

УДК 517.5

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ПО НЕТОЧНЫМ ИСХОДНЫМ ДАННЫМ

Е. А. БАЛОВА

АННОТАЦИЯ. В работе рассматривается задача оптимального восстановления решения задачи Дирихле в d -мерном шаре на сфере радиуса r по неточно заданным следам решения на сферах радиусов R_1 и R_2 , $R_1 < r < R_2$. Изучается также задача оптимального восстановления решения задачи Дирихле в d -мерном шаре по конечному набору коэффициентов Фурье граничной функции, заданных с погрешностью в среднеквадратичной и равномерной метриках.

В работах [1] и [2] (см. также [3]–[5]) было начато исследование ряда модельных задач восстановления решений уравнений математической физики на основе методов теории оптимального восстановления. При этом использовался общий подход к задачам оптимального восстановления линейных операторов по неточной информации об элементах, к которым применялись эти операторы, разработанный в работах [6] и [7]. В данной работе продолжено изучение ряда задач оптимального восстановления решений уравнений математической физики по неточным исходным данным на примере задачи Дирихле в d -мерном единичном шаре. Пусть

$$\mathbb{B}^d = \left\{ x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : |x|^2 = \sum_{j=1}^d x_j^2 < 1 \right\},$$

функция $u(\cdot)$ — решение задачи Дирихле в \mathbb{B}^d :

$$(1) \quad \begin{aligned} \Delta u &= 0, \\ u|_{\mathbb{S}^{d-1}} &= f(x'), \end{aligned}$$

где

$$\mathbb{S}^{d-1} = \{ x' = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : |x'| = 1 \},$$

а $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Предположим, что нам известны две функции $y_1(\cdot), y_2(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ такие, что

$$\|u(R_j x') - y_j(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta_j, \quad j = 1, 2, \quad 0 < R_1 < R_2 \leq 1.$$

Требуется по этим функциям наилучшим образом восстановить решение задачи (1) на сфере радиуса r , где $R_1 < r < R_2$. В качестве

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №06-01-81004.

методов восстановления будем рассматривать всевозможные отображения $\varphi: L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \times L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \rightarrow L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Погрешностью данного метода φ назовем величину

$$e_r(R_1, R_2, \delta_1, \delta_2, \varphi) = \sup_{\substack{f(\cdot), y_1(\cdot), y_2(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \\ \|u(R_j x') - y_j(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta_j, j=1,2}} \|u(rx') - \varphi(y_1, y_2)(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E_r(R_1, R_2, \delta_1, \delta_2, \varphi) = \inf_{\varphi: L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \times L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \rightarrow L_2(\mathbb{S}^{d-1})} e_r(R_1, R_2, \delta_1, \delta_2, \varphi),$$

а метод, на котором достигается нижняя грань называется оптимальным.

Известно (см. [8]), что $L_2(\mathbb{S}^{d-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} H_k$, где $\dim H_0 = a_0 = 1$,

$$\dim H_k = a_k = (2k + d - 2) \frac{(k + d - 3)!}{(d - 2)! k!}, \quad k = 1, 2, \dots$$

(H_k — множество сферических гармоник порядка k). Выберем в H_k ортонормированный базис $\{Y_j^{(k)}(\cdot)\}_{j=1}^{a_k}$.

Теорема 1. Пусть $0 < R_1 < r < R_2 < 1$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$. Положим

$$(2) \quad \begin{aligned} \widehat{\lambda}_1 &= \begin{cases} \left(\frac{r}{R_1}\right)^{2(m-1)} \frac{R_2^2 - r^2}{R_2^2 - R_1^2}, & \delta_1 < \delta_2, \\ 0, & \delta_1 \geq \delta_2, \end{cases} \\ \widehat{\lambda}_2 &= \begin{cases} \left(\frac{r}{R_2}\right)^{2(m-1)} \frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}, & \delta_1 < \delta_2, \\ 1, & \delta_1 \geq \delta_2, \end{cases} \end{aligned}$$

где m — натуральное число, удовлетворяющее неравенству

$$\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^m \leq \frac{\delta_1}{\delta_2} < \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{m-1}.$$

Тогда

$$E_r(R_1, R_2, \delta_1, \delta_2) = \sqrt{\widehat{\lambda}_1 \delta_1^2 + \widehat{\lambda}_2 \delta_2^2},$$

а метод

$$\varphi(y_1, y_2)(x') = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \sum_{j=0}^{a_k} \frac{\widehat{\lambda}_1 R_1^k y_{kj}^{(1)} + \widehat{\lambda}_2 R_2^k y_{kj}^{(2)}}{\widehat{\lambda}_1 R_1^{2k} + \widehat{\lambda}_2 R_2^{2k}} Y_j^{(k)}(x'),$$

где

$$y_{kj}^{(i)} = \int_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} y_i(x') Y_j^{(k)}(x') dx', \quad i = 1, 2,$$

является оптимальным.

