дифференцирования.

Будем полагать: $\alpha \in (0,1)$, $(a,b) = \Omega \subset \mathbb{R}$, интегрирование понимается в смысле Лебега. Энергетическое пространство порожденное оператором дробного дифференцирования: $N_{\alpha,c}(L_\theta(\Omega))$, в [2] определено как пополнение следующего унитарного пространства:

$$\widetilde{N}_{\alpha,c}(L_\theta(\Omega)) := \left\{ u :\; u \in I^{\alpha}_{a+}(L_\theta(\Omega)),\; \|u\|_{\widetilde{N}_{\alpha,c}(L_\theta(\Omega))} = \langle D^{\alpha}_{ax} u, u \rangle^{1/2}_{L_2(\Omega,c)} \right\},$$

с предположениями относительно весовой функции

$$c(x) \in I^{\alpha}_{b-}(L_q(\Omega))^{+}, \quad \frac{2}{\theta} + \frac{1}{q} \leqslant 1 + 2\alpha, \quad \theta, q > 1.$$

Для безвесового случая энергетического пространства порожденного оператором дробного дифференцирования, имеет место следующая теорема.

Теорема. *Пространство $N_{\alpha,1}(L_2(\Omega))$ вполне непрерывно вложено в $L_2(\Omega)$.*

Литература

1. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных.—М.: Высшая школа, 1977.—431 с.
2. *Кукушкин М. В.* О весовых пространствах дробно дифференцируемых функций // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика.—2016.—Т. 227, № 6.—С. 60–70.

ON SOME DISCRETE SINGULARLY PERTURBED CONTROL PROBLEMS

G. A. Kurina
(Russia, Voronezh; VSU)

This talk is dedicated
to the 90-th anniversary
of A. B. Vasil'eva

Many problems from applied sciences lead to dynamical systems, where the state space variables have certain components which vary rapidly, and other which vary relatively slowly in time. Usually, such problems are studied within the framework of singular perturbations and integral manifolds. The most part of publications devoted to singularly perturbed control problems deals with continuous systems while a lot of problems in economics, sociology, biology is described by discrete models. The another source of appearing discrete models is digital simulation of continuous systems where the differential equations are approximated by the corresponding difference equations. The study of sampled-data control systems and computer-based adaptive control systems leads in a natural way to the third source of discrete-time models. The control theory for discrete-time systems and sampled systems are receiving growing attention since the controllers are implemented by digital computers. If a dynamic system exhibits both continuous and discrete dynamic behavior, then it is called a hybrid system.

A. B. Vasil'eva was perhaps the first (1967) to study solutions of discrete singularly perturbed dynamical systems using the asymptotic method of boundary-layer functions that has proved to be an effective tool in the analysis of singularly perturbed systems of ordinary differential equations.

Discrete singularly perturbed control problems have been the topic for the intensive research since the ending of the seventies of the last century. Two approaches are possible for constructing asymptotic solution of optimal control problems with a small parameter. In the first approach boundary value problems following from the control optimality conditions are used. This method is mostly applied. The second approach called the direct scheme consists of immediate substituting a postulated asymptotic expansion into a problem conditions and determining problems series for finding asymptotic terms. For linear-quadratic optimal control problems, asymptotic solution can also be constructed using the presentation of an optimal control in a feedback form and asymptotic solution of an appropriate discrete Riccati equations. When a small parameter in a singularly perturbed state equation is equal to zero, we can sometimes obtain the system which is not resolved with respect to a state variable in a future time moment, so-called descriptor system.

The review of the publications where asymptotic solutions of discrete optimal control problems have either the form of expansions of boundary-layer type or regular expansions with respect to non-negative powers of a small parameter will be given. Methods of decoupling motions into pure-slow and fast ones are also considered. Besides, the publications devoted to the stabilization of discrete systems, control problems by discrete systems with a small step, descriptor and stochastic systems, game problems, and applications in various fields are reviewed.

О РЕШЕНИИ СИСТЕМЫ ХЕМОТАКСИСА ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Х. С. Кучакшоев
(Таджикистан, Душанбе; Филиал МГУ в Душанбе)

Рассмотрим задачу Коши для системы хемотаксиса дробного порядка

$$\begin{cases} D_t^\alpha u = u_{xx} - \chi(uv_x)_x, & x \in R,\ t > 0,\ \chi = \mathrm{const},\ 0 < \alpha < 1, \\ v_{xx} = -u, & x \in R,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in R, \end{cases} \tag{1}$$

где производная дробного порядка понимается в смысле Капуто, т. е.

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^\alpha}\, d\tau.$$

Решение задачи (1) будем искать в виде

$$\begin{cases} u(x,t) = X(x)T(t),\ u_0(x) = T(0)X(x), \\ v(x,t) = H(x)\Theta(t). \end{cases}$$

В случае $\alpha = 1$ из (1) получим систему с производными целого порядка, которая известна в литературе как простейшая модель хемотаксиса [1].

Для задачи (1) в случае $\alpha = 1$, $x \in R$, в работе [2] найдены решения типа «бегущей волны» и в работе [3] построена разностная схема. В работах [4] и [5], для случая $\alpha = 1$, $x \in R^n$, соответственно, получены автомодельные решения и решения типа мгновенной точечной концентрации массы задачи (1).

В данной работе также рассматривается численное решение задачи (1), при этом производная дробного порядка понимается в смысле Грюнвальда — Летникова [6].

Литература

1. *Perthame B.* PDE models for chemotactic movements: parabolic, hyperbolic and kinetic // Appl. Math.—2004.—Vol. 49, № 6.—P. 539–564.
2. *Кучакшоев Х. С.* Ограниченные решения типа «бегущей волны» и некоторые частные решения системы Келлера — Сиджела // Докл. АН РТ.—2011.—Т. 54, № 8.—С. 610–617.
3. *Кучакшоев Х. С.* Разностные схемы для задачи Дирихле системы хемотаксиса // Докл. АН РТ.—2009.—Т. 52, № 11.—С. 838–847.
4. *Кучакшоев Х. С.* Автомодельные решения системы уравнений Келлера — Сиджела // Докл. АН РТ.—2010.—Т. 53, № 6.—С. 424–431.
5. *Илолов М., Кучакшоев Х. С.* Нелинейная диффузия и хемотаксический коллапс // Докл. АН РТ.—2011.—Т. 54, № 11.—С. 873–880.
6. *Учайкин В. В.* Метод дробных производных.—Ульяновск: Артишок, 2008.—512 с.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XIII Междунар. науч. конф. (пос. Дивноморское, 7–14 сентября 2016 г.)

ВЫСШИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА В ИССЛЕДОВАНИИ ЧАСТИЧНОЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЙ С ЧАСТИЧНО КОНТРОЛИРУЕМЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

К. С. Лапин

(Россия, Саранск; МГПИ)

В работе Yoshizawa [1] на основе метода функций Ляпунова была развита теория ограниченности решений систем дифференциальных уравнений. Исследования различных видов ограниченности решений систем по части переменных были проведены В. В. Румянцевым и А. С. Озиранером [2]. В работе В. И. Воротникова [3] было положено начало новому направлению в теории устойчивости по Ляпунову относительно части переменных, а именно — теории частичной устойчивости положения равновесия, у которого часть координат контролируется. В связи с этим, имея в виду известные параллели между теорией устойчивости и теорией ограниченности решений, возникла задача развития теории частичной ограниченности решений с контролируемой частью начальных условий. В работах [4–7] на основе методов функций Ляпунова и вектор-функций Ляпунова были разработаны способы исследования различных видов частичной ограниченности решений с частично контролируемыми начальными условиями. С другой стороны, в монографиях [8] и [9] были созданы методы исследования устойчивости по Ляпунову и ограниченности решений, использующие высшие производные функций Ляпунова в силу системы. Эти методы обобщают классический метод функций Ляпунова и обладают, по сравнению с последним, гораздо большими возможностями. В свете указанных выше параллелей возникает интересный и актуальный вопрос о разработке методов исследования частичной ограниченности решений с контролируемой частью начальных условий, использующих высшие производные функций Ляпунова в силу системы.

В работе получен достаточный признак равномерной частичной ограниченности решений с частично контролируемыми начальными условиями, основанный на использовании высших производных функций Ляпунова в силу системы. Введены понятия частичной эквиограниченности, частичной эквиограниченности в пределе и частичной равномерной ограниченности в пределе решений с частично контролируемыми начальными условиями в общем случае по сравнению с [5]. Далее получены достаточные признаки частичной эквиограниченности решений, частичной равномерной ограниченности в пределе и частичной эквиограниченности в пределе решений с частично контролируемыми начальными условиями, которые основаны на использовании высших производных функций Ляпунова в силу системы.

Литература

1. *Yoshizawa T.* Liapunovs function and boundedness of solutions // Funkcialaj Ekvacioj.—1959.—Vol. 2.—P. 95–142. Русский пер.: Сб. пер. Математика.—1965.—№ 5.—С. 95–127.
2. *Румянцев В. В, Озиранер А. С.* Устойчивость и стабилизация движения относительно части переменных.—М.: Наука, 1987.—256 с.
3. *Воротников В. И.* Об устойчивости и устойчивости по части переменных частичных положений равновесия нелинейных динамических систем // Докл. РАН.—2003.—Т. 389, № 3.—С. 332–337.
4. *Лапин К. С.* Частичная равномерная ограниченность решений систем дифференциальных уравнений с частично контролируемыми начальными условиями // Дифференциальные уравнения.—2014.—Т. 50, № 3.—С. 309–316.
5. *Лапин К. С.* Ограниченность в пределе решений систем дифференциальных уравнений по части переменных с частично контролируемыми начальными условиями // Дифференциальные уравнения.— 2013.—Т. 49, № 10.—С. 1281–1286.
6. *Лапин К. С.* Равномерная ограниченность решений систем дифференциальных уравнений по части переменных с частично контролируемыми начальными условиями // Мат. заметки.—2014.—Т. 96, № 3.— С. 393–404.
7. *Лапин К. С.* Частичная тотальная ограниченность решений систем дифференциальных уравнений с частично контролируемыми начальными условиями // Мат. заметки.—2016.—Т. 99, № 2.—С. 239–247.
8. *Абдуллин Р. З., Анапольский Л. Ю., Воронов А. А., Земляков А. С., Козлов Р. И., Маликов А. И, Матросов В. М.* Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости.—М.: Наука, 1987.—312 с.
9. *Матросов В.М.* Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем.—М.: Физматлит, 2001.—373 с.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XIII Междунар. науч. конф. (пос. Дивноморское, 7–14 сентября 2016 г.)

ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ И НЕЙМАНА ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ[1]

М. Г. Мажгихова

(Россия, Нальчик; ИПМА)

Рассмотрим уравнение

$$\partial_{0t}^{\alpha}u(t) - \lambda u(t) - \mu H(t-\tau)u(t-\tau) = f(t), \quad 0 < t < 1, \tag{1}$$

где $\partial_{0t}^{\alpha}u(t) = D_{0t}^{\alpha-2}u''(t)$, $n-1 < \alpha \leqslant n$, — дробная производная Капуто [1, с. 11], D_{0t}^{α} — оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана — Лиувилля [1, с. 9], $H(t)$ — функция Хевисайда, $1 < \alpha \leqslant 2$, λ, μ — произвольные постоянные, τ — фиксированное положительное число.

Для уравнения (1) начальная задача была рассмотрена в работе [2]. Решение задачи Коши для уравнения (1) с оператором Римана — Лиувилля выписано в работе [3]. В данной работе исследуются задачи Дирихле и Неймана для уравнения (1).

Регулярным решением уравнения (1) назовем функцию $u = u(t)$, имеющую абсолютно непрерывную производную первого порядка на отрезке $[0,1]$ и удовлетворяющую этому уравнению.

Задача 1. Найти регулярное решение $u(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(0) = a, \quad u(1) = b, \tag{2}$$

где a и b — произвольные постоянные.

Теорема 1. 1) *Пусть функция $f(t) \in C(0,1)$ представима в виде*

$$f(t) = D_{0t}^{\alpha-2}g(t), \quad g(t) \in L[0,1],$$

а также выполнено условие

$$W_2(1) \neq 1. \tag{3}$$

Тогда существует регулярное решение задачи (1), (2), которое имеет вид

$$u(t) = aD_{1\xi}^{\alpha-1}G(t,\xi)\big|_{\xi=0} - bD_{1\xi}^{\alpha-1}G(t,\xi)\big|_{\xi=1} + \int\limits_0^1 f(\xi)\,G(t,\xi)\,d\xi,$$

где

$$G(t,\xi) = H(t-\xi)W_{\alpha}(t-\xi) - \frac{W_2(t)}{W_2(1)}W_{\alpha}(1-\xi)$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-01-00462-а.

— *функция Грина решения задачи* (1), (2),

$$W_\nu(t) = W_{\alpha,\nu}(t,\tau;\lambda,\mu) \equiv$$
$$\equiv \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m (t-m\tau)_+^{\alpha m+\nu-1} E^{m+1}_{\alpha,\alpha m+\nu}(\lambda(t-m\tau)_+^{\alpha}), \quad \nu \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

$E^{\rho}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)k!}$ — *обобщенная функция Миттаг-Леффлера* [4], $(\rho)_k$ — *символ Похгаммера*, $\Gamma(z)$ — *Гамма-функция Эйлера*,

$$(t-m\tau)_+^{\rho} = \begin{cases} (t-m\tau)^{\rho}, & t-m\tau > 0, \\ 0, & t-m\tau \leqslant 0. \end{cases}$$

2) *Решение задачи* (1), (2) *единственно тогда и только тогда, когда выполнено условие* (3).

Задача 2. Найти регулярное решение $u(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям
$$u'(0) = c, \quad u'(1) = d, \tag{5}$$
где c и d — произвольные постоянные.

Теорема 2. 1) *Пусть функция* $f(t) \in C(0,1)$ *представима в виде*

$$f(t) = D_{0t}^{\alpha-2} g(t), \quad g(t) \in L[0,1],$$

а также выполнено условие
$$W_0(1) \neq 1. \tag{6}$$
Тогда существует регулярное решение задачи (1), (5), *которое имеет вид*

$$u(t) = cD_{1\xi}^{\alpha-2} G(t,\xi)\big|_{\xi=0} - dD_{1\xi}^{\alpha-2} G(t,\xi)\big|_{\xi=1} + \int_0^1 f(\xi)\, G(t,\xi)\, d\xi,$$

где
$$G(t,\xi) = H(t-\xi) W_\alpha(t-\xi) - \frac{W_1(t)}{W_0(1)} W_{\alpha-1}(1-\xi)$$

— *функция Грина решения задачи* (1), (5), $W_\nu(t)$ *определяется из соотношения* (4).

Замечание. При всех
$$\lambda > 0, \quad \mu > 0 \tag{7}$$
функция $W_\nu(t)$, определяемая равенством (4), положительна. Значит, условие (7) обеспечивает выполнение условий (3) и (6).

Литература

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение.—М.: Физматлит, 2003.—272 с.
2. *Мажгихова М. Г.* Начальная задача для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. акад. наук.—2014.—№ 4.—С. 28–30.
3. *Мажгихова М. Г.* Начальная задача для обыкновенного дифференциального уравнения с производной Римана — Лиувилля с запаздывающим аргументом // Учен. записки ОГУ.—2015.—№ 4 (67).—С. 46–47.
4. *Prabhakar T. R.* A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel // Yokohama Math. J.—1971.—№ 19.—P. 7–15.

HALF-PLANE PROBLEMS FOR DIFFERENTIAL-DIFFERENCE ELLIPTIC EQUATIONS[1]

A. B. Muravnik

(Russia, Voronezh, JSC "Concern "Sozvezdie"; Moscow, PFUR)

The equation

$$u_{xx} + \sum_{k=1}^{m} a_k \, u_{xx}(x + h_k, y) + u_{yy} = 0, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad y > 0, \tag{1}$$

where a_k and h_k, $k = 1, \dots, m$, are real parameters, and the boundary-value condition

$$u|_{y=0} = u_0(x), \quad x \in (-\infty, +\infty), \tag{2}$$

where u_0 is a bounded continuous function, are considered.

Assuming that there exists a positive C such that $1 + \sum_{k=1}^{m} a_k \cos h_k \xi \geqslant C$ for any real x (this guarantees the strong ellipticity of equation (1) in the sense of [1]), we introduce the function

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(x - \xi, y) \, u_0(\xi) \, d\xi, \tag{3}$$

where

$$\mathcal{E}(x, y) = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-yG_1(\xi)} \cos\left[x\xi - yG_2(\xi)\right] d\xi,$$

$$G_{\left\{ {1 \atop 2} \right\}}(\xi) = \xi \sqrt{\frac{\varphi(\xi) \pm a \cos h\xi \pm 1}{2}}, \quad \varphi(\xi) = \sqrt{a^2(\xi) + b^2(\xi) + 2a(\xi) + 1},$$

$$a(\xi) = \sum_{k=1}^{m} a_k \cos h_k \xi, \quad b(\xi) = \sum_{k=1}^{m} a_k \sin h_k \xi,$$

and prove that function (3) is a solution of problem (1)–(2) in the sense of generalized functions and is a classical solution of equation (1) in the half-plane $(-\infty, +\infty) \times (0, +\infty)$.

References

1. *Skubachevskii A. L.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications.—Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 1997.

[1]This work was financially supported by the Ministry of Eduction and Science of Russian Federation on the program to improve the competitiveness of People's Friendship University (RUDN University) among the world's leading research and education centers in the 2016–2020, by the president grant for government support of the leading scientific schools of the Russian Federation, № 4479.2014.1, and by the RFBR, grant № 14-01-00265.

КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ НА ОТРЕЗКЕ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Л. Ю. Плиева

(Россия, Владикавказ; ЮМИ)

Рассмотрим интеграл вида

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,\frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt. \tag{1}$$

Пусть $\{x_k\}$ и $\{\bar{x}_k\}$ нули многочленов [1]

$$C_n(t) = \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}\theta\right)}{\cos\frac{\theta}{2}}, \quad C_{n+1}(t) = \frac{\cos\left(\frac{2n+3}{2}\theta\right)}{\cos\frac{\theta}{2}},$$

$$\theta = \arccos t.$$

В дальнейшем нам понадобятся выражения вида

$$\begin{gathered}\left[C_n(t)C_{n+1}(t)\right]'_{t=x_k} = \frac{2n+1}{2}\,\frac{(-1)^k}{\cos^2\frac{(2k-1)\pi}{2(2n+1)}},\\ \left[C_n(t)C_{n+1}(t)\right]'_{t=\bar{x}_k} = \frac{2n+3}{2}\,\frac{(-1)^{k-1}}{\cos^2\frac{(2k-1)\pi}{2(2n+3)}},\\ k = 1,\ldots,n.\end{gathered} \tag{2}$$

Используя выражения (2), мы получим следующее представление интерполяционного многочлена $L_{2n}(\varphi,t)$ для плотности $\varphi(t)$:

$$\begin{gathered}L_{2n}(\varphi,t) = C_n(t)C_{n+1}(t)\frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k\varphi(x_k)}{(t-x_k)}\,\cos^2\frac{(2k-1)\pi}{2(2n+1)} + \\ + C_n(t)C_{n+1}(t)\frac{2}{2n+3}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}\varphi(\bar{x}_k)}{(t-\bar{x_k})}\,\cos^2\frac{(2k-1)\pi}{2(2n+3)}.\end{gathered} \tag{3}$$

Подставим в интеграл (1) вместо плотности $\varphi(t)$ ее интерполяционный многочлен (3), получим приближенную формулу

$$\begin{gathered}\Phi_n(z) = \frac{1}{i(2n+1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k\varphi(x_k)}{(x_k-z)}\,\cos^2\frac{(2k-1)\pi}{2(2n+1)}\big(1+U_{2n+1}(x_k)+A(z)\big) + \\ + \frac{1}{i(2n+3)}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\varphi(\bar{x}_k)}{(\bar{x_k}-z)}\,\cos^2\frac{(2k-1)\pi}{2(2n+3)}\big(1+U_{2n+1}(\bar{x}_k)+A(z)\big),\end{gathered} \tag{4}$$

$$A(z) = \frac{z-\sqrt{z^2-1}+\left(z-\sqrt{z^2-1}\right)^{2n+2}}{\sqrt{z^2-1}}, \quad U_n(t) = \frac{\sin((n+1)\arccos t)}{\sqrt{1-t^2}}.$$

где $\sqrt{z^2-1}$ — однозначная в плоскости с разрезом $[-1,1]$ и принимающая на отрезке $(1,\infty)$ действительные значения ветвь этой функции, $z \notin [-1,1]$.

Литература

1. *Плиева Л. Ю.* Об интерполяционных квадратурных формулах для интегралов типа Коши с весами Якоби // Мат. форум. Т. 8, ч. 2. Исслед. по дифференц. уравнениям, мат. моделированию и проблемам мат. образования.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014.—С. 124–130.—(Итоги науки. Юг России).
2. *Пыхтеев Г. Н.* Точные методы вычисления интегралов типа Коши.—Новосибирск: Наука, 1980.—120 с.
3. *Лифанов И. К.* Численное решение одномерных сингулярных интегральных уравнений.—М.: ТОО Янус, 1995.—520 с.
4. *Хубежты Ш. С.* Квадратурные формулы для сингулярных интегралов и некоторые их применения.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2011.—236 с.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XIII Междунар. науч. конф. (пос. Дивноморское, 7–14 сентября 2016 г.)

АЛГЕБРА ЛИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ КИЛЛИНГА И ЕЕ СТАЦИОНАРНАЯ ПОДАЛГЕБРА

В. А. Попов

(Россия, Москва; Финансовый университет)

Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{g}$ всех векторных полей Киллинга на римановом аналитическом многообразии M и ее стационарную подалгебру $\mathfrak{h}$. Для фиксированной точки $p \in M$ $X \in \mathfrak{h} \iff X(p) = 0$. Алгебра $\mathfrak{g}$ порождает локальную группу локальных изометрий на M, однако, аналитическое продолжение этих изометрий до изометрий какого-нибудь риманова аналитического многообразия, локально изометричного M, возможно не всегда. Принципиальным препятствием служит возможная незамкнутость подгруппы Ли H, порожденной подалгеброй $\mathfrak{h}$, в односвязной группе Ли G, порожденной алгеброй $\mathfrak{g}$. Укажем свойства алгебр $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$, выполнение которых необходимо в случае незамкнутости H в G.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли всех векторных полей Киллинга на римановом вещественно аналитическом многообразии M, $\mathfrak{h}$ — ее стационарная подалгебра в некоторой точке $p \in M$, G — группа, порожденная алгеброй $\mathfrak{g}$, и H — подгруппа, порожденная подалгеброй $\mathfrak{h}$. Если H не замкнута в G, то алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ обладают следующими свойствами.*

1. $\mathfrak{g}$ *имеет ненулевой центр* $\mathfrak{z}$.

2. $\dim(\mathfrak{h} \cap (\mathfrak{z} + [\mathfrak{g};\mathfrak{g}])) > \dim(\mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g};\mathfrak{g}])$, *где* $\mathfrak{z} + [\mathfrak{g};\mathfrak{g}]$ *— подалгебра, порожденная центром* $\mathfrak{z}$ *и коммутантом* $[\mathfrak{g};\mathfrak{g}]$.

Приведем идею доказательства теоремы. Рассмотрим замыкание $\overline{H}$ группы H в G и подалгебру Ли $\overline{\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{g}$ подгруппы $\overline{H} \subset G$. Подалгебра $\mathfrak{h}$ является нормальной подалгеброй алгебры $\overline{\mathfrak{h}}$ [1]. Рассмотрим однопараметрическую подгруппу $\overline{h}_t \in \overline{H}$, $\overline{h}_t \notin H$. Тогда внутренний автоморфизм $x \mapsto \overline{h}_t x h_t^{-1}$, $x \in G$, являются пределом последовательности внутренних автоморфизмов $x \mapsto h_n x \overline{h}_n^{-1}$, $h_n \in H$. Так как внутренние автоморфизмы $x \mapsto h_n x h_n^{-1}$ определяют изометрии $x \mapsto h_n x$ шара $B \subset M$, то внутренний автоморфизм определяет изометрию $x \mapsto \overline{h}_t x \overline{h}_t^{-1}$ шара B. Тогда для всех достаточно малых t определена локальная изометрия $x \mapsto \overline{h}_t x$ и, следовательно, локальная изометрия $x \mapsto x\overline{h}_t$. Таким образом, умножения справа на элементы локальной однопараметрической группы $\overline{h}_t$ порождает векторное поле Киллинга, коммутирующее со всеми элементами алгебры $\mathfrak{g}$.

Как было показано выше, группа G содержит однопараметрическую подгруппу z_t умножений справа на $\overline{h}_t \in G \subset \operatorname{Aut} G$. Как показано выше $z_t \in \overline{H}$. Известно, что $\overline{h}_t$ принадлежит компактной подгруппе группы G и, следовательно, $\overline{h}_t \in (G;G)$ [1]. Тогда $z_t \notin (G;G)$ (автоморфизм, порожденный умножением справа, не может быть равным автоморфизму, порожденному умножением слева), и $\overline{h}_t z_t^{-1} \notin (G;G)$. Но локальная изометрия группа $\overline{h}_t z_t^{-1}$ порождена внутренним автоморфизмом $x \mapsto \overline{h}_t x \overline{h}_t^{-1}$ и, поэтому $\overline{h}_t z_t^{-1} \in H$. Следовательно, векторное поле Киллинга, порожденное локальной группой изометрий $\overline{h}_t z_t^{-1}$ принадлежит $\mathfrak{z} + [\mathfrak{g};\mathfrak{g}]$, но не принадлежит $[\mathfrak{g};\mathfrak{g}]$.

Литература

1. *Mal'tsev A. I.* On the theory of Lie groups in the large // Mat. Sb.—1945.—Vol. 16 (38).—P. 163–190.
2. *Попов В. А.* Продолжаемость локальных групп изометрий // Мат. сб.—1988.—Т. 135 (177), № 1.—С. 45–64.

СВЯЗЬ ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БУШМАНА — ЭРДЕЙИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ХАРДИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

С. М. Ситник

(Россия, Воронеж; ВИ МВД)

Методы теории операторов преобразования широко применяются в современной теории уравнений в частных производных [1]. В нескольких недавних работах найдены простые доказательства того факта, что сдвинутые операторы Харди [2–3] являются унитарными в пространстве $L_2(0,\infty)$

$$H_1 f = f(x) - \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(y)\,dy, \quad H_2 f = f(x) - \int\limits_x^\infty \frac{f(y)}{y}\,dy. \tag{1}$$

На самом деле это частный случай унитарности более общих операторов преобразования со специальными функциями в ядрах, полученных ранее автором [4–5] в поисках унитарных обобщений известных операторов преобразования Сонина и Пуассона (или исторически точнее Сонина — Пуассона — Дельсарта). Таким образом, можно сделать вывод, что введенные автором в [4–5] операторы преобразования Бушмана — Эрдейи различных типов являются полезными обобщениями классических операторов Харди.

Определение. Введем операторы Бушмана — Эрдейи нулевого порядка гладкости по формулам

$$S_1 f = \frac{d}{dx}\int\limits_0^x P_\nu\left(\frac{x}{t}\right) f(t)\,dt, \quad S_2 f = \left(-\frac{d}{dx}\right)\int\limits_x^\infty P_\nu\left(\frac{x}{t}\right) f(t)\,dt, \tag{2}$$

$$P_1 f = \int\limits_0^x P_\nu\left(\frac{t}{x}\right) \frac{df(t)}{dt}\,dt, \quad P_2 f = \int\limits_x^\infty P_\nu\left(\frac{t}{x}\right)\left(-\frac{df(t)}{dt}\right) dt, \tag{3}$$

где $P_\nu(z) = P_\nu^0(z)$ — функция Лежандра.

Теорема 1. *Для унитарности в $L_2(0,\infty)$ операторов Бушмана — Эрдейи нулевого порядка гладкости (2)–(3) необходимо и достаточно, чтобы число ν было целым.*

При значениях $\nu = 1, 2, 3$ получается

Следствие. *Следующие операторы унитарны и попарно взаимно обратны в $L_2(0,\infty)$, их спектр совпадает с единичной окружностью:*

$$H_1 f = f(x) - \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(y)\,dy, \quad H_2 f = f(x) - \int\limits_x^\infty \frac{f(y)}{y}\,dy, \quad H_3 f = f + \int\limits_0^x f(y)\,\frac{dy}{y},$$

$$H_4 f = f + \frac{1}{x}\int\limits_x^\infty f(y)\,dy, \quad H_5 f = f + 3x\int\limits_0^x f(y)\,\frac{dy}{y^2}, \quad H_6 f = f - \frac{3}{x^2}\int\limits_0^x y f(y)\,dy,$$

$$H_7 f = f + \frac{3}{x^2}\int\limits_x^\infty y f(y)\,dy, \quad H_8 f = f - 3x\int\limits_x^\infty f(y)\frac{dy}{y^2},$$

$$H_9 f = f + \frac{1}{2}\int\limits_0^x \left(\frac{15x^2}{y^3} - \frac{3}{y}\right) f(y)\,dy,$$

$$H_{10} f = f + \frac{1}{2}\int\limits_x^\infty \left(\frac{15y^2}{x^3} - \frac{3}{x}\right) f(y)\,dy.$$

Приведенный список унитарных операторов простого вида можно расширить. В [4–5] автором построены обобщенные операторы Бушмана — Эрдейи, которые являются унитарными уже при всех значениях ν, идея построения таких операторов преобразования принадлежит В. В. Катрахову, который получил их в несколько усложненном виде, выразив ядра через общие гипергеометрические функции.

Литература

1. *Carroll R. W.* Transmutation, Scattering Theory and Special Functions.—Amsterdam–N. Y.: North-Holland, 1982.—457 p.
2. *Carroll R. W.* Transmutation Theory and Applications.—Amsterdam–N. Y.: North Holland, 1986.—351 p.
3. *Ситник С. М.* Операторы преобразования и их приложения // Исследования по современному анализу и мат. моделированию / Ред. Коробейник Ю. Ф., Кусраев А. Г.—Владикавказ: ВНЦ РАН и РСО-А, 2008.—С. 226–293.—(arXiv updated version http://arxiv.org/abs/1012.3741 (2012)).
4. *Opic B., Kufner A.* Hardy–Type Inequalities.—Harlow: Longman, 1990.—362 p.
5. *Kufner A., Maligranda L., Persson L.-E.* The Hardy Inequality.—Pilsen, 2007.
6. *Sitnik S. M.* Buschman–Erdelyi transmutations, classification and applications // Analytic Methods of Analysis and Differential Equations: AMADE 2012 / Ed. by M. V. Dubatovskaya, S. V. Rogosin.—Cottenham: Cambridge Sci. Publ., 2013.—P. 171–201.—(arXiv version http://arxiv.org/abs/1304.2114v1).
7. *Ситник С. М.* Унитарность и ограниченность операторов Бушмана — Эрдейи нулевого порядка гладкости.—Владивосток, 1990.—44 с.—(Препринт / Институт автоматики и процессов управления ДВО АН СССР).
8. *Ситник С. М.* Факторизация и оценки норм в весовых лебеговых пространствах операторов Бушмана — Эрдейи // Докл. Академии Наук СССР.—1991.—Т. 320, № 6.—С. 1326–1330.
9. *Ситник С. М.* Решение задачи об унитарном обобщении операторов преобразования Сонина — Пуассона // Научные ведомости Белгородского гос. ун-та.—2010.—Вып. 18, № 5 (76).—С. 135–153.
10. *Ситник С. М.* Метод факторизации операторов преобразования в теории дифференциальных уравнений // Вестник Самарского гос. ун-та. Естественнонаучная сер.—2008.—Т. 67, № 8/1.—С. 237–248.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ I РОДА

Ш. С. Хубежты

(Россия, Владикавказ; ЮМИ, СОГУ)

В работе представлен обзор работ по численным методом решения гиперсингулярных уравнений I рода, выполненных в отделе математического моделирования Южного математического института филиала ВНЦ РАН в течение последнего года.

Введение. Теория сингулярных интегральных уравнений из-за многочисленных приложений переживает бурное развитие. Этим уравнениям посвящены фундаментальные труды широко известных математиков: Д. Гильберта, А. Пуанкаре, В. Карлемана, Н. И. Мусхелишвили, С. Г. Михлина, С. Пресдорфа и др.

Однако решение сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений возможно лишь в исключительных случаях и основным аппаратом в прикладных задачах являются численные методы. В этом направлении должен отметить труды В. В. Иванова, И. К. Лифанова, Б. Г. Габдулхаева, Д. Г. Саникидзе, И. В. Бойкова и др.

Гиперсингулярное интегральное уравнение I рода имеет вид [1]

$$K\varphi_0 \equiv \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi_0(t)}{(t-x)^p}\,dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} k(x,t)\varphi_0(t)\,dt = f(x), \tag{1}$$

где $-1 < x < 1$, $k(x,t)$, $f(x,t)$ — непрерывно дифференцируемые функции, $\varphi_0(t)$ — неизвестная функция.

Гиперсингулярный интеграл

$$H(\varphi_0,x) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi_0(t)}{(t-x)^p}\,dt, \quad p \geqslant 2, \tag{2}$$

понимается в смысле конечномерной части по Адамару [2]

$$H(\varphi_0,x) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int\limits_{-1}^{x-\varepsilon} \frac{\varphi_0(t)}{(t-x)^p}\,dt + \int\limits_{x+\varepsilon}^{1} \frac{\varphi_0(t)}{(t-x)^p}\,dt - \frac{\psi(x)}{\varepsilon^{p-1}}\right), \tag{3}$$

где

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{p-2} \frac{\varphi_0^{(k)}(x)}{k!}\,\frac{\varepsilon^k[1+(-1)^{p-k}]}{p-k-1}.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать случай $p = 2$. Тогда

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi_0(t)}{(t-x)^2}\, dt = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\int\limits_{-1}^{x-\varepsilon} \frac{\varphi_0(t)}{(t-x)^2}\, dt + \int\limits_{x+\varepsilon}^{1} \frac{\varphi_0(t)}{(t-x)^2}\, dt - \frac{2\varphi_0(x)}{\varepsilon} \right). \tag{4}$$

В задачах механики и электродинамики чаще всего встречаются случай, когда $\varphi_0(t)$ имеется в виде [1–3]

$$\begin{gathered} \varphi_0(t) = \sqrt{1-t^2}\,\varphi(t), \quad \varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\varphi(t), \\ \varphi_0(t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,\varphi(t), \quad \varphi_0(t) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\varphi(t), \end{gathered} \tag{5}$$

где $\varphi(t)$ — достаточно гладкая функция на отрезке $[-1, 1]$.