Доказательство. Рассмотрим экстремальную задачу

$$(3) \quad \|u(rx')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 \rightarrow \max, \quad \|u(R_i x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 \leq \delta_i^2, \quad i = 1, 2, \\ f(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}),$$

где $u(\cdot)$ — решение задачи (1). Если

$$(4) \quad f(x') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x'),$$

то решение задачи (1) записывается в виде

$$(5) \quad u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}\left(\frac{x}{|x|}\right),$$

где $r = |x|$, $x = rx'$. Тем самым задача (3) имеет следующий вид

$$(6) \quad \sum_{k=0}^{\infty} r^{2k} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 \rightarrow \max, \quad \sum_{k=0}^{\infty} R_i^{2k} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 \leq \delta_i^2, \quad i = 1, 2.$$

Положим

$$u_k = \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2.$$

Тогда задача (6) будет иметь вид

$$(7) \quad \sum_{k=0}^{\infty} r^{2k} u_k \rightarrow \max, \quad \sum_{k=0}^{\infty} R_i^{2k} u_k \leq \delta_i^2, \quad i = 1, 2, \\ u_k \geq 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Рассмотрим функцию Лагранжа для этой задачи

$$\mathcal{L}(u, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{k=0}^{\infty} (-r^{2k} + \lambda_1 R_1^{2k} + \lambda_2 R_2^{2k}) u_k, \quad u = \{u_k\}_{k=0}^{\infty}.$$

Из результатов, полученных в работе [7] (см. также [9]), вытекает, что если найдутся такие $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2 \geq 0$, что для допустимой в задаче (7) последовательности $\hat{u} = \{\hat{u}_k\}_{k=0}^{\infty}$ выполнены условия

$$(a) \quad \min_{u_k \geq 0} \mathcal{L}(u, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) = \mathcal{L}(\hat{u}, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2), \\ (b) \quad \hat{\lambda}_i \left(\sum_{k=1}^{\infty} R_i^{2k} \hat{u}_k - \delta_i^2 \right) = 0, \quad i = 1, 2,$$

то \hat{u} — решение задачи (7), а ее значение равно $\hat{\lambda}_1 \delta_1^2 + \hat{\lambda}_2 \delta_2^2$. Если при этом для всех $y_1(\cdot), y_2(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ существует решение $f_{y_1, y_2}(\cdot)$

экстремальной задачи

$$(8) \quad \widehat{\lambda}_1 \|u(R_1 x') - y_1(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 + \widehat{\lambda}_2 \|u(R_2 x') - y_2(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 \rightarrow \min, \quad f(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$$

(где по-прежнему $u(\cdot)$ — решение задачи (1)), то

$$E_r(R_1, R_2, \delta_1, \delta_2) = \sqrt{\widehat{\lambda}_1 \delta_1^2 + \widehat{\lambda}_2 \delta_2^2},$$

а метод

$$\varphi(y_1, y_2)(x') = u_{y_1, y_2}(r x'),$$

где $u_{y_1, y_2}(\cdot)$ — решение задачи (1) с граничной функцией $f_{y_1, y_2}(\cdot)$, является оптимальным.

Запишем функцию Лагранжа в виде

$$\mathcal{L}(u, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{k=0}^{\infty} r^{2k} g(k) u_k,$$

где

$$g(t) = -1 + \lambda_1 \left(\frac{R_1}{r}\right)^{2t} + \lambda_2 \left(\frac{R_2}{r}\right)^{2t}.$$

Пусть $\delta_1 < \delta_2$ и $m \in \mathbb{N}$ таково, что

$$\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^m \leq \frac{\delta_1}{\delta_2} < \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{m-1}.$$

Нетрудно проверить, что для $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$, определенных равенством (2), функция $g(t)$ при $t = m - 1, m$ равна нулю. Так как функция $g(\cdot)$ является выпуклой, то $g(k) \geq 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, при всех $u_k \geq 0$, $k = 0, 1, \dots$,

$$\mathcal{L}(u, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) \geq 0.$$

Положим $\widehat{u}_k = 0$, $k \neq m - 1, m$,

$$\widehat{u}_{m-1} = R_1^2 R_2^2 \frac{\delta_1^2 R_1^{-2m} - \delta_2^2 R_2^{-2m}}{R_2^2 - R_1^2}, \quad \widehat{u}_m = \frac{\delta_2^2 R_2^{-2(m-1)} - \delta_1^2 R_1^{-2(m-1)}}{R_2^2 - R_1^2}.$$

Тогда

$$\mathcal{L}(\widehat{u}, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = 0,$$

и, следовательно, условие (a) выполнено. Непосредственной проверкой можно убедиться, что условия (b) также выполняются. Тем самым \widehat{u} — решение задачи (7).

Если $\delta_1 \geq \delta_2$, то положим

$$\widehat{\lambda}_1 = 0, \quad \widehat{\lambda}_2 = 1, \quad \widehat{u}_0 = \delta^2, \quad \widehat{u}_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Нетрудно проверить, что определенные так \widehat{u} , $\widehat{\lambda}_1$, $\widehat{\lambda}_2$ удовлетворяют условиям (a), (b) и \widehat{u} — допустимая в (7) последовательность, а, следовательно, \widehat{u} — решение задачи (7).

Перейдем к решению задачи (8). Она может быть записана в виде

$$\widehat{\lambda}_1 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} (R_1^k c_{kj} - y_{kj}^{(1)})^2 + \widehat{\lambda}_2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} (R_2^k c_{kj} - y_{kj}^{(2)})^2 \rightarrow \min,$$

$$f(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}),$$

где c_{kj} — коэффициенты Фурье $f(\cdot)$ (см. (4)). Решая эту задачу, получаем, что

$$f_{y_1, y_2}(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \frac{\widehat{\lambda}_1 R_1^k y_{kj}^{(1)} + \widehat{\lambda}_2 R_2^k y_{kj}^{(2)}}{\widehat{\lambda}_1 R_1^{2k} + \widehat{\lambda}_2 R_2^{2k}} Y_j^{(k)}(x'),$$

а метод

$$\varphi(y_1, y_2)(x') = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \sum_{j=1}^{a_k} \frac{\widehat{\lambda}_1 R_1^k y_{kj}^{(1)} + \widehat{\lambda}_2 R_2^k y_{kj}^{(2)}}{\widehat{\lambda}_1 R_1^{2k} + \widehat{\lambda}_2 R_2^{2k}} Y_j^{(k)}(x')$$

является оптимальным. \square

Займемся теперь восстановлением решения задачи Дирихле, когда известен конечный набор приближенно заданных коэффициентов Фурье граничной функции. Более точно, предположим, что для любой функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ известен вектор

$$\begin{aligned} \widetilde{f}^N &= \{y_{kj}\}, \quad k = 0, 1, \dots, n_0 - 1, \quad j = 1, \dots, a_k, \\ & \quad k = n_0, \quad j = 1, \dots, J_{n_0}, \quad 0 \leq J_{n_0} < a_{n_0}, \\ & \quad N = a_0 + \dots + a_{n_0-1} + J_{n_0}, \end{aligned}$$

такой, что

$$\|\widetilde{f}^N - f^N\|_{l_p^N} \leq \delta,$$

где $\delta > 0$,

$$\begin{aligned} f^N &= \{c_{kj}\}, \quad k = 0, 1, \dots, n_0 - 1, \quad j = 1, \dots, a_k, \\ & \quad k = n_0, \quad j = 1, \dots, J_{n_0}, \quad 0 \leq J_{n_0} < a_{n_0}, \end{aligned}$$

c_{kj} — коэффициенты Фурье функции $f(\cdot)$ (см. (4)) и для $a = (a_1, \dots, a_N)$

$$\|a\|_{l_p^N} = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^N |a_k|^p \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \max_{k=1, \dots, N} |a_k|, & p = \infty. \end{cases}$$

Наша задача заключается в том, чтобы по информации о векторе \widetilde{f}^N восстановить решение задачи (1). Будем предполагать, что функция $f(\cdot)$ принадлежит обобщенному соболевскому классу

$$W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}) = \{f(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}) : \|(-\Delta_S)^{\beta/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq 1\},$$

где для произвольного $\beta > 0$ оператор $(-\Delta_S)^{\beta/2}$ определяется равенством

$$(-\Delta_S)^{\beta/2}Y(x') = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^{\beta/2} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x')$$