Квадратурные формулы и вычислительные схемы. Очевидно, что для численного решения уравнения (1) при $p = 2$ методом квадратур, особое значение имеет аппроксимация гиперсингулярного и регулярного интегралов, т. е. квадратурные формулы. С учетом (5) построены следующие квадратурные формулы [4]:

$$\begin{gathered} \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,\frac{\varphi(t)}{(t-x)^2}\, dt \approx \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(1-x_k^2)}{(x-x_k)^2} \times \\ \times \big[-T_{n+1}(x_k) + T_{n+1}(x) - (n+1)(x-x_k)U_n(x) \big]\varphi(x_k), \\ x_k = \cos\frac{k\pi}{n+1} \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered} \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\frac{\varphi(t)}{(t-x)^2}\, dt \approx \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\sqrt{1-x_k^2}}{(x-x_k)^2} \times \\ \times \left[U_{n-1}(x_k) - U_{n-1}(x) + (x-x_k)\frac{xU_{n-1}(x) - nT_n(x)}{1-x^2} \right]\varphi(x_k), \\ x_k = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \end{gathered} \tag{7}$$

$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$, $T_n(x) = \cos n \arccos x$ — многочлены Чебышева.

Применяя (6)–(7) и квадратурные формулы Гаусса [5–6], построены следующие вычислительные схемы:

$$\begin{gathered} \frac{1}{n+1}\sum_{\substack{k=1,\\ k\neq j}}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(1-x_k^2)}{(x_j-x_k)^2} \big[-T_{n+1}(x_k) + T_{n+1}(x_j) - (n+1)(x_j - x_k)U_n(x_j) \big] \times \\ \times \varphi(x_k) - \frac{n+1}{2}\,\varphi(x_j) + \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} (1-x_k^2)k(x_j, x_k)\varphi(x_k) = f(x_j), \\ x_j = \cos\frac{j\pi}{n+1} \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \end{gathered} \tag{8}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{\substack{k=1,\\ k\neq j}}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\sqrt{1-x_k^2}}{(x_j-x_k)^2}\left[-U_{n-1}(x_k)+U_{n-1}(x_j)+(x_j-x_k)\frac{x_jU_{n-1}(x_j)-nT_n(x_j)}{1-x_j^2}\right]\times$$
$$\times\,\varphi(x_k)+\frac{-(n^2-1)(1-x_j^2)+3x_j^2}{2n(1-x_j^2)^2}\,\varphi(x_j)+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k(x_j,x_k)\varphi(x_k)=f(x_j), \tag{9}$$
$$x_j=\cos\frac{2j-1}{2n}\,\pi\quad(j=1,2,\ldots,n).$$

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть оператор K имеет обратный. Функции $k(x,t)$, $f(x)$ принадлежат классу $H_r(\alpha)$. Тогда при n таких, что*

$$Cn^{\beta}\big\|K^{-1}\big\|\big(\overline{E}_n^{x}(k(x,t))+\overline{E}_n^{t}(k(x,t))\big)\ln n<1,$$

система уравнений (8) имеет единственное решение и справедлива оценка

$$\big\|\varphi_0^*-\overline{\varphi}_{0n}^*\big\|\leqslant O\bigg(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha-\beta}}\bigg),\quad 0<\beta<\alpha,$$

где φ_0^* и $\overline{\varphi}_{0n}^*$ — решения уравнений (1) и (8),

$$\varphi_{0n}^*(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{U_n(t)}{(t-x_k)U_n'(x_k)}\,\varphi(x_k).$$

Литература

1. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения.—М.: Наука, 1966.—720 с.
2. *Лифанов И. К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент.—М.: ТОО Янус, 1995.—520 с.
3. *Бойков И. В., Бойкова А. И., Сёмов М. А.* Приближенное решение гиперсингулярных интегральных уравнений I рода // Изв. вузов. Поволжский регион. Физ.-мат. науки.—2015.—№ 3 (35).—С. 11–27.
4. *Плиева Л. Ю.* Квадратурные формулы интерполяционного типа для гиперсингулярных интегралов на отрезке интегрирования // Сиб. журн. вычислит. мат.—2016.—Т. 19, № 4.—С. 413–422.
5. *Хубежты Ш. С.* Квадратурные формулы для сингулярных интегралов и некоторые их применения.—Владикавказ, 2011.—235 с.
6. *Крылов В. И.* Приближенное вычисление интегралов.—М.: Наука, 1967.—500 с.

Секция III

Математическое моделирование

ОБОБЩЕННЫЙ НЕЛИНЕЙНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР ДУФФИНГА

А. А. Аливердиев (Россия, Махачкала; ИПГ ДНЦ РАН),
В. Д. Бейбалаев (Россия, Махачкала; ИПГ ДНЦ РАН),
Р. Р. Мейланов (Россия, Махачкала; ИПГ ДНЦ РАН),
М. А. Назаралиев (Россия, Махачкала; ДГУ)

Повышенный интерес к изучению нелинейных динамических систем, где реализуются идеи детерминированного хаоса и фрактальной геометрии обусловлен тем, что закономерности таких систем становятся базовыми для установления сущности широкого круга явлений, охватывая не только физические, но и химические, геофизические, биологические, социально-экономические системы. В нелинейных системах возникают различные явления, не только характерные для таких систем, но и нестандартные [4].

В работе рассмотрена динамическая система, описываемая нелинейным уравнением с операторами дробного дифференцирования Caputo [1] вида:

$$\partial_{0t}^{\alpha}(\partial_{0t}^{\alpha}x(t)) + k^{\alpha}\cdot\partial_{0t}^{\alpha}x(t) + f(x) = P(t), \tag{1}$$

где k — коэффициент затухания, $f(x)$ — нелинейная восстанавливающая сила, $P(t)$ — периодическая функция периода T.

Периодические вынужденные колебания, описанные этим уравнением, предоставляют широкий спектр интересных явлений, которые характерны для поведения нелинейных динамических систем, такие как регулярное и хаотическое движение, сосуществующие аттракторы, регулярные и фрактальные границы областей притяжения, а также локальная и глобальная бифуркация.

Уравнение (1) есть частный случай неавтономной периодической системы

$$\begin{cases}\partial_{0t}^{\alpha}x(t) = X(t,x,y),\\ \partial_{0t}^{\alpha}y(t) = Y(t,x,y),\end{cases} \tag{2}$$

где $X(t,x,y)$ и $Y(t,x,y)$ — непрерывные в заданной области функции, обе периодичны по t с периодом T.

В работе исследовали частный случай уравнения (1):

$$\partial_{0t}^{\alpha}(\partial_{0t}^{\alpha}x(t)) + k^{\alpha}\cdot\partial_{0t}^{\alpha}x(t) + \beta^{\alpha}\cdot x + x^3 = B\cdot\cos(t). \tag{3}$$

Запишем уравнение (3) в виде системы

$$\begin{cases}\partial_{0t}^{\alpha}x(t) = y,\\ \partial_{0t}^{\alpha}y(t) = -k^{\alpha}\cdot y - \beta^{\alpha}x - x^3 + B\cdot\cos(t).\end{cases} \tag{4}$$

Симметрия уравнения связанная с его инвариантностью при подстановке $-x \longrightarrow x$, $-y \longrightarrow y$, $t+\pi \longrightarrow t$ означает, что периодическая траектория также симметрична сама себе по отношению к началу координат плоскости Oxy. В случае дифференциальных уравнений дробного порядка этот принцип нарушается, т. е. при изменении знака времени $t \longrightarrow -t$, в случае дробных производных состоит в замене $(-t)^\alpha \longrightarrow t^\alpha \cdot (\cos(\pi \cdot \alpha) + i \cdot \sin(\pi \cdot \alpha))$.

Таким образом, при переходе к дробным производным по времени часть процесса соответствует обратимым, другая часть необратимым процессам. Такое сочетание обратимых и необратимых процессов фактически означает возможность описания нелинейных процессов при переходе к дробным производным.

Решение системы (4) нашли численным методом по рекуррентным формулам [2]

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + \Gamma(2-\alpha) \cdot \tau^\alpha \cdot y_0, \\ x_{n+1} = x_n - \tau^{\alpha-1} \sum\limits_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \left(t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}\right) + \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha y_n, \\ y_1 = y_0 + \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha \left(-k^\alpha y_0 + \beta^\alpha x_0 - x_0^3 + B\cos(t_0)\right), \\ y_{n+1} = y_n - \tau^{\alpha-1} \sum\limits_{k=0}^{n-1} (y_{k+1} - y_k) \left(t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}\right) + \\ \qquad\qquad + \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha \left(-k^\alpha y_n + \beta^\alpha x_n - x_n^3 + B\cos(t_n)\right), \ n = 1, 2 \ldots \end{cases} \tag{5}$$

Установлено, что при переходе к дробным производным происходит топологическое изменение фазовой плоскости. При этом в фазовой плоскости имеется устойчивый предельный цикл при $\alpha = 0.75$.

Выводы: Наличие устойчивого предельного цикла на фазовой плоскости показывает, что в динамической системе установились незатухающие периодические колебания. Амплитуда и период этих колебаний в определенных пределах не зависят от начальных условий и определяются лишь значениями параметров системы. В данном случае управляющим параметром системы является и показатель дробной производной.

Литература

1. *Нахушев А. М.* Элементы дробного исчисления и их применение.—Нальчик, 2003.—299 с.
2. *Бейбалаев В. Д., Абдуллаев И. А., Наврузова К. А., Гаджиева Т. Ю.* О разностных методах решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дифференцирования // Вестн. ДГУ.—2014.—№ 6.—С. 53–61.
3. *Бейбалаев В. Д.* Решение начальной задачи для дифференциального уравнения «фрактального» осциллятора // Вестн. СамГТУ.—2009.—№ 2 (19).—С. 240–242.
4. *Бейбалаев В. Д.* Моделирование хаотического поведения динамических систем с фрактальной структурой // Сб. материалов восьмой Всероссийской конф. с междунар. участием «Мат. моделирование и краевые задачи».—Самара: Изд-во СамГТУ, 2011.—С. 27–31.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XIII Междунар. науч. конф. (пос. Дивноморское, 7–14 сентября 2016 г.)

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ОСЕДАНИЯ ГРУНТОВЫХ ВОД ПРИ НАЛИЧИИ ПОЛУПРОНИЦАЕМЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ И ДРЕНАЖНОЙ СИСТЕМЫ

И. В. Афанаскина (Россия, Орел; ОГУ),
В. И. Дорофеева (Россия, Орел; ОГУ),
К. Г. Чистякова (Россия, Орел; ОГУ)

Рассмотрим двумерную задачу об одновременной фильтрации двух жидкостей в пористой среде в постановке Лейбензона — Маскета при наличии дренажного устройства и одного или нескольких полупроницаемых включений произвольной формы [1]. При пренебрежении вязкостью и плотностью внешней жидкости получаем систему интегрального и дифференциального уравнений, которая описывает опускание грунтовых вод под действием силы тяжести и при наличии дренажного устройства для откачки воды и одного полупроницаемого включения в пласте грунта:

$$g_t(\bar{x},t) - 2\sum_{k=S_1,t} G[g_k, L_k](\bar{x},t) = -2\Pi(\bar{x})K_1 + 2\phi_0,$$

$$g_{S_1}(\bar{x},t) - 2\lambda_{S_1}\sum_{k=S_1,t} G[g_k, L_k](\bar{x},t) = 0,$$

где

$$G[g_k, L_k](\bar{x},t) = \int\limits_{L_k} g_k(\bar{y})\,\Omega(\bar{x},\bar{y})\,dl_y,$$

$$\Omega(\bar{x},\bar{y}) = \frac{\partial\Phi_1(\bar{x},\bar{y})}{\partial\mathbf{n}_y}, \quad \lambda_{S_1} = \frac{(K(\bar{x}) - K_1(\bar{x}))}{(K(\bar{x}) + K_1(\bar{x}))},$$

$\Phi_1(\bar{x},\bar{y})$ — функция Грина — потенциал стока с полным расходом, равным -1, $\Pi(\bar{x}) = -x_2$ — потенциал силы тяжести, $K(\bar{x})$ — проницаемость вне замкнутого контура L_{S_1}, $K_1(\bar{x})$ — проницаемость внутри замкнутого контура L_{S_1}, границы L_{S_1} и L_t входят в область протекания процесса. Дифференциальное уравнение движения границы L_t:

$$\frac{\partial\bar{x}}{\partial t} = V_0 + \sum_{k=S_1,t}\mathbf{V}[g_k, L_k](\bar{x}) \quad \text{на} \quad L_t.$$

Здесь $V_0 = \mathrm{Kgrad}\,\phi_0$ — скорость квазипотенциала невозмущенного течения ϕ_0.

Область совместной фильтрации жидкостей ограниченна непроницаемой прямой L_I, разделяющей грунт и непроницаемые породы. Задача исследовалась при наличии одного включения при $\lambda_{S_1} = 0.6$. Первоначальная высота бугра $H_0 = 1.35$. На рис. 1 построены последовательные положения подвижной границы L_t при $n = 700$, $q = 1.5$ в моменты времени $t = 0; \frac{1}{3T}; \frac{2}{3T}; T$, где $T = 2.55$ — время достижения стока, а на рис. 2 — поле скоростей в момент времени $t = 0$.

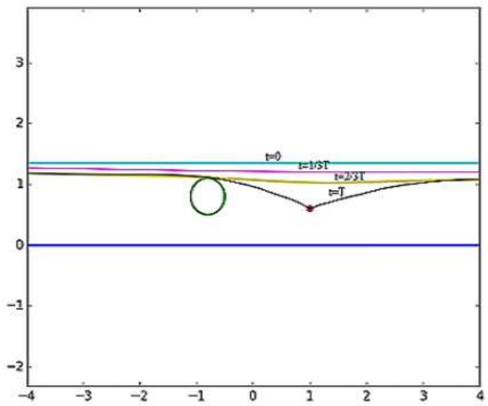

Рис. 1. Процесс оседания грунтовых вод в однородном слое при $n = 700$, $dt = 0.005$, $\lambda_{S_1} = 0.6$, $q = 1.5$.

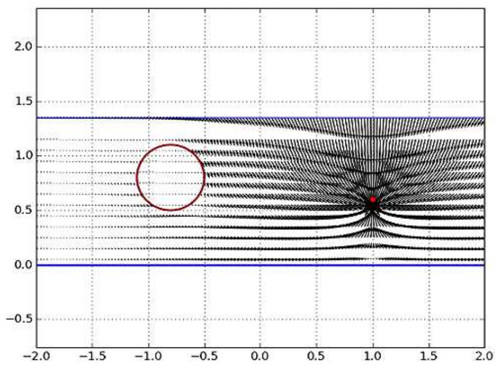

Рис. 2. Поле скоростей в момент времени $t = 0$ при $n = 700$, $q = 1.5$, $\lambda_{S_1} = 0.6$.

Дальнейшие исследования будут выполняться для включений произвольной формы при произвольном размещении включений и дренажного устройства в области процесса.

Литература

1. *Никольский Д. Н., Дорофеева В. И.* Математическое моделирование двумерного процесса изменения уровня грунтовых вод под действием силы тяжести методом дискретных особенностей // Вычислительные методы и программирование.—2011.—Т. 12.—С. 85–89.

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГРАНИЦЫ НЕОДНОРОДНОСТИ ПО ИЗМЕРЕНИЯМ АКУСТИЧЕСКОГО ПОЛЯ[1]

Г. Б. Баканов (Казахстан, Туркестан; МКТУ),
А. С. Касымбеков (Казахстан, Туркестан; МКТУ),
М. А. Султанов (Казахстан, Туркестан; МКТУ),
Б. Б. Устемирова (Казахстан, Туркестан; МКТУ)

Задачи определения параметров неоднородности по измерениям акустического поля возникает во многих задачах акустики и электродинамики. При этом метод интегральных уравнений является одним из основных методов решения этих задач [3, 4]. Для большинства случаев не удается построить точное решение таких задач, поэтому большее значение для практически важных приложений имеет создание численных итерационных методов решения подобных задач.

В работе рассматривается обратная задача определения неизвестной границы рассеивающей неоднородности по измерениям скалярного волнового поля, возбуждаемого некоторым источником. Будем считать, что область расположения источников Q и рассеянная неоднородностью область измерения поля P не пересекаются с областью Ω, содержащей рассеиватель. Задача рассматривается в волновом приближении, а решение ищется в трехмерном пространстве R^3. Предполагая, что среда однородна вне сферы достаточно большого радиуса и что распространение акустических колебаний описывается источником вида $\exp(-i\omega t)$, получим граничную задачу для уравнения Гельмгольца:

$$\begin{gathered}
\Delta u(r,q,\omega) + k_0 u(r,q,\omega) = f(\omega)\delta(r-q), \quad r \text{ вне } \Omega,\\
\Delta u(r,q,\omega) + k^2(r,\omega)u(r,q,\omega) = 0, \quad r \text{ в } \Omega,\\
\big[u(r,q,\omega)\big] = 0, \quad \left[\frac{\partial u(r,q,\omega)}{\partial |r|}\right] = 0, \quad r \in \partial\Omega,\\
u(r,q,\omega) = O\left(\frac{1}{|r|}\right), \quad \frac{\partial u(r,q,\omega)}{\partial |r|} - ik_0 u(r,q,\omega) = o\left(\frac{1}{|r|}\right), \quad r \to \infty.
\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь ω — частота акустических колебаний, $f(\omega)\delta(r-q)$ описывает возмущение среды точечным источником, расположенным в точке q, $[\,]$ означает разрыв значения функции на границе раздела сред, а последние два соотношения в (1) — условия излучения Зоммерфельда.

Обратная задача заключается в определении коэффициента $k(r,\omega)$ во втором уравнении системы (1), которая полностью характеризует неизвестную неоднородность. Такая постановка обратной задачи распространена в задачах акустической томографии [2, 5].

[1]Работа осуществлена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан, проект № 0115PK00681.

Прямая задача решена методом разделения переменных для неоднородности, имеющий сферическую форму. Обратная задача с применением теории интегральных уравнений сводится к нелинейному операторному уравнению, численное решение которого проводилось на основе итерационного регуляризирующего алгоритма с использованием метода Ньютона — Гаусса [1].

Литература

1. *Бакушинский А. Б., Гончарский А. В.* Итеративные методы решения некорректных задач.—М.: Наука, 1989.—130 с.
2. *Горюнов А. А., Сасковец А. В.* Обратные задачи рассеяния в акустике.—М.: Изд-во МГУ, 1989.—152 с.
3. *Дмитриев В. И.* Обратные задачи геофизики.—М.: МАКС Пресс, 2012.—340 с.
4. *Самохин А. Б.* Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии.—М.: Радио и связь, 1998.—160 с.
5. *Colton D., Kress R.* Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory.—N. Y.: Springer, 2013.—418 p.—(Appl. Math. Sci; Vol. 93).

ON THE DYNAMICS OF HIV-AIDS AND CRYPTOSPORIDIOSIS

E. Bonya (Ghana, Kumasi; Kumasi Polytechnique),
K. O. Okosun (South Africa, Vanderbijlpark; VUT)

In this paper a mathematical model for HIV-cryptosporidium co-infection dynamics is investigated to give a theoretical mathematical account of the impact of cryptosporidiosis on HIV/AIDS dynamics. The model steady states are analyzed. The disease-free equilibrium is shown to be locally asymptotically stable when the associated epidemic basic reproduction number for the model is less than unity. The HIV/AIDS model only and the cryptosporidiosis only model are each found to exhibit transcritical and backward bifurcation phenomena respectively. While the co-infection model exhibits the possibility of multiple endemic equilibria. Furthermore, the effect of the presence of each infection on the endemicity of the other is investigated and presented numerically.

References

1. *Vakil N. B., Schwartz S. M., Buggy B. P., Brummitt C. F., Kherellah M., Letzer D. M.* Biliary cryptosporidiosis in HIV-infected people after the waterborne outbreak of cryptosporidiosis in Milwaukee // N. Engl. J. Med.—1996.—Vol. 334.—P. 19–23.
2. *Okosun K. O., Mukamuri M., Makinde O. D.* Codynamics of trypanosomiasis-cryptosporidiosis // Appl. Math. Inform. Sci. Inter. J.—2016.—(In press).

CASCADES AND MIXING IN STRATIFIED FLUIDS

C. Brouzet (France, Lyon; ENS de Lyon),
T. Dauxois (France, Lyon; ENS de Lyon),
E. V. Ermanyuk (Russia, Novosibirsk; LIH SB RAS),
I. Sibgatullin (Russia, Moscow; MSU)

Introduction

In contrast to the atmosphere of the Earth, the driving force of the Ocean is not a heat engine. Vertical mechanisms of energy transfer due to thermal processes and wind play significant role mostly in the vicinity of the surface of the Ocean. Meanwhile the global dynamics of the Ocean is greatly affected by deep water processes and mixing, which are studied in much a lesser extent, experimentally as well theoretically.

Internal waves in stratified media give an important class of energy transfer in the Ocean. They may form due to tidal motions or flows past orography. In 1995 Leo Maas discovered an amazing feature of internal gravity waves: in some geometries of the containers the waves, emitted by monochromatic source may after multiple reflections from boundaries form certain pathways. These pathways, which were named *internal waves attractors*, accumulate almost all the energy of the wave motions in the containers. The works by Leo Maas were followed by a great amount of works devoted to formation and behavior of the attractors, so now we have conventional theory for the appearance of small amplitude internal wave attractors.

This is why the principal focus of researches is now on the nonlinear properties of large amplitude internal wave attractors. For such cases the motion can not be described with the help of linearised equations. Internal wave attractors may become unstable, turbulent, they may change structure with time, change background stratification and manifest other nonlinear properties.

In recent years in ENS de Lyon a number of methods for analysis of experimental results have been developed.

Despite remarkable success in experimental study of wave attractors there are significant intrinsic constraints in convectional experimental approaches like PIV or Schlieren. These constraints can be overcomed by direct numerical simulation, provided that it is reliable. The experimental setup possess very large scales interval because of very high Prandtl–Schmidt number. This is why till recently such numerical research were not possible, and numerical modelling dealt with linear or weakly nonlinear modes only. In these works finite volume method was used for numerical simulation, and realisation of finite volume method was based on MIT code of general circulation model. These papers supported the theory of formation of internal wave attractors. At the same time the authors confessed that their numerical approach could only give insight on formation of the attractor but it is not reliable on large time intervals or in strongly nonlinear modes due to high numerical viscosity.

Only recently careful 3D direct numerical simulation was carried out, and for the first time hydrodynamical fields of the experiments and direct numerical simulation were in correspondence within 10% for linear, as well for nonlinear modes.

Numerical Setup and Results

The mathematical model closely follow the experiments being carried out at Ecole Normal Superior de Lyon [1, 2].

In the nonlinear regime, 3D numerical simulations correctly reproduce the dynamics of the experimentally observed triadic resonance in terms of spatial and temporal parameters of primary and secondary waves (frequencies, wave numbers). The measurements of the fine parameters of the calculated internal wave patterns are performed by applying exactly the same technique as in experiments, with a systematic use of the Hilbert transform. This yields very strong quantitative evidence that, both numerically and experimentally, we observe exactly the same scenario of triadic resonance. Recent 2D calculations of the nonlinear instability in rotating fluids are qualitatively similar but less conclusive quantitatively due to the lack of comparison with the experimental data.

The problem presents a complete cascade of triadic interactions transferring energy from large-scale monochromatic input to multi-scale internal-wave motion, and subsequent cascade to mixing. So we can suppose presence of interesting signatures of discrete wave turbulence in a stratified idealized fluid problem. Moreover, we have shown how extreme vorticity events lead to mixing that occurs in the bulk of the fluid.

Direct numerical simulation of large amplitude internal wave attractors have shown the presence of folding structures in the wall regions of the container. They appear as a result of oscillating wave-like rotating motions of fluid near the boundaries. Since the boundaries are impermeable for salt and ratio of diffusion of motion and of concentration is very high ($Sm = 700$), these folding structures are not quickly dissipated and propagate to the interior of the domain, where they interact with the background flow and influence mean stratification on long time periods. Since the precess is highly nonlinear and application conventional numerical methods is often criticized, careful experimental investigation is now needed fully describe this phenomena.

References

1. *Brouzet C., Joubaud S., Ermanyuk E., Sibgatullin I., Dauxois T.* Energy cascade in internal-wave attractors // Europhysics Let.—2016.—Vol. 113, № 4.—44001.—URL: http://dx.doi.org/10.1209/0295-5075/113/44001.
2. *Brouzet C., Sibgatullin I., Scolan H., Ermanyuk E., Dauxois T.* Internal wave attractors examined using laboratory experiments and 3d numerical simulations // J. Fluid Mech.—2016.—Vol. 793.—P. 109–131.—URL: http://dx.doi.org/10.1017/jfm.2016.119.

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ НЕОДНОРОДНЫХ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ТЕЛАХ[1]

А. О. Ватульян (Россия, Владикавказ, ВНЦ РАН; Ростов-на-Дону, ЮФУ),
В. В. Дударев (Россия, Владикавказ, ВНЦ РАН; Ростов-на-Дону, ЮФУ),
Р. Д. Недин (Россия, Владикавказ, ВНЦ РАН; Ростов-на-Дону, ЮФУ)

Теории линеаризованных моделей упругих и электроупругих тел при наличии предварительного напряженно-деформированного началось с начала XX века, когда в 1913 г. Р. В. Саусвелл получил соотношения линеаризованной теории устойчивости для однородного случая докритического состояния тела при малых деформациях. Впоследствии эта теория была доработана и развита К. В. Бицено, Х. Генки, М. А. Био, Е. Треффтцем и Х. Нейбером, А. Е. Грином, Р. С. Ривлином и Р. Т. Шилдом. Полученные ими модели были впоследствие дополнены и использованы В. В. Новожиловым, К. Трусделлом, А. И. Лурье, Л. М. Зубовым, К. Васидзу, А. Н. Гузем, А. Хогер, Ч.-С. Маном, Л. Робертсоном, О. З. Кравчишиным и В. Ф. Чекуриным и другими исследователями. Заметим, что часто при моделировании предварительных напряжений (ПН) используется модель однородных начальных напряжений, в то же время почти всегда в реальных конструкциях, включая пьезоэлектрики, ПНДС является неоднородным и зависит от координат. Несмотря на существование различных с точки зрения механики сплошных сред подходов к моделированию ПНДС в телах, на сегодняшний день в мировой литературе наблюдается нехватка обзорных статей или монографий по этой теме. Один из наиболее полных обзоров по этой теме был составлен Ж.-Б. Куанга [1], в котором приводится общая модель ПН для задачи электроупругости. В то же время вопрос о том, какие именно модели адекватно описывают наличие ПН в упругих и электроупругих телах, представляет собой важную проблему механики деформируемого твердого тела. Необходимо отметить, что литературы, посвященной разработке моделей и расчету стержней и пластин с учетом ПНДС и связанных полей, относительно мало.

Развитие методов неразрушающей реконструкции свойств различных элементов конструкций представляет собой одно из важных направлений современной механики деформируемого твердого тела. Зачастую при моделировании считается, что материал однороден, и его свойства характеризуются набором физических постоянных. В то же время во многих приложениях гипотеза однородности является неадекватной, и свойства исследуемого объекта необходимо моделировать с зависимостью от координат. В частности, это присуще

[1]Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований по стратегическим направлениям развития науки Президиума РАН № 1 «Фундаментальные проблемы математического моделирования» (114072870112) «Математическое моделирование неоднородных и многофазных структур», Проекта МинОбрНауки РФ, № 9.665.2014/К, Гранта Президента Российской Федерации МК-5440.2016.1, Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 16-01-00354, № 16-38-60157 мол_а_дк.

конструкциям, выполненных из неоднородных пьезоактивных материалов, таких как функционально-градиентные пьезоэлектрики (ФГПЭ), свойства которых характеризуются набором функций; вид этих функций устанавливается из экспериментов, а обработка экспериментальных данных требует привлечения аппарата коэффициентных обратных задач, что представляет собой достаточно сложную математическую проблему. Знание реальных характеристик неоднородного пьезоэлемента позволяет оценить его функциональные свойства и возможность использования в конкретном приборе.

В настоящей работе представлена общая линеаризованная постановка о колебаниях электроупругого предварительно напряженного тела, позволяющая моделировать предварительно напряженный пьезоэлектрический материал с произвольным типом материальной неоднородности; в частности, с ее помощью можно описывать поведение различных ФГПЭ, задавая неоднородные законы изменения упругих и электрических модулей, входящих в состав эффективных характеристик. Сформулированы несколько вариантов общей слабой постановки исходной задачи. На основе одной из построенных форм слабых постановок сформулирован общий вариационный принцип для пьезоупругого неоднородного тела в условиях предварительного напряженно-деформированного состояния. На базе построенных общих слабых и вариационных постановок можно получать различные частные постановки задач о колебаниях предварительно напряженных электроупругих тел, приняв соответствующие упрощающие гипотезы. Также эти постановки можно использовать для построения обобщенных соотношений взаимности, операторных уравнений и итерационных процессов для постановки и решения обратных задач по идентификации факторов предварительного напряженно-деформированного состояния или электрических полей. В качестве примеров на основе полученных общих теоретических принципов сформулированы постановки задач об установившихся продольных колебаниях пьезоупругого неоднородного предварительно напряженного стержня и об установившихся радиальных колебаниях пьезоупругого неоднородного тонкого диска.

Литература

1. *Kuang Z. B.* Theory of Electroelasticity.—Heidelberg–N. Y.: Springer, 2014.—431 p.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АЭРОДИНАМИКИ ТРЕХМЕРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ГОРОДСКОЙ ЗАСТРОЙКИ

М. В. Волик

(Россия, Владикавказ; Финансовый университет, ЮМИ)

В работе проводится математическое моделирование аэродинамики элемента городской застройки в форме куба, имитирующего одиночный дом. Использовались свободно распространяемое программное обеспечение OpenFoam и удаленный доступ к суперкомпьютеру Web-лаборатории UniHUB (`www.unihub.ru`) по программе «Университетский кластер» (`www.uniclaster.ru`).

Решаемая в OpenFoam задача обязательно содержит: начальные и граничные условия; расчетную сетку и физические свойства; параметры интегрирования уравнений. Предполагалось, что движущийся воздух является несжимаемой жидкостью. Для проведения вычислительных экспериментов использовался стандартный решатель pimpleFoam для турбулентного течения жидкости. Система уравнений включала уравнение неразрывности и уравнение изменения импульса. Турбулентность моделировалась с использованием стандартной K-эпсилон модели, для которой решались уравнения для кинетической энергии турбулентности и скорости ее диссипации [1, 2].

Размеры элемента городской застройки в форме куба, имитирующего одиночный дом, составили 20м$\times$20м$\times$20м. Расстояние от входной границы до препятствия выбиралось равным десяти его высотам, расстояние от препятствия до выходной границы — двадцати высотам, расстояние от нижней границы расчетной области до верхней — пяти высотам, расстояние от препятствия до боковых границ — двум высотам. В расчетной области моделировался поток воздуха слева направо.

Получено, что поток воздуха обтекает препятствие сверху, затягивается вниз таким образом, что вблизи подветренной стороны дома образуется два симметричных вихря по обе стороны от середины дома вдоль основного потока. Сбоку от дома образуется небольшой вихрь, который прижимается основным потоком к боковым стенкам дома.

В следе за препятствием минимальная скорость течения наблюдается по центру. Воздух в симметричных вихрях у нижней границы расчетной области перемещается по часовой стрелке и скорость течения значительно выше, чем в следе по центру препятствия. Кроме того, получено, что на расстоянии 5 м от подветренной стороны дома скорость воздуха ниже, чем на расстоянии 10 м. Затем, по мере увеличения расстояния от дома вдоль нижней границы расчетной области более, чем на 10 м, скорость потока воздуха снижается.

Кроме того, на уровне крыши дома с увеличением расстояния от подветренной стороны препятствия скорость больше, чем вблизи нижней границы расчетной области.

Полученная в результате расчетов картина течения воздуха для рассматриваемой расчетной сетки позволяет предположить, что образующаяся вихревая структура может привести к быстрому переносу газообразных загрязняющих веществ на уровне крыши дома и, наоборот, их накоплению в области нижней границы на подветренной стороне дома.

Литература

1. *Каменецкий Е. С. Волик М. В., Тагиров А. М.* Математическое моделирование распространения загрязняющих веществ, выбрасываемых автотранспортом // Изв. Кабардино-Балкарского науч. центра РАН.—2014.—№ 6 (62).—С. 23–32.
2. *Волик М. В.* Численное моделирование распространения загрязняющих веществ, выбрасываемых низко расположенными источниками, внутри улиц // Изв. Кабардино-Балкарского науч. центра РАН.—2016.—№ 1 (69).—С. 20–27.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XIII Междунар. науч. конф. (пос. Дивноморское, 7–14 сентября 2016 г.)

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ КАК ОРГАНИЗАЦИОННЫХ ИНСТРУМЕНТОВ ОБОСНОВАНИЯ ПРИНИМАЕМЫХ РЕШЕНИЙ ПО ВЫБОРУ ОБЪЕМОВ ВЫПУСКА ЗАГОТОВОК И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ МОДЕРНИЗАЦИИ ЭЛЕМЕНТОВ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ

С. И. Грачев (Россия, Самара; Самарский университет),
А. С. Клентак (Россия, Самара; Самарский университет)

В условиях высокой конкуренции в таких отраслях промышленности как машиностроение производители постоянно борются за предпочтения потребителя, что заставляет их совершенствовать подходы к организации и управлению производством. Практика организации функционирования на машиностроительном предприятии показывает наличие значительных резервов в повышении эффективности использования энергетических энергоресурсов. Совершенствование организации производства в области повышения энергетической эффективности может обеспечить сокращение потерь энергетических ресурсов и повысить общую эффективность производства.

Вместе с тем сложившиеся подходы к организации и управлению производством и выполнению производственной программы не всегда учитывают резервы повышения эффективности использования энергетических ресурсов. Одной из причин этого является отсутствие моделей и методик формирования последовательности элементов производственного процесса для приоритетного выбора проведения на них энергосберегающих мероприятий с учетом эксергетического метода.

Литейных цех, находясь на старте производственно-технологического цикла машиностроительного предприятия, определяет собой работу всего предприятия в целом. Одной из основных задач организации производства является обеспечение ритмичного выпуска продукции в установленном объеме и номенклатуре при рациональном потреблении энергетических ресурсов. В связи с этим была разработана модель задачи оптимального выпуска объемов изделий литейного цеха машиностроительного предприятия с серийным типом производства.