для

$$Y(x') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x'),$$

а $-\Lambda_k = -k(k+d-2)$ — собственные числа оператора Бельтрами-Лапласа Δ_S (см. [8]). В качестве методов восстановления рассмотрим всевозможные операторы $\varphi: l_p^N \rightarrow L_2(\mathbb{B}^d)$. Назовем погрешностью восстановления метода φ величину

$$\begin{aligned} e_{N,p}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta, \varphi) \\ = \sup_{f(\cdot) \in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1})} \sup_{\substack{\tilde{f}^N \in l_p^N \\ \|f^N - \tilde{f}^N\|_{l_p^N} \leq \delta}} \|u(\cdot) - \varphi(\tilde{f}^N)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}. \end{aligned}$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E_{N,p}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta) = \inf_{\varphi: l_p^N \rightarrow L_2(\mathbb{B}^d)} e_{N,p}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta, \varphi),$$

а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным.

Рассмотрим сначала случай $p = 2$.

Теорема 2. Пусть δ и β — произвольные положительные числа, $N = a_0 + \dots + a_{n_0-1} + J_{n_0}$, $0 \leq J_{n_0} < a_{n_0}$, $n_0 > 0$. Тогда

$$E_{N,2}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta) = \sqrt{\frac{\delta^2}{d} + \frac{1}{\Lambda_{n_0}^\beta(2n_0 + d)}},$$

а метод

$$\varphi(\tilde{f}^N)(x) = \sum_{k=0}^{n_0-1} |x|^k \left(1 + \frac{d}{2n_0 + d} \left(\frac{\Lambda_k}{\Lambda_{n_0}} \right)^\beta \right)^{-1} \sum_{j=1}^{a_k} y_{kj} Y_j^{(k)} \left(\frac{x}{|x|} \right)$$

является оптимальным.

Доказательство. Рассмотрим экстремальную задачу

$$(9) \quad \|u(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}^2 \rightarrow \max, \quad \|f^N\|_{l_2^N}^2 \leq \delta^2, \\ \|(-\Delta_S)^{\beta/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 \leq 1,$$

где $u(\cdot)$ — решение задачи (1). Ее можно переписать в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+d} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 \rightarrow \max, \quad \sum_{k=0}^{n_0-1} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 + \sum_{j=1}^{J_{n_0}} c_{n_0j}^2 \leq \delta^2,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^\beta \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 \leq 1.$$

Введем обозначения

$$u_k = \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2, \quad u'_{n_0} = \sum_{j=1}^{J_{n_0}} c_{n_0j}^2.$$

В новых обозначениях получим задачу

$$(10) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k}{2k+d} \rightarrow \max, \quad \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + u'_{n_0} \leq \delta^2,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^\beta u_k \leq 1, \quad u_k \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad u_{n_0} \geq u'_{n_0} \geq 0.$$

Введем для задачи (10) функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(\{u_k\}_0^\infty, u'_{n_0}, \mu_1, \mu_2) = \sum_{k=0}^{n_0-1} \left(-\frac{1}{2k+d} + \mu_1 + \mu_2 \Lambda_k^\beta \right) u_k$$

$$+ \mu_1 u'_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2k+d} + \mu_2 \Lambda_k^\beta \right) u_k.$$

Для рассматриваемого случая из работ [7], [9] следует, что если найдутся неотрицательные $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$ и допустимые в (10) $\{\hat{u}_k\}_0^\infty, \hat{u}'_{n_0}$ такие, что

$$(a) \quad \min_{\substack{u_k \geq 0 \\ u_{n_0} \geq u'_{n_0} \geq 0}} \mathcal{L}(\{u_k\}_0^\infty, u'_{n_0}, \hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2) = \mathcal{L}(\{\hat{u}_k\}_0^\infty, \hat{u}'_{n_0}, \hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2),$$

$$(b) \quad \hat{\mu}_1 \left(\sum_{k=0}^{n_0-1} \hat{u}_k + \hat{u}'_{n_0} - \delta^2 \right) + \hat{\mu}_2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^\beta \hat{u}_k - 1 \right) = 0,$$

то $\{\hat{u}_k\}_0^\infty$ — решение задачи (10). Если при этом для любого фиксированного вектора $\tilde{f}^N \in l_2^N$ существует решение $\tilde{f}(\cdot)$ экстремальной задачи

$$(11) \quad \hat{\mu}_1 \|f^N - \tilde{f}^N\|_{l_2^N}^2 + \hat{\mu}_2 \|(-\Delta_S)^{\beta/2} f\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 \rightarrow \min,$$

$$f(\cdot) \in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}),$$

то метод, задаваемый формулой (5) при $f(\cdot) = \tilde{f}(\cdot)$, является оптимальным, а для погрешности оптимального восстановления имеет место равенство

$$(12) \quad E_{N,2}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta) = \sqrt{\hat{\mu}_1 \delta^2 + \hat{\mu}_2}.$$