В отличие от распространенных моделей принятия решений, целевая функция данной модели состоит из двух составляющих — общего изменения фактической себестоимости (условно переменных затрат) на выпуске заготовок каждого вида по сравнению с плановой себестоимостью. Использование такой целевой функции отражает реально существующую заинтересованность литейного производства в снижении затрат на выпуск заготовок и влияние работы литейного цеха на другие цеха — потребители заготовок и предприятия в целом по реализации имеющихся заказов.

Кроме того, на основании результатов исследований сформирована модель многокритериальной задачи формирования последовательности элементов технологического процесса литейного производства машиностроительного предприятия для приоритетного выбора проведения на них энергосберегающих мероприятий, направленных на повышение энергетической эффективности.

Целевой функцией в полученной математической модели является потенциал повышения уровня энергоэффективности элемента технологического процесса литейного цеха.

Также для принятия решения о проведении энергосберегающих мероприятий важным фактором является оценка затрат, которые несет предприятие на данном участке. Поэтому в модель была введена затратная функция, как сумма затрат на энергоресурсы и экологические платежи на рассматриваемом технологическом потоке машиностроительного предприятия.

Литература

1. *Клентак А. С., Кобенко А. В.* Разработка модели задачи принятия организационно-управленческих решений по выбору объема выпуска заготовок литейного производства // Изв. СамНЦ РАН.—2015.—Т. 17, № 6 (2).—С. 449–453.
2. *Клентак А. С.* Выявление потенциала повышения энергоэффективности элементов литейного производства на основе математической модели и эксергетического анализа // Изв. СамНЦ РАН.—2015.—Т. 17, № 2 (5).—С. 1181–1187
3. *Гришанов Д. Г., Кирилина С. А., Наумов К. В., Щелоков Д. А.* Модель оптимизации объема затрат при производстве сложных изделий: монография // Проблемы современной экономики.—2010.—№ 4.—С. 159–163.
4. *Гераськин М. И., Гришанов Г. М.* Экономико-математическое моделирование современных промышленных комплексов.—Самара: Изд-во СамНЦ РАН, 2016.—194 с.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПРЕДНАПРЯЖЕНИЙ В ЭЛЕКТРОУПРУГОМ ДИСКЕ[1]

В. В. Дударев (Россия, Владикавказ, ЮМИ; Ростов-на-Дону, ЮФУ),
Р. М. Мнухин (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Предварительные напряжения (ПН) — напряжения, которые содержатся в объекте при отсутствии наблюдаемых нагрузок. В электроупругих телах они могут возникать как в процесс производства, так и в результате действия скрытых нагрузок. В качестве конкретного примера представлена задача об установившихся радиальных колебаниях электроупругого диска поляризованного по толщине. При этом считается, что имеется плоское неоднородное поле ПН, созданное действием внутреннего давления. Колебания возбуждаются путем подачи переменной разности электрического потенциала на электродированные торцы диска. На основе современной модели электроупругого предварительно напряженного тела [1] сформулированы уравнение колебаний и граничные условия. Учитывая выполнение условий плоского напряженного состояния, проведено осреднение по толщине диска. Для общности рассмотрения осуществлено обезразмеривание задачи. Определение функции смещения в общем случае неоднородности поля ПН реализовано численно на основе метода пристрелки. Дана оценка точности составленной численной схемы для частного случая постоянных параметров задачи путем сравнения с аналитическим решением. Проведен анализ изменения значений функции смещения, амплитудно-частотной характеристики диска, измеренной на внешней границе, а также первых резонансных частот в зависимости от уровня ПН. Сформулирована обратная коэффициентная задача об определении поля ПН по данным об изменении акустических характеристик электроупругого диска. На основе методов, апробированных для упругого материала, предложены подходы для решения этой задачи.

Авторы благодарят профессора А. О. Ватульяна за предложенную задачу.

Литература

1. *Kuang Z. B.* Theory of Electroelasticity.—N. Y.: Springer, 2014.—431 p.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-01-00354, и гранта Президента Российской Федерации, проект № МК-5440.2016.1.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ В РУСЛОВОМ ПОТОКЕ

И. В. Жиляев (Россия, Ростов-на-Дону; ЮНЦ РАН),
К. А. Надолин (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Для расчетов физико-механических характеристик водотоков таких, как скорость и структура течения, концентрация взвешенных наносов и загрязняющих веществ, применяются математические модели разных типов, среди которых наиболее точными являются трехмерные модели, основанные на полных уравнениях гидродинамики турбулентных течений [1, 2]. Однако на практике получить высокую точность моделирования, которую могут обеспечить такие 3D модели, не удается, поскольку данные реальных гидрологических измерений не имеют требуемой точности значений гидрофизических параметров, а также информации о начальных и граничных условиях для трехмерных уравнений в частных производных. Кроме того, сложность и трудоемкость вычислительных экспериментов на основе полных 3D моделей усугубляется геометрией расчетной области, сильно вытянутой в продольном направлении. Вышесказанное объясняет интерес к 2D и редуцированным 3D моделям русловых потоков, сложность которых адекватна точности имеющихся гидрологических данных.

Особенностью естественных водотоков является значительная протяженность и малая глубина потока по сравнению с его шириной: отношение между характерной глубиной и характерной шириной речного русла равнинных рек колеблется в пределах от 0.1 до 0.005. Это используется в [3] для получения на основе метода малого параметра упрощенных математических моделей гидродинамики и пассивного массопереноса в спокойных и слабо искривленных потоках.

В докладе представлены результаты численного исследования пассивного переноса вещества с учетом процессов его диффузии и распада в рамках одной из предложенных в [3] математических моделей массопереноса безнапорным потоком в недеформируемом русле, а именно редуцированной трехмерной модели мелкого протяженного потока. В силу предположения о пассивности примеси неизвестное поле скорости определяется из независимой подсистемы, которую в некоторых случаях удается проинтегрировать аналитически. Уравнение для концентрации приходится решать численно. Заметим, что в используемой модели учитывается пространственная структура течения, что позволяет изучить влияние таких внешних факторов, как например, воздействие ветра, а также изменение формы русла и береговой линии на особенности распределения вещества в потоке.

Для учета турбулентности в рамках рассматриваемых редуцированных гидродинамических моделей может успешно использоваться гипотеза Буссинеска, когда предполагается, что вязкость жидкости в заданной точке потока зависит не от скорости течения, а от координат, определяющих расстояние до твердого дна русла. При этом «модель турбулентности» фактически определяется выбором некоторой функции $\nu(x, y, z)$.

В простейшем случае $\nu = h^2 - t(h - \nu_h h^{-1})z$ — линейной по z функции, формула для продольной скорости имеет вид

$$
\begin{gathered}
u = \widetilde{\mathrm{Re}}\,\frac{h^2}{\nu_h - h^2}\left(\left(\frac{h^3}{\nu_h - h^2} + \xi\right)\ln\frac{\nu}{\nu_h} + (h - z)\right) + F_x\,(h - z)\,,\\
\nu_h = 0.001\left(\frac{S_x}{S_0}\right)^6 h(x, y).
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Здесь S_0 и S_x — площадь живого сечения в начальном створе ($x = 0$) и в точке с координатой x, соответственно; функция $h(x, y)$ задает форму дна, а $\xi(x, y, t)$ — форму свободной поверхности потока; $\widetilde{\mathrm{Re}}$ — модифицированное число Рейнольдса; F_x — параметр ветрового воздействия в направлении вдоль потока.

Для верификации результатов, полученных в рамках редуцированной модели, было проведено прямое численное моделирование как течения, так и распространения примеси в потоке на основе полных моделей, реализованных в конечно-элементном программном комплексе COMSOL [4]. Были рассмотрены как ламинарные, так и турбулентные течения. Полученные результаты позволяют утверждать, что предложенная редуцированная 3D модель массопереноса адекватно описывает гидродинамику и перенос вещества в мелком протяженном и слабо искривленном водотоке малой мутности.

Литература

1. *Abraham G., van Os A. G., Verboom G. K.* Mathematical Modeling of Flows and Transport of Conservative Substances: Requirements for Predictive Ability / Ed. H. B. Fischer.—Berkeley: Univ. of California Acad. Press, 1980.—P. 1–38.—(Transport Models for Inland and Coastal Waters: Proc. of the Symposium on Predictive Ability).
2. *Rodi W., Pavlovic R. N., Srivatsa S. K.* Prediction of flow and pollutant spreading in rivers / Ed. H. B. Fischer.—Berkeley: Univ. of California Acad. Press, 1980.—P. 63–111.—(Transport Models for Inland and Coastal Waters: Proc. of the Symposium on Predictive Ability).
3. *Надолин К. А.* Об одном подходе к моделированию пассивного массопереноса в русловых потоках // Мат. моделирование.—2009.—Т. 21, № 2.—С. 14–28.
4. *Pryor R. W.* Multiphysics Modeling Using COMSOL®: A First Principle Approach.—MA: Jones & Bartlett Publ., 2011.—871 p.

БИФУРКАЦИИ В СИСТЕМЕ РЭЛЕЯ С ДИФФУЗИЕЙ

А. В. Казарников (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
С. В. Ревина (Россия, Владикавказ; ЮМИ)

Рассматривается система Рэлея с диффузией

$$\begin{cases} v_t = \nu_1 \Delta v + w, \\ w_t = \nu_2 \Delta w - v + w - w^3 \end{cases}$$

где $v = v(x,t)$, $w = w(x,t)$, $x \in D$, $t > 0$, $D \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ — ограниченная область, $\mu \in \mathbb{R}$ — управляющий параметр, $\nu_1, \nu_2 > 0$ — коэффициенты диффузии. Предполагается, что $0 < \nu_1 \leqslant \nu_2$ и на границе области заданы однородные краевые условия различных типов: Дирихле, Неймана или смешанные краевые условия. Данная система является частным случаем системы Фитцхью — Нагумо — классической системы реакции-диффузии с кубческой нелинейностью.

Найдены критические значения параметра μ, при которых происходит бифуркация рождения цикла или возникновение новых стационарных режимов. При этом стационарные решения удовлетворяют интегро-дифференциальному уравнению Дюффинга. Методом Ляпунова — Шмидта в форме, развитой В. И. Юдовичем [1], построена асимптотика этих вторичных решений. Показано, что происходит мягкая потеря устойчивости, получены формулы для общего члена асимптотики [2, 3].

В качестве примеров применения общей схемы рассмотрены два случая: когда пространственная переменная меняется на отрезке или в прямоугольнике. В этих частных случаях показана инвариантность системы на некоторых бесконечномерных подпространствах фазового пространства системы, указаны дополнительные симметрии, изучены бифуркации и исследована устойчивость решений на иваринтных подпространствах.

Численно исследована эволюция циклов и стационарных решений при больших значениях параметра. Проведено сравнение с конечномерным случаем, когда коэффициенты диффузии равны нулю.

Литература

1. *Юдович В. И.* Исследование автоколебаний сплошной среды, возникающих при потере устойчивости стационарного режима // Прикл. мат. и мех.—1972.—Т. 36, № 2.—С. 450–459.
2. *Kazarnikov A. V., Revina S. V., Haario H.* Numerical and asymptotical analysis of Rayleigh reaction-diffusion system // Numerical Algebra with Applications. Proc. of Fourth China–Russia Conf.—Rostov-on-Don: Southern Federal University, 2015.—P. 114–119.
3. *Казарников А. В., Ревина С. В.* Возникновение автоколебаний в системе Рэлея с диффузией // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. моделирование и программирование.—2016.—Т. 9, № 2.—С. 16–28.

О МЕТОДАХ РАСЧЕТА КАНАТОВ. ЗАДАЧА РАСТЯЖЕНИЯ-СЖАТИЯ

Н. В. Курбатова (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
Е. Портнов (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
Ю. А. Устинов (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Под канатом понимается «скрученный пучок» тонких деформируемых элементов, так, что все элементы, кроме центрального, приобретают форму пространственной спирали. Канат, у которого элементы металлические (обычно стальные), принято называть тросом. В большинстве технических приложений канат работает на растяжение. Однако, в силу механической структуры, при растяжении канат помимо продольной деформации испытывает и крутильную. При проектировании канатов основное внимание уделяется определению его матрицы жесткостей. Существует ряд различных математических моделей для определения такой интегральной характеристики упругих свойств каната. Обзор этих исследований содержится в одной из работ авторов. При любом из этих подходов связь между интегральными характеристиками напряженно-деформированного состояния (НДС) P_z, M_z (продольной силой, крутящим моментом) и ε, φ (продольной деформацией, относительным углом закручивания) имеет вид

$$d_{11}\varepsilon + d_{12}\varphi = P_z, \quad d_{12}\varepsilon + d_{22}\varphi = M_z. \tag{1}$$

В этой же работе на первом этапе канат рассматривается как цилиндр из композитного материала, который получается путем намотки упругих нитей на цилиндрическую поверхность малого радиуса так, что шаг винтовых спиралей h и крутка $\tau = 2\pi/h$ не зависят от радиальной координаты. Процесс намотки сопровождается покрытием слоем нитей полимерным связующим. В результате получается волокнистый композит. Для описания упругих свойств полученного композита используются методы теории осреднения, на их основе получаются соотношения обобщенного закона Гука для трансверсально-изотропного материала, которые преобразуются к винтовой системе координат. В этой системе координат и рассматривается упругое равновесие кругового цилиндра с винтовой анизотропией. Такой подход сводит проблему определения элементов матрицы жесткостей d_{ij} в (1) к краевой задаче

$$L(\partial,\tau)\mathbf{u} = 0, \quad N(\partial,\tau)\mathbf{u} = 0, \quad \partial = \frac{\partial}{\partial z}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{u}$ — вектор смещений, L — система дифференциальных уравнений равновесия теории упругости, N — оператор граничных условий, символизирующий вектор напряжений на боковой поверхности. Отыскивая решение в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{a}(r,\theta)\, e^{i\lambda z},$$

получаем спектральную задачу (2) на поперечном сечении цилиндра

$$L(i\lambda)\mathbf{a} = 0, \quad N(i\lambda)\mathbf{a} = 0. \tag{3}$$

Относительно (3) установлено, что $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1^+ = \tau$, $\lambda_1^- = -\tau$ являются четырехкратными собственными значениями, а отвечающие им элементарные решения описывают перемещения цилиндра как твердого тела и решения Сен-Венана задач растяжения цилиндра осевыми усилиями, чистого изгиба и изгиба поперечными силами.

Элементы матрицы жесткостей d_{ij} определяются путем предельного перехода в решении Сен-Венана задачи растяжения при стремлении модулей заполнителя к нулю.

Приведем здесь выражение d_{11} для произвольного угла намотки:

$$d_{11} = \pi a^2 E' \frac{\ln(1+kt^2)}{kt^2}, \quad k = \frac{1}{4}(1+\nu), \quad t = \operatorname{tg}\beta$$

Здесь a — внешний радиус цилиндра; $E' = kE$, E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала винтовых спиралей, β — угол между осью цилиндра и касательной к ним на боковой поверхности каната, k — коэффициент упаковки элементов (зависит от профиля поперечного сечения элемента, для кругового профиля $k = Pi/4$).

Литература

1. *Гетман И. П., Устинов Ю. А.* О методах расчета канатов. Задача растяжения-кручения // Прикладная математика и механика.—2008.—Т. 72, № 1.—С. 81–90.
2. *Романова Н. М., Устинов Ю. А.* Задача Сен-Венана цилиндра с винтовой анизотропией // Прикладная математика и механика.—2008.—Т. 72, № 4.—С. 481–488.

РАБОТА СОВЕРШЕННОЙ СКВАЖИНЫ В АНИЗОТРОПНОМ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОМ ПЛАСТЕ ГРУНТА

Д. Г. Лекомцев
(Россия, Орел; ОГУ)

Эксперимент показывает, что свойства реальных нефтеносных (водоносных) пластов сильно зависят от направления [1]. В условиях ввода в эксплуатацию крупных месторождений углеводородов, обладающих сложным геологическим строением, исследование фильтрационных течений в анизотропных пластах приобретает особую актуальность.

Совершенная эксплуатационная скважина дебита Q расположена в горизонтальном пласте постоянной толщины. Течение происходит в областях D_1 и D_2 плоскости $z = x + iy$. Грунт пласта, недеформируемый анизотропный и кусочно-однородный, характеризуется коэффициентом проницаемости K_1 и K_2 ($K_\nu = k_\nu K$, $k_\nu > 0$ — постоянные, $\nu = 1, 2$). K — тензор второго ранга (вообще говоря, несимметричный). В некоторых работах рассматривается трехмерная задача о фильтрации в анизотропной среде [2], в настоящей работе рассмотрим плоскопараллельную задачу $K = (K_{ij})$, $i, j = 1, 2$. Компоненты (K_{ij}) — постоянные. Для определения вклада в дебит различных компонентов тензора введем коэффициенты $\alpha = K_{22}/K_{11}$, $\beta = (K_{12} + K_{21})/(2K_{11})$, $\gamma = (K_{12} - K_{21})/(2K_{11})$, $\beta^2 < \alpha$. Коэффициент α отражает соотношение компонентов тензора, расположенных на главной диагонали, а коэффициенты β и γ — отношение симметричной и антисимметричной частей тензора K к его компоненте K_{11}. Контур скважины — окружность σ_C радиуса R_C, пласт не ограничен по простиранию. Прямая σ_Π разделяет физическую плоскость z на области D_1 и D_2.

Полагаем, что жидкость несжимаемая и ее течение стационарное. Обобщенный потенциал $\varphi(M) = -(p + \rho\Pi)/\mu$ (Π — потенциал массовой силы — силы тяжести, p — давление, μ и ρ — вязкость и плотность жидкости) и скорость фильтрации $\vec{v}$ течения, как функции точки $M = (x, y)$, удовлетворяют всюду в области $D_1 \cup D_2$ (за исключением изолированных особых точек $\varphi(M)$) уравнению [3]

$$\nabla \cdot (K \cdot \varphi(z)) = 0, \quad z \in D_1 \cup D_2. \tag{1}$$

Уравнение (1) относится к эллиптическому типу при условии $K_{11} > 0$ ($K_{22} > 0$), $D(K_S) = K_{11}K_{22} - (K_{12} + K_{21})^2/4$. Здесь $D(K_S)$ — определитель симметричной части $K_S = (K + K^T)/2$ тензора K ($K^T = (K_{ji})$ — транспонированный тензор). Уравнение (1) записано в безразмерных величинах. Напорная фильтрация жидкости к скважине происходит под действием разности давлений, заданных на контуре скважины σ_C и контуре питания, удаленном в бесконечность (действием силы тяжести можно пренебречь). Полагаем, что давления на этих контурах постоянные, равные, соответственно, $C = 1$ и $C_0 = 0$.

Трудность решения поставленной задачи обусловлена сложным видом уравнения (1). Решение значительно упрощается, если перейти на вспомогательную плоскость $O\xi\eta$, используя гомеоморфные (аффинные) преобразования координат (прямое и обратное) [4]. Размеры контура σ_C незначительны в сравнении с характерным размером области фильтрации. С целью изучения влияния анизотропии грунта на дебит введем величину $\epsilon = Q/Q_0 - 1$, характеризующую относительный дебит [5]. Q — дебит скважины в анизотропной среде, Q_0 — дебит скважины вблизи прямолинейного бесконечного контура питания в изотропной среде, рассчитываемый по известной формуле (см., например, [6]). В предельном случае $k_2 \ll k_1$ граница σ_Π раздела областей D_1 и D_2 представляет собой линию постоянного давления, т. е. контур питания. В этом случае область D_2 представляет собой бассейн свободной жидкости, а D_1 — область фильтрации. В этом случае модель отражает работу одиночной совершенной скважины с прямолинейным контуром питания в анизотропном пласте грунта, результат совпадает с [5, 7]. Анизотропия грунта может сильно сказываться на дебите Q (может его увеличивать или уменьшать по отношению к Q_0). Влияние антисимметричной части тензора проницаемости (коэффициент γ) незначительно, основное влияние на дебит скважины оказывают диагональные компоненты (коэффициент α) тензора K [8].

Литература

1. *Дмитриев Н. М., Максимов В. М., Дмитриев М. Н., Кузьмичев А. Н., Мурадов А. В., Кравченко М. Н.* Двухфазная фильтрация в анизотропных средах.Теория и эксперемент // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов.—Казань: Изд-во Казан. (Приволж.) федер. ун-та, 2015.—С. 1201–1203.
2. *Крыштопин Д. В.* Исследование эволюции трехмерной границы раздела «разноцветных» жидкостей к точечному стоку в ортотропной пористой среде // XI Всерос. съезд по фундам. проблемам теорет. и прикл. мех.: сб. тр.—Казань: Изд-во Казан. (Приволж.) федер. ун-та, 2015.—С. 2104–2107.
3. *Пивень В. Ф.* Математические модели фильтрации жидкости.—Орел: Изд-во ФГБОУ ВПО Орлов. гос. ун-т, 2015.—408 с.
4. *Пивень В. Ф., Костин О. В., Лекомцев Д. Г.* Стационарные и нестационарные граничные задачи двумерной фильтрации в анизотропно-неоднородной пористой среде // XI Всерос. съезд по фундам. проблемам теорет. и прикл. мех.: сб. тр.—Казань: Изд-во Казан. (Приволж.) федер. ун-та, 2015.—С. 2992–2994.
5. *Пивень В. Ф., Лекомцев Д. Г.* Математическое моделирование работы совершенной скважины с прямолинейным контуром питания в анизотропном пласте грунта // Учен. записки ОГУ.—2012.—Т. 47, № 3.—С. 69–74.
6. *Чарный И. А.* Подземная гидрогазодинамика.—М: Гос. науч.-тех. изд-во нефтяной и горно-топливной лит-ры, 1963.—397 с.
7. *Лекомцев Д. Г.* Математическое моделирование работы батареи совершенных скважин в анизотропном грунте // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика. Математика.—2015.—№ 1.—С. 94–102.
8. *Пивень В. Ф., Лекомцев Д. Г.* Исследование работы совершенной скважины в анизотропном однородном пласте грунта // Учен. записки ОГУ.—2014.—Т. 59, № 3.—С. 83–88.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АВТОРСКОГО СТИЛЯ НА ОСНОВЕ СТАТИСТИЧЕСКО-МОРФОЛОГИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ПРОИЗВЕДЕНИЙ

В. Е. Мешков (Россия, Волгодонск; ИТ (филиал) ДГТУ),
Е. В. Мешкова (Россия, Волгодонск; ИТ (филиал) ДГТУ)

Автоматическая классификация и кластеризация текстов является актуальной современной задачей и включает в себя различные направления, одно из которых — определение авторского стиля. Один из наиболее важных вопросов при анализе текста — что считать признаками текста?

Существуют различные подходы к определению авторского стиля, поскольку зачастую явные для человека признаки сложно формализовать. К тому же на восприятие текста влияет не только авторский стиль, но и нюансы субъективного восприятия читающего. Наиболее эффективны лингвистические методы, поскольку именно они ориентированы на решение подобных задач. Однако, реализация лингвистического подхода требует весьма значительных вычислительных затрат.

В данной работе объединены два подхода к определению авторского стиля: статистический и лингвистический (метод морфологического анализа). Морфологический анализ является составляющим лингвистических процессоров, для определения грамматических значений слов, таких как часть речи, род, число и т. д. В качестве основной характеристики стиля рассматривается количественный состав и соотношение частей речи в тексте.

С помощью созданной авторами программы для морфологического анализа были проанализированы наборы текстов различных авторов. Программа использует морфологические модули от рабочей группы АОТ (`www.aot.ru`). Исследовались работы только русскоязычных авторов, поскольку при переводе с другого языка теряется индивидуальный авторский стиль, и произведения сильно зависят от интерпретации переводчика.

С помощью программы получены определенные закономерности в соотношении используемых авторами частей речи. В качестве эксперимента исследовались различные группы писателей, были получены индивидуальные характеристики каждого писателя в виде вектора значений морфологических признаков (абсолютные и относительные значения частот частей речи). По полученным данным рассчитаны средние значения по всем рассмотренным произведениям и построены диаграммы соотношения частей речи, а также сводные диаграммы по авторам.

В среднем исследовались 3–4 произведения, получены данные по следующим авторам: Ф. М. Достоевский, Н. В. Гоголь, А. И. Куприн, А. Н. Толстой, Л. Н. Толстой. Также исследовались современные авторы: В. Закруткин, В. Зыков, З. Прилепин, Ник Перумов, Ф. Абрамов, братья Стругацкие, А. Пехов, Б. Акунин, В. Глуховский, А. Калинин и др. По каждому также получены средние показатели.

На основе полученных данных были проведены эксперименты по определению авторства. В качестве вектора признаков взяты полученные на основе статистическо-морфологического анализа средние данные по авторам. Далее для каждого из авторов было взято произведение, ранее не вошедшее в выборку, и получен вектор показателей по нему. Проверялась гипотеза с помощью: кластерного анализа (метод ближайшего соседа); Евклидова расстояния; Манхэттенского расстояния и расстояния Чебышева. На основе проведенных экспериментов можно сказать, что точность предлагаемого метода составляет 85–88.

Можно отметить следующие особенности применения методики. Наилучший результат методика дает на крупных произведениях, а также при объединении статистики крупных произведений и рассказов. Однако, для нескольких писателей методика показывает сбойные измерения. Возможно, это объясняется стилистической близостью стилей авторов. Лучше всего она работает для писателей 19 века — практически безошибочное определение авторства как прозаиков, так и поэтов.

На данный момент можно отметить, что методика перспективна и работоспособна. Также можно отметить, что есть некоторая погрешность в работе программы, связанная с некорректным определением нормальной формы слова, на основе которой определяется ее морфологические признаки. Это происходит из-за невозможности определить форму слова без синтаксического разбора предложения («ели» может быть глаголом и существительным). Хотя относительно общего количества слов в произведениях такая погрешность достаточно невелика, она может оказывать влияние на эффективность методики.

Литература

1. *Мешков В. Е., Мешкова Е. В., Кочковая Н. В.* Взаимная конверсия семантической и нейросетевой парадигм в задачах формирования смысловых образов // Тр. Междунар. науч.-тех. конф. «Интеллектуальные системы» (AIS-10) и «Интеллектуальные САПР» (CAD-2010). Науч. изд. в 3-х т.—М.: Физматлит, 2010.—С. 110–117.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МЕТАМАТЕРИАЛОВ НАНОРАЗМЕРНОЙ СТРУКТУРЫ С УЧЕТОМ НЕСВЯЗАННЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ЭФФЕКТОВ[1]

А. В. Наседкин

(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Метаматериалы — это, как правило, композиционные материалы регулярного строения, уникальные свойства которых обусловлены не столько свойствами составляющих их фаз, сколько строением самой структуры их ячеек периодичности. В последнее время наблюдается существенный интерес к исследованиям самых различных типов материалов.

В данной работе рассматриваются двухфазные периодические метаматериалы, состоящие из пьезоэлектрической матрицы и наноразмерных включений или пор. Для моделирования наноразмерности используется теория поверхностных эффектов Гуртина — Мурдоха с обобщением на пьезоэлектрические среды. Именно, пусть Ω_c — ячейка периодичности двухфазного материала; $\Omega_c = \Omega_c^{(1)} \cup \Omega_c^{(2)}$, $\Omega_c^{(1)}$ — часть ячейки, заполненная основным материалом первой фазы (матрицей), $\Omega_c^{(2)}$ — оставшаяся часть с материалом второй фазы (включениями или порами), Γ_c^s — граница раздела материалов с различными фазами $\left(\Gamma_c^s = \Omega_c^{(1)} \cap \Omega_c^{(2)}\right)$, $\mathbf{n}$ — вектор единичной нормали к границе, внешней по отношению к $\Omega_c^{(1)}$, т. е. к области, занимаемой материалом матрицы, $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ — радиус-вектор точки в декартовой системе координат.

Будем считать, что в объеме Ω_c выполняются уравнения линейной статической электроупругости

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}^E \cdot\cdot\, \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{e} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\kappa}^S \cdot \mathbf{E}, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^*\right)/2, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензоры второго ранга напряжений и деформаций, соответственно; $\mathbf{D}$ — вектор электрической индукции; $\mathbf{E}$ — вектор напряженности электрического поля; $\mathbf{u}$ — вектор-функция перемещений; φ — функция электрического потенциала; $\mathbf{c}^E$ — тензор четвертого ранга упругих жесткостей, измеренных при постоянном электрическом поле; $\mathbf{e}$ — тензор пьезомодулей третьего ранга; $\boldsymbol{\kappa}^S$ — тензор второго ранга диэлектрических проницаемостей, измеренных при постоянных деформациях; $(\ldots)^*$ — операция транспонирования; $(\ldots)\cdot\cdot(\ldots)$ — двойное внутреннее произведение; $\mathbf{c}^E = \mathbf{c}^{E(j)}$, $\mathbf{e} = \mathbf{e}^{(j)}$, $\boldsymbol{\kappa}^S = \boldsymbol{\kappa}^{S(j)}$ при $\mathbf{x} \in \Omega_c^{(j)}$, $j = 1, 2$.

В соответствие с обобщением модели Гуртина — Мурдоха для пьезоэлектрических сред примем [1], что на наноразмерных границах раздела фаз выполня-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 15-19-10008.

ются несвязанные интерфейсные граничные условия

$$\mathbf{n} \cdot [\boldsymbol{\sigma}] = \nabla^s \cdot \boldsymbol{\sigma}^s, \quad \mathbf{n} \cdot [\mathbf{D}] = \nabla^s \cdot \mathbf{D}^s, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_c^s, \tag{4}$$

где $[\boldsymbol{\sigma}] = \boldsymbol{\sigma}^{(1)} - \boldsymbol{\sigma}^{(2)}$, $[\mathbf{D}] = \mathbf{D}^{(1)} - \mathbf{D}^{(2)}$, $\nabla^s = \nabla - \mathbf{n}\partial/\partial r$ — поверхностный набла-оператор, r — координата, отсчитываемая по нормали к Γ_c^s, а верхний индекс s всюду означает соответствующие поверхностные величины. Считается, что тензор поверхностных напряжений $\boldsymbol{\sigma}^s$ связан с тензором поверхностных деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}^s$, а вектор поверхностной электрической индукции $\mathbf{D}^s$ связан с вектором поверхностной напряженности электрического поля $\mathbf{E}^s$ определяющими соотношениями

$$\boldsymbol{\sigma}^s = \mathbf{c}^s \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^s, \quad \mathbf{D}^s = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\kappa}^s \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{E}^s, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}^s = (\nabla^s \mathbf{u} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot (\nabla^s \mathbf{u})^*)/2$, $\mathbf{E}^s = -\nabla^s \varphi$, $\mathbf{c}^s$ — тензор четвертого ранга поверхностных упругих модулей, $\boldsymbol{\kappa}^s$ — тензор второго ранга поверхностных диэлектрических проницаемостей, $\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$, $\mathbf{I}$ — единичный тензор в R^3.

Таким образом, учет наноразмерности структуры композита заключается в применении интерфейсных граничных условий (4) с несвязанными определяющими соотношениями (5) для поверхностных величин.

В случае упругих включений или пор материал второй фазы также можно считать пьезоэлектрическим, но с пренебрежимо малыми пьезомодулями (и пренебрежимо малыми упругими жесткостями в случае пор).

Дальнейшая стратегия проведения расчетов заключалась в следующем. Ячейка периодичности Ω_c транслировалась по трем координатным осям n_c раз. Для полученного представительного объема Ω рассматривались граничные условия метода эффективных модулей [2, 3]. После решения по методу конечных элементов набора статических краевых задач электроупругости в представительном объеме Ω определялись эффективные модули аналогично [2, 3]. При этом однако, в отличие от [2, 3], при вычислении средних величин нужно учитывать как осреднения по объему Ω, так и по совокупности границ Γ_c^s для поверхностных величин.

Проведенные вычислительные эксперименты показали, что при определенных значениях поверхностных жесткостей и диэлектрических проницаемостей наноразмерность структуры композита начинает оказывать существенное значение на величины эффективных модулей пьезоэлектрических периодических метаматериалов.

Литература

1. *Gu S.-T., Qin L.* Variational principles and size-dependent bounds for piezoelectric inhomogeneous materials with piezoelectric coherent imperfect interfaces // Inter. J. Engineering Sci.—2014.—Vol. 78.—P. 89–102.
2. *Nasedkin A. V., Shevtsova M. S.* Improved finite element approaches for modeling of porous piezocomposite materials with different connectivity // Ferroelectrics and Superconductors: Properties and Applications / Ed. I. A. Parinov.—N. Y.: Nova Sci. Publ., 2011.—Ch. 7.—P. 231–254.
3. *Nasedkin A. V.* Finite element design of piezoelectric and magnetoelectric composites with use of symmetric quasidefinite matrices // Advanced Materials - Studies and Applications / Eds. I. A. Parinov, S.-H. Chang, S. Theerakulpisut.—N. Y.: Nova Science Publ., 2015.—Ch. 9.—P. 109–124.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ МЕТАЛЛИЗАЦИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПОР НА ЭФФЕКТИВНЫЕ СВОЙСТВА МИКРОПОРИСТОЙ ПЬЕЗОКЕРАМИКИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ[1]

А. А. Наседкина(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
А. В. Наседкин (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
А. Н. Рыбянец (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Недавно в [1] был предложен оригинальный метод транспорта частиц различных веществ в микропористые пьезокерамики, позволяющий получать пористые пьезокерамические материалы, внутри которых на границах керамической матрицы с порами осажены микрочастицы из металла. Для численного определения эффективных свойств таких микропористых пьезокерамических материалов, аналогично [2], можно использовать подход, включающий метод эффективных модулей, моделирование представительных объемов и конечно-элементное решение набора статических задач теории пьезоэлектричества со специальными граничными условиями. Именно, рассмотрим систему уравнений статической теории электроупругости в представительном объеме Ω композита

$$\mathbf{L}^*(\nabla)\cdot\mathbf{T}=0,\quad \nabla\cdot\mathbf{D}=0,\quad \mathbf{T}=\mathbf{c}^E\cdot\mathbf{S}-\mathbf{e}^*\cdot\mathbf{E},\quad \mathbf{D}=\mathbf{e}\cdot\mathbf{S}+\boldsymbol{\varepsilon}^S\cdot\mathbf{E},\qquad(1)$$

$$\mathbf{S}=\mathbf{L}\cdot\mathbf{u},\quad \mathbf{E}=-\nabla\varphi,\quad \mathbf{L}^*(\nabla)=\begin{bmatrix}\partial_1 & 0 & 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2\\ 0 & \partial_2 & 0 & \partial_3 & 0 & \partial_1\\ 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2 & \partial_1 & 0\end{bmatrix},\qquad(2)$$

где $\mathbf{T}=\{\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{33},\sigma_{23},\sigma_{13},\sigma_{12}\}$ — массив компонент тензора напряжений σ_{ij}; $\mathbf{D}$ — вектор электрической индукции; $\mathbf{S}=\{\varepsilon_{11},\varepsilon_{22},\varepsilon_{33},2\varepsilon_{23},2\varepsilon_{13},2\varepsilon_{12}\}$ — массив компонент тензора деформаций ε_{ij}; $\mathbf{E}$ — вектор напряженности электрического поля; $\mathbf{u}$ — вектор-функция перемещений; φ — функция электрического потенциала; $\mathbf{c}^E$ — 6×6 матрица упругих жесткостей, измеренных при постоянном электрическом поле; $\mathbf{e}$ — 3×6 матрица пьезомодулей; $\boldsymbol{\varepsilon}^S$ — 3×3 матрица диэлектрических проницаемостей, измеренных при постоянных деформациях; $\mathbf{x}$ — вектор пространственных координат; $(\ldots)^*$ — операция транспонирования.