Положим

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{d}, \quad \hat{\mu}_2 = \frac{1}{\Lambda_{n_0}^\beta(2n_0 + d)}, \quad \hat{u}_0 = \delta^2, \quad \hat{u}_{n_0} = \frac{1}{\Lambda_{n_0}^\beta}, \quad \hat{u}'_{n_0} = 0, \\ \hat{u}_k = 0, \quad k \neq 0, n_0.$$

Нетрудно убедиться в том, что определенные так $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \{\hat{u}_k\}_0^\infty, \hat{u}'_{n_0}$ удовлетворяют условию (b). Подставляя в функцию Лагранжа $\hat{\mu}_1$ и $\hat{\mu}_2$, убеждаемся в том, что $\mathcal{L}(\{u_k\}_0^\infty, u'_{n_0}, \hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2) \geq 0$ для всех допустимых в (10) $\{u_k\}_0^\infty$ и u'_{n_0} , а $\mathcal{L}(\{\hat{u}_k\}_0^\infty, \hat{u}'_{n_0}, \hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2) = 0$, то есть и условие (a) тоже выполнено.

Для построения оптимального метода решим экстремальную задачу (11), которая может быть представлена в виде

$$\hat{\mu}_1 \left(\sum_{k=0}^{n_0-1} \sum_{j=1}^{a_k} (c_{kj} - y_{kj})^2 + \sum_{j=1}^{J_{n_0}} (c_{n_0j} - y_{n_0j})^2 \right) + \hat{\mu}_2 \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^\beta \sum_{j=1}^{\infty} c_{kj}^2 \rightarrow \min.$$

Решив эту задачу, после подстановки значений $\hat{\mu}_1$ и $\hat{\mu}_2$ получим

$$\hat{c}_{kj} = \left(1 + \frac{\Lambda_k^\beta d}{\Lambda_{n_0}^\beta(2n_0 + d)} \right)^{-1} y_{kj}, \quad k = 0, 1, \dots, n_0 - 1, \quad j = 1, \dots, a_k, \\ k = n_0, \quad j = 1, \dots, J_{n_0}; \quad \hat{c}_{kj} = 0, \quad k = n_0, \quad j = J_{n_0+1}, \dots, a_{n_0}, \\ k \geq n_0 + 1, \quad j = 1, \dots, a_k.$$

Подставляя эти выражения в формулу (5), получаем, что метод

$$\varphi_1(\tilde{f}^N)(x) = \sum_{k=0}^{n_0-1} |x|^k \left(1 + \frac{d}{2n_0 + d} \left(\frac{\Lambda_k}{\Lambda_{n_0}} \right)^\beta \right)^{-1} \sum_{j=1}^{a_k} y_{kj} Y_j^{(k)} \left(\frac{x}{|x|} \right) \\ + |x|^{n_0} \frac{2n_0 + d}{2(n_0 + d)} \sum_{j=1}^{J_{n_0}} y_{n_0j} Y_j^{(n_0)} \left(\frac{x}{|x|} \right)$$

является оптимальным. Подставляя в формулу (12) $\hat{\mu}_1$ и $\hat{\mu}_2$, получаем

$$E_{N,2}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta) = \sqrt{\frac{\delta^2}{d} + \frac{1}{\Lambda_{n_0}^\beta(2n_0 + d)}}.$$

Покажем, что метод

$$\varphi(\tilde{f}^N)(x) = \sum_{k=0}^{n_0-1} |x|^k \left(1 + \frac{d}{2n_0 + d} \left(\frac{\Lambda_k}{\Lambda_{n_0}} \right)^\beta \right)^{-1} \sum_{j=1}^{a_k} y_{kj} Y_j^{(k)} \left(\frac{x}{|x|} \right),$$

используя меньший объем информации, также является оптимальным. Рассмотрим задачу (9) для $J_{n_0} = 0$. Положим

$$N_1 = \sum_{k=0}^{n_0-1} a_k.$$

По доказанному выше метод

$$\varphi(\tilde{f}^{N_1})(x) = \sum_{k=0}^{n_0-1} |x|^k \left(1 + \frac{d}{2n_0 + d} \left(\frac{\Lambda_k}{\Lambda_{n_0}} \right)^\beta \right)^{-1} \sum_{j=1}^{a_k} y_{kj} Y_j^{(k)} \left(\frac{x}{|x|} \right)$$

является оптимальным для этого случая и

$$E_{N_1,2}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta) = \sqrt{\frac{\delta^2}{d} + \frac{1}{\Lambda_{n_0}^\beta(2n_0 + d)}}.$$

Используя определение оптимального метода и погрешности оптимального восстановления, а также учитывая, что

$$\|f^{N_1} - \tilde{f}^{N_1}\|_{l_2^{N_1}} \leq \|f^N - \tilde{f}^N\|_{l_2^N}$$

и

$$\varphi(\tilde{f}^{N_1})(x) \equiv \varphi(\tilde{f}^N)(x),$$

имеем

$$\begin{aligned} E_{N_1,2}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta) &= \sup_{f(\cdot) \in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1})} \sup_{\substack{\tilde{f}^{N_1} \in l_2^{N_1} \\ \|f^{N_1} - \tilde{f}^{N_1}\|_{l_2^{N_1}} \leq \delta}} \|u(\cdot) - \varphi(\tilde{f}^{N_1})(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)} \\ &\geq \sup_{f \in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1})} \sup_{\substack{\tilde{f}^N \in l_2^N \\ \|f^N - \tilde{f}^N\|_{l_2^N} \leq \delta}} \|u(\cdot) - \varphi(\tilde{f}^N)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)} \\ &\geq \sup_{f \in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1})} \sup_{\substack{\tilde{f}^{N_1} \in l_2^{N_1} \\ \|f^{N_1} - \tilde{f}^{N_1}\|_{l_2^{N_1}} \leq \delta}} \|u(x) - \varphi_1(\tilde{f}^N)(x)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)} = \\ &= E_{N,2}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta), \end{aligned}$$

В силу равенства

$$E_{N_1,2}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta) = E_{N,2}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta),$$

получаем, что метод $\varphi(\tilde{f}^N)(\cdot)$ является оптимальным. \square

Из доказанной теоремы следует, что можно построить оптимальный метод, не использующий коэффициенты y_{n_0j} , $j = 1, \dots, J_{n_0}$, если $J_{n_0} > 0$ (то есть количество коэффициентов в последней группе меньше размерности H_{n_0} .)

Перейдем к случаю равномерной метрики ($p = \infty$).

Теорема 3. Пусть δ и β — произвольные положительные числа, $N = a_0 + \dots + a_{n_0-1} + J_{n_0}$, $0 \leq J_{n_0} < a_{n_0}$, $n_0 > 0$. Положим $\hat{m} = \min\{m_0, n_0\}$, где

$$m_0 = \max \left\{ m \in \mathbb{Z} : \delta^2 \sum_{k=1}^{m-1} a_k \Lambda_k^\beta < 1 \right\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & E_{N,\infty}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta) \\ &= \sqrt{\delta^2 \sum_{k=0}^{\hat{m}-1} \left(\frac{1}{2k+d} - \left(\frac{\Lambda_k}{\Lambda_{\hat{m}}} \right)^\beta \frac{1}{2\hat{m}+d} \right) + \frac{1}{\Lambda_{\hat{m}}^\beta (2\hat{m}+d)}}, \end{aligned}$$

а метод

$$(13) \quad \varphi(\tilde{f}^N)(x) = \sum_{k=0}^{\hat{m}-1} |x|^k \sum_{j=1}^{a_k} \left(1 - \frac{2k+d}{2\hat{m}+d} \left(\frac{\Lambda_k}{\Lambda_{\hat{m}}} \right)^\beta \right) y_{kj} Y_j^{(k)} \left(\frac{x}{|x|} \right)$$

является оптимальным.