На внешней границе $\Gamma=\partial\Omega$ представительного объема примем условия

$$\mathbf{u}=\mathbf{L}^*(\mathbf{x})\cdot\mathbf{S}_0,\quad \varphi=-\mathbf{x}\cdot\mathbf{E}_0,\quad \mathbf{x}\in\Gamma,\qquad(3)$$

где $\mathbf{S}_0$ и $\mathbf{E}_0$ — постоянные массивы (векторы) размерности 6 и 3, соответственно.

Для обычной пористой пьезокерамики на границах Γ_{pi} пор и матрицы должны выполняться краевые условия

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}=0,\quad \mathbf{x}\in\Gamma_{pi},\quad i=1,2,\ldots N_p,\qquad(4)$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-01-00785.

где $\mathbf{n}$ — вектор внешней единичной нормали, N_p — число пор. Однако при полной металлизации границ пор Γ_{pi} нужно считать эквипотенциальными поверхностями, и для них вместо (4) нужно использовать условия для свободных электродов

$$\varphi = \Phi_i, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{pi}, \quad \int\limits_{\Gamma_{pi}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \, d\Gamma = 0, \tag{5}$$

где Φ_i — неизвестное значение потенциала, единое для любых $\mathbf{x} \in \Gamma_{pi}$.

Таким образом, переход от задачи с обычной пористостью к задаче с металлизацией границ пор состоит в замене граничных условий (4) для неэлектродированных поверхностей на граничные условия (5). В случае пористой пьезокерамики класса $6mm$, чтобы определить десять ее независимых эффективных констант (c_{11}^E, c_{12}^E, c_{13}^E, c_{33}^E, c_{44}^E, e_{31}, e_{33}, e_{15}, ε_{11}^S, ε_{33}^S), достаточно решить пять статических задач (1)–(4) или (1)–(3), (5), положив, как указано в [2], в краевых условиях (3) одну из компонент $S_{0\alpha}$ или E_{0i} отличной от нуля.

Для численного решения статических задач теории пьезоэлектричества в неоднородном представительном объеме применялся конечно-элементный комплекс ANSYS. Представительный объем создавался в виде кубической решетки из одинаковых кубических элементарных ячеек. Каждая из элементарных ячеек в свою очередь состояла из 27 гексаэдральных восьмиузловых конечных элементов с центральным элементом по середине. Далее среди центральных элементов датчиком случайных чисел выбирались те элементы, материальные свойства которых модифицировались на свойства пор. В результате получался представительный объем Ω пористого пьезоэлектрического материала с замкнутой пористостью (пористостью 3–0) частично стохастической структуры.

Как было обнаружено, значения эффективных жесткостей убывают с ростом пористости p, как для обычного пористого материала, так и для композита с металлизацией пор. Между тем, эффективные диэлектрические проницаемости обычной пористой пьезокерамики убывают с ростом p, но эффективные диэлектрические проницаемости пористой пьезокерамики с металлизированными порами, наоборот, возрастают с ростом p. Еще более интересно поведение пьезомодулей. Так, пьезомодули e_{33}, e_{15} и $|e_{31}|$ для обычной пористой пьезокерамики убывают с ростом p. Однако, для пьезокерамики с металлизированными поверхностями пор пьезомодули e_{33} и e_{15} также убывают с ростом пористости, в то время как пьезомодуль $|e_{31}|$ существенно возрастает с ростом p. Для пьезомодуля d_{33} обычной пористой пьезокерамики известно его необычное свойство слабой зависимости от пористости, хотя значения пьезомодуля $|d_{31}|$ убывают с ростом p. Для пористой пьезокерамики с металлизированными порами оба значения пьезомодулей d_{33} и $|d_{31}|$ возрастают с ростом пористости.

Представленные результаты демонстрируют, что микропористая пьезокерамика с металлизированными поверхностями пор имеет целый ряд необычных свойств, перспективных для практических применений.

Литература

1. *Rybyanets A. N., Naumenko A. A.* Nanoparticles transport in ceramic matrixes: a novel approach for ceramic matrix composites fabrication // J. Modern Phys.—2013.—Vol. 4.—P. 1041–1049.
2. *Nasedkin A. V., Shevtsova M. S.* Improved finite element approaches for modeling of porous piezocomposite materials with different connectivity // Ferroelectrics and Superconductors: Properties and Applications / Ed. I. A. Parinov.—N. Y.: Nova Sci. Publ., 2011.—Ch. 7.—P. 231–254.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XIII Междунар. науч. конф. (пос. Дивноморское, 7–14 сентября 2016 г.)

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЧИСЛЕННОСТИ БИОРЕСУРСОВ МЕЛКОВОДНОГО ВОДОЕМА НА МНОГОПРОЦЕССОРНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ[1]

А. В. Никитина (Россия, Таганрог; НИИ МВС ЮФУ),
И. С. Семенов (Россия, Таганрог; НИЦ СЭ и НК),
А. А. Семенякина (Россия, Таганрог; НИИ МВС ЮФУ),
А. И. Сухинов (Россия, Россия; ДГТУ),
А. Е. Чистяков (Россия, Таганрог; НИИ МВС ЮФУ)

В настоящее время исследования в области водной экологии привлекают все большее внимание ученых. Решение задач, связанных с изучением динамики численности основных биоресурсов Азовского моря, осуществляется в работе с использованием методов и средств математического моделирования, реализованных на многопроцессорной вычислительной системе (МВС).

Предложена новая многовидовая модель взаимодействия фито- и зоопланктона, учитывающая факторы, оказывающие существенное влияние на качество вод мелководных водоемов.

Проведена дискретизация разработанной модели с использованием метода баланса и неявной схемы с центральными разностями, а также частичной заполненности ячеек [1]. Предлагаемый алгоритм решения поставленной модельной задачи, использующий модифицированный попеременно-треугольный метод для решения возникающих в процессе дискретизации сеточных уравнений, имеет большую общность и пригоден для решения задач водной экологии, так как позволяет наиболее корректно конструировать вычислительные алгоритмы на границах области интегрирования и раздела сред. Одной из задач работы являлось сокращение времени вычислений при сохранении точности результатов решения поставленной задачи. При реализации параллельного алгоритма решения задачи на МВС для распределения данных между процессорами были разработаны два алгоритма, в том числе алгоритм на основе метода k-means, основанный на минимизации функционала суммарной выборочной дисперсии разброса элементов относительно центра тяжести подобластей, позволяющий повысить эффективность параллельного алгоритма решения поставленной задачи динамики численности биоресурсов мелководного водоема. Использование МВС позволяет значительно сократить время вычислений при сохранении точности результатов решения задачи [2, 3], что обеспечивает более быструю и качественную интерпретацию гидробиологических данных [4, 5].

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Задания № 2014/174 в рамках базовой части государственного задания Минобрнауки России, а также при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 15-01-08619, № 15-07-08626, № 15-07-08408, № 16-37-00129.

Литература

1. *Самарский А. А.* Теория разностных схем.—М.: Наука, 1989.
2. *Сухинов А. И., Чистяков А. Е. Семенякина А. А., Никитина А. В.* Параллельная реализация задач транспорта веществ и восстановления донной поверхности на основе схем повышенного порядка точности // Вычисл. методы и программирование: новые вычисл. технологии.—2015.—Т. 16.—С. 256–267.
3. *Никитина А. В., Семенякина А. А, Чистяков А. Е., Проценко Е. А., Яковенко И. В.* Применение схем повышенного порядка точности для решения задач биологической кинетики на многопроцессорной вычислительной системе // Фундам. исслед.—2015.—№ 12 (3).—С. 500–504.—URL: http://www.fundamental-research.ru/ru/article/view?id=39569 (дата обращения: 29.12.2015).
4. *Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Семенякина А. А., Никитина А.В.* Численное моделирование экологического состояния Азовского моря с применением схем повышенного порядка точности на многопроцессорной вычислительной системе // Компьют. исслед. и моделирование.–2016.—Т. 8, №1.—С.151–168.
5. *Сухинов А. И., Никитина А. В., Семенякина А. А., Чистяков А. Е., Хачунц Д. С., Семенов И. С.* Математическое моделирование процессов эвтрофикации в мелководных водоемах на многопроцессорной вычислительной системе // Параллельные вычислит. технологии: ПАВТ-2016.—2016.—С. 320–333.

ПРИМЕНЕНИЕ MAPLE ДЛЯ ПОИСКА ИНВАРИАНТНЫХ МЕТРИК ЭЙНШТЕЙНА НА ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕДЖЕРА — ОБАТЫ

Ю. В. Никонорова
(Россия, Волгодонск; ВИТИ НИЯУ МИФИ)

Этот доклад основан на работе [4], которая посвящена исследования инвариантных метрик Эйнштнейна на пространствах Леджера — Обаты $F^n/\operatorname{diag}(F)$, где F — простая компактная группа Ли, $n \geqslant 2$. Следует отметить, что классификация инвариантных эйнштейновых метрик на заданном однородном пространстве G/H может быть сведена к нахождения решений некоторой полиномиальной системы уравнений, количество уравнений и неизвестных в которой совпадает с размерностью инвариантых метрик на G/H. Сложность нахождения всех решений такой системы растет вместе с такой размерностью. Более подробно об этом можно узнать из книг [1, 2] и обзоров [5, 6].

Размерность пространства инвариантых римановых метрик на пространстве Леджера — Обаты $F^n/\operatorname{diag}(F)$ равна $n(n-1)/2$. При $n = 2$ получаем однопараметрическое семейство метрик (будучи симметрическими, все они эйштейновы). При $n = 3$ пространство метрик трехмерно, среди них существует ровно 3 метрики Эйнштейна с точностью до подобия [3].

Особый интерес вызывает случай $n = 4$, когда пространство метрик шестимерно: оказалось возможным найти все метрики Эйнштейна (их 29 с точностью до пропорциональности) с использованием системы компьтерных вычислений Maple и базисов Гребнера [4]. Обсуждению деталей соответствующего исследования и посвящен настоящий доклад.

Исходная задача может быть сведена к следующей (см. подробности в [4]): найти все критические точки функции

$$\begin{aligned}\widetilde{S} = x^2 + y^2 + z^2 - u^2(ux - y)^2 - 2u^2(vx - wy)^2 - \\ - w^2(wy - z)^2 - \left(v^2x - w^2uy + (wu - v)z\right)^2,\end{aligned}$$

где

$$x, y, z > 0, \quad xyz = 1, \quad u, v, w \in \mathbb{R}.$$

Отметим, что $\widetilde{S}$ является однородным полиномом степени 2 относительно переменных x, y, z. В частности,

$$\frac{\partial \widetilde{S}}{\partial x}x + \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial y}y + \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial z}z = 2\widetilde{S}.$$

Это позволяет свести задачу к решению следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial \widetilde{S}}{\partial x}x = \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial y}y = \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial z}z = 2, \quad \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial u} = \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial v} = \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial w} = 0.$$

Для решения полученной задачи полезно рассмотреть полиномиальный идеал J, порождаемый многочленами

$$\frac{\partial \widetilde{S}}{\partial x}x-2, \quad \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial y}y-2, \quad \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial z}z-2, \quad \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial u}, \quad \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial v}, \quad \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial w}.$$

Поскольку эти полиномы зависят от переменных x, y, z, u, v, w, то $J \subset \mathbb{K}[x,y,z,u,v,w]$. Используя команду `EliminationIdeal` (которая исключает переменные из идеала с использованием вычислений с базисами Гребнера) системы Maple, можно легко вычислить идеалы

$$J_1 := J \cap \mathbb{K}[x], \quad J_2 := J \cap \mathbb{K}[x,y], \quad J_3 := J \cap \mathbb{K}[x,y,z].$$

Отметим, что J_1 порождается многочленом

$$f(x) = (x^2-1)(2x^2-1)(3x^2-1)(9x^2-8)^2(10x^2-9)(19x^2-9)(85x^4-144x^2+64).$$

Уравнение $f(x)=0$ имеет 6 различных положительных решений $x_1,\dots,x_6$. Выбирая x_i и заменяя x на x_i в идеале J_2, мы получаем идеал, порождаемый некоторым полиномом $f_i(y)$, зависящим лишь от y. Решая уравнение $f_i(y)=0$, получаем все возможные пары ($x>0$, $y>0$), зануляющие идеал J_2. Проделывая это для $i=1,\dots,6$ получаем в результате 13 таких пар. Теперь, заменяя последовательно (x,y) на каждую такую пару в J_3, мы легко получаем все подходящие значения z. Отметим, что существует ровно одно подходящее $z>0$ для каждой пары. Следовательно, мы получаем 13 троек ($x>0$, $y>0$, $z>0$), которые зануляют идеал J_3. Наконец, заменяя (x,y,z) последовательно каждой из этих троек в J, мы получаем полиномиальные системы относительно переменных u, v,w, которые легко решаются.

Литература

1. *Балащенко В. В., Никоноров Ю. Г., Родионов Е. Д., Славский В. В.* Однородные пространства: теория и приложения.—Ханты–Мансийск: Полиграфист, 2008.—280 с.
2. *Бессе А. А.* Многообразия Эйнштейна, в 2-х томах.—М.: Мир, 1990.
3. *Никоноров Ю. Г.* Инвариантные метрики Эйнштейна на пространствах Леджера — Обаты // Алгебра и анализ.—2002.—Т. 14, № 3.—С. 169–185.
4. *Chen Z., Nikonorov Yu. G., Nikonorova Yu. V.* Invariant Einstein metrics on Ledger — Obata spaces.—2016.—(Preprint; arXiv:1605.04747).
5. *Wang M.* Einstein metrics from symmetry and bundle constructions. Surveys in differential geometry: essays on Einstein manifolds // J. Differ. Geom.—Boston, MA: Intern. Press, 1999.—Vol. 6.—P. 287–325.
6. *Wang M.* Einstein metrics from symmetry and bundle constructions: a sequel // J. Differ. Geom.—Somerville, MA: Intern. Press, 2012.—P. 253–309.—(Adv. Lect. Math.; 22).

КЛАССИФИКАЦИЯ РЕЖИМОВ ВИБРОКИПЕНИЯ[1]

Н. С. Орлова
(Россия, Владикавказ; ЮМИ)

В предыдуших работах в результате экспериментального исследования [1] было обнаружено появление волн на поверхности гранулированного материала, а также появление всплесков, напоминающих фонтанирующие каналы. Для теоретического исследования таких эффектов необходимо проведение трехмерных вычислительных экспериментов в диапазоне значений амплитуды и частоты колебаний, а также при разных значениях параметров слоя.

Было проведено исследование режимов виброкипения в более широком диапазоне значений частоты колебаний (10–80 Гц) при значениях толщины слоя засыпки 50 и 100 мм. Использовались значения амплитуды колебаний в диапазоне 1.5–9 мм. В расчетах рассматривались монодисперсные частицы стекла диаметром 0.3 мм.

В предыдущих работах [1–5] по исследованию режимов виброкипения было обнаружено, что в трехмерных вычислительных экспериментах наблюдается волнообразная поверхность гранулированного материала. С увеличением амплитуды и частоты вибрации слой частиц теряет устойчивость и образуются всплески гранулированного материала.

При амплитуде вибрации 1.5–2 мм и частоте вибрации менее 20 Гц наблюдается волнообразная поверхность слоя материала, но всплески не визуализируются. При частоте 10 Гц и амплитуде 1.5 мм волны на поверхности слоя практически не наблюдаются, и степень расширения (отношение максимальной высоты виброкипящего слоя к его начальной высоте) мала. На поверхности слоя наблюдаются структуры в виде кругов.

С увеличением частоты колебаний ($>$ 20 Гц) поверхность виброкипящего слоя становится волнообразной. Если увеличивать при этом амплитуду колебаний, то амплитуда волн гранулированного материала возрастает, что способствует расширению виброкипящего слоя. На поверхности слоя наблюдаются отдельные всплески гранулированного материала.

При амплитуде 9 мм наблюдается появление фонтанирующих каналов. Максимальное значение объемной доли частиц в слое возрастает с увеличением амплитуды колебаний. С практической точки зрения это может препятствовать однородному ожижению (кипению) материала.

С дальнейшим увеличением частоты при больших значениях амплитуды ($>$ 3 мм) неустойчивость слоя переходит в другой режим, когда слой частиц

[1]Работа выполнена в рамках Программы Президиума РАН I.33 П «Фундаментальные проблемы математического моделирования. Фундаментальные проблемы факторизационных методов в различных областях. Алгоритмы и математическое обеспечение для вычислительных систем сверхвысокой производительности».

сильнее отрывается от колеблющейся полки и значительнее уплотняется, а всплески практически не визуализируются. При этом может наблюдаться скошенная поверхность слоя.

Следует отметить, что с увеличением частоты вибрации, начиная с 30 Гц, между нижней частью слоя и полкой (на которой располагается материал) образуется зазор. При малых значениях амплитуды (1.5 мм) небольшой зазор (высотой около 5 мм) образуется только при частоте 80 Гц. При больших значениях амплитуды (больше 3 мм) зазор образуется уже при частоте 30 Гц. При амплитуде 6–9 мм зазор достигает 10–15 мм. При этом максимальная высота слоя практически не меняется с увеличением частоты вибрации, так как слой частиц уплотняется.

Следует отметить, что в случае, когда толщина слоя засыпки больше и равна 100 мм, степень расширения виброкипящего слоя меньше [2, 5], волнообразная поверхность слоя возникает при больших значениях амплитуды и частоты колебаний. Для более детальной классификации необходимо дополнительное исследование режимов виброкипения в зависимости от параметров слоя.

Литература

1. *Орлова Н. С.* Сравнение результатов экспериментального исследования виброкипящего слоя с расчетами по гидродинамической модели гранулярного газа // Инженерно-физический журнал.—2014.—Т. 87, № 2.—С. 429–435.
2. *Орлова Н. С., Качалкина Я. Н.* Исследование режимов виброкипящего гранулированного слоя с использованием пакета OpenFOAM // Тр. Института системного программирования Российской академии наук.—2014.—№ 6.—С. 143–154.
3. *Orlova N. S., Volik M. V.* Modelling of vibrofluidized bed dynamics using OpenFoam // Waves and vortices in complex media: 5-th International Scientific School of Young Scientists, November 25–28, 2014, Moscow.—Moscow: MAKS Press, 2014.—P. 72–74.
4. *Orlova N. S.* Application of OpenFoam for Studying the Vibrofluidized Bed Dynamics // Fluxes and structures in fluids: Proceedings of International Conference, June 23–26, 2015, Kaliningrad.—Moscow: MAKS Press, 2015.—P. 161–165.
5. *Orlova N. S., Volik M. V., Minasyan D. G.* The dependence of the expansion degree of vibrofluidized bed on the initial thickness // Waves and vortices in complex media: 6-th International Scientific School of Young Scientists, June 21–23, 2015, Kaliningrad.—Moscow: MAKS Press, 2015.—P. 30–33.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XIII Междунар. науч. конф. (пос. Дивноморское, 7–14 сентября 2016 г.)

МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ ПОКОЛЕНИЙ С ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТЬЮ РОСТА В РАННЕМ ОНТОГЕНЕЗЕ[1]

А. Ю. Переварюха
(Россия, Санкт-Петербург; СПИИРАН)

Внутрипопуляционным механизмом регуляции, влияющим на динамику популяций осетровых рыб и лососевых, является сложная зависимость между нерестующим на ограниченных русловых участках с пригодным грунтом запасом и формирующимся от него новым поколением. В ихтиологии предлагались математические модели для формализации зависимости пополнения R от запаса S (stock–recruitment), в частности, известна модель У. Рикера:

$$R = aS\mathbf{e}^{-bR},$$

где a — параметр, характеризующий репродуктивный потенциал популяции; b — отражает влияние лимитирующих зависящих от плотности факторов. Рикер обосновал на богатом фактическом материале теорию формирования пополнения популяций рыб. Однако использование модели на практике оказалось связано с противоречивыми результатами.

Проблема несоответствия прогнозов связана с тем, что не анализировались свойства динамической системы $M\langle\Omega, t, \psi\rangle$, где оператор эволюции $\psi(R; \mathbf{a})$ есть формализация некоторой параметрической зависимости между основными величинами, характеризующими развитие популяционного процесса, и в случае итераций модели Рикера $R_{n+1} = aR_n \exp(-bR_n)$ для M наблюдается возникновение топологически неэквивалентных фазовых портретов. Условие первого метаморфоза поведения M определяется тем, когда производная в неподвижной точке x^* перестанет удовлетворять критерию устойчивости $|\psi'(x^*)| < 1$. Для однопараметрического семейства отображений $\psi : I \to I$ класса гладкости C^2 с условиями $\psi'_x(x^*) = v(a)$, $\psi'(x) \neq 0$, если $x \neq c$, $\psi''(c) \neq 0$ при $a = \bar{a}$ таком, что $\psi'(x^*) = -1$, наблюдается следующая ситуация для $\psi^2(x)$ в теряющей устойчивость x^*:

$$\frac{d\psi^2(x^*)}{dx} = 1,$$
$$\frac{d^2\psi^2(x)}{dx^2} = \psi''(\psi(x))(\psi'(x))^2 + \psi'(\psi(x))\psi''(x), \tag{1}$$

$$\frac{d^2\psi^2(x^*)}{dx^2} = 0. \tag{2}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 15-07-01230, № 14-07-00066.

Следовательно, $d\psi^2(x)/dx$ при $a = \bar{a}$ имеет в x^* локальный экстремум, который при выполнении $d^3\psi^2(x)/dx^3 < 0$ будет максимумом, и тогда с появлением двух неподвижных точек x_1^*, x_2^* для $\psi^2(x)$ возникает бифуркация удвоения периода. Хаотизация — исключительно математическое свойство и говорить о роли повышении репродуктивного потенциала в нестабильности экосистем на основе моделей преждевременно. Действительно, трудно соотнести совершенное канторовское множество, образующееся в момент накопления каскада бифуркаций, и конечное множество особей, которое представляет собой биологическая популяция. Применяя дифференциальные уравнения в задачах популяционной динамики, мы должны понимать, что где-то заканчиваются понятия о бесконечно малых величинах и начинаются привычные для экологов единицы измерения. Самая простая модель численности поколения $N(t)$ исходит из пропорциональной смертности и задает экспоненциальную кривую убыли с одним параметром:

$$\frac{dN}{dt} = -zN, \quad N(t) = N_0 \mathbf{e}^{-zt}.$$

Для разных видов рыб темп убыли должен варьироваться по мере развития особей, наиболее резко выражаться у молоди короткоцикловых пелагических рыб, подверженных биотическому прессу на всем жизненном цикле.

Основываясь на данных наблюдений за «покатной» миграцией молоди волжских осетровых рыб в годы с различным объемом стока воды в половодье и отметив сдвиги пика прохождения мигрирующей к морю молоди, мы предложили модель с двумя мгновенными коэффициентами смертности в уравнении убыли:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = -\big(\alpha w(t)N(t) + \theta(S)\beta\big)N(t), \\ \frac{dw}{dt} = \frac{g}{N+\zeta}, \quad \theta(S) = \frac{1}{1-\exp(-cS)}, \\ \frac{dg}{dt} = rg - \frac{rg^2}{G} - \nu N(t), \end{cases} \tag{3}$$

где S — величина нерестового запаса; $w(t)$ отражает уровень размерного развития поколения, влияющий на увеличение пищевых потребностей; в третьем уравнении g описывает динамику количества доступных кормовых объектов согласно уравнению Ферхюльста — Пирла с учетом выедания корма $\nu N(t)$; убывающая функция $\theta(S) \to 1$ при $S \to \infty$ слабо влияет на вычисление итогового пополнения $N(T)$, если численность запаса достаточно велика. Функционал предназначен для моделирования резкого снижения эффективности воспроизводства при деградации популяции, важного для благополучия осетровых; ζ — параметр, учитывающий ограничение темпов развития, не зависящие от численности; c — параметр, характеризующий степень выраженности эффекта Олли; α — мгновенный коэффициент компенсационной смертности; β — мгновенный коэффициент декомпенсационной смертности; $t \in [0, T]$ — специфичный для биологического вида интервал уязвимости. График зависимости, полученный при численном решении задачи Коши для всех $S \in \mathbb{Z}^+$ с начальными условиями $w(0) = w_0$, $g(0) = 0.5G$, $N(0) = \lambda S$, где λ — средняя плодовитость особей, представляет унимодальную кривую с уменьшающимся наклоном ниспадающей правой ветви (при $\alpha = 0.8 \times 10^{-14}$, по средней плодовитости волжской севрюги за время наблюдений $\lambda = 227 \times 10^3$, $c = 2.5 \times 10^{-3}$, $G = 125000$, $T = 55$ сут.).

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ НА МНОЖЕСТВЕ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДОВ С ЗАДАННЫМ ГЕОДЕЗИЧЕСКИМ ДИАМЕТРОМ[1]

Н. В. Рассказова

(Россия, Рубцовск; РИИ АлтГТУ)

Весьма естественными функционалами на множестве выпуклых тел в k-мерном евклидовом пространстве являются *интегралы поперечных мер Минковского* W_i, $i = 0, 1, \dots, k$ (см., например, [6, п. 6.1.6]). Пусть A — выпуклое тело, т. е. замкнутое и выпуклое точечное множество, в 3-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$. Ему можно сопоставить следующие интегралы поперечных мер Минковского: $W_0(A) = V(A)$ — объем, $W_1(A) = F(A)/3$, $W_2(A) = M(A)/3$, $W_3(A) = \mathrm{const} = 4\pi/3$, где $F(A)$ — площадь поверхности, а $M(A)$ — интеграл средней кривизны.

В [6] дано обоснование того факта, что интеграл поперечной меры Минковского $W_i(A)$ является D-инвариантным, неотрицательно определенным, монотонным, ограниченным, однородным (степени $k - i$), непрерывным и аддитивным. Линейная комбинация из $W_i(A)$ с постоянными коэффициентами также обладает аналогичными свойствами.

Напомним значения интегралов поперечных мер Минковского для прямоугольного параллелепипеда $P = ABCDA'B'C'D'$ в $\mathbb{E}^3$ с ребрами длины $|AB| = a$, $|AD| = b$, $|AA'| = c$, где $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c$. Общеизвестные формулы для объема $W_0(P) = V(P) = abc$ и площади поверхности $F(P) = 2(ab + ac + bc) = 3W_1(P)$ дополняются формулой $W_3(P) = 4\pi/3$ и $M(P) = \pi(a + b + c) = 3W_2(P)$ [5].

Для параллелепипеда P будем обозначать через $\partial(P)$ поверхность этого параллелепипеда (его границу в естественной топологии трехмерного евклидова пространства). Пусть $d(M, N)$ — геодезическое (внутреннее) расстояние между точками $M \in \partial(P)$ и $N \in \partial(P)$, т. е. минимум длин ломаных, лежащих в $\partial(P)$ и соединяющих точки M и N. Через $D(P)$ обозначим геодезический (внутренний, в другой терминологии) диаметр параллелепипеда P (точнее, его поверхности) — максимальное геодезическое (внутреннее) расстояние между парой точек на поверхности параллелепипеда.

Рассмотрим некоторый функционал в виде линейной комбинации интегралов поперечных мер Минковского (за исключением константы) для прямоугольного параллелепипеда P

$$W(P) = C_0W_0(P) + C_1W_1(P) + C_2W_2(P)$$

[1]Работа выполнена при частичной поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых российский ученых и ведущих научных школ Российской Федерации, грант НШ-2263.2014.1.

или

$$W(P) = C_0\, abc + \frac{2C_1}{3}\,(ab+bc+ac) + \frac{2C_2\pi}{3}\,(a+b+c).$$

Можно рассмотреть следующую задачу: *Найти экстремальные значения функционала $W(P)$ на множестве всех параллелепипедов с заданным геодезическим диаметром.*

Подобные задачи для параллелепипедов были решены для отдельных интегралов поперечных мер Минковского. Напомним уже известные результаты.

Экстремальные значения *площади поверхности* $F(P)$ параллелепипеда P были найдены Ю. Г. Никоноровым и Ю. В. Никоноровой в [7], где было доказано, что максимум площади поверхности достигается на параллелепипеде с соотношением длин ребер $a:b:c = 1:1:\sqrt{2}$. Минимум в данном случае, очевидно, равен 0 и достигается в точности на (вырожденных) параллелепипедах со свойством $a = b = 0$.

Далее в [3] были получены экстремальные значения для *интеграла средней кривизны* $M(P)$. В частности, наибольшее значение $M(P)$ достигается в точности на параллелепипедах с соотношением длин ребер $a : b : c = 0 : 1 : 1$, а наименьшее значение — на параллелепипедах с соотношением длин ребер $a:b:c = 0:0:1$.

И, наконец, в [4] были получены экстремальные значения *объема* $V(P)$ параллелепипеда. Очевидно, что минимум равен 0 и достигается в точности на (вырожденных) параллелепипедах с соотношением длин ребер $a:b:c = 0:1:1$ ($a : b : c = 0 : 0 : 1$). Наибольшее значение объема $V(P)$ среди всех прямоугольных параллелепипедов с заданным геодезическим диаметром достигается в точности на параллелепипедах с соотношением длин ребер $a:b:c = 1:1:\sqrt{2}$.

Прежде, чем решать поставленную общую задачу, разберем комбинации функционалов из двух интегралов поперечных мер Минковского. Учитывая, что если экстремальное значение достигается для некоторых функционалов на одинаковых элементах, то на этих же элементах будет достигаться экстремальное значение и для линейной комбинации из этих функционалов с неотрицательными коэффициентами, можно сразу получить следующие результаты.

1) Объем и площадь поверхности: $W_{VF}(P) = C_0\, abc + \frac{2C_1}{3}(ab+bc+ac)$. Максимум $W_{VF}(P)$ достигается на параллелепипедах с соотношением длин ребер $a:b:c = 1:1:\sqrt{2}$, минимум достигается в точности на (вырожденных) параллелепипедах с соотношением длин ребер $a:b:c = 0:0:1$ для неотрицательных величин C_0, C_1.

2) Объем и средняя кривизна: $W_{VM}(P) = C_0\, abc + \frac{2C_2\pi}{3}(a+b+c)$. Минимум $W_{VM}(P)$ достигается в точности на (вырожденных) параллелепипедах с соотношением длин ребер $a : b : c = 0 : 0 : 1$ для неотрицательных величин C_0, C_2.

3) Площадь поверхности и средняя кривизна: $W_{FM}(P) = \frac{2C_1}{3}(ab+bc+ac) + \frac{2C_2\pi}{3}(a+b+c)$. Минимум $W_{FM}(P)$ достигается в точности на (вырожденных) параллелепипедах с соотношением длин ребер $a:b:c = 0:0:1$ для неотрицательных величин C_1, C_2.

Литература

1. *Вялый М. Н.* Кратчайшие пути по поверхности параллелепипеда // Мат. просвещение.—2005.—№ 9.—С. 203–206.
2. *Никоноров Ю. Г., Никонорова Ю. В.* О внутреннем расстоянии на поверхности параллелепипеда // Тр. Рубцов. индустр. ин-та.—2000.—Т. 9.—С. 222–228.
3. *Рассказова Н. В.* Экстремальные значения интеграла средней кривизны на множестве параллелепипедов с заданным геодезическим диаметром // Владикавк. мат. журн.—2013.—Т. 15, № 2.—С. 78–82.
4. *Рассказова Н. В.* Экстремальные значения объема на трехмерных параллелепипедах с заданным геодезическим диаметром // Владикавк. мат. журн.—2013.—Т. 15, № 4.—С. 44–47.
5. *Сантало Л. А.* Интегральная геометрия и геометрические вероятности.—М.: Наука, 1983.—360 с.
6. *Хадвигер Г.* Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии.—М.: Наука, 1966.—416 с.
7. *Nikonorov Yu. G., Nikonorova Yu. V.* The intrinsic diameter of the surface of a parallelepiped // Discrete and Computational Geometry.—2008.—Vol. 40.—P. 504–527.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАНСПОРТА НЕФТЕПРОДУКТОВ[1]

А. А. Семенякина
(Россия, Таганрог; НИИ МВС ЮФУ)

Анализ численного решения модельной задачи транспорта веществ показал, что с увеличением размеров расчетной сетки временные затраты для явной схемы существенно уменьшаются [1]. Модификация явной схемы — введение разностной производной второго порядка с множителем-регуляризатором — позволяет существенно ослабить ограничения на допустимую величину шага по времени [2]. Кроме того, явные регуляризованные схемы показали преимущество по реальным временным затратам (10–15 раз и более) по сравнению с использовавшимися ранее традиционными неявными и нерегуляризованными явными схемами [3].

В работе [4] был предложен вариант метода конечных объемов в случае учета «заполненностей» контрольных областей. Алгоритм расчета, учитывающий частичную «заполненность» ячеек, лишен недостатка, связанного со ступенчатым представлением границы области на прямоугольной сетке. Предложенный метод был применен для решения трехмерных задач гидродинамики [5]. На основе данной модели выполнен расчет полей течений, которые использованы при расчете транспорта нефтепродуктов.