Доказательство. Рассмотрим экстремальную задачу

$$(14) \quad \|u\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}^2 \rightarrow \max, \quad \|f^N\|_{l_N^2}^2 \leq \delta, \quad \|(-\Delta_S)^{\beta/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 \leq 1.$$

Ее можно записать в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+d} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 \rightarrow \max, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^\beta \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 \leq 1,$$

$$c_{kj}^2 \leq \delta^2, \quad k = 0, 1, \dots, n_0 - 1, j = 1, \dots, a_k, \quad k = n_0, j = 1, \dots, J_{n_0}.$$

Введем обозначения $c_{kj}^2 = v_{kj}$. Задача (14) в этих переменных имеет вид

$$(15) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+d} \sum_{j=1}^{a_k} v_{kj} \rightarrow \max, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^\beta \sum_{j=1}^{a_k} v_{kj} \leq 1, \\ v_{kj} \leq \delta^2, \quad k = 0, 1, \dots, n_0 - 1, j = 1, \dots, a_k, \quad k = n_0, j = 1, \dots, J_{n_0}, \\ v_{kj} \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots, j = 1, \dots, a_k.$$

Рассмотрим Функцию Лагранжа для этой задачи

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(v, \mu, \lambda) = & \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2k+d} + \lambda \Lambda_k^\beta \right) \sum_{j=1}^{a_k} v_{kj} + \sum_{k=0}^{n_0-1} \sum_{j=1}^{a_k} \mu_{kj} v_{kj} \\ & + \sum_{j=1}^{J_{n_0}} \mu_{n_0j} v_{n_0j}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} v &= \{v_{kj}\}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad j = 1, \dots, a_k, \\ \mu &= \{\mu_{kj}\}, \quad k = 0, 1, \dots, n_0 - 1, \quad j = 1, \dots, a_k, \quad k = n_0, \quad j = 1, \dots, J_{n_0}. \end{aligned}$$

Используя те же общие результаты из работ [7] и [9], что и в предыдущих доказательствах, сводим задачу к нахождению неотрицательных $\hat{\mu}_{kj}$, $\hat{\lambda}$ и допустимых в задаче (15) \hat{v}_{kj} таких, что

$$\begin{aligned} (a) \quad & \min_{v_{kj} \geq 0} \mathcal{L}(v, \hat{\mu}, \hat{\lambda}) = \mathcal{L}(\hat{v}, \hat{\mu}, \hat{\lambda}), \\ (b) \quad & \sum_{k=0}^{n_0-1} \sum_{j=1}^{a_k} \hat{\mu}_{kj} (\hat{v}_{kj} - \delta^2) + \sum_{j=1}^{J_{n_0}} \hat{\mu}_{n_0j} (\hat{v}_{n_0j} - \delta^2) \\ & + \hat{\lambda} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^\beta \sum_{j=1}^{a_k} \hat{v}_{kj} - 1 \right) = 0. \end{aligned}$$

Если при этом для любого фиксированного вектора $\tilde{f}^N \in l_\infty^N$ существует решение $\tilde{f}(\cdot)$ экстремальной задачи

$$\begin{aligned} (16) \quad & \sum_{k=0}^{n_0-1} \sum_{j=1}^{a_k} \hat{\mu}_{kj} (c_{kj} - y_{kj})^2 + \sum_{j=1}^{J_{n_0}} \hat{\mu}_{n_0j} (c_{n_0j} - y_{n_0j})^2 \\ & + \hat{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_k^\beta \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 \rightarrow \min, \quad f(\cdot) \in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}) \end{aligned}$$

(c_{kj} — коэффициенты Фурье функции $f(\cdot)$), то метод, задаваемый формулой (5) при $f(\cdot) = \tilde{f}(\cdot)$, является оптимальным и

$$(17) \quad E_{N,\infty}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta) = \sqrt{\delta^2 \left(\sum_{k=0}^{n_0-1} \sum_{j=1}^{a_k} \hat{\mu}_{kj} + \sum_{j=1}^{J_{n_0}} \hat{\mu}_{n_0j} \right) + \hat{\lambda}}.$$

Положим

$$\begin{aligned} \hat{v}_{kj} &= \delta^2, \quad k = 0, 1, \dots, m_0 - 1, \quad j = 1, \dots, a_k, \\ \hat{v}_{m_0,j} &= \frac{1 - \delta^2 \sum_{k=1}^{m_0-1} a_k \Lambda_k^\beta}{a_{m_0} \Lambda_{m_0}^\beta}, \quad j = 1, \dots, a_{m_0}, \\ \hat{v}_{kj} &= 0, \quad k > m_0, \quad j = 1, \dots, a_k. \end{aligned}$$

Докажем допустимость последовательности \hat{v} . При $m_0 \leq n_0$ (в случае, когда $m_0 \geq n_0 + 1$, это очевидно) докажем, что $\hat{v}_{m_0j} \leq \delta^2$,

$j = 1, \dots, a_{m_0}$. Если предположить противное, то

$$\frac{1 - \delta^2 \sum_{k=1}^{m_0-1} a_k \Lambda_k^\beta}{a_{m_0} \Lambda_{m_0}^\beta} > \delta^2.$$

Отсюда вытекает, что

$$\delta^2 \sum_{k=1}^{m_0} a_k \Lambda_k^\beta < 1,$$

что противоречит пределению m_0 . Положим

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{\Lambda_{\widehat{m}}^\beta (2\widehat{m} + d)}, \quad \widehat{\mu}_{kj} = \frac{1}{2k + d} - \frac{1}{2\widehat{m} + d} \left(\frac{\Lambda_k}{\Lambda_{\widehat{m}}} \right)^k, \\ k = 0, 1, \dots, \widehat{m} - 1, \quad j = 1, \dots, a_k.$$

Остальные $\widehat{\mu}_{kj}$ положим равными 0. Подставляя в функцию Лагранжа $\widehat{\mu}$, $\widehat{\lambda}$ и \widehat{v} , нетрудно проверить, что $\mathcal{L}(v, \widehat{\mu}, \widehat{\lambda}) \geq 0$ для всех допустимых v и $\mathcal{L}(\widehat{v}, \widehat{\mu}, \widehat{\lambda}) = 0$. Тем самым условие (a) выполнено. Непосредственная проверка показывает, что условие (b) тоже выполнено.

Перейдем к построению оптимального метода. Для этого рассмотрим задачу (16). Ее решением будут коэффициенты

$$\widehat{c}_{kj} = \frac{\widehat{\mu}_{kj}}{\widehat{\mu}_{kj} + \widehat{\lambda} \Lambda_k^\beta} y_{kj}, \quad k = 0, 1, \dots, \widehat{m} - 1, \quad j = 1, \dots, a_k, \\ \widehat{c}_{kj} = 0, \quad k \geq \widehat{m}, \quad j = 1, \dots, a_k.$$

Подставляя эти коэффициенты в формулу (5) и учитывая вид $\widehat{\mu}_{kj}$ и $\widehat{\lambda}$, получаем, что метод (13) является оптимальным. Подставляя $\widehat{\mu}_{kj}$ и $\widehat{\lambda}$ в формулу (17), получаем выражение для $E_{N,\infty}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta)$. \square

Пусть фиксирована погрешность $\delta > 0$ вычисления коэффициентов Фурье граничной функции $f(\cdot)$ в задаче Дирихле. Из теоремы 3 вытекает, что для максимально точного восстановления решения задачи Дирихле по приближенным значениям коэффициентов Фурье функции $f(\cdot)$ требуется знание первых $\sum_{k=0}^{m_0-1} a_k$ коэффициентов Фурье. Вычисление следующих коэффициентов Фурье (при условии, что они вычисляются с той же погрешностью) не приводит к уменьшению погрешности оптимального восстановления. Аналогичный эффект насыщения наблюдается в задачах оптимального восстановления производных по неточным коэффициентам Фурье (см. [6]) и при оптимальном восстановлении решения уравнения теплопроводности по неточной информации о начальной температуре (см. [1]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., Тихомиров В. М. On optimal recovery of heat equation solutions. In: Approximation Theory: A volume dedicated to V. Bojanov (D. K. Dimitrov, G. Nikolov, and R. Uluhev, Eds.), 163–175, Sofia: Marin Drinov Academic Publishing House, 2004.
- [2] Осипенко К. Ю. О восстановлении решения задачи Дирихле по неточным исходным данным // Владикавказский мат. журн. 2004. Т. 6, вып. 4. С. 55–62.
- [3] Введенская Е. В. Об оптимальном восстановлении решения уравнения теплопроводности по неточно заданной температуре в различные моменты времени // Владикавказский мат. журн. 2006. Т. 8, вып. 1. С. 16–21.
- [4] Балова Е. А. Об оптимальном восстановлении решения задачи Дирихле в кольце // Владикавказский мат. журн. 2006. Т. 8, вып. 2. С. 15–23.
- [5] Быск Н. Д., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление решения волнового уравнения по неточным начальным данным // Матем. заметки. 2006.
- [6] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью // Матем. сб. 2002. Т. 193. №3. С. 79–100.
- [7] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функ. анализ и его прил. 2003. Т. 37. С. 51–64.
- [8] Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М: Мир, 1974.
- [9] Осипенко К. Ю. Неравенство Харди–Литтлвуда–Поля для аналитических функций из пространств Харди–Соболева // Матем. сб. 2006. Т. 197. №3. С. 15–34.

МАТИ — РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. К. Э. ЦИОЛКОВСКОГО