Разработана математическая модель транспорта нефтепродуктов, отличающаяся от известных учетом: испарений легкой, нейтральной и не испаряющейся псевдофракций нефтяного пятна, растворения и растекания нефтяного пятна и биоразложения. В данной работе приведена построенная модель, которая описывает все выше перечисленные процессы. При решении задачи транспорта нефтепродуктов использованы схемы повышенного порядка точности. Следует отметить, что при решении модельной задачи диффузии удалось повысить точность в 66.7 раз, а для задачи диффузии-конвекции — в 48.7 раз [6]. На базе многопроцессорной вычислительной системы было разработано экспериментальное программное обеспечение, предназначенное для математического моделирования возможных сценариев развития экосистем мелководных водоемов на примере Азово-Черноморского бассейна при нефтяных разливах. При параллельной

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Задания №2014/174 в рамках базовой части государственного задания Минобрнауки России, а также при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-37-00129.

реализации были использованы методы декомпозиции сеточных областей для вычислительно трудоемких задач диффузии-конвекции, учитывающие архитектуру и параметры многопроцессорной вычислительной системы. Максимальное ускорение достигалось на 512 вычислительных узлах и равнялось 228.36 раз. К достоинствам разработанного программного комплекса также следует отнести использование модели гидродинамики, включающую уравнения движения по трем координатным направлениям.

Литература

1. *Глухенький И. Ю., Лаврентьев А. В., Попова Г. Г.* Моделирование аварийных разливов нефти в Керченском проливе // Безопасность в техносфере.—2011.—№ 6.—С. 3–6.
2. *Четверушкин Б. Н.* Пределы детализации и формулировка моделей уравнений сплошных сред // Мат. моделирование.—2012.—Т. 24.—№ 11.—С. 33–52.
3. *Сухинов А. И., Проценко Е. А., Чистяков А. Е., Шретер С. А.* Сравнение вычислительных эффективностей явной и неявной схем для задачи транспорта наносов в прибрежных водных системах // Вычисл. методы и программирование: Новые вычисл. техн.—2015.—Т. 16, № 3.—С. 328–338.
4. *Сухинов А. И., Тимофеева Е. Ф. Чистяков А. Е.* Построение и исследование дискретной математической модели расчета прибрежных волновых процессов // Изв. ЮФУ. Технич. науки.—2011.—№ 8 (121).—С. 22–32.
5. *Сухинов А. И., Чистяков А. Е.* Параллельная реализация трехмерной модели гидродинамики мелководных водоемов на супервычислительной системе // Вычисл. методы и программирование: Новые вычисл. техн.—2012.—Т. 13.—С. 290–297.
6. *Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Семенякина А. А., Никитина А. В.* Параллельная реализация задач транспорта веществ и восстановления донной поверхности на основе схем повышенного порядка точности // Вычисл. методы и программирование: Новые вычисл. техн.—2015.—Т. 16, № 2.—С. 256–267.

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТРАНСПОРТА НАНОСОВ[1]

В. В. Сидорякина (Россия, Таганрог; Филиал РГЭУ (РИНХ)),
А. И. Сухинов(Россия, Ростов-на-Дону; ДГТУ)

В работе для нелинейной начально-краевая задачи, описывающей транспорт донных материалов в прибрежной зоне мелководных водоемов построена и исследована линеаризованная модель. Следуя [1, 2], рассматривается уравнение транспорта наносов, которое в дивергентном виде можно записать

$$(1-\varepsilon)\frac{\partial H}{\partial t} + \operatorname{div}(k\,\vec{\tau}_b) = \operatorname{div}\Big(k\,\frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0}\,\operatorname{grad} H\Big), \tag{1}$$

где $H = H(x,y,t)$ — глубина водоема; ε — пористость донных материалов; $\vec{\tau}_b$ — вектор касательного тангенциального напряжения на дне водоема; τ_{bc} — критическое значение тангенциального напряжения; $\tau_{bc} = a\sin\varphi_0$, φ_0 — угол естественного откоса грунта в водоеме; $k = k(H,x,y,t)$ — коэффициент, нелинейным образом зависящий от частных производных по пространственным переменным функции $H = H(x,y,t)$ и определяемый соотношением

$$k \equiv \frac{A\tilde{\omega}d}{((\rho_1-\rho_0)gd)^\beta}\left|\vec{\tau}_b - \frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0}\operatorname{grad} H\right|^{\beta-1},$$

ρ_1, ρ_0 — плотности частиц донного материала и водной среды соответственно; g — ускорение силы тяжести; $\tilde{\omega}$ — частота волны; A и β — безразмерные постоянные; d — характерные размеры частиц грунта.

Уравнение (1) для простоты рассматривается в прямоугольной области $D(x,y) = \{0 < x < L_x, 0 < y < L_y\}$.

Дополним уравнение (1) начальным условием предполагая, что функция начальных условий принадлежит соответствующему классу гладкости:

$$\begin{gathered} H(x,y,0) = H_0(x,y), \quad H_0(x,y) \in C^2(D) \cap C(\bar{D}), \\ \operatorname{grad}_{(x,y)} H_0 \in C(\bar{D}), \quad (x,y) \in \bar{D}. \end{gathered} \tag{2}$$

Граничные условия задаются, исходя из физических соображений:

$$H(0,y,t) = H_1(y,t), \quad H(L_x,y,t) = H_2(y,t), \quad 0 \leqslant y \leqslant L_y, \tag{4}$$

$$H(x,L_y,t) = 0, \quad H(x,0,t) = H_3(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant L_x. \tag{5}$$

Дополнительно к граничным условиям предполагаем выполнение условий их гладкости — $\operatorname{grad}_{(x,y)} H \in C(\bar{Ц}_T) \cap C^1(Ц_T)$ на границе области.

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 15-01-08619, № 15-07-08626, и Программы Президиума РАН «Фундаментальные проблемы математического моделирования».

Считаем согласованными граничные и начальные условия, а также выполненным условие невырожденности оператора диффузии:

$$k \geqslant k_0 = \mathrm{const} > 0 \quad (\forall\,(x,y) \in \bar{D},\ 0 < t \leqslant T). \tag{6}$$

Осуществим линеаризацию начально-краевой задачи (1)–(6), используя равномерную временную сетку $\omega_\tau = \{t_n = n\tau,\, n = 0, 1, \ldots, N,\, N_\tau = T\}$. Линеаризацию члена $\mathrm{div}(k\,\vec{\tau}_b)$ и коэффициента k выполним путем выбора их значений в момент времени $t = t_n$, $n = 0,\, 1, \ldots, N$, и рассмотрения уравнения (1) на временном промежутке $t_{n-1} < t \leqslant t_n$, $n = 1, 2, \ldots, N$. Предполагается, что функция $H^{(n)}(x, y, t_{n-1}) = H^{(n-1)}(x, y, t_{n-1})$ и ее частные производные по пространственным переменным известны. В качестве $H^{(1)}(x, y, t_0)$ достаточно взять функцию начального условия, т. е. $H^{(1)}(x, y, t_0) = H_0(x, y)$.

После линеаризации уравнение (1) запишем в виде

$$(1-\varepsilon)\frac{\partial H^{(n)}}{\partial t} = \mathrm{div}\left(k^{(n-1)}\frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0}\,\mathrm{grad}\, H^{(n)}\right) - \mathrm{div}\left(k^{(n-1)}\vec{\tau}_b\right), \tag{7}$$

$$k^{(n-1)} = \left(H^{(n-1)}, x, y, t_{n-1}\right), \quad t_{n-1} < t \leqslant t_n, \quad n = 1, 2, \ldots, N.$$

Авторами доказано, что решение построенной линеаризованной задачи существует, единственно и принадлежит классу функций $C^2(\text{Ц}_T) \cap C(\bar{\text{Ц}}_T)$.

Литература

1. *Леонтьев И. О.* Прибрежная динамика: волны, течения потоки наносов.—М.: ГЕОС, 2001.—272 с.
2. *Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Проценко Е. А.* Математическое моделирование транспорта наносов в прибрежной зоне мелководных водоемов // Мат. моделирование.— 2013.—Т. 25, № 12.—С. 65–82.

RS-МНОГОГРАННИКИ И ПАРАЛЛЕЛОЭДРЫ

В. И. Субботин

(Россия, Новочеркасск; ЮРГПУ (НПИ))

RS-многогранник — это такой замкнутый выпуклый многогранник в трехмерном евклидовом пространстве, который имеет изолированные симметричные ромбические вершины [1]. При этом каждая грань F, не входящая в звезду ромбической вершины, имеет ось вращения, которая является осью вращения звезды F.

В докладе найдены пять типов RS-многогранников и доказана полнота этого списка. Кроме того, утанавливается связь перечисленных многогранников с трехмерными параллелоэдрами [2], а именно, доказана следующая

Теорема. *Для каждого из пяти трехмерных параллелоэдров существует такой RS-многогранник M, что данный параллелоэдр может быть получен геометрическим преобразованием многогранника M.*

Замечание. Так как все RS-многогранники перечислены, а удлиненный ромбический додекаэдр можно отнести к RS-многогранникам (при необходимости можно применить аффинное преобразование), то для характеризации удлиненного додекаэдра необходимо требование 6-угольности грани, не входящей в звезду ромбической вершины [1].

Литература

1. *Субботин В. И.* Характеризация одного из трехмерных параллелоэдров // Теория операторов, комплексный анализ и мат. моделирование: Тезисы докладов междунар. науч. конф.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014.—С. 148.
2. *Долбилин Н. П.* Параллелоэдры: ретроспектива и новые результаты // Тр. Московского мат. общества.—2012.—Т. 73, № 2.—С. 259–276.

ДВЕ МОДЕЛИ ФОРМИРОВАНИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ О СТРУКТУРЕ НАТУРАЛЬНОГО РЯДА

В. А. Тестов (Россия, Вологда; ВоГУ),
И. А. Шиловский (Россия, Санкт-Петербург; Концерн «Океанприбор»)

Натуральные числа являются фундаментом всего школьного и вузовского математического образования. Число — одно из удивительнейших и прекраснейших созданий человеческого духа, и понятие числа заслуживает того, чтобы каждый образованный человек имел хотя бы некоторое представление о тех глубинах, которые оно в себе содержит. Натуральные числа возникли из потребностей счета в глубокой древности. Как показывает изучение понятия числа у первобытных народов, натуральное число служит целям счета и развивается в зависимости от усложнения задач счета. Простейшими конкретными представителями этих чисел являются ряды черточек: $|$, $||$, $|||$, $||||$, $\ldots$ Пересчитывая (конечное) множество объектов, мы каждому объекту ставим в соответствие некоторую черточку и, таким образом, устанавливаем взаимно-однозначное соответствие между данным множеством и множеством черточек. Одновременно мы упорядочиваем множества, поскольку занумеровываем его элементы в соответствии с последовательностью черточек как первый, второй, третий и т. д.

Таким образом, в самом процессе счета имеются две разные модели, два различных аспекта: установление количества элементов и упорядочение. Основные свойства натуральных чисел могут быть описаны и изучены с помощью любой из этих двух моделей, причем первая приводит к теории кардинальных чисел в теории множеств, а вторая — к теории порядковых (ординальных) чисел.

Согласно Г. Кантору — создателю теории множеств, конечные кардинальные и конечные ординальные числа оказываются объектами различной природы. При этом Кантор несколько неопределенно говорит, что они совпадают по своим свойствам. После рассмотрения свойств конечных кардинальных чисел Кантор объявляет, что тем самым указан самый естественный путь построения обычной традиционной арифметики натуральных чисел. Кантор мог бы сказать то же самое и по поводу конечных ординальных чисел. Предпочтение, отданное Кантором в этом отношении кардинальным числам, может быть объяснено просто тем, что они были рассмотрены первыми.

Двойственный характер природы натуральных чисел, т. е. что они одновременно являются порядковыми и количественными числами, приводит к методологическим трудностям при формировании этого понятия. В школьной математике также возможны два соответствующих подхода, основанные на этих двух моделях натурального ряда: теориях кардинальных и ординальных чисел. Школьная дидактика накопила многовековой опыт формирования у детей понятия о натуральном числе на основе модели, использующей счет предметов, первичность порядковых свойств, что соответствует и историческому процессу формирования этого понятия.

Для того чтобы считать, необходимо заранее иметь достаточный запас чисел. Числа (будь то пальцы, суставы или другие системы) должны обладать некоторыми свойствами, чтобы служить орудием счета. Они должны располагаться в определенном порядке, причем должно существовать первое число и т. д. При этом первому отмеченному предмету ставится в соответствие число 1, а каждому очередному числу, не отмеченному ранее, ставится в соответствие число, следующее за последним из уже названных.

Процесс счета натуральных чисел имеет в своей основе следующие факты из теории линейно упорядоченных множеств, т. е. множеств, на которых задано отношение линейного порядка «$<$».

1) Всякое конечное множество можно линейно упорядочить, т. е. расположить в цепочку.

2) Во всяком конечном линейно упорядоченном множестве X существует наименьший (наибольший) элемент.

3) Любое конечное линейно упорядоченное множество X порядково изоморфно некоторому отрезку множества натуральных чисел, т. е. между ними существует взаимно однозначное соответствие, сохраняющее порядок.

Именно установление такого изоморфизма и может быть названо счетом элементов множества X.

В 60-70 гг. XX столетия были предприняты попытки ввести в школьную практику, основываясь на мнении Кантора, чисто количественную модель формирования этого понятия. Сторонники этого подхода при этом обычно ссылаются на работы Ж. Пиаже. Но как показали исследования Ж. Пиаже и А. Шеминской, формирование у ребенка понятий порядкового и количественного числа идет одновременно.

Переоценка количественного аспекта натурального числа, как отмечает известный голландский математик и педагог Г. Фройденталь, недопустима.

1. Мнение о том, что количественное число, т. е. рассмотрение, основанное на понятии мощности, достаточно для обоснования натурального числа, математически ложно (по крайней мере, если математику понимают в обычном смысле).

2. Количественный аспект целых чисел несуществен по сравнению с порядковым аспектом.

3. Количественный аспект недостаточен для дидактики натуральных чисел. [4, с. 110].

По его мнению, «порядковое число играет в происхождении понятия числа первую и важнейшую роль — это следует признать и с точки зрения возрастной психологии, и с точки зрения педагогики, а никак не отрицать эту роль» [4, с. 119]. Г. Фройденталь считает недопустимым догматическое отрицание веками сложившегося опыта изучения натуральных чисел.

А. Н. Колмогоров также отмечал возможность конфликта между требованиями науки и традициями, которая наметилась «потому, что некоторые методисты слишком уверовали в логическую обязательность очерченного Кантором пути, в котором четкое оформление понятия эквивалентности множеств предшествует счету. Мы уже видели, что наука вовсе не требует признания за концепцией, идентифицирующей натуральные числа с конечными мощностями, какого-то исключительного и преимущественного положения» [1, с. 246–247].

При построении теории натуральных чисел в вузах также возникает вопрос, какую модель этой теории принять за первичную. В последнее время все большее число преподавателей склоняется к мнению, что в качестве первичного надо брать порядковый аспект этой теории. Это в большей степени соответствует генезису натуральных чисел, возникших в процессе счета предметов, и, следовательно, стратегии обучения на социокультурном опыте.

При формировании понятия о натуральных числах предпочтительнее основываться на аксиоматическом построении, причем на таком, которое позволяло бы, опираясь на сложившиеся уже у ребенка понятие о величине, сравнительно рано раскрыть понятия не только порядкового, но и количественного числа. Наиболее известное такое аксиоматическое построение натуральных чисел основано на аксиомах, предложенных итальянским математиком Джузеппе Пеано (1858–1932) в конце XIX в. Однако среди аксиом Пеано содержится аксиома индукции, которую, как показывает опыт, школьники способны воспринять не ранее 8–9 класса. Поэтому в основу начального построения натуральных чисел должно быть положено какое-то другое аксиоматическое или описательное определение натуральных чисел.

Конечно, не идет речи о том, чтобы в начальной школе знакомить учащихся с таким определением. Однако младшим школьникам вполне по силам усвоить характеристические свойства системы натуральных чисел, фигурирующие в этом определении:

1) натуральные числа следуют в определенном порядке одно за другим, т. е. множество натуральных чисел можно расположить в цепочку по возрастанию (линейно упорядочить);

2) числа в натуральном ряду не могут повторяться, т. е. каждое число имеет только одно место;

3) ряд натуральных чисел всегда можно продолжить, т. е. за каждым числом есть еще числа;

4) всегда можно выписать все числа, меньшие некоторого данного натурального числа;

5) любая часть натурального ряда (подмножество) содержит наименьшее число. Это последнее свойство в методической литературе часто называют принципом наименьшего числа. Оно, как хорошо известно, эквивалентно условию обрыва убывающих цепочек и условию индуктивности.

В школьном преподавании математики наиболее близкий подход к введению числа как элемента упорядоченного множества (множества величин) осуществлен в программах и учебниках, созданных по системе развивающего обучения Д. Б. Эльконина — В. В. Давыдова. Однако упор в них сделан на формировании понятия числа как особого случая отношения величин, т. е. число в них выступает как универсальное средство сравнения величин. Такой подход опирается на идею А. Лебега, высказанную им еще в начале 30-х гг. XX столетия [2], вводить понятие числа на основе измерения величин. Это предложение А. Лебега было положительно воспринято А. Н. Колмогоровым, однако в предисловии к переводу книги Лебега он отмечал, что «в начальной и средней школах, так же как и в историческом процессе развития человеческих знаний, число выступает в двух основных функциях: натуральное (целое положительное) число — как орудие счета предметов, рациональное и действительное число — как орудие измерения величин». Поскольку натуральное число имеет совсем другую функцию, то вводить его на основе измерения величин вряд ли оправдано.

Поскольку первичным для натурального ряда является отношение порядка, то предпочтительнее было бы строить теорию в другой последовательности: сначала определить отношение порядка, а затем операции сложения и умножения. Такое изложение теории натуральных чисел на основе введения отношения порядка в системе Пеано нашло отражение в книге [3]. Представляется наиболее предпочтительным систему натуральных чисел с самого начала определить, как некоторое упорядоченное множество. Можно дать следующее такое определение.

Определение. Системой натуральных чисел называется линейно упорядоченное множество X, в котором выполняются следующие условия:

i) множество X — бесконечное вполне упорядоченное;

ii) всякое подмножество в X, имеющее максимальный элемент, конечно.

При таком построении системы натуральных чисел операции сложения и умножения определяются обычным образом с помощью индуктивных процедур. Существование и единственность таких операций сложения и умножения вытекают из теоремы о построении по индукции во вполне упорядоченных множествах [3].

Литература

1. *Колмогоров А. Н.* К обсуждению работы по проблеме «Перспективы развития советской школы на ближайшие тридцать лет» // Математика в школе.—1990.—№ 5.—С. 59–61.
2. *Лебег А.* Об измерении величин.—М.: Госучпедизд, 1938.—208 с.
3. *Тестов В. А.* Порядковые структуры в алгебре и теории чисел.—М.: МПГУ, 1997.—110 с.
4. *Фройденталь Г.* Математика как педагогическая задача.—М.: Просвещение.—Ч. 1, 1982.—208 с.; Ч. 2, 1983.—192 с.

О МОДЕЛИРОВАНИИ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК МЕТОДОМ ГРАНИЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

Н. А. Трубаев
(Россия, Москва; МГУПС (МИИТ))

При рассмотрении упругих оболочек часто вводятся гипотезы и упрощения, уравнения теории упругости выполняются приближенно [1–3]. Предлагается формулировка лишенная этого недостатка, используется единственное представление решения уравнений Ламе комбинацией упругих потенциалов простого и двойного слоя для континуального односвязного упругого тела с гладкой границей постоянной ширины. Разрешающее соотношение получено из выражения для континуального тела с гладкой границей постоянной ширины устремлением величины ширины к нулю. Формулировка является применением Метода граничного элемента [4, 5], являющегося обобщением Метода потенциала [6] в механике деформируемого твердого тела.

В предложенной аппроксимации перемещения удовлетворяют уравнениям Ламе со стремящейся к нулю погрешностью при стремлении ширины к нулю, а напряжения и усилия точно соответствуют решению уравнений Ламе, так как являются операторами напряжений и усилий от упругих потенциалов простого и двойного слоя. Следовательно, граничные усилия на поверхности оболочки (или любой ее части) уравновешены. При уменьшении ширины оболочки эти граничные усилия и перемещения стремятся к значениям на срединной поверхности оболочки точно соответствующим решению уравнений Ламе.

Предлагаемый алгоритм моделирования тонкой упругой оболочки позволяет получить эффективную численную схему вычисления напряжений и усилий по заданным перемещениям, что соответствует численному решению уравнения Фредгольма второго рода.

Нахождение перемещений и напряжений по заданным усилиям не требует решения уравнений, так как перемещения от усилий на срединной поверхности оболочки находятся вычислением упругого потенциала простого слоя.

Литература

1. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек.—М.: Наука, 1976.—512 с.
2. *Власов В. З.* Избранные труды. В 3-х томах: Том I.—М.: Изд-во Академии наук СССР, 1962; Том II.—М.: Изд-во Академии наук СССР, 1963; Том III.—М.: Наука, 1964.
3. *Еремеев В. А., Зубов Л. М.* Механика упругих оболочек.—М.: Наука, 2008.—280 с.
4. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости.—М.: Наука, 1981.—688 с.
5. *Угодчиков А. Г., Хуторянский Н. М.* Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела.—Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1986.—295 с.
6. *Сретенский Л. Н.* Теория ньютоновского потенциала.—М.–Л.: Гос. изд-во технико-теоретической лит-ры, 1946.—318 с.

О НЬЮТОНОВСКОМ ПОТЕНЦИАЛЕ, РАВНОМ КОНСТАНТЕ ВНУТРИ ОДНОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ С КУСОЧНО ГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ

Н. А. Трубаев
(Россия, Москва; МГУПС (МИИТ))

Известно существование Ньютоновскго потенциала простого слоя, равного константе внутри односвязной области. Функция плотности этого потенциала играет заметную роль в ряде практических задач. Автор приводит геометрический способ построения этой функции плотности для кусочно гладкой границы в объемном случае и обобщение для логарифмического потенциала в плоском случае.

Последовательность вписанных в рассматриваемую односвязную область шаров, на поверхности которых задан Ньютоновский потенциал задающий одну и ту же константу, позволяет единственным образом строить искомую функцию плотности. Для логарифмического потенциала простого слоя вместо вписанных шаров нужно применять вписанные круги.

Способ может быть использован самостоятельно или как часть модификации Метода потенциала, первоначальная постановка которого сформулирована для гладкой (Ляпуновской) границы.

Получены следующие результаты:

1) Функция плотности φ_0 Ньютоновского потенциала равного константе в односвязной области с кусочно гладкой границей является непрерывной на гладких участках границы.

2) φ_0 имеет особенность вблизи угловой или конической точки, если угол внешний. Вид особенности определяется локальной геометрией. Если локальная геометрия — пересечение двух плоскостей или конус, то особенность вида: $\frac{c}{r}$, где r — расстояние от этой точки, c — константа.

3) φ_0 ограниченная функция вблизи угловой точки, если угол внутренний. При этом предельные значения с двух сторон угла могут различаться.

4) φ_0 ограниченная функция вблизи конической точки, непрерывно зависящая от угла задающего гладкую коническую поверхность в полярной системе координат, если угол внутренний.

Термины «внутренний угол» и «внешний угол» подразумевают телесный угол больше 2π и телесный угол меньше 2π соответственно.

Приведенный способ построения функции плотности Ньютоновского потенциала равного константе в односвязной области с кусочно гладкой границей и его обобщение для логарифмического потенциала в плоском случае, позволяет моделировать струи идеальной несжимаемой жидкости. Рассмотрены задачи: о падении косой струи на плоскость, о затопленной струе, об обтекании угловой стенки с завихренной зоной вблизи вершины угла.

Литература

1. *Сретенский Л. Н.* Теория ньютоновского потенциала.—М.–Л.: Гос. изд-во технико-теоретической лит-ры, 1946.—318 с.
2. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели.—М.: Наука, 1973.—416 с.
3. *Биркгоф Г., Сарантонелло Э.* Струи, следы и каверны.—М.: Мир, 1964.—467 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА РАЗЛИЧНЫХ ЖИДКОСТЕЙ В АНИЗОТРОПНОМ НЕОДНОРОДНОМ СЛОЕ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

Ю. С. Федяев

(Россия, Орел; ОГУ)

Стационарную фильтрацию несжимаемой жидкости в недеформируемом анизотропном неоднородном слое пористой среды описывают обобщенный потенциал φ и функция тока ψ. Они удовлетворяют системе уравнений [1]

$$\begin{aligned} Hv_x &= P_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + P_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \\ Hv_y &= P_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + P_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь x, y — декартовы координаты в плоскости основания слоя, v_x, v_y — проекции скорости фильтрации, H — толщина слоя, $P = (P_{ij})$ — тензор проводимости слоя ($P_{ij} = HK_{ij}$, $i, j = 1, 2$, K_{ij} — компоненты тензора проницаемости).

Подвижная граница Γ_t между различными жидкостями делит область фильтрации на части D_1 и D_2. В области D_1 движется жидкость вязкости μ_1 и плотности ρ_1, а в области D_2 — жидкость вязкости μ_2 и плотности ρ_2. Полагаем, что при движении одна жидкость полностью замещает другую и на границе раздела жидкостей капиллярные силы пренебрежимо малы. Тогда условия непрерывности давления и расхода жидкости имеют вид

$$\begin{gathered} \mu_1\varphi^+(z,t) - \mu_2\varphi^-(z,t) = (\rho_2 - \rho_1)\Pi(z,t), \\ \psi^+(z,t) = \psi^-(z,t), \quad z \in \Gamma_t, \end{gathered} \tag{2}$$

где $z = x + iy$, t — время, $\Pi(z,t)$ — потенциал массовой силы. Символ «$+$» («$-$») здесь и далее означает предельное значение функции при подходе к границе со стороны (с противоположной стороны) орта нормали к ней.

Область фильтрации D может ограничивать сингулярная граница $\sigma_0 = \sigma_{01} \cup \sigma_{02}$. Проводимость слоя P обращается на σ_{01} в бесконечность ($K = \infty$, H — конечна) и в ноль на σ_{02} ($K = 0$ или/и $H = 0$). На этих границах выполняются условия

$$\varphi^+(z,t) = 0, \quad z \in \sigma_{01}, \qquad \psi^+(z,t) = 0, \quad z \in \sigma_{02}. \tag{3}$$

Размеры, форма и положение границы σ_0 определяются зависимостью от координаты точки наблюдения проводимости P.

Если обощенный потенциал $\varphi(z,t)$ не имеет сингулярностей в бесконечности, то для единственности решения должно выполняться условие регулярности

$$\varphi(z,t) = O\big(|z|^{-1}\big), \quad |P(z)\cdot\nabla\varphi(z,t)| = O\big(|z|^{-2}\big), \quad |z| \to \infty. \tag{4}$$

Положение границы Γ_t на плоскости z в любой момент времени $t > 0$ описывается параметрическим уравнением (s — параметр)

$$z = z(t, s) \quad (x = x(t, s),\ y = y(t, s)), \quad z \in \Gamma_t. \tag{5}$$

В начальный момент времени $t = 0$ положение границы раздела жидкостей известно

$$z_0 = z(0, s) \quad (x_0 = x(0, s),\ y_0 = y(0, s)), \quad z \in \Gamma_0. \tag{6}$$

Дифференциальные уравнения движения границы Γ_t имеют вид

$$\begin{gathered} \frac{dx}{dt} = \frac{v_x^+(x, y, t) + v_x^-(x, y, t)}{2}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{v_y^+(x, y, t) + v_y^-(x, y, t)}{2}, \\ (x, y) \in \Gamma_t. \end{gathered} \tag{7}$$

Таким образом, задана область фильтрации D, тензор проводимости слоя $P = HK$, потенциал массовой силы Π, вязкости и плотности жидкостей, начальное положение границы Γ_0. Необходимо найти положение границы Γ_t (5). Решение задачи состоит в интегрировании системы уравнений (1), (7) с учетом условий (2)–(4) и (6).

Поставленная задача сводится к решению системы интегрального уравнения и дифференциальных уравнений движения границы Γ_t. Построен численный алгоритм решения задачи на основе метода дискретных особенностей [2]. Исследована эволюция границы раздела жидкостей к эксплуатационной скважине. Получены зависимости времени достижения границей Γ_t скважины от параметров задачи. Изучено влияние анизотропии грунта, границ области фильтрации, различия физических свойств жидкостей на движение границы раздела жидкостей [3].

Литература

1. *Пивень В. Ф.* Математические модели фильтрации жидкости.—Орел: Изд-во Орлов. гос. ун-та, 2015.—408 с.
2. *Федяев Ю. С.* Математическое моделирование эволюции границы раздела жидкостей различных вязкостей и плотностей в однородном анизотропном слое пористой среды // Учен. записки Орлов. гос. ун-та. Сер. Естеств., техн. и мед. науки.—2011.—№ 3 (41).— С. 90–97.
3. *Федяев Ю. С.* Эволюция границы раздела различных жидкостей в ограниченном анизотропном слое пористой среды // XI Всерос. съезд по фундам. проблемам теорет. и прикл. механики: сб. докл. (Казань, 20–24 августа 2015 г.).— Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2015.—С. 3905–3907.

ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ[1]

А. Е. Чистяков
(Россия, Таганрог; НИИ МВС ЮФУ)

Все методы подразделяются на три группы: асимптотические или лучевые; интегральные, в основе которых лежит принцип Гюйгенса; прямые численные методы. Моделирование волнового поля методом конечных разностей происходит путем решения дифференциальных уравнений движения волн. Расчет волнового поля происходит в наборе близкорасположенных дискретных узлов сетки путем аппроксимации производных конечными разностями и рекурсивного решения полученного дифференциального уравнения.

Целью работы является разработка комплекса программ, предназначенных для описания волновых процессов излучения на основе конечно-разностного метода.

В соответствии с поставленной целью решены следующие задачи: разработана дискретная модель, учитывающая заполненности расчетных ячеек, что гарантировало выполнение основных законов сохранения на дискретном уровне; проведено исследование зависимости погрешности аппроксимации от шага по временной переменной; получены условия устойчивости трехслойной разностной схемы; рассчитаны оптимальные значения весового параметра трехслойной разностной схемы; разработан вариант адаптивного модифицированного попеременно-треугольного итерационного метода вариационного типа, который имеет наилучшую скорость сходимости в классе двухслойных итерационных методов; разработан комплекс программ, предназначенный для моделирования акустических волн.

Требуется найти решение неоднородного волнового уравнения [1, 2]. Дискретная модель была построена при помощи интегро-интерполяционного метода [3], при этом осуществлялся учет заполненности расчетных ячеек [4, 5], что гарантировало выполнение основных законов сохранения на дискретном уровне.

Получены зависимости точности схемы от ее веса и шага по временной переменной. Для модельной начально-краевой задачи, в случае, когда функции правой части и начального условия представимы конечными суммами рядов Фурье по тригонометрическому базису, исследована точность разностных схем. Установлено, что точность численного решения зависит от количества узлов, приходящихся на половину длины волны, соответствующей наиболее высокочастотной гармонике в конечной сумме ряда Фурье, необходимой для описания

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Задания № 2014/174 в рамках базовой части государственного задания Минобрнауки России, а также при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 15-01-08619, № 15-07-08626, № 15-07-08408, № 16-37-00129.

поведения расчетных объектов. Получены зависимости погрешности аппроксимации диффузионных слагаемых разностными схемами второго и четвертого порядков точности от количества узлов.

Полученные сеточные уравнения решены адаптивным модифицированным попеременно-треугольным итерационным методом вариационного типа, который имеет наилучшую скорость сходимости в классе двухслойных итерационных методов [6]. На основе построенных параллельных алгоритмов для адаптивного МПТМ [7] был разработан комплекс программ, предназначенный для моделирования распространения волн в областях, имеющих сложную геометрию.

Литература

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. Учеб. для физ. и мех.-мат. спец. вузов. 4-е изд., испр. и доп.—М.: Наука, 1981.
2. *Сухинов А. И., Зуев В. Н., Семенистый В. В.* Уравнения математической физики.—Таганрог: ТРТУ, 2005.
3. *Самарский А. А.* Теория разностных схем.—М.: Наука, 1989.
4. *Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Шишеня А. В.* Оценка погрешности решения уравнения диффузии на основе схем с весами // Мат. моделирование.—2013.—Т. 25, № 11.—С. 53–64.
5. *Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Фоменко Н. А.* Методика построения разностных схем для задачи диффузии-конвекции-реакции, учитывающих степень заполненности контрольных ячеек // Изв. ЮФУ. Технич. науки. 2013.—№ 4.—С. 87–98.
6. *Самарский А. А. Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений.—М.: Наука, 1978.—588 с.
7. *Сухинов А. И., Чистяков А. Е.* Адаптивный модифицированный попеременно-треугольный итерационный метод для решения сеточных уравнений с несамосопряженным оператором // Мат. моделирование.—2012.—Т. 24, № 1.—С. 3–21.

Секция IV

Информационные и образовательные технологии

WEB-ИНСТРУМЕНТЫ КАК СРЕДСТВО ПОВЫШЕНИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ ВУЗОВ

О. М. Абрамова
(Россия, Арзамас; АФ ННГУ)

В данных условиях особую актуальность приобретает проблема совершенствования системы непрерывного образования, которая отражена в Концепции долгосрочного социально-экономического развития Российской Федерации до 2020 г. Согласно этой концепции ведущими принципами в области подготовки и переподготовки профессиональных кадров должны стать опережающий ее характер и существенное увеличение доли самообразования. При этом сегодня ни у кого не вызывает сомнения тот факт, что повышение квалификации, осуществляемое для большинства педагогов один раз в пять лет, явно уже не достаточно для овладения новыми знаниями, умениями, навыками для эффективного осуществления профессиональной деятельности.

Проведенный анализ научной и методической литературы показывает, что на сегодняшний момент наиболее эффективно процесс самостоятельного и непрерывного повышения квалификации, возможно, реализовать в среде на базе средств Web-инструментов.

Многообразие Web-инструментов позволяет преподавателю осуществлять самообразование с учетом выстраивания индивидуальных траекторий в соответствии с профессиональными потребностями и интересами, адекватную его способностям и возможностям. Можно сказать, что Web-инструменты это своего рода некоторый пазл, состоящий из многообразных модулей, компонуя которой, преподаватель в зависимости от своих целей и возможностей может выстроить собственный курс повышения квалификации.

Рассмотрим основные направления использования Web-инструментов, используемых с целью повышения квалификации работников системы образования. Остановимся на дидактических возможностях сервисов Web 2.0, как одного из средств повышения профессиональной компетентности преподавателя вуза. Под сервисами Web 2.0 будем понимать программные среды, которые используются для совместной организации комфортной сетевой деятельности, позволяющие пользователям не только путешествовать по просторам сети, но и коллективно работать и размещать в сети текстовую и медиа-информацию. Причем эта методика проектирования систем, становится тем лучше, чем больше людей ими пользуются, поскольку Web 2.0 активно развиваются и улучшаются самими пользователями. Особенностью Web 2.0 является принцип привлечения пользователей к наполнению и многократной выверке информационного материала. Однако, сегодня все большую популярность получают Web 3.0, потому что это уже платформа не столько технологическая, сколько социокультурная, которая используется профессионалами для создания интересного, полезного и качественного контента, который по мере наполнения прибегает к закрытию на редактирование неопытными участниками качественных статей, вводит рецензирование статей силами профессиональных редакторов.

Среди сервисов Web 2.0 важное место занимает сервис Wiki. Wiki — веб-сайт, пользователи которого не связаны между собой ни пространством, ни временем, но имеют возможность сообща изменять его структуру и содержимое, используя инструменты, предоставляемые самим сайтом. Эта особенность Wiki является отправным моментом для его использования в педагогических целях для обучения в сотрудничестве. Главная идея обучения в сотрудничестве — учиться вместе.

Основные идеи, реализуемые Wiki-технологией:

• возможность редактирования Wiki-статей множеством авторов, количество которых соизмеримо с количеством пользователей Wiki-ресурсов;

• моментальное появление внесенных изменений;

• возможность сохранения с момента создания всех версий Wiki-статей;

• гипертекстовость, простая и к тому же быстрая генерация гиперссылок между документами, а также поддержка целостности гиперссылок;

• простота языка Wiki-разметки: позволяет быстро и легко размечать в тексте структурные элементы и гиперссылки.

Еще одним из перспективных инструментов повышения квалификации преподавателей является использование так называемых webinar — разновидность веб-конференции, проведение онлайн-встреч или презентаций через Интернет. Во время проведения таких вебинаров каждый участник выходит на связь, находясь у своего компьютера, подключенного к Интернету посредством загружаемого приложения или через веб-приложение. В последнем случае, чтобы присоединиться к конференции нужно просто ввести URL (адрес сайта) в окне браузера.

Еще раз подчеркнем, что на сегодняшний момент использование web-инструментов преподавателями в рамках профессионального самообразования это не столько опциональная возможность, сколько уже повседневная необходимость, которая позволяет сохранить и приумножить показатели конкурентоспособности работника образования в современной экономике знания.

Подводя итоги, хотелось бы отметить, что web-инструменты, безусловно, помогут сделать обучение преподавателей более доступным с экономической точки зрения и позволит упростить процесс повышения компетентности сотрудников вуза. Однако стоит отметить, что предлагаемое автором решение имеет ряд вопросов, требующих доработок и дальнейших исследований.

ПРОЦЕСС ОБУЧЕНИЯ СОСТАВЛЕНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ, НАПРАВЛЕННЫЙ НА РАЗВИТИЕ ПОЗНАВАТЕЛЬНЫХ УМЕНИЙ УЧАЩИХСЯ

Е. Е. Алексеева

(Россия, Москва; АСОУ)

Составление задач в обучении геометрии — одно из средств формирования и развития познавательных умений, входящих в группу метапредметных результатов, сформулированных в ПООП ООО. Для составления задач используется текст задачной ситуации, включающий известные компоненты, наполненные геометрическим содержанием, задачной системы, в которой условие и/или требование неизвестны.

Конструирование текстов задачных ситуаций основано на схемах: ДРОx, xРОТ, ДРxy, ДxОy, xРОy, xРyТ, xyОТ, Дxyz, xРyz, xyОz, xyzТ, где Д — условие; Р — решение; О — обоснование выводов решения; Т — требование; x, y, z — неизвестные компоненты [1], выделенных в соответствии с подходом Ю. М. Колягина к структуре математической задачи [6]. При составлении геометрической задачи и ее проверке решением осуществляется переход от текста задачной ситуации через задачу нестационарной системы, в которой условие и требование известны: ДxОТ, ДРxТ, ДxyТ, к задаче стационарной системы — ДРОТ, содержащей все компоненты известными [1]. При преобразовании текста задачной ситуации используются познавательные действия, релевантные процессу составления задач. Например, анализ предложенного текста задачной ситуации для определения вида известных компонентов и составления схемы; взаимообратный перевод компонентов с одного языка на другой; выведение следствий из известных компонентов; сравнение промежуточных выводов и условий. На основании этих действий строятся дедуктивные умозаключения, выдвигаются гипотезы. В процессе обучения составлению геометрических задач познавательные действия трансформируются в умения [2, 4].

Обучение составлению геометрических задач, направленное на развитие познавательных умений, в соответствии с теорией П. Я. Гальперина становления умственного действия [5] осуществляется поэтапно. Мотивационно-подготовительный этап направлен на осознание учащимися цели обучения составлению задач. На этом этапе при выполнении определенных учебных задач учащимися «открываются» новые знания, приобретаются умения, необходимые для составления задач. Например, вводятся понятия корректной задачи, метрической определенности фигур на плоскости; формируются умения построения дедуктивных умозаключений, выведения следствий из известных компонентов, обобщения процесса работы и др. На операционно-познавательном этапе происходит открытие приемов составления задач, формируются и развиваются познавательные умения в единстве с умениями составления задач. На коррекционно-контролирующем — осуществляется контроль сформированных познавательных умений при составлении геометрических задач. Обучение составлению задач, направленное на формирование и развитие познавательных умений учащихся 7–9 классов осуществляется на уроках основного курса геометрии или в рамках специально разработанного учебного модуля [3].

Включение составления задач в обучение геометрии позволяет организовать базовое и углубленное изучение учебного предмета на основной ступени общего образования в соответствии с ПООП ООО и предоставить возможность каждому учащемуся достижения личностных, метапредметных и предметных результатов по способностям и потребностям при реализации Концепции развития математического образования в России.

Литература

1. *Алексеева Е. Е.* Компоненты задачной системы как основа задачного текста при составлении геометрических задач // Актуальные проблемы обучения математике и информатике в школе и вузе: материалы II междунар. конф., 2–4 октября 2014 г.—М.: ФГБОУ ВПО МПГУ, 2014.—С. 11–16.
2. *Алексеева Е. Е.* Составление задач учащимися, как средство достижения предметных и метапредметных результатов при обучении геометрии // Наука и школа.—2013.—№ 5.—С. 103–107.
3. *Алексеева Е. Е.* Учебный модуль к основному курсу геометрии 7-го класса «Составление и решение геометрических задач»: учебно-методическое пособие.—М.: АСОУ, 2015.—180 с.
4. *Боженкова Л. И.* Методика формирования универсальных учебных действий при обучении геометрии.—М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013.—205 с.
5. *Гальперин П. Я.* Организация умственной деятельности и эффективность учения // Возрастная педагогическая психология.—Пермь, 1971.—С. 2–59.
6. *Колягин Ю. М.* Задачи в обучении математики. Математические задачи как средство обучения и развития учащихся: часть 1.—М.: Просвещение, 1977.—112 с.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ КРАТКОСРОЧНЫХ ПРОГНОЗОВ

С. Э. Андиева

(Россия, Владикавказ; Финансовый университет)

Работа посвящена вопросу использования информационных технологий для подготовки краткосрочных прогнозов на примере исследования изменения со временем показателя численности населения Республики Северная Осетия-Алания.

Республика Северная Осетия-Алания является одним из самых густонаселенных субъектов Российской Федерации. По предварительным данным Росстата численность постоянного населения республики на 1 января 2016 г. составила 703 745 человек. Среднее за 2015 г. значение численности населения составило 704 507 человек.

В работе представлены результаты краткосрочного прогноза среднего значения численности населения Республики Северная Осетия-Алания на 2016 г., которые были получены с использованием различных методов [1–4].

Ранее были получены результаты прогнозирования среднего на 2015 г. показателя численности населения республики с использованием метода экспоненциального сглаживания и метода средних. Результаты подробно представлены в работах [2–4]. Для прогнозирования среднего на 2016 г. показателя численности населения республики также использовались метод средних и метод экспоненциального сглаживания, а также метод Холта. Данные показателя численности населения РСО-Алания были взяты за период с 2000 по 2015 гг. на официальном сайте Федеральной службы государственной статистики (`www.gks.ru`).

Расчеты осуществлялись с использованием пакета Microsoft Office Excel 2010. По результатам расчетов с использованием трех методов получены три кривые, описывающие изменение среднего значения численности населения республики.

Результаты прогнозирования численности населения РСО-Алания на 2016 г., полученные с использованием метода экспоненциального сглаживания при значении коэффициента сглаживания 0.9, метода средних на основе среднего арифметического, найденного по трем значениям, метода Холта при коэффициентах $A = 0.1$ и $B = 0.9$ [2, 4], количественно практически совпадают. Но в целом прогнозы, полученные с использованием метода экспоненциального сглаживания и метода Холта при указанных выше параметрах, лучше описывают динамику фактических показателей в период с 2001 по 2015 гг.

Таким образом, можно сделать выводы о том, что для прогнозирования данного конкретного показателя (численности населения РСО-Алания) лучше использовать метод экспоненциального сглаживания при коэффициенте сглаживания 0.9 или метод Холта при параметрах $A = 0.1$ и $B = 0.9$. Можно предположить, что прогноз среднего значения численности населения на 2016 г., полученный с использованием этих методов при указанных значениях коэффициентов и параметров (по методу экспоненциального сглаживания получено значение 703 999, по методу Холта — 704 100), более предпочтителен и будет лучше соответствовать фактическому показателю по сравнению с прогнозами, полученными при других значениях коэффициентов и параметров.

Литература

1. *Льюис К. Д.* Методы прогнозирования экономических показателей.—М.: Финансы и статистика, 1986.—133 с.
2. *Андиева С. Э., Орлова Н. С.* Прогнозирование численности населения Республики Северная Осетия-Алания с использованием различных методов // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук.—2015.—№ 11 (82), Часть VII—С. 132–135.
3. *Андиева С. Э., Орлова Н. С.* Прогнозирование численности населения Республики Северная Осетия-Алания // Материалы VI Междунар. научно-практической конф. «Молодые ученые в решении актуальных проблем науки» (19 июня 2015 г., Владикавказ).—Владикавказ: ИПЦ «ЛИТЕРА» ИП Цопанова А. Ю., 2015.—С. 250–252.
4. *Дзебоева Л.В., Андиева С. Э., Орлова Н. С.* Использование метода средних для краткосрочного прогноза численности населения Республики Северная Осетия-Алания // Материалы VI Междунар. науч. студенческого конгресса на тему: «Гражданское общество России: становление и пути развития» Часть 1 (24 апреля 2015 г., Владикавказ).—Владикавказ: Изд-во ООО НПКП «МАВР», 2015.—С. 89–91.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XIII Междунар. науч. конф. (пос. Дивноморское, 7–14 сентября 2016 г.)

ИНТЕРАКТИВНЫЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ В ИНФОРМАЦИОННО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СРЕДЕ ВУЗА

М. С. Артюхина

(Россия, Арзамас; АФ ННГУ)

Интерактивное обучение представляет собой специальную форму организации познавательной деятельности, через активное диалоговое взаимодействие всех субъектов образовательного процесса между собой и информационно-образовательной средой. Интерактивное обучение направлено на развитие личности обучающегося, которое проявляется, в том числе выраженностью коммуникативного, самостоятельного, исследовательского и творческого видов деятельности.

Интерактивные модели обучения в значительной степени отличаются от традиционных. Активность обучающего уступает место активности обучающихся, его задачей становится создание условий для их активности и инициативы. Педагог должен побуждать обучающихся к самостоятельному поиску знаний, где опыт обучающихся является ключевым. Обучающимся, опираясь на свои имеющиеся знания и опыт, необходимо влиться в процесс познания и постоянно рефлексировать по поводу того, что они знаю, умеют и думают. Все обучающиеся должны быть вовлечены в учебный процесс, их совместная деятельность в процессе усвоения учебного материала представлена как обмен знаниями, идеями и способами деятельности. Каждый обучающийся на основе своего опыта вносит свой индивидуальный вклад в процессе познания. Роль педагога создать благоприятную, доброжелательную атмосферу, помочь выстроить отношения взаимной поддержки и сотрудничества. Он наравне с другими членами учебного процесса, является помощником в работе и источником знаний. Здесь на первый план выходит не отдельный обучающийся, а группа взаимодействующих обучающихся, которые активизируют друг друга. Пассивное потребление и заучивание учебной информации обучающимися меняется на производство знаний, творческое осмысление полученной информации и применение новых знаний в реальных практических ситуациях. Деятельность обучающихся, на разных стадиях интерактивного обучения, имеет либо репродуктивный или поисковый характер, либо творческий. Основными принципами интерактивного обучения являются: диалогическое взаимодействие; работа в малых группах на основе кооперации и сотрудничества; активно-ролевая (игровая) деятельность; тренинговая организация обучения. Такие условия позволяют не только получать и закреплять новые знания, но и развивать познавательную деятельность, повышать мотивацию и интерес, переводить их на более высокие формы взаимодействия.

Рассматривая аспекты интерактивных форм обучения, следует отметить, что понятие формы можно рассматривать, как характер коммуникативного взаимодействия между субъектами учебного процесса (индивидуальные, парные, групповые, фронтальные), так и вид занятия, т. е. формы организации обучения. Интерактивные формы строятся на психологических механизмах усиления влияния на процесс освоения каждым участником опыта взаимодействия и взаимообучения. Они определяется задачами по развитию личности и профессиональными умениями. Планирование учебной деятельности осуществляется совместно с обучающимися. Учебная деятельность студентов ориентирована на поиск новых знаний на основе опыта. Оценка деятельности осуществляется совместно с обучающимися, где определяющим является самооценка и взаимоконтроль. Интерактивные формы предполагают комбинирование коллективного, группового, парного, малыми группами и индивидуального способа обучения. Постоянное сочетание в практике обучения познавательной и эмоциональной сфер, ситуация диалога и открытия нового знания. На занятиях преимущественно субъект-субъектные отношения (студент–преподаватель–студент).

Интеграция интерактивных технологий и методов обучения математике предполагает комплексное внедрение контекстного обучения, e-learning обучения, методов наглядного моделирования и интерактивных форм обучения.

Организация учебных занятий предполагает применение, интерактивных форм и методов обучения математике, например:

• проблемные лекции с преобладанием наглядных моделей;

• образовательные Web-квесты на базе облачных технологий;

• исследовательские задания на основе методов case-stady с применением сетевых ресурсов;

• компьютерные учебно-деловые игры по математике;

• электронное портфолио учебных достижений.

Проведенная экспериментальная работа показала что, интеграция интерактивных технологий и методов и разработанное методическое сопровождение в процессе обучения математике на гуманитарных направлениях подготовки, повышает качество математического образования и способствует личностному росту обучающихся. Что нашло подтверждение, в увеличении показателей сформированности математической компетентности и информационной грамотности, повышения мотивации и интереса к изучению математике, а так же повышения коммуникативных способностей и творческого потенциала обучающихся.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XIII Междунар. науч. конф. (пос. Дивноморское, 7–14 сентября 2016 г.)

КОНСТРУИРОВАНИЕ СОДЕРЖАНИЯ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА ПРЕДМЕТОВ ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО ЦИКЛА С ПРИМЕНЕНИЕМ СОВРЕМЕННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

О. И. Артюхин
(Россия, Арзамас; АФ ННГУ)

Внедрение информационных технологий в учебный процесс должно быть методически оправданно, а не носить механический характер. Практика показывает, что зачастую использование современных информационных технологий в обучении затрудняет учебный процесс. Поэтому следует уделить значительное внимание отбору содержания учебного материала, где наиболее целесообразно применение той или иной технологии.

В педагогической науке на сегодняшний момент нет однозначного как качественного, так и количественного состава критериев отбора содержания. Преобладает точка зрения, согласно которой критерии отбора содержания учебной дисциплины основываются на дидактических и методических принципах. Поскольку методическая система обучения любой дисциплины представляет собой совокупность пяти иерархически взаимосвязанных компонентов: целей, содержания,методов, средств и организационных форм обучения, уточним особенности методической системы обучения в контексте использования современных информационных технологий. Здесь содержание обучения зависит от дидактических возможностей средств обучения и определяет методы и формы проведения занятий. Так, в зависимости от имеющихся в учебном учреждении средств информационных технологий, педагог может варьировать содержание (обычно в сторону расширения и углубления) в рамках, определяемых образовательным стандартом.

Таким образом, методическая система обучения с использованием средств информационных технологий, ориентированная на максимальное использование их дидактических возможностей, видоизменится в области методического обеспечения.

Практика показывает, что при планировании учебного процесса дидактические возможности современных средств информационных технологий либо учитываются неполно, либо совсем не учитываются. Именно учет дидактических возможностей и полная их реализация при планировании учебного процесса являются скрытым резервом повышения качества и эффективности учебного процесса. Выделим основные этапы отбора содержания обучения, где планируется использовать новое средство информационных технологий (это может быть программный продукт, техническое устройство, электронный образовательный ресурс). Для этого на первом этапе проводится анализ содержания учебного предмета, например «Основы математической обработки информации» для бакалавриата направления «Педагогическое образование», где планируется применение новой информационной технологии и ее дидактических возможностей.

Здесь определяется перечень тем, где эти технологии целесообразно использовать и ожидается педагогический эффект. На основании этого анализа разрабатываются методические материалы по выделенным темам. Затем осуществляется апробация в реальной практике обучения с использованием методических материалов, в ходе которой становится понятно, правильно ли были выбраны темы, при изучении которых применялась новая технология, следует ли дополнить список тем, исключить какие-то темы из списка, какие темы раскрыты не полностью в школьном курсе и где новая технология позволит расширить и углубить содержание курса без существенного увеличения учебного времени,где имеются иные скрытые резервы повышения качества и эффективности обучения. Данный процесс носит итерационный характер и является сходящимся. После нескольких итераций должно сформироваться рациональное содержание обучения с применением информационных технологий, учитывающее дидактические возможности этих технологий и ориентированное на их эффективное применение.

Отбор содержания материала дисциплин, где активно внедряются и применяются современные информационные технологии, осуществляется на основе следующих концептуальных положений.

1. Формирование навыки работы с новой технологией должен осуществляться в курсах информатики, например «Информационные технологии».

2. Необходимо осуществление комплекса организационно-методических мер, направленных на апробацию, доработку и внедрение нового комплекса методического обеспечения обучения информатике, математике, физике и ряду дисциплин естественнонаучного профиля с использованием современных информационных технологий; повышение квалификации учителей в области методики применения современных информационных технологий в конкретных школьных учебных предметах; освещение опыта в периодической педагогической печати.

Согласно представленным концептуальным положениям применения современных средств информационных технологий, обучение работе с новым средством информационных технологий должно осуществляться в курсе информатики и носить опережающий характер по отношению к содержанию других учебных предметов(математики, физики, а также и самой информатики). В этом случае отбор содержания обучения с использованием новой технологии должен охватывать два направления: обучение работе с самой технологией и применение этой технологии в обучении соответствующей дисциплине.

ОСОБЕННОСТИ СИНЕРГИИ АЛГОРИТМОВ И ИССЛЕДОВАНИЯ МНОЖЕСТВ ЖЮЛИА ПОЛИНОМОВ ЧЕБЫШЕВА

Бабенко А. С. (Россия, Кострома; КГУ им. Н. А. Некрасова),
Елкин Д. В. (Россия, Кострома; КГУ им. Н. А. Некрасова),
Пигузов А. А. (Россия, Кострома; КГУ им. Н. А. Некрасова),
Секованов В. С. (Россия, Кострома; КГУ им. Н. А. Некрасова),
Смирнов Е. И. (Россия, Ярославль; ЯГПУ)

Особый интерес в исследовании фракталов на комплексной плоскости исторически вызывают фрактальные множества Жюлиа и множества Мандельброта с использованием компьютерных технологий. При этом визуально наблюдается эффект самоорганизации сложного объекта при исследовании итераций функции $w = z^2 + c$ в комплексной плоскости (см. [1]). Результатом данной работы является выявление множеств Жюлиа при исследовании многочленов Чебышева, которые иногда совпадают с отрезком и построение данных множеств с помощью информационных и коммуникационных технологий (ИКТ). В различных учебных пособиях и монографиях, связанных с фрактальной геометрией, часто указывается, что множества Жюлиа являются фракталами. Однако данный тезис не всегда имеет место, что подтверждают результаты данной статьи, где построен универсальный алгоритм выявления гладких множеств Жюлиа (отрезков) от многочленов (подобных многочленам Чебышева на отрезке $[-1; 1]$) и в качестве примера показано, что множество Жюлиа для многочлена Чебышева пятой степени $f(z) = z^5 - 5z^3 + 5z$ есть отрезок $[-2; 2]$. Такой подход дает возможность бакалаврам, магистрам и аспирантам глубже проникнуть в тайны фрактальной геометрии, находящей приложения в различных разделах науки. Многочлены Чебышева определяются с помощью рекуррентных соотношений $P_0(z) = 2$, $P_1(z) = z$, $P_2(z) = z^2 - 2, \ldots, P_{n+1}(z) = zP_n(z) - P_{n-1}(z)$. Замечаем, что $P_3(z) = z(z^2 - 2) - z = z^3 - 3z$, $P_4(z) = z(z^3 - 3z) - (z^2 - 2) = z^4 - 4z^2 + 2$, $P_5(z) = z(z^4 - 4z^2 + 2) - (z^3 - 3z) = z^5 - 5z^3 + 5z$. В данной работе мы исследуем орбиты точек комплексных полиномов Чебышева, с помощью которых определяются множества Жюлиа; орбита точки непосредственно связана с итерационными процессами. Мы должны иметь в виду, что при операции итерирования функции множество ее значений становится областью определения функции - являющейся второй итерацией. Поэтому необходимо выполнение включения: $E(f(z)) \subseteq D(f^{(2)}(z))$. Опишем функцию построения полинома Чебышева (возможно любой степени) и покажем, что множеством Жюлиа функции $f(z) = z^5 - 5z^3 + 5z$ будет отрезок $[-2; 2]$. Схема доказательства: рассмотрим отображение $h(w) = w + \frac{1}{w}$. Заметим, что $z = h(w)$ отображает единичную окружность S радиуса l с центром в начале координат (|w|=1) на отрезок $[-2; 2]$. Таким образом, $f(h(w)) = h(w^5)$. Далее рассмотрим орбиту точки $z = h(w)$. Имеем $f^{(2)}(h(w)) = f(f(h(w))) = f(h(w^5)) = h(w^{5^2})$. Аналогично продолжая данный процесс, получим $f^{(n)}(h(w)) = f(f^{(n-1)}(h(w))) = w^{5^n} + \frac{1}{w^{5^n}}$ и т. д. Поэтому, если $z \notin [-2;2]$, то

$$\lim_{n\to\infty}(f^{(n)}(h(w))) = \lim_{n\to\infty}\left[w^{5^n} + \frac{1}{w^{5^n}}\right].$$

Поскольку $f([-2;2]) \subset [-2;2]$ то для каждого $z \notin [-2;2]$ орбита точки $z = h(w)$ ограничена. Таким образом $j(f) = \partial(z \in \mathbb{C} : f^{(n)}(z) \to \infty, n \to \infty) = [-2;2]$. Т. е. множеством Жюлиа для функции $f(z) = z^5 - 5z^3 + 5z$ является отрезок $[-2;2]$. Заметим, что множество Жюлиа $j(f) = \partial(z \in \mathbb{C} : f^{(n)}(z) \to \infty, n \to \infty) = [-2;2]$ не является фракталом и заполняющим множеством Жюлиа функции $f(z) = z^5 - 5z^3 + 5z$ также будет отрезок $[-2;2]$. Алгоритм построения множеств Жюлиа многочленов Чебышева следующий: пусть мы имеем $f(z)$ — полином Чебышева; находим его n-ю итерацию $f^{(n)}(z)$ (обычно достаточно взять $n = 20$); на комплексной плоскости (ее имитирует монитор компьютера) точка z отмечается черным цветом, если ее орбита $z \to z_1 \to z_2 \to \ldots \to z_n \to \ldots$ ограничена (для ограниченности орбиты достаточно, чтобы было $|z| \leqslant 4$) в противном случае данная точка пропускается и исследуется следующая точка комплексной плоскости). Данный процесс закончится тогда, когда будет исследована орбита каждой точки видимой части экрана компьютера. В результате множество Жюлиа закрасится в черный цвет и будет отрезком $[-2;2]$. В заключение отметим, что разработанная методика изучения множеств Жюлиа от полиномов Чебышева дает возможность обучаемым познать интеграцию математических методов с информационными и коммуникационными технологиями, что позитивно влияет на их мотивацию к изучению математики и информатики, развивает креативность и исследовательские компетенции.

Литература

1. *Морозов А. Д.* Введение в теорию фракталов.—М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.—162 с.
2. *Кроновер Р. М.* Фракталы и хаос в динамических системах / Пер. с англ. Под ред. Т. Э. Крэнкеля.—М.: ПостМаркет, 2000.—352 с.
3. *Божокин С. В., Паршин Д. А.* Фракталы и мультифракталы.—Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.—128 с.
4. *Шредер М.* Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая.—Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.—528 с.
5. *Гринченко В. Т., Мацыпура В. Т., Снарский А. А.* Введение в нелинейную динамику: Хаос и фракталы.—М.: Изд-во ЛКИ, 2007.—264 с.
6. *Смирнов Е. И., Соловьев А. Ф., Буракова Г. Ю.* Дидактический модуль по математическому анализу: теория и практика: Учеб. пособие.—Ярославль.: Изд-во ЯГПУ, 2002.—181 с.
7. *Секованов В. С.* Элементы теории фрактальных множеств: Учеб. пособие. 5-е изд.—М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013.—241 с.
8. *Секованов В. С.* О множествах Жюлиа некоторых рациональных функций // Вестн. Костромского гос. ун-та им. Н. А. Некрасова.—2012.—Т. 18, № 2.—С. 23–28.
9. *Бабенко А. С., Секованов В. С.* Развитие креативных качеств студентов при изучении метода итераций // Математика в образовании. Сб. статей. / Под ред. И. С. Емельяновой.—Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2008.—Вып. 4.—С. 52–54.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XIII Междунар. науч. конф. (пос. Дивноморское, 7–14 сентября 2016 г.)

АССОЦИАТИВНЫЕ СВЯЗИ В ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ

Е. А. Благовещенская
(Россия, Санкт-Петербург; ПГУПС)

Одной из значимых черт хорошего образования является ощущение его целостности. Имеется в виду наличие ассоциативных связей между различными областями знаний. Формирование личности успешного студента происходит на первом и втором курсах университета, как раз в период преподавания общего курса математики как основы последующих специальных курсов. Важно не упустить это время наибольшей заинтересованности молодых людей в самосовершенствовании касательно выбранной профессии и личностной состоятельности, ведь именно с этой целью они только недавно проходили процедуру поступления в ВУЗ. На этом этапе вчерашние школьники владеют основами различных дисциплин в объеме средней школы, а часть из них также обучалась в музыкальной школе, художественной школе, в домах детского творчества и других учреждениях дополнительного образования. Они подготовлены к восприятию различных форм, в которых представлены достижения человеческого разума, как единого целого.

Особый случай присутствия общих черт в совершенно, на первый взгляд, различных сферах деятельности человека, дает сочетание музыки и математики, рассматриваемое как неотъемлемая часть творчества отдельно взятой личности, так и комбинация дисциплин, допускающих преподавание во взаимосвязи. К сожалению, в технических университетах музыка не входит в число преподаваемых предметов. Зато она незримо присутствует в жизни каждого человека, даже не имеющего музыкального образования, и большинство испытывает радость при прослушивании гармоничных, нравящихся музыкальных произведений. Что касается предмета математики, то он, зачастую, приносит огорчения слушателям ввиду сложности и необходимости глубокого проникновения в суть, чтобы научиться применять знания при решении практических задач. Уместно вспомнить слова Альберта Эйнштейна о том, что настоящая наука и настоящая музыка требуют однородного мыслительного процесса. Так не попробовать ли привнести в преподавание математики элемент эмоциональности, которая бесспорно присуща музыкальным произведениям, но редко раскрывается в математических выкладках неподготовленному глазу? Хотя многие профессиональные математики рассматривают построение математической теории как драматический и крайне захватывающий процесс. С другой стороны, наличие структурных связей в теории музыки, легко объяснимых с позиции алгебры, составляет основу гармонии в ней.

Представляется полезным посвятить некоторое дополнительное время в программе обучения студентов обсуждению многочисленных глубоких связей музыки и математики на специальных лекциях или семинарах, желательно, с прослушиванием музыкальных фрагментов в качестве иллюстрации. Существуют и другие взаимосвязи науки и искусства, которые заслуживают выявления и последующего использования художественных образов и выразительных средств искусства в качестве инструмента наглядности для представления определенных объектов изучения точных наук. Такой подход, как показывает опыт, способствует получению творческой радости в процессе познания и формированию гармонично развитой личности обучающегося, что является важным фактором адаптации будущего специалиста в современных условиях.

Литература

1. *Blagoveshchenskaya E. A* Some Links between Music and Mathematics — Algebraic Aspects / Ed. Meuser Michael.—2004.—(Papers of the Essen Collegium of Gender Studies; Vol. 2).

РЕАЛИЗАЦИЯ СТУДЕНТАМИ ВУЗОВ ДИНАМИЧЕСКИХ РАСЧЕТНЫХ ПРОЕКТОВ В РАМКАХ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ[1]

В. В. Богун

(Россия, Ярославль; ЯГПУ)

По состоянию на настоящее время различные виды информационно-коммуникационных технологий широко применяются в высших учебных заведениях при реализации процесса обучения студентов дисциплинам естественнонаучного цикла. Использование подобных инноваций положительным образом приводит к повышению интереса и мотивации учащихся к образовательной деятельности, формированию теоретического и практического мышления обучаемых, результатом чего является успешное решения учебных, прикладных, профессионально-ориентированных и научно-исследовательских задач [1–3].

Наиболее популярными являются дистанционные учебные технологии, которые позволяют обеспечить доступ к образовательным ресурсам каждому студенту в независимости от его пространственного и временного положения, при этом значительно повышается качество получаемых учащимися теоретических знаний, практических умений и навыков.

При изучении дисциплин естественнонаучного цикла для проведения промежуточного и итогового контроля знаний, умений и навыков обучающихся целесообразно применять динамические расчетные проекты и тестовые задания с формированием соответственно большого или маленького количества значений исходных данных и необходимых для указания обучаемым значений результатов вычислений. К сожалению, имеющиеся в настоящее время системы дистанционного обучения не могут обеспечить выполнение подобных заданий.

Разработанная В. В. Богуном дистанционная система динамических расчетных проектов позволяет организовать дистанционную самостоятельную работу студентов с точки зрения реализации расчетных проектов, суть которых состоит в автоматической генерации обучаемыми значений исходных данных, выполнении студентами необходимых расчетных алгоритмов, указании учащимися значений результатов с возможностью их многократной проверки информационной системой и редактирования, а также возможностями полноценного автоматизированного мониторинга выполняемых студентами расчетных проектов преподавателем и учащимися [3–5].

В настоящее время данная информационная система успешно применяется автором при обучении студентов по дисциплинам «Математика» и «Высшая математика» по различным направлениям бакалавриата, при этом студенты выполняют следующие динамические расчетные проекты: «Арифметические операции над матрицами», «Решение систем линейных алгебраических уравнений»,

[1]Работа выполнена в рамках гранта РНФ «Синергия математического образования в школе и вузе на основе адаптации современных достижений в науке».

«Нахождение параметров треугольника на плоскости методами аналитической геометрии», «Нахождение пределов числовых последовательностей», «Решение алгебраических и трансцендентных уравнений», «Приближенные вычисления значений определенных интегралов», «Приближенные решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка».

Литература

1. *Богун В. В., Смирнов Е. И., Кузнецов А. А.* Проблемы и перспективы реализации единой среды дистанционного обучения студентов педагогических вузов // Информатика и образование.—2010.—№ 7.—С. 74–82.
2. *Смирнов Е. И., Соловьев А. Ф., Буракова Г. Ю.* Дидактический модуль по математическому анализу: теория и практика.—Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2002.—181 с.
3. *Богун В. В.* Применение дистанционных учебных проектов при обучении математике // Высшее образование в России.—2013.—№ 5.—С. 114–119.
4. *Богун В. В.* Информационные особенности динамической системы мониторинга дистанционных расчетных проектов // Ярослав. пед. вестн.—2011.—№ 1.—С. 185—193.
5. *Богун В. В.* Дистанционные динамические расчетные проекты по исследованию функций вещественного переменного.—Ярославль: Изд-во «Канцлер», 2014.—84 с.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XIII Междунар. науч. конф. (пос. Дивноморское, 7–14 сентября 2016 г.)

АНАЗИЗ СОДЕРЖАНИЯ УЧЕБНИКОВ МАТЕМАТИКИ ПО ИЗУЧЕНИЮ ЭЛЕМЕНТОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

Н. В. Василишина

(Россия, Краснодар; ИРО Краснодарского края)

Моделирование существует также давно, как и мышление, и также давно сопровождает процессы учения. Но как метод обучения моделирование стало осознаваться сравнительно недавно, научное понятие модели и моделирования еще недостаточно проникло в методику преподавания математики в школе. Пока еще не уяснены некоторые методологические положения, имеются расхождения в трактовке и понимании ряда философских вопросов, что, в свою очередь, задерживает проникновение метода моделирования в школу.

Итак, в одном случае при объяснении учебного материала наглядна одна модель, в другом — другая. Но в каждой модели уже заложены возможности построения другой модели на ее основе. Тогда объяснение может быть представлено, и чаще всего так и бывает, цепочкой моделей, где все модели объединены главным изоморфным отношением.

В настоящее время построение, исследование и приложение математических моделей является, можно сказать, основным предметом деятельности математиков.

Поэтому и в школьном курсе математики, прежде всего при решении учебных математических задач (УМЗ), моделированию, особенно алгебраическому и аналитическому, следует уделить должное внимание. Действительно, математические модели используются для решения (или хотя бы облегчения решения) УМЗ. Кроме того, составление математической модели задачи, перевод задачи на язык математики исподволь готовит учащихся к моделированию реальных процессов и явлений в их будущей деятельности.

При решении учебных математических текстовых задач особенно часто используются их алгебраические и аналитические модели. Такой моделью может быть функция, описывающая явление или процесс, уравнение, система уравнений, неравенство, система неравенств, система уравнений и неравенств и др. При составлении модели задача, таким образом, переводится на язык алгебры или анализа.

Можно условно выделить следующие дидактические функции математического моделирования:

- познавательная функция;
- функция управления деятельностью учащихся;
- интерпретационная функция.

Использование различных функций математической модели способствует наиболее плодотворному мышлению учащегося, так как его внимание легко и своевременно переключается с модели на полученную с ее помощью информацию об объекте и обратно. Такое переключение сводит к минимуму отвлечение умственных усилий учащихся от предмета их деятельности [1, 2].

Проанализируем учебники М. Я. Пратусевича [1] и Ш. А. Алимова [2] с точки зрения применения метода математического моделирования в различных задачах.

Проведем логико-математический анализ темы «Логарифмические уравнения» в различных школьных учебниках. С этой целью выясним:

• какие новые понятия рассматриваются, даются ли им определения;

• какие новые утверждения изучаются, что они отражают, каковы основные идеи доказательств;

• какие новые виды задач и примеров рассматриваются в объяснительном тексте, каково их назначение, приводятся ли алгоритмы их решения;

• какие задачи приводятся в задачном материале пункта.

В рассматриваемых учебниках исследуемой теме отводится разное место.

Литература

1. *Пратусевич М. Я., Столбов К. М., Головин А. Н.* Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб.для общеобразоват. организаций: углубл. уровень.—М.: Просвещение, 2014.—415 с.
2. *Алимов Ш. А., Колягин Ю. М., Ткачева М. В.* Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы: учеб.для общеобразоват. организаций: базов. и углубл. уровни.—М.: Просвещение, 2015.—463 с.

КОНВЕРГЕНЦИЯ В ЕСТЕСТВЕННО-НАУЧНОМ ШКОЛЬНОМ ОБРАЗОВАНИИ

П. В. Великоруссов
(Россия, Санкт-Петербург; СПбГУ)

В Санкт-Петербургском государственном университете на базе Академической гимназии предлагается инициативный проект по созданию новой образовательной программы для одаренных школьников 8–11 класса, основанный на междисциплинарном и проективно-технологическом подходе к обучению.

До настоящего времени школьник, поступая в 9-е или 10-е классы, мог выбрать лишь специализированные профили, такие как физико-математический, химико-биологический, математико-кибернетический. Однако, современному обществу уже нужны специалисты широкого профиля, большего кругозора, способные видеть техническую задачу в целом и с разных точек зрения. Ведь самые удивительные и прорывные открытия последних лет происходят на стыке разных наук — физики и медицины, информатики и биологии. Чтобы успешно проводить сложные междисциплинарные исследования, нужны специалисты нового типа, специалисты с фундаментальным (классическим) физико-математическим образованием, а также с углубленным пониманием биологических процессов, законов химии, с умением компьютерного моделирования и навыками выполнения экспериментальных задач и владением, как методиками различных измерений, так и технической грамотностью.

За два года обучения старшеклассников невозможно в полной мере и глубоко охватить такой объем нового материала. Создаваемый класс конвергенции и наукоемких технологий предусматривает набор в 8-й класс, последующее непрерывное образование до окончания школы и логическое продолжение образования в СПбГУ.

Важно организовать горизонтальные связи по всем предметам естественно-научного цикла. Необходимо добиться стирания стереотипа границ между разными школьными предметами. Если ученик входит в класс географии, это не значит, что все остальные предметы не имеют к географии никакого отношения. Этого можно достичь модульностью программ обучения и подстройкой схожих тем уроков. Например, если по географии ученики проходят тему муссонов и пассатов, то по физике в этот момент рассказывают про силу Кориолиса; если по химии проходят строение атомов, то по физике дают реакции альфа, бета и гамма распада. Тем самым и достигается конвергенция предметов.

В результате введения такой экспериментальной модели в Академической гимназии будет положено начало формирования новой образовательно-промышленной модели (кластера): школа–вуз–работодатель, в рамках которого можно создавать элитные кадры для науки и наукоемких предприятий; повышать качество профессионального образования; сформировать положительное общественное мнение о престижности профессии ученого и т. д.

Основные предметы для изучения: математика, физика, биология, химия, интегрированные с информатикой и программированием, иностранный язык. Также предметы, решающие задачу поддержки и расширения профильной специализации: робототехника и конструирование, программирование в различных средах, проектная и исследовательская деятельность. Предполагается вовлечение в учебно-воспитательный процесс передовых научно-производственных комплексов, потенциал СПбГУ, научных организаций и институтов России, а также представителей реальных наукоемких и высокотехнологичных компаний от начинающих стартапов до государственных корпораций.

ОБ АСПЕКТАХ ПРОФЕССИОНАЛЬНО-ОРИЕНТИРОВАННОГО ОБУЧЕНИЯ СТУДЕНТОВ ПО НАПРАВЛЕНИЮ «БИЗНЕС-ИНФОРМАТИКА»

М. В. Волик

(Россия, Владикавказ; Финансовый университет)

В современном мире высшее профессиональное образование нацелено на подготовку высококвалифицированных специалистов, способных к профессиональной мобильности в условиях информатизации общества. Российское образование призвано обеспечить повышение конкурентоспособности современного специалиста на рынке труда и свободное владение своей профессией на уровне международных стандартов [1, 2].

В связи с этим наиболее продуктивными и перспективными являются профессионально-ориентированные образовательные технологии, которые позволяют организовывать учебный процесс с учетом профессиональной специализации, а также с ориентацией на личность обучающегося, его интересы, склонности и способности, стремление к самоактуализации и самореализации [3].

Для успешной реализации профессионально-ориентированного обучения современный преподаватель должен быть готов как к творческому использованию наиболее продуктивных образовательных технологий [4–7], так и к обеспечению психолого-педагогических условий учебного труда и комфортность в процессе обучения и освоения первичных навыков [1].

Современное общество требует новых подходов к подготовке специалистов в различных сферах деятельности. Направление «Бизнес-информатика» одно из современных и перспективных направлений подготовки. Бакалавр бизнес-информатики — это специалист в таких областях как информационные технологии, системы программирования, экономика, менеджмент и право. Сфера деятельности выпускников охватывает значительную часть разных областей деятельности: специалист по информационным ресурсам, системный аналитик, менеджеры информационных технологий, Web-администратор, Web-дизайнер, программист, бизнес-консультант в информационной сфере и т. д. Поэтому содержание обучения должно быть профессионально и коммуникативно направленным. Необходимо четко определять цели обучения, развивать представление студентов о перспективах использования полученных знаний, когда эти знания и умения в будущем смогут повысить их шансы на успех в любом виде деятельности.

Профессиональная направленность обучения требует интеграции профильных дисциплин, тщательного отбора содержания учебных материалов, ориентацию на решение практических задач. Учебные материалы должны быть ориентированы на последние достижения в той или иной сфере деятельности, своевременно отражать научные достижения, касающиеся профессиональных интересов обучающихся, давать им возможность для профессионального роста. Кроме того, необходимо максимальное использование современных методик с использованием информационных технологий (расчетно-аналитические работы, деловые игры, телеконференции и т. д.)

Литература

1. *Тибилова М. Т., Абаева К. Ю., Волик М. В.* Социальная адаптация первокурсников к университетской жизни // Молодежь и наука: актуальные вопросы социально-экономического развития регионов России. Материалы Всерос. научно-практической конф., посвященной 95-летию Финансового ун-та при Правительстве РФ.—Владикавказ, 2014.—С. 606–610.
2. *Волик М. В., Козаева С. В.* Использование информационных технологий в образовании // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук.—2014.—№ 4–2.—С. 97–99.
3. *Зайтова Е. З., Волик М. В.* Применение информационных технологий в организации самостоятельной работы студентов // Экономика России в условиях глобализации: вызовы и возможности развития. Сб. науч. тр. по материалам междунар. науч. конф. (в рамках VI Междунар. науч. студенческого конгр. на тему: «Гражданское общество России: становление и пути развития»).—Владикавказ, 2015.—С. 258–262.
4. *Волик М. В., Абаева К. Ю., Тибилова М. Т.* Использование телеконференций в обучении // Педагогический опыт: решения и находки. Сб. научно-методических статей.—Воронеж, 2014.—С. 323–329.
5. *Волик М. В., Милостивая Ю. С.* Использование социальных сетей в обучении // Социально-экономическое развитие региона в условиях модернизации. Материалы Всерос. межвузовской научно-практической конф. преподавателей и студентов.—Владикавказ, 2015.—С. 495–500.
6. *Кануков Н. Т., Волик М. В.* Об использовании электронных учебников // Молодежь и наука: актуальные вопросы социально-экономического развития регионов России. Материалы Всерос. научно-практической конф., посвященной 95-летию Финансового ун-та при Правительстве РФ.—Владикавказ, 2014.—С. 406–410.
7. *Волик М. В., Козаева К. Г., Плиева В. А.* Использование метода проектов в профессиональном обучении // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук.—2014.—№ 4–2.—С. 94–97.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XIII Междунар. науч. конф. (пос. Дивноморское, 7–14 сентября 2016 г.)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОДГОТОВКА СТУДЕНТОВ ИНСТИТУТА ИНЖЕНЕРОВ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ В XIX И XX ВЕКАХ

М. М. Воронина

(Россия, Санкт-Петербург; ПГУПС)

Институт Корпуса инженеров путей сообщения был основан в 1809 г. в Петербурге. Занятия начались в 1810 г. Учебный процесс базировался на тщательном изучении математических наук по образцу, близко воспроизводящему Парижскую политехническую школу. Лекции по высшей математике начали читать с октября 1811 г. — ровно 205 лет тому назад. Недаром в «Военном журнале» за 1811 сказано, что высшей математике «у нас в России учат только в одном училище путей сообщения».

Математическим наукам в институте всегда уделялось самое пристальное внимание. Об этом можно судить и по количеству баллов за сданные экзамены по математике — они утраивались, и по тому, что право Главного экзаменатора принадлежало профессорам, преподающим эти науки. В 1834 г. на Конференции (Совете) института постановили: «Высшую математику отнести к первому разряду наук», т. е. к наукам, необходимым каждому инженеру. В 1843 г. даже было принято положение: «Тех инженеров, которые не осилят высшую математику, инженерами не выпускать — только архитекторами».

За все годы существования института программа по высшей математике была обширной. Кроме того, читались факультативные курсы, дополнительные открытые лекции. Экзамены проходили строго, обычно около трети учащихся не могли с первого раза сдать экзамен.

Руководство института считало, что именно изучение математических наук развивает у будущих инженеров логическое мышление, стремление анализировать проблемы. Это позволяет им ответственно подходить к порученному делу, принимать взвешенные решения, достойно выходить из различных ситуаций.

Надо отметить, что проникновение математических расчетов в инженерные науки началось в XIX веке в стенах высших технических учебных заведений, в первую очередь в ИКИПС — первом высшим транспортным и строительным учебным заведением России. Например, его профессора и выпускники проводили расчеты конструкций мостов, куполов, перекрытий, дамб и т. п.

В институт путей сообщения всегда приглашались лучшие преподаватели по математическим наукам. Сначала русские академики — В. И. Висковатов, С. Е. Гурьев, Д. С. Чижов, затем французские инженеры — П. Базен, Г. Ламе, Б. Клапейрон, начиная с 30-х гг. XIX века М. В. Остроградский, В. Я. Буняковский, О. И. Сомов, Н. М. Гюнтер. К. А. Поссе и другие. После Октябрьской революции в нем работали В. И. Смирнов, Г. М. Фихтенгольц, Я. Д. Тамаркин, Я. В. Успенский, М. Ф. Субботин. В последующие годы институт оставался одним их лучших технических учебных заведений страны.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИ РЕШЕНИИ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ И ПРИКЛАДНЫХ ПРОБЛЕМ КАК ВАЖНЕЙШЕЕ НАПРАВЛЕНИЕ ИНТЕГРАТИВНЫХ КУРСОВ[1]

С. Н. Дворяткина (Россия, Елец; ЕГУ им. И.А. Бунина),
С. А. Розанова (Россия, Москва; МГТУ МИРЭА)

Для современной системы образования все более актуальна идея генерации знания в целях личного и профессионального развития, овладения широкопрофильной квалификацией и соответствия предложению и спросу на высококвалифицированные кадры. Такая образовательная стратегия отражает природу междисциплинарного знания, способствует конструктивному междисциплинарному диалогу. Одним из путей модернизации высшего профессионального образования в рассматриваемом контексте является внедрение интегративных курсов и междисциплинарных программ, которые способствуют взаимообогащающему синтезу результатов разных научных дисциплин при решении комплексных профессиональных проблем, конструктивному диалогу представителей разных научных областей.

Под **интегрированными курсами** мы понимаем *учебные дисциплины, содержание которых определяется взаимосвязью нескольких базовых научных дисциплин и предметных областей, гибкой логикой изложения, высокой степенью свободы в выборе форм и методов обучения, обеспечивающие реализацию междисциплинарных структурных и содержательных связей.*

Структура интегрированных курсов включает следующие компоненты: целевой, содержательный и оценочный. Целевыми установками интегративных курсов являются: закрепление сформированных в рамках изучения предшествующих дисциплин знаний, умений и навыков в процессе учебной и исследовательской деятельности студентов по решению профессионально значимых проблем; упорядочивание и систематизация содержания изученных дисциплин, создание широкого профессионального кругозора. Примерное содержание интегрированного курса должно включать учебный материал из разных областей знания, который необходим для формирования профессиональных компетенций. Оценочная часть структуры интегрированных курсов содержит итоговые междисциплинарные проекты, описание порядка их выполнения, критерии и рекомендации по коррекции полученного результата.

Для приближенного решения профессиональных и прикладных задач универсальным инструментом является метод математического моделирования. Являясь интеллектуальным ядром современных технологий и выполняя интегративную функцию, он в полной мере позволяет активизировать междисциплинарные связи с достижением у обучаемых требуемого современным обществом

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-18-10304.

уровня профессионализма. В структуре интегративных курсов решению профессиональных и прикладных задач методом математического моделирования отводится значимое место. Включение профессиональных и прикладных задач в структуру интегративных курсов обеспечивает ему логическую завершенность. Замена реального объекта, явления или процесса его *математической моделью* — математическим «образом», состоящим из алгоритмически представленных закономерностей, описывающих на языке формул основные характеристики изучаемого процесса (явления), — составляет суть математического моделирования.

Введя классификацию профессиональных и прикладных задач по четырем уровням сложности, в докладе авторами будет проиллюстрирована глубина применения метода математического моделирования в теории обработки сигналов. Рассматриваемые прикладные и профессиональные задачи включены в интегрированный курс для студентов, обучающихся по направлениям подготовки «Электроника и наноэлектроника», «Радиотехника». Очевидно, чем точнее математическая модель, тем шире область ее применения и тем больший круг профессиональных задач она позволяет решить. В частности, примеры различных типов сигналов и необходимость их моделирования применяется при решении следующих профессионально важных проблем: радиосигналы при идентификации объектов наблюдения, отклики геодезического зонда при обнаружении полезных ископаемых, радиосигналы в определении характеристик залежей, сигналы электрокардиограммы при диагностике заболевания сердца и др.

ИНТЕРНЕТ-ТЕХНОЛОГИИ В РЕАЛИЗАЦИИ БИЗНЕС-ПРОЦЕССОВ

М. М. Загалова

(Россия, Владикавказ; Финансовый университет)

В современном мире существует практика построения систем управления организацией, которая включает в себя несколько подходов к их формированию. Наибольшей популярностью пользуются системы, построенные на управлении функциями и управлении бизнес-процессами организации.

Бизнес-процесс представляется как последовательность действий (подпроцессов), направленная на получение заданного результата, необходимого организации.

Системы управления, построенные на принципах управления функциями, представляют собой иерархическую пирамидальную структуру подразделений, сгруппированных по выполняемым функциям.

Другим подходом построения систем управления является управление потоками работ или процессами, составляющими деятельность организации. Процессный подход позволяет рассматривать деятельность организации как связанную систему бизнес-процессов, каждый из которых протекает во взаимосвязи с другими бизнес-процессами или внешней средой. Ключевыми понятиями процессного подхода являются результат бизнес-процесса, владелец бизнес-процесса, исполнители бизнес-процесса, входы бизнес-процесса [1].

В настоящее время применение процессного подхода является обязательным условием для построения Системы менеджмента качества в соответствии с требованиями стандарта ISO 9001. Практика показывает, что система управления, построенная на принципах процессного управления, является более эффективной и результативной по сравнению с равной ей по масштабу функциональной системой [1].

Интернет как один из видов информационных технологий обеспечивает возможность общения и передачи информации между пользователями (компьютерами) по всему миру. В современной жизни и глобальном информационном обществе становится невозможным ведение деятельности в любой отрасли без доступа к всемирной сети Интернет [2].

Эффективность применения Интернет-технологий для реинжиниринга бизнес-процессов обусловлена тем, что такой способ управления является радикальным и направлен на коренное реформирование деятельности предприятия.

Например, реализация такого бизнес-процесса как мониторинг рынка с применением Интернет-технологий, позволяет эффективно и в кратчайшие сроки собрать необходимую информацию, обращаясь к электронным источникам данных (поисковые системы, информационные порталы, официальные web-сайты). Собранную информацию легко анализировать, ведь необходимые данные можно получать в реальном режиме (on-line) и соответственно в цифровом формате.

Связав свои бизнес-приложения с единой информационной средой Интернет, любая организация сразу же получает возможность работы со всеми Интернет-контактами независимо от их числа, что позволяет в кратчайшие сроки и с минимальными затратами достигнуть поставленных целей.

Литература

1. *Ахсарова М. И., Волик М. В.* Сравнительный анализ подходов к проектированию информационных систем // Педагогический опыт: решения и находки. Сб. научно-методических статей.—Воронеж, 2014.—С. 320–322.
2. *Волик М. В., Плиева В. А., Козаева К. Г.* Бизнес в интернете // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук.—2014.—№ 4–1.—С. 183–186.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XIII Междунар. науч. конф. (пос. Дивноморское, 7–14 сентября 2016 г.)

ВЛИЯНИЕ РЕЙТИНГОВОЙ НАКОПИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ОЦЕНИВАНИЯ НА ДОСТИЖЕНИЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ

Е. З. Зайтова

(Россия, Владикавказ; Финансовый университет)

Важнейшей характеристикой современного профессионально-ориентированного образования является качество подготовки будущих специалистов, способных соответствовать постоянно изменяющимся требованиям общества, государства и личности. Федеральные государственные образовательные стандарты содержат требования государства к качеству образования и подготовке компетентного специалиста. В настоящее время учебным заведениям не только предоставлена самостоятельность для определения содержания образования, но и увеличена их ответственность за конечный результат. В связи с этим возникает необходимость в совершенствовании системы оценки качества обучения.

Оценка достижений обучающихся оказывает большое влияние на их мотивацию к обучению и будущую карьеру. Система измерения качества освоения студентами полученных знаний и навыков должна включать объективные, легко применимые, простые и понятные критерии и показатели. В этом случае система оценивания будет не только обеспечивать получение информации об учебных достижениях студентов для принятия управленческих решений, но и способствовать повышению мотивации обучающихся, так как результаты контроля позволяют студенту определять уровень своих достижений и корректировать учебную деятельность для преодоления возникающих трудностей.

В настоящее время популярной технологией оценки качества усвоения учебных дисциплин является накопительная балльно-рейтинговая система — индивидуальный числовой показатель оценивания знаний обучающихся.

Использование балльно-рейтинговой системы позволяет немного изменить методику преподавания учебных дисциплин путем увеличения количества заданий для индивидуального выполнения. Следует ожидать возрастания учебной активности студентов, улучшения посещаемости занятий, повышения успеваемости, стимулирования систематической самостоятельной работы, повышения мотивации студентов. Кроме того, возрастает объективность оценивания уровня освоения дисциплин, снижение нагрузки на студентов и преподавателей во время сессии. Организация регулярной обратной связи по результатам рейтинга позволяет своевременно определять проблемы обучаемых и корректировать их деятельность в течение семестра, а не только во время сессии [1].

Несомненно, для успешного внедрения и использования рейтинговой системы необходимо провести методические и организационные мероприятия: разработать оценочную шкалу с учетом требований к знаниям, умениям и навыкам; ознакомить с оценочной шкалой и суммой баллов обучающихся; своевременно фиксировать результаты и подводить итоги; оповещать обучающихся о полученных и накопленных баллах.

При разработке оценочной шкалы целесообразно учитывать разнообразие деятельности студентов и применять разные виды рейтинга. Например, стартовый рейтинг позволяет определить начальный уровень знаний; текущий рейтинг включает оценку во время занятий; дисциплинарный рейтинг включает текущий, промежуточный, итоговый контроль; творческий рейтинг оценивает самостоятельную работу во внеурочное время.

Конечно же, существуют достоинства и недостатки рейтинговой накопительной системы оценивания. Однако, такая система контроля качества знаний позволяет активизировать работу студентов в течении всего семестра, систематически стимулировать их к регулярной подготовке к занятиям, повысить ответственность за свою учебную деятельность.

Литература

1. *Зайтова Е. З., Волик М. В.* Применение информационных технологий в организации самостоятельной работы студентов // Экономика России в условиях глобализации: вызовы и возможности развития. Сб. науч. тр. по материалам междунар. науч. конф. (в рамках VI Междунар. научного студенческого конгресса на тему: «Гражданское общество России: становление и пути развития»).—Владикавказ, 2015.—С. 258–262.

ОТ ИДЕИ К ОПЫТУ ФОРМИРОВАНИЯ ОБОБЩЕННОГО УЧЕБНОГО ПОРТФОЛИО

Ф. В. Гречников (Россия, Самара; СамНЦ РАН),
Л. С. Клентак (Россия, Самара; Самарский университет)

Социальным заказом на выпускников вузов в настоящее время является конкурентоспособная личность, т. е. личность, обладающая глубокими профессиональными знаниями, способная осуществлять выбор, анализировать собственные действия и, естественно, уметь выстраивать свою индивидуальную образовательную траекторию уже в процессе обучения [1]. Именно такой подход декларирован в новых федеральных государственных образовательных стандартах высшего образования (ФГОС ВО) [2], на которые в настоящее время переходят высшие учебные заведения и в которых введены требования обязательного формирования электронного портфолио обучающегося, что позволит значительно активизировать самостоятельную работу студентов (СРС) — основу глубокого осмысленного изучения и освоения дисциплин [3].

Портфолио помогает увидеть динамику развития учебно-познавательной деятельности студентов, значительно повышается мотивация обучения, а следовательно и уровень знаний студентов. Предложенная структура обобщенного портфолио позволяет проследить этапы развития студента как личности. Использование личностно-ориентированной технологии обучения позволит своевременно оказывать помощь студентам при продвижении к более высокому уровню познания при возникновении определенных трудностей, фиксируя ее в портфолио.

Владея методом формирования портфолио студент не увеличивает напряженность труда, а интенсифицирует СРС, оптимизируя процесс использования времени, т. е. решается актуальная проблема интенсификации учебного процесса.

Литература

1. *Клентак Л. С.* Формирование учебного портфолио. От идеи к опыту реализации.— Самара: СамНЦ РАН, 2016.—157 с.
2. Портал Федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования.—URL: http://www.fgosvo.ru.
3. *Гречников Ф. В.* Инновационные подходы подготовки специалистов для высокотехнологического машиностроения—Самара: Сам НЦ РАН.—188 с.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XIII Междунар. науч. конф. (пос. Дивноморское, 7–14 сентября 2016 г.)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНТЕРНЕТ-ТЕХНОЛОГИЙ ВО ВНЕУРОЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Д. Р. Касаева

(Россия, Владикавказ; Финансовый университет)

В процессе обучения студенты не только формируют новые навыки (работа с книгой, компьютером, справочной литературой и библиографическим аппаратом), но и совершенствуют организацию самостоятельной работы. К обучающимся в высших учебных заведениях предъявляются новые требования: уметь рационально распределять и планировать свое время, организовать свое рабочее место, работать с доступными ресурсами и информацией. Для формирования новых учебных умений необходимо научиться работать в электронной библиотеке и самостоятельно искать информацию, понимать прочитанное, выделять главное, составлять конспект и работать над усвоением выделенного содержания.

В условиях быстрого развития новых информационных технологий, для более качественной организации самостоятельной работы студентов, целесообразно как можно шире использовать телекоммуникационные технологии, Интернет и системы управления обучением. Глобальная компьютерная связь открывает реальные возможности повседневного сотрудничества между обучаемыми и преподавателями, стимулирует введение в практику новых активных методов работы, способствует освоению навыков продуктивной совместной деятельности по достижению общей цели. Дистанционное обучение сегодня приобретает особую актуальность, поскольку с развитием Интернета и обеспеченностью студентов персональными компьютерами улучшается обмен информацией как между преподавателем и студентами, так и студентов между собой [1].

В ходе учебного процесса все более популярным становится проведение телеконференций, подразумевающих активную форму обучения с учетом интересов обучающихся, повышение интенсивности труда, обучение навыкам анализа материалов и самостоятельного формулирования выводов, вынесение на общий суд своих суждений, отстаивания своего мнения и умения дискутировать [2].

Перспективным является и социальное обучение — Интернет-технологии и социальные сети. Студентов очень трудно приучить к использованию учебного сайта. Поэтому целесообразно использовать в качестве инструмента, активизирующего деятельность во внеурочное время, уже созданные, работающие и интуитивно понятные социальные сети.

Применение в виртуальных учебных группах технологий форумов позволяет всем участникам самостоятельно или совместно создавать сетевой учебный контент, что стимулирует самостоятельную познавательную деятельность. Общее для всех участников учебного процесса коммуникативное пространство дает возможность коллективной оценки процессов и результатов работы, наблюдения за развитием каждого участника и оценки его вклада в коллективное творчество. Высокий уровень взаимодействия обеспечивает непрерывность учебного процесса, выходящего за рамки аудиторных занятий [3].

Особое значение в новой образовательной системе имеют материалы для самообучения, передаваемые с помощью телекоммуникаций. Учебные телеконференции являются новым интересным средством обучения, способствующим успешному решению некоторых проблем в обучении. Понятность идеологии и интерфейса социальных сетей большей части Интернет-аудитории позволяет сэкономить время, минуя этап адаптации обучающихся к новому коммуникативному пространству. Мультимедийность коммуникативного пространства предельно облегчает загрузку и просмотр в виртуальной учебной группе учебных материалов разных форматов, интерактивных приложений.

Литература

1. *Зайтова Е. З., Волик М. В.* Применение информационных технологий в организации самостоятельной работы студентов // Экономика России в условиях глобализации: вызовы и возможности развития. Сб. науч. тр. по мат. междунар. науч. конф.—Владикавказ, 2015.—С. 258–262.
2. *Волик М. В., Абаева К. Ю., Тибилова М. Т.* Использование телеконференций в обучении // Педагогический опыт: решения и находки. Сб. научно-методических статей.—Воронеж, 2014.—С. 323–329.
3. *Волик М. В., Милостивая Ю. С.* Использование социальных сетей в обучении // Социально-экономическое развитие региона в условиях модернизации. Мат. Всерос. межвуз. научно-практич. конф. преподавателей и студентов.—Владикавказ, 2015.—С. 495–500.

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ДЛЯ ПРОДАЖИ СТРАХОВЫХ ПРОДУКТОВ

И. В. Каулько

(Россия, Владикавказ; Финансовый университет)

В современном мире сетевые технологии охватывают все новые и новые области науки, техники и, особенно, экономики. В условиях стремительно возрастающей конкуренции со стороны страхователей и органов страхового надзора, страховой рынок безусловно занимает лидирующее место в области технологического прогресса. Специфика страхового бизнеса определяет характерные пути развития страховых компаний и связанные с этим задачи, решение которых для крупной современной фирмы невозможно без применения сетевых технологий. Набирают популярность новые каналы продаж. Растет число клиентов, которые приобретают финансовые услуги, используя телефон или мобильные приложения.

Автоматизация основных функций и процессов в деятельности страховой компании позволяет не только повысить производительность труда персонала и освободить высококвалифицированных специалистов от выполнения многих рутинных операций, но и создать необходимые условия для широкого внедрения маркетингового инструментария в интересах дальнейшего развития бизнеса. В страховой организации для решения маркетинговых задач различных классов и степеней сложности требуются разные информационные инструменты и программное обеспечение. Однако этот переход сопряжен со значительными изменениями в архитектуре бизнеса и потребностью в постоянных инвестициях в технологии. Именно этим объясняется то, что многие, даже крупные страховщики пока не готовы двигаться по этому пути, часто ограничиваясь проектными решениями.

Во всем мире, в том числе и в России, страховые компании постоянно сталкиваются с необходимостью внедрения новых продуктов и услуг для своих клиентов, с одной стороны, и оперативного реагирования на предложения конкурентов, с другой, чтобы удерживать и увеличивать свою собственную долю на рынке. Это влечет за собой быстрое изменение и совершенствование бизнес-процессов.

Большие объемы информации, высокие требования к точности и достоверности, необходимость эффективного анализа финансового состояния клиентуры и фирмы — это основные причины, предопределяющие стремительный рост современных сетевых технологий в сфере страхования.

Видимое усиление конкурентной борьбы на рынке страхования вынуждает страховые организации искать новые подходы для привлечения внимания клиентов. В целях экономии времени для страхователей и снижения затрат со стороны профессиональных участников страховых правоотношений на рынке появилась новая услуга — продажа страховых полисов с использованием информационных технологий, в первую очередь с помощью сети Интернет.

Внедрение сетевых технологий для продвижения страховых продуктов и услуг должно обеспечивать положительную мотивацию и удовлетворенность пользователей от автоматизации работы с информационной системой. Это может быть реализовано при планомерном внедрении информационной системы, обучении пользователей, соответствии темпов и объемов внедрения их возможностям и потребностям.

СИММЕТРИИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ НА ЗАНЯТИЯХ ПО МАТЕМАТИКЕ В СИСТЕМЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Н. И. Лобанова

(Россия, Зеленокумск; МУДО «ЦВР»)

В связи с экономическим кризисом, коммерциализацией высшего образования и частично среднего, все в большей степени стали возникать противоречия между требованиями и потребностями вуза и возможностями школ в реализации качественной математической подготовки выпускников.

В дополнительном образовании изучение математики предусматривает, как получение обучающимися углубленного и расширенного объема знаний, техники владения предметом, так и выявление, развитие математических способностей, формирование у обучающихся устойчивого интереса к предмету, выработку ориентации на профессии, связанные с математикой. Реализация этих задач вновь делает актуальной проблему содержания математического образования. Включение в программу различных разделов высшей математики не всегда целесообразно. Отсутствует достаточное количество времени для рассмотрения этих разделов в необходимом объеме, не достигается должная логическая строгость изложения в силу объективных трудностей, которые представляют для обучающихся те или иные методы мышления, возрастные и психические особенности [1].

Решение многих задач из курса алгебры и начал анализа облегчается, если использовать симметричность условия задачи, применяемых математических моделей, четность или нечетность функций, разного рода сходство математических объектов. Симметрия и ее свойства имеют место в задачах на решение тригонометрических, иррациональных, алгебраических уравнений и неравенств и их систем, в некоторых графических задачах. Данная тема лишь вскользь изучается в школьном курсе, причем в довольно разрозненных главах, а задачи такого типа, встречаются в ЕГЭ, в олимпиадах различного уровня. Возникает необходимость и целесообразность обучения школьников решению таких задач в системе дополнительного образования, поскольку в рамках обязательного среднего образования для этого не хватает времени [2].

Литература

1. *Табачкова М. Ю.* Симметрии и их применения в углубленном курсе алгебры и начал анализа: Дис. . . . канд. пед. наук.—Саранск, 2002.—176 с.
2. *Аммосова Н. В., Лобанова Н. И.* Решение неопределенных уравнений первой степени с двумя неизвестными в системе дополнительного образования // Сиб. пед. журн.—2016.—№ 2.—С. 24–31.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XIII Междунар. науч. конф. (пос. Дивноморское, 7–14 сентября 2016 г.)

ИНСТРУМЕНТАРИЙ ВИЗУАЛЬНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗАДАЧ НА ДВИЖЕНИЕ

М. Д. Макаренко

(Россия, Владикавказ; ЮМИ, СОГУ)

В основу разработки образовательного стандарта второго поколения положена идея обеспечения и реализации условий для сознательного и активного усвоения учащимися новых знаний. Идет активный процесс по созданию электронных форм учебников, что должно привести к увеличению доли самостоятельной работы ученика. Однако, преобладающее большинство электронных учебников является лишь электронной версией текстового учебника, возможно оснащенного тестами для самоконтроля. Развитие информационных технологий позволяет построить процесс взаимодействия с учеником, на принципиально новом уровне, приучая его к элементам систематического мышления и анализа. В работе предлагается описание интерактивного средства обучения, вовлекающего ученика в учебный процесс, позволяющего ученику в автономном режиме провести анализ задачи на примере задач на равномерное движение.

Важнейшим этапом решения любой задачи является формализация условия, которая в учебном процессе называется краткой записью. Для многих типов задач, в том числе и на движение, популярным является графическое представление условия, т. е. изображение на прямой всех пунктов и объектов движения. Для задач на движение существует метод таблиц, который позволяет так же проанализировать данные задачи и четко сформулировать основной вопрос задания.

Разрабатываемое приложение позволяет использовать два последних способа описания задачи учащихся в интерактивном режиме. На основе действий ученика по заполнению таблицы данных и построения графического представления строится модель задачи, которая проверяется системой на непротиворечивость и полноту. При выполнении этих свойств учащийся имеет возможность запустить анимацию построенной модели, чтобы наглядно увидеть, все процессы, происходящие в системе. При наличии ошибок в модели, на основе подсказок, учащийся имеет возможность добавить недостающие данные или исправить противоречия.

Рассмотрим подробнее процесс взаимодействия пользователя с системой, который состоит из следующих шагов:

1. Создать все объекты о которых идет речь в задаче.
2. Установить все их свойства.
3. Сформулировать все взаимосвязи.
4. Сформулировать задание, т. е. какую величину необходимо найти.
5. Запустить анимацию модели как критерий верного ее построения.
6. Сравнить модель с текущей задачей.
7. Модифицировать модель при ее несоответствии.
8. Найти решение задачи и проверить его на построенной модели.

Рассмотрим подробнее описанные выше шаги. Обычно в задачах на движение существует два вида объектов. Точки (пункты) старта, завершения движения, место встречи и тому подобное. Назовем их пунктами. Кроме того, имеются движущиеся объекты, пешеходы, велосипедисты и прочее. Пункты имеют свойства положения: левее, правее, координаты, расстояние между ними и тому подобное. Движущиеся объекты, кроме положения, привязанного к пунктам, имеют свойство скорости. Создание объектов состоит в расстановке картинок, соответствующих условию задачи на линии движения. Модель задачи на движение строится на основании уравнения движения $S = Vt$. Поскольку движущихся объектов в задаче может быть несколько, модель будет представлена несколькими фреймами, содержащих четыре слота: объект движения, интервал движения (длина отрезка пути, пройденный объектом с постоянной скоростью), время движения, скорость движения. Шаг два состоит в сопоставлении известных значений (констант) из условия задачи и созданных объектов. Третий шаг является наиболее сложным для школьников и состоит в нахождении связи между параметрами движения явно незаданными в условии. Например, «два велосипедиста выехали одновременно и встретились в пункте B». Неявно в задаче задано равенство слотов времени для двух фреймов, объектами движения в которых являются велосипедисты. После заполнения фреймов, некоторые слоты могут оказаться пустыми, все они являются претендентами на главный вопрос задачи, что надо найти. Задача пользователя указать слот, являющийся основным вопросов задачи. После этого пользователь может попробовать запустить моделирования задачи, т. е. ее анимирование. Непротиворечивость модели, проверяется фильтрацией фреймов по одному объекту движения и проверке соответствия времен и пунктов старта и прибытия. Полнота модели проверяется на основе использования технологии экспертных систем. Многократное применении уравнения движения ко всем пустым фреймам системы приведет к постепенному заполнению фреймов, т. е. вычислению необходимых значений. Если системе удалось вычислить основной вопрос задачи, модель считается не противоречивой и возможно анимирование движения объектов, так как имеются все необходимые параметры.

Рассмотренная интерактивная система моделирования задач на движение использует технологии искусственного интеллекта, которые все чаще начинают применять в образовательных продуктах. Система не просто контролирует результат работы ученика, а позволяет поучаствовать в создании модели, экспериментировать с процессом движения. Часто учащиеся не могут решить задачу на движение, потому что не могут представить себе процесс, т. е. создать полноценную модель движения. Предлагаемое интерактивная система использует деятельностный подход к обучению и по мнению автора является эффективным средством организации самостоятельной работы учащегося.

Литература

1. *Малова И. Е., Горохова С. К., Малинникова Н. А., Яцковская Г. А.* Теория и методика обучения математике в средней школе.—М.: ВЛАДОС, 2009.—445 с.
2. *Рутковский Л.* Методы и технологии искусственного интеллекта.—Изд-во Горячая Линия — Телеком, 2010.
3. *Фабрикантова Е. В., Полянская Е. Е., Ильясова Т. В.* Интерактивные технологии и мультимедийные средства обучения.—Оренбург: Изд-во ОГПУ, 2015.—53 с.
4. Электронные формы учебников (ЭФУ) // Интернет-газета «Лаборатория знаний».—Изд-во БИНОМ, 2016.—Вып. 2.—URL: http://gazeta.lbz.ru/.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XIII Междунар. науч. конф. (пос. Дивноморское, 7–14 сентября 2016 г.)

МЕТОДОЛОГИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ОРГАНИЗАЦИИ И ПРОВЕДЕНИИ ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННОЙ ДЕЛОВОЙ ИГРЫ

З. Т. Макиев

(Россия, Владикавказ; Финансовый университет)

В современном образовании деловые игры используются для получения практических навыков будущими специалистами в своей профессиональной деятельности.

Деловая игра — это своеобразное моделирование процессов и механизмов принятия решений с использованием математической и организационной моделей. Применение деловых игр в процессе обучения способствует развитию профессиональных компетенций обучаемых, формирует умение аргументировано защищать свою точку зрения, анализировать и интерпретировать получаемую информацию, работать коллективно. Деловая игра также способствует привитию определенных социальных навыков и воспитанию правильной самооценки [1].

Деловая игра порождает мощное игровое психологическое поле, которое вовлекает в действие всех участников, вызывая большой эмоциональный подъем. Игра предоставляет возможность каждому ее участнику проявить творческие способности, что является удовлетворением потребности в самореализации; дает возможность посоревноваться, подтвердить или изменить статус в группе.

Деловые игры имеют огромную практическую значимость, хоть и приемлемы лишь в качестве дополнительного метода обучения в тесной связи с теоретическими занятиями. Они, в основном, не предполагают выработку единственного верного решения. Их ценность состоит в стимулировании большого количества идей и способов их реализации, в неоднозначности принимаемых решений, характер которых определяется конкретной ситуацией.

Экстремальное программирование (XP) — это упрощенная методология организации разработки программ для небольших и средних по размеру команд разработчиков, занимающихся созданием программного продукта в условиях неясных или быстро меняющихся требований. Обычно XP характеризуют набором определенных правил (практик), которые необходимо выполнять всей команде для достижения хорошего результата.

Основными целями XP являются повышение доверия заказчика к программному продукту путем предоставления реальных доказательств успешности развития процесса разработки и резкое сокращение сроков разработки продукта. При этом XP сосредоточено на минимизации ошибок на ранних стадиях разработки. Это позволяет добиться максимальной скорости выпуска готового продукта и дачт возможность говорить о прогнозируемости работы. Практически все приемы XP направлены на повышение качества программного продукта.

Использование методологии деловой игры позволит за короткий срок в несколько приемов получить знания и первоначальные навыки экстремального программирования, добиться целей, максимально приближенных к реальным условиям и потребностям. В XP каждый программист считается квалифицированным работником, который профессионально и с большой ответственностью относится к своим обязанностям. Если в команде этого нет, то внедрять XP абсолютно бессмысленно — лучше для начала заняться перестройкой команды. Деловая игра призвана научить будущих специалистов слаженно работать в команде: планировать, обсуждать, принимать решения и оповещать о них.

Литература

1. *Волик М. В., Козаева К. Г., Плиева В. А.* Использование метода проектов в профессиональном обучении // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук.— 2014.—№ 4–2.—С. 94–97.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XIII Междунар. науч. конф. (пос. Дивноморское, 7–14 сентября 2016 г.)

РЕАЛИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В СОДЕРЖАНИИ ШКОЛЬНЫХ УЧЕБНИКОВ МАТЕМАТИКИ

И. Е. Малова

(Россия, Брянск, БГУ; Владикавказ, ЮМИ)

Реализация образовательных технологий в обучении математике — многоаспектное явление, предусматривающее ответы на ряд вопросов: какие образовательные технологии разработаны; есть ли общая методологическая основа (основы) для различных образовательных технологий; какую роль играет использованная образовательная технология; каковы признаки реализации выбранной технологии; каков состав деятельности учителя (учащихся) при реализации соответствующей образовательной технологии и др. Каждый аспект требует отдельного описания.

Представление различных видов образовательных технологий осуществлено Г. К. Селевко в [1] и др. В основном, автором используется следующая схема описания технологий: целевые ориентации; концептуальные основы; организационно-методические особенности; предтечи, разновидности, последователи; рекомендуемая литература.

На современном этапе развития образования методологическими основами образовательных технологий, согласно ФГОС, должны быть: 1) деятельностный подход; 2) личностно ориентированное обучение; 3) компетентностный подход.

Деятельностный подход в обучении «отвечает» за обеспечение самостоятельной успешности учащихся в конкретных видах деятельности.

Можно выделить несколько уровней умений, которые соответствуют уровням деятельности: частнопредметный (например, уметь складывать десятичные дроби); общепредметный (например, уметь решать текстовые задачи); метапредметный характер (например, уметь осуществлять смысловое чтение).

В связи с конкретным видом деятельности важно ответить, по крайней мере, на вопросы: 1) какова цель деятельности (цель — это предполагаемый результат); 2) какова ориентировочная основа этой деятельности (ООД) (ООД — это обобщенный способ деятельности, отвечающий за управление ею); 3) каков состав действий, каковы особенности их реализации.

Таким образом, анализ школьных учебников математики с позиций деятельностного подхода предполагает ответы на вопросы: 1) какое математическое содержание предложено, каковы цели процесса работы учащихся с этим содержанием; 2) каковы деятельностные составляющие процесса работы с этим содержанием: этапы; цели этапов; виды деятельности на этапах, их ориентировочные основы; состав действий учащихся и др.; 3) как деятельностные составляющие процесса работы с математическим содержанием представлены в учебнике.

Личностно ориентированное обучение (ЛОО) «отвечает» за обеспечение активной позиции учащихся в процессе обучения, самообучения и саморазвития.

ЛОО предполагает, что главной целью обучения является обогащение субъектного опыта учащихся средствами математической темы (учебного предмета), и это «приращение» субъектного опыта осознается учащимися.

В связи с изучаемой темой важно знать ответы на следующие вопросы: 1) какой субъектный опыт учащихся может быть сформирован в данной теме; 2) как обеспечить активную позицию учащихся в процессе освоения данной темы; 3) какие итоговые вопросы полезно задать учащимся, чтобы ответы на них в наибольшей степени отражали «приращение» их опыта.

Таким образом, анализ школьных учебников математики с позиции реализации ЛОО предполагает ответы на вопросы: 1) каковы потенциальные возможности математического содержания и процесса работы с ним для обогащения субъектного опыта учащихся; 2) каковы личностные составляющие процесса работы с этим содержанием: состав предметного (метапредметного) опыта; приемы активизации познавательной (рефлексивной) деятельности учащихся и др.; 3) как личностные составляющие процесса работы с математическим содержанием реализованы в учебнике.

Если вопросы реализации деятельностного подхода и личностно ориентированного обучения имеют научно обоснованные технологические рекомендации, то вопросы реализации компетентностного подхода еще требуют исследования. В настоящее время можно считать, что достижение принципов образования XXI века, сформулированных ЮНЕСКО (уметь «познавать, делать, жить, жить вместе»), обеспечивают реализацию компетентностного подхода.

На примере текстовых задач с позиций деятельностного подхода и личностно ориентированного обучения можно продемонстрировать реализацию в современных учебниках математики образовательных технологий: задачные; проблемного обучения; диалоговые; укрупнения дидактических единиц; игровые; проектного обучения и др.

Литература

1. *Селевко Г. К.* Энциклопедия образовательных технологий: в 2-х т.—М.: НИИ шк. технол., 2006.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XIII Междунар. науч. конф. (пос. Дивноморское, 7–14 сентября 2016 г.)

ПРОЕКТНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ КЕЙСЫ В ПОВЫШЕНИИ ИНТЕРЕСА К ОБУЧЕНИЮ

Ю. С. Милостивая

(Россия, Владикавказ; Финансовый университет)

Изменения, происходящие в различных сферах деятельности человека, выдвигают все более новые требования к организации и качеству профессионального образования. Современный выпускник профессионального образовательного учреждения должен не только владеть специальными знаниями, умениями и навыками, но и ощущать потребность в достижениях и успехе; знать, что он будет востребован на рынке труда. Для этого необходимо прививать интерес к накоплению знаний, самостоятельной деятельности и непрерывному самообразованию. Чтобы достичь этих целей, у студентов должна быть мотивация. Мотивация является главной движущей силой в поведении и деятельности человека, в том числе, и в процессе формирования будущего профессионала. Поэтому особенно важным становится вопрос о стимулах и мотивах учебно-профессиональной деятельности студентов [1].

Мотивация студентов является одним из наиболее эффективных способов улучшения процесса обучения. Мотивы являются движущими силами процесса обучения и усвоения материала. Мотивация к обучению достаточно непростой и неоднозначный процесс изменения отношения личности как к отдельному предмету изучения, так и ко всему учебному процессу.

Для того чтобы студент по-настоящему включился в работу, нужно, чтобы задачи, которые ставятся перед ним в ходе учебной деятельности, были не только понятны, но и внутренне приняты им, т. е. чтобы они приобрели значимость [2].

Одной из перспективных форм эффективных технологий обучения является проблемно-ситуативное обучение с использованием кейсов. Кейсовая технология (метод) обучения — это обучение действием. Суть кейс-метода состоит в том, что усвоение знаний и формирование умений есть результат активной самостоятельной деятельности студентов по разрешению противоречий, в результате чего и происходит творческое овладение профессиональными знаниями, навыками, умениями и развитие мыслительных способностей.

Проектно-исследовательский кейс представляет собой описание конкретной реальной ситуации, подготовленное по определенному формату и предназначенное для обучения студентов анализу разных видов информации, ее обобщению, навыкам формулирования проблемы и выработки возможных вариантов ее решения в соответствии с установленными критериями. В ходе разбора ситуаций обучающиеся учатся действовать в команде и принимать управленческие решения.

Несомненным достоинством метода проектно-исследовательских кейсов является не только получение знаний и формирование практических навыков, но и развитие системы ценностей студентов, профессиональных позиций, жизненных установок, своеобразного профессионального мироощущения, стремление к получению знаний и закреплению первоначальных практических навыков.

Литература

1. *Мормужева Н. В.* Мотивация обучения студентов профессиональных учреждений // Педагогика: традиции и инновации: материалы IV междунар. науч. конф. (Челябинск, декабрь 2013 г.).—Челябинск: Два комсомольца, 2013.—С. 160–163.
2. *Волик М. В., Козаева К. Г., Плиева В. А.* Использование метода проектов в профессиональном обучении // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук.—2014.—№ 4–2.—С. 94–97.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XIII Междунар. науч. конф. (пос. Дивноморское, 7–14 сентября 2016 г.)

ИНФОРМАЦИОННЫЕ И ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ НА ИНОСТРАННОМ ЯЗЫКЕ

Н. И. Насырова

(Россия, Казань; КНИТУ–КАИ)

Одним из направлений процесса интеграции российской и европейской систем высшего образования является разработка и реализация совместных образовательных проектов, позволяющих использовать опыт и современные достижения университетов-участников в обучении студентов, а также выдавать им диплом, признаваемый в России и за ее пределами. Германо-российский институт новых технологий (ГРИНТ) КНИТУ–КАИ совместно с университетами Германии разработал четыре магистерские программы, реализуемые с осени 2014 года. Все дисциплины читаются на английском или немецком языках.

Образовательная программа «Электроэнергетика и электротехника» с профилем подготовки «Электротехнический инжиниринг» является одной из программ магистратуры ГРИНТ. Она включает в себя курс “Additional Chapters of Mathematics”, читаемый в первом семестре на английском языке.

При чтении курса мы столкнулись с некоторыми проблемами, обусловленными спецификой проекта. Уровень языковой, математической и компьютерной подготовки студентов достаточно сильно различается, так как в магистратуру ГРИНТ поступают выпускники бакалавриатов разных направлений и вузов, с различной наполняемостью учебного плана курсами математики, информатики и иностранного языка. Часть студентов имеет недостаточно развитые навыки самостоятельной работы, например, с учебной и научной литературой, базами данных, компьютерными математическими пакетами программ. Определенные трудности у студентов вызывают также различия в системах образования России и зарубежных стран.

Интеграция очной и дистанционной форм обучения позволяет решать возникающие проблемы и достичь желаемых результатов обучения. Эффективность процесса при дистанционной форме обучения определяется такими ее особенностями, как интерактивность, запоминаемость, гибкость в использовании, предоставление помощи и доступность. Разработка на английском языке электронного курса, к которому могут обращаться студенты параллельно с прохождением аудиторных занятий, помогает значительно облегчить усвоение нового материала и его применение к решению научных и прикладных задач.

С учетом различной подготовки студентов по математике полезно начало курса выстроить таким образом, чтобы выровнять их базовый уровень. При разработке курса необходимо учесть особенности обучения математике и уделить достаточно внимания прикладным аспектам изучаемого курса.

Применение широкого спектра педагогических и информационных технологий позволяет организовать процесс обучения и усвоения нового материала на высоком уровне, познакомить студентов с основными технологиями обучения, широко используемыми в зарубежных университетах, развить уже имеющиеся навыки владения информационными технологиями.

Для магистрантов профиля «Электротехнический инжиниринг» в качестве дополнительных глав математики предложен курс «Introduction to Dynamical Systems and Fractals». Этот курс имеет приложения в математике, физике, биологии, медицине, геологии, психологии, экономике, поэтому он является привлекательным и востребованным у студентов. При его изучении магистранты знакомятся с новыми методами исследований, применением компьютерных программ и технологий для решения учебных и научных задач, современными направлениями развития математики и других наук, что открывает большие возможности для реализации познавательных интересов и развития личности студентов.

Опираясь на успешный опыт разработки и реализации международных проектов по математике и ее приложениям [1, 2], мы провели отбор педагогических и информационных технологий для нашего курса. Основные из них — технология программированного обучения и модульная, технологии разноуровневого обучения и обучения в малых группах, технология обучения в сотрудничестве и ее разновидности, использование виртуальных библиотек, комплексных электронных образовательных ресурсов, телекоммуникационных технологий сети Интернет и компьютерных математических пакетов. Это позволяет организовать творческое и самостоятельное обучение и дает возможность развивать интеллектуальные, социальные, коммуникативные качества личности студента.

Основным при разработке электронного курса “Additional Chapters of Mathematics” на английском языке, размещенного в системе BlackBoard на сайте КНИТУ–КАИ, является сочетание модульной и технологии программированного обучения.

Учебные достижения студентов мы оцениваем с помощью портфолио, что является распространенной практикой в зарубежных университетах. Составление портфолио на иностранном языке позволяет повысить уровень владения языком, а также математической терминологией на этом языке. Портфолио включает практические, лабораторные, контрольные и зачетные работы, тесты, самооценку проделанной студентом работы, его впечатления от изученного курса, замечания и предложения. Портфолио позволяет оценить личный прогресс студентов и более объективно выставить оценку по итогам прохождения курса.

Технологии обучения, которые мы предлагаем использовать при создании математических курсов на иностранном языке позволяют реализовать основные принципы обучения: научности, доступности, наглядности, прочности знаний, последовательности, связи теории и практики, а также личностно-ориентированный и дифференцированный подход к обучению.

Литература

1. *Гоза Н. И., Токаревская С. А.* Выбор педагогических технологий для построения дистанционного курса по математике // Вестн. Поморского ун-та. Сер. Физиологические и психолого-пед. науки. Спецвыпуск.—Архангельск, 2006.—С. 8–16.
2. *Насырова Н. И., Седербакка Г.* Применение информационных технологий при реализации курса «Динамические системы и фракталы» в условиях международного сотрудничества // Тр. междунар. научно-практической конф. «Информационные технологии в образовании и науке».—Казань, 2012.—С. 122–127.

О НОВОЙ «АТОМИЗАЦИИ» НАУЧНОЙ И ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СФЕРЫ

В. П. Одинец
(Россия, Сыктывкар; СыктГУ)

В июле 1996 г. в Санкт-Петербурге прошла Международная научная конференция «Мировые модели взаимодействия науки и высшего образования». В работах участников конференции прослеживалась «ясно видимая тенденция к большей дисперсности «научной массы», ведущая к «атомизации» (т. е. фактически к «дезинтеграции» научной и образовательной сфер».

Прошло 20 лет. Появление и широкое использование интернета только усилило «атомизацию» науки и образования. И это происходит на фоне растущего враждебного отношения общества к науке и людям ее творящим, несмотря на заинтересованность властей в развитии военно-промышленного комплекса.

Конечно, отношение общества к науке и образованию носит циклический характер, и нынешнее отношение — это признак упадка общества и не только в России, усугубленное трудностями визуализации высокопроизводительных многопроцессорных вычислительных систем.

Развитие дистанционного компьютерного обучения является признаком «атомизации» образования. Другим признаком служит нежелание молодежи к изучению математики (и физики), что в России наглядно доказывается ухудшением результатов команд России на всемирных олимпиадах школьников в последнее десятилетие.

ТЕХНОЛОГИЯ УЧЕБНЫХ ЦИКЛОВ

Л. П. Охват
(Россия, Владикавказ; СОШ № 1 ст. Архонская)

Важнейшим культурным достижением человечества является формулировка широко известного принципа: «Все люди по факту рождения имеют равные права». Имеет смысл дополнить этот принцип следующим образом: «Все люди по факту рождения имеют равные права, в том числе право быть умным». Современная школа является тем социальным институтом, который должен обеспечить защиту права быть умным за каждым учеником, ... [1] В настоящее время классно-урочная система является единственной всеобщей формой массового школьного обучения, которая позволяет решать проблему всеобуча. [2] Чтобы в рамках этой системы организовать полноценное обучение всего состава учащихся, предлагается использование технологии учебных циклов, разработанной в НИИ школьного оборудования и технических средств обучения Академии педагогических наук СССР в 1978–1989 гг. авторами Е. Б. Арутюнян, М. Б. Волович, Ю. А. Глазков и Г. Г. Левитас. В рамках описываемой технологии процесс обучения делится на фрагменты, в течение которых учащиеся овладевают некоторой частью учебного материала. Эти фрагменты образовательного процесса, которые называются учебными циклами, имеют следующие строение:

1. Проверка знаний предыдущего материала и готовности к усвоению нового.
2. Сообщение нового.
3. Репродуктивное (первоначальное) закрепление.
4. Тренировочное закрепление.
5. Опрос по теории.
6. Итоговое закрепление.

При этом обеспечивается всеобщая занятость обучающихся и непрерывный контроль за успешностью образовательного процесса. В работе предлагается описание данной технологии. Показывается её соответствие требованиям современного образования: технология является здоровьесберегающей, личностно-ориентирована, реализует деятельностный подход в обучении и обеспечивает процессу образования принципы научности, доступности, прочности знаний и др. Описывается личный опыт применения идей технологии учебных циклов в процессе обучения школьников математике. Таким образом, соответствие технологии учебных циклов новым стандартам, позволяет рекомендовать ее использование в современном школьном образовании. Кроме того, на основе этой технологии любой учитель может создать собственную методическую систему преподавания.

Литература

1. *Холодная М. А., Гельфман Э. Г.* Ценностные аспекты психологии интеллекта и их реализация в образовательной практике // Ценностные основания психологической науки и психология ценностей / Под ред. В. В. Знакова, Г. В. Залевского.—М.: Институт психологии РАН, 2008.—С. 236–261.
2. *Левитас Г. Г.* Методика преподавания математики в основной школе: учеб. пособие.— Астрахань: Издательский дом «Астраханский университет», 2009.—179 с.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XIII Междунар. науч. конф. (пос. Дивноморское, 7–14 сентября 2016 г.)

ЭСТЕТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ ОКРУЖНОСТИ И КОМПЬЮТЕРНЫЕ РАЗРАБОТКИ

Р. Р. Пименов

(Россия, Санкт-Петербург; Лицей ФТШ)

1. В педагогике дискутируется связь школьного математического образования с современной математикой и значение эстетической составляющей геометрического образования. Есть курсы для школьников о преобразованиях симметрии, поворотах, подобия на примерах, имеющих эстетическое значение. Сегодня для этого используется и фрактальная геометрия. Существует подход, решающий обе названные проблемы одновременно. О нем говорится в книге «Эстетическая геометрия или теория симметрий» [1]. Понятия «высшей математики» органично возникают при изучении красивых геометрических образов, и наоборот: эстетически значимые рисунки создаются методами, традиционно относимыми к высшей математике. Симметрии используются как для доказательства наглядных, но нетривиальных теорем так и для построения ярких фигур и неожиданных орнаментов, и для введения в теорию групп.

2. Этот подход основан на симметрии относительно окружности. Клейн в книге «Элементарная геометрия с точки зрения высшей» [2] рассматривал плюсы от выдвижения на первый план в педагогике инверсии и ортогональных окружностей. Но в то время не было возможности систематически реализовать эту идею. По двум причинам: чертежи геометрии окружности выполнять не просто, стандартный подход к инверсии предполагает большое использование геометрической «техники» и знаний, не имеющих отношения к геометрии окружности.

Книга [1] и прилагаемые к ней компьютерные материалы вводит симметрию между окружностями (инверсию) как неопределяемое понятие. Вводится понятие перпендикулярных (ортогональных) окружностей и даются методы построения инверсии не использующие ни прямых, ни расстояний. Поэтому можно говорить о геометрии окружности или «эстетической геометрии» как о самостоятельном разделе геометрии, оперирующим исключительно с окружностями (сферами), точками их пересечения, касания и симметриями.

3. Перед учителем, освоившим основные идеи предлагаемого подхода, большой выбор их использования: для моделирования неевклидовых геометрий, для красочных иллюстраций при изложении композиции преобразований, для демонстрации понятия предела, коммутативности, сопряженных элементов, других понятий «высшей математики», фрактальной геометрии, или для систематического доказательства теорем геометрии окружности с помощью симметрий.

4. Компьютерные разработки — неотъемлемая часть курса, решающие три задачи. Первая: обеспечить быстрое построение чертежей геометрии окружности. Это делается с помощью макросов к Coreldraw. Полученные чертежи порой красивы. Их самостоятельное построение увлекает учеников и помогает понять

теорию. Для этого также удобно использовать программу Geogebra. Вторая задача: быстро ввести учеников в идеи геометрии окружности. Это достигается авторскими интерактивными флеш-программами DodecaTeach (разработано 5 учебных модулей). С их помощью излагаются важнейшие понятия и свойства связанные с симметрией относительно окружности. Третья задача: показать неразрывную связь геометрии окружности и эстетики, поразить воображение учеников. Для этого используется программа DodecaLook, демонстрирующая видео-арт, разработанный на основании геометрии окружности и библиотека компьютерной графики, созданная с ее помощью.

5. Многое из сказанного было реализовано мною в более чем годовых занятиях в Санкт-Петербургском лицее «Физико-техническая школа» (см. [3]) для учеников 8–11 классов. Они успешно усваивали теорию и выполняли самостоятельные компьютерные работы. Курс «Эстетическая геометрия — теория симметрий» может быть адоптирован к разным возрастным группам, к учащимся разных знаний и склонностей. Одни его элементы могут преподаваться в младших классах в контакте с учителями рисования и информатики (с помощью виодео-арта программы DodecaLook) другие могут использоваться в ВУЗе, при изложении темы фракталов, неевклидовых геометрий или теории групп. Понятие «симметрия относительно окружности» может и должно быть сквозным элементом преподавания.

Литература

1. *Пименов Р. Р.* Эстетическая геометрия или теория симметрий.—СПб.: Школьная лига, 2014.—288 с.
2. *Клейн Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей. Т. 2.—М.: Наука, 1987.—416 с.
3. *Пименов Р. Р.* В мире поломанных линеек. Компьютерные инструменты в школе.—2011.—№ 5.—С. 66–72.

КОМПЬЮТЕРНЫЕ СРЕДСТВА ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КУРСЕ «КОНЦЕПЦИИ СОВРЕМЕННОГО ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ»

О. Г. Пустовалова
(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

В докладе изложен опыт преподавания курса «Концепции современного естествознания» для студентов Института математики, механики и компьютерных наук ЮФУ. В данном курсе рассматриваются задачи из различных областей знаний, связанных с разделами механики, физики, химии, биологии. Множество постановок данных задач сводятся к общеизвестным уравнениям математической физики, анализ и решение которых возможно проводить численными методами. К общеупотребительным пакетам компьютерной алгебры, позволяющим легко получать решения обыкновенных дифференциальных уравнений, относится Maple. Базовым методом численного решения задач Коши является метод Рунге — Кутта — Фельберга пятого порядка точности. Для более тонкого и трудоемкого анализа краевых задач, например, нелинейных жестких систем [1], решения которых затруднительно получить даже численно, возможно применять специальные средства пакета Maple. В случае жестких дифференциальных уравнений по умолчанию используется решатель rosenbrock, в более сложных случаях для решения жестких систем можно использовать решатели gear и lsode.

Решения задач, описываемых уравнениями или системами уравнений в частных производных, получают обычно с помощью метода конечных элементов. Среди популярных и часто используемых конечно-элементных пакетов, таких как Ansys, Nastran, Abaqus и др., можно выделить пакет FlexPDE, ориентированный на решение краевых задач. Легкость использования данного пакета позволяет проводить численные эксперименты, определяя влияние того или иного параметра на поведение системы в целом, в частности, например, тестировать материальные параметры новых определяющих соотношений. В книгах [2, 3] приведено большое количество интересных задач и их решений, полученных в пакете FlexPDE. Они могут служить хорошими примерами для курса «Концепции современного естествознания».

Литература

1. *Хайрер Э., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи.—М.: Мир, 1999.—685 с.
2. *Backstrom, G.* Simple Fields of Physics by Finite Element Analysis.—Stockholm: GB Publ., 2005.—324 p.
3. *Backstrom, G.* Deformation and Vibration by Finite Element Analysis: Problems in 2D and 3D Solved by the Free Edition of FlexPDE.—Stockholm: GB Publ., 2007.—240 p.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

DSTU — Don State Technical University
ENS de Lyon — École Normale Supérieure de Lyon
JSC "Concern "Sozvezdie" — Joint Stock Company "Concern "Sozvezdie"
IMM UrB RAS — Institute of Mathematics and Mechanics, the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
LIH SB RAS — Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences
MSU — Lomonosov Moscow State University
PNU — Vasyl Stefanyk Precarpathian National University
PFUR — Peoples' Friendship University of Russia
TarSU — Taraz State University named after M. Kh. Dulaty
UrFU — Ural Federal University (Institute of Mathematics and Computer Science)
VSPU — Voronezh State Pedagogical University
VSU — Voronezh State University
VUT — Vaal University of Technology
АлтГУ — Алтайский государственный университет
АСОУ — Академия социального управления
АФ ННГУ — Арзамасский филиал Нижегородского государственного университета имени Н. И. Лобачевского
БГУ — Брянский государственный университет имени академика И. Г. Петровского
БелГУ — Белорусский государственный университет
БухГУ — Бухарский государственный университет
ВГУ — Воронежский государственный университет
ВИТИ НИЯУ МИФИ — Волгодонский инженерно-технический институт (филиал) Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ»
ВИ МВД — Воронежский институт МВД России
ВНЦ РАН — Владикавказский научный центр Российской академии наук
ВоГУ — Вологодский государственный университет
ГосНИИАС — Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем
ДГТУ — Донской государственный технический университет
ДГУ — Дагестанский государственный университет
ЕГУ им. И. А. БУНИНА — Елецкий государственный университет имени И. А. Бунина
ИМ АН РТ — Институт математики Академии наук Республики Таджикистан
ИПГ ДНЦ РАН — Институт проблем геотермии Дагестанского научного центра Российской академии наук
ИПМА — Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук
ИПМ им. М. В. Келдыша РАН — Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша Российской академии наук

ИРО Краснодарского края — Институт развития образования Краснодарского края

ИСОиП (филиал) ДГТУ — Институт сферы обслуживания и предпринимательства (филиал) Донского государственного технического университета

ИТ (филиал) ДГТУ — Институт технологий (филиал) Донского государственного технического университета в г. Волгодонске

КГУ им. Н. А. Некрасова — Костромской государственный университет имени Н. А. Некрасова

КНИТУ–КАИ — Казанский национальный исследовательский технический университет имени А. Н. Туполева (Казанский авиационный институт)

Концерн «Океанприбор» — Акционерное общество «Концерн «Океанприбор»

КФУ — Казанский (Приволжский) федеральный университет

ЛГТУ — Липецкий государственный технический университ

Лицей ФТШ — Лицей «Физико-техническая школа» Академического университета

МГПИ — Мордовский государственный педагогический институт имени М. Е. Евсевьева

МГТУ МИРЭА — Московский технологический университет (Московский институт радиотехники, электроники и автоматики)

МГТУ — Международный гуманитарно-технический университет

МГУПС (МИИТ) — Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ)

МКТУ —Международный казахско-турецкий университет имени Х. А. Ясави

МПГУ — Московский педагогический государственный университет

МУДО «ЦВР» — Муниципальное учреждение дополнительного образования «Центр внешкольной работы г. Зеленокумска Советского района»

НИИ МВС ЮФУ — Научно-исследовательский институт многопроцессорных вычислительных систем имени академика А. В. Каляева Южного федерального университета

НИЦ СЭ и НК — Научно-исследовательский центр супер-ЭВМ и нейрокомпьютеров

МАИ (НИУ) — Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

МЭИ (НИУ) — Московский энергетический институт (национальный исследовательский университет)

ОГУ — Орловский государственный университет имени И. С. Тургенева

ПГУПС — Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I

РАНХиГС — Российская Академия Народного Хозяйства и Государственной Службы при Президенте Российской федерации

РГУ им. С. А. Есенина — Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина

РГЭУ (РИНХ) — Ростовский государственный экономический университет (РИНХ)

РИИ АлтГТУ — Рубцовский индустриальный институт (филиал) Алтайского государственного технического университета имени И. И. Ползунова

СамНЦ РАН — Самарский научный центр Российской академии наук

Самарский университет — Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева

СОГУ — Северо-Осетинский государственный университет имени К. Л. Хетагурова

СОШ № 1 ст. Архонская — МБОУ «СОШ № 1 имени Героя СоветскогоСоюза П. В. Масленникова ст. Архонская»

СПбГУ — Санкт-Петербургский государственный университет

СПИИРАН — Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН

СФ БашГУ — Стерлитамакский филиал Башкирского государсвенного университета

СыктГУ — Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина

ТНУ — Таджикский национальный университет

ФерГУ — Ферганский государственный универстиет

Филиал МГУ в Душанбе — Таджикский филиал Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Филиал РГЭУ (РИНХ) — Таганрогский институт имени А. П. Чехова (филиал) «Ростовского государственного экономического университета (РИНХ)»

Финансовый университет — Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации

ЦИРННТ АН РТ — Центр инновационного развития науки и новыхтехнологий Академии наук Республики Таджикистан

ЦЭМИ РАН — Центральный экономико-математический институт Российской академии наук

ЧГУ — Чеченский государственный университет

ЮГУ — Югорский государственный университет

ЮМИ — Южный математический институт Владикавказского научного центра Российской академии наук

ЮНЦ РАН — Южный научный центр Российской академии наук

ЮРГПУ (НПИ) — Южно-Российский государственный политехнический университет имени М. И. Платова (Новочеркасский политехнический институт)

ЮФУ — Южный федеральный университет

ЯГПУ — Ярославский государственный педагогический университет имени К. Д. Ушинского

ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ, КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ:

тезисы докладов
XIII Международной научной конференции
(пос. Дивноморское, 7–14 сентября 2016 г.)

Компьютерная верстка:
М. У. Вазагаева,
И. С. Гаприндашвили

Зав. редакцией: В. В. Кибизова

ЮМИ ВНЦ РАН
362027, г. Владикавказ, ул. Маркуса, 22.

ISBN 978-5-904695-37-8

9 785904 695378