УДК 517.5

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ПО НЕТОЧНЫМ ИСХОДНЫМ ДАННЫМ

Е. А. БАЛОВА

Аннотация. В работе рассматривается задача оптимального восстановления решения задачи Дирихле в d-мерном шаре на сфере радиуса r по неточно заданным следам решения на сферах радиусов R_1 и R_2, $R_1 < r < R_2$. Изучается также задача оптимального восстановления решения задачи Дирихле в d-мерном шаре по конечному набору коэффициентов Фурье граничной функции, заданных с погрешностью в среднеквадратичной и равномерной метриках.

В работах [1] и [2] (см. также [3]–[5]) было начато исследование ряда модельных задач восстановления решений уравнений математической физики на основе методов теории оптимального восстановления. При этом использовался общий подход к задачам оптимального восстановления линейных операторов по неточной информации об элементах, к которым применялись эти операторы, разработанный в работах [6] и [7]. В данной работе продолжено изучение ряда задач оптимального восстановления решений уравнений математической физики по неточным исходным данным на примере задачи Дирихле в d-мерном единичном шаре. Пусть

$$\mathbb{B}^d = \left\{ x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : |x|^2 = \sum_{j=1}^{d} x_j^2 < 1 \right\},$$

функция $u(\cdot)$ — решение задачи Дирихле в $\mathbb{B}^d$:

$$\begin{gathered} \Delta u = 0, \\ u\big|_{\mathbb{S}^{d-1}} = f(x'), \end{gathered} \tag{1}$$

где

$$\mathbb{S}^{d-1} = \left\{ x' = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : |x'| = 1 \right\},$$

а $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Предположим, что нам известны две функции $y_1(\cdot), y_2(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ такие, что

$$\|u(R_j x') - y_j(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \le \delta_j, \quad j = 1, 2, \quad 0 < R_1 < R_2 \le 1.$$

Требуется по этим функциям наилучшим образом восстановить решение задачи (1) на сфере радиуса r, где $R_1 < r < R_2$. В качестве

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №06–01–81004.

методов восстановления будем рассматривать всевозможные отображения $\varphi\colon L_2(\mathbb{S}^{d-1})\times L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \to L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Погрешностью данного метода φ назовем величину

$$e_r(R_1,R_2,\delta_1,\delta_2,\varphi) = \sup_{\substack{f(\cdot),y_1(\cdot),y_2(\cdot)\in L_2(\mathbb{S}^{d-1})\\ \|u(R_jx')-y_j(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}\le\delta_j,\ j=1,2}} \|u(rx')-\varphi(y_1,y_2)(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E_r(R_1,R_2,\delta_1,\delta_2,\varphi) = \inf_{\varphi\colon L_2(\mathbb{S}^{d-1})\times L_2(\mathbb{S}^{d-1})\to L_2(\mathbb{S}^{d-1})} e_r(R_1,R_2,\delta_1,\delta_2,\varphi),$$

а метод, на котором достигается нижняя грань называется оптимальным.

Известно (см. [8]), что $L_2(\mathbb{S}^{d-1}) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} H_k$, где $\dim H_0 = a_0 = 1$,

$$\dim H_k = a_k = (2k+d-2)\frac{(k+d-3)!}{(d-2)!\,k!}, \quad k=1,2,\dots$$

(H_k — множество сферических гармоник порядка k). Выберем в H_k ортонормированный базис $\{Y_j^{(k)}(\cdot)\}_{j=1}^{a_k}$.

Теорема 1. *Пусть* $0<R_1<r<R_2<1$, $\delta_1>0,\delta_2>0$. *Положим*

$$\widehat{\lambda}_1 = \begin{cases} \left(\dfrac{r}{R_1}\right)^{2(m-1)} \dfrac{R_2^2-r^2}{R_2^2-R_1^2}, & \delta_1<\delta_2,\\ 0, & \delta_1\ge\delta_2, \end{cases}$$

(2)

$$\widehat{\lambda}_2 = \begin{cases} \left(\dfrac{r}{R_2}\right)^{2(m-1)} \dfrac{r^2-R_1^2}{R_2^2-R_1^2}, & \delta_1<\delta_2,\\ 1 & \delta_1\ge\delta_2, \end{cases},$$

где m—натуральное число, удовлетворяющее неравенству

$$\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^m \le \frac{\delta_1}{\delta_2} < \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{m-1}.$$

Тогда

$$E_r(R_1,R_2,\delta_1,\delta_2) = \sqrt{\widehat{\lambda}_1\delta_1^2+\widehat{\lambda}_2\delta_2^2},$$

а метод

$$\varphi(y_1,y_2)(x') = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \sum_{j=0}^{a_k} \frac{\widehat{\lambda}_1R_1^ky_{kj}^{(1)}+\widehat{\lambda}_2R_2^ky_{kj}^{(2)}}{\widehat{\lambda}_1R_1^{2k}+\widehat{\lambda}_2R_2^{2k}} Y_j^{(k)}(x'),$$

где

$$y_{kj}^{(i)} = \int_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} y_i(x')Y_j^{(k)}(x')\,dx', \quad i=1,2,$$

является оптимальным.

Доказательство. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\|u(rx')\|^2_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \to \max, \quad \|u(R_ix')\|^2_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \le \delta_i^2,\ i=1,2, \quad f(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}), \tag{3}$$

где $u(\cdot)$ — решение задачи (1). Если

$$f(x') = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x'), \tag{4}$$

то решение задачи (1) записывается в виде

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}\left(\frac{x}{|x|}\right), \tag{5}$$

где $r=|x|,\ x=rx'$. Тем самым задача (3) имеет следующий вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^{2k} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 \to \max, \quad \sum_{k=0}^{\infty} R_i^{2k} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 \le \delta_i^2,\ i=1,2. \tag{6}$$

Положим

$$u_k = \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2.$$

Тогда задача (6) будет иметь вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^{2k} u_k \to \max, \quad \sum_{k=0}^{\infty} R_i^{2k} u_k \le \delta_i^2,\ i=1,2, \quad u_k \ge 0,\ k=0,1,2,\ldots\ . \tag{7}$$

Рассмотрим функцию Лагранжа для этой задачи

$$\mathcal{L}(u,\lambda_1,\lambda_2) = \sum_{k=0}^{\infty}(-r^{2k} + \lambda_1 R_1^{2k} + \lambda_2 R_2^{2k})u_k, \quad u = \{u_k\}_{k=0}^{\infty}.$$

Из результатов, полученных в работе [7] (см. также [9]), вытекает, что если найдутся такие $\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2 \ge 0$, что для допустимой в задаче (7) последовательности $\widehat{u} = \{\widehat{u}_k\}_{k=0}^{\infty}$ выполнены условия

$$(a) \quad \min_{u_k \ge 0} \mathcal{L}(u, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = \mathcal{L}(\widehat{u}, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2),$$

$$(b) \quad \widehat{\lambda}_i\left(\sum_{k=1}^{\infty} R_i^{2k}\widehat{u}_k - \delta_i^2\right) = 0, \quad i=1,2,$$

то $\widehat{u}$ — решение задачи (7), а ее значение равно $\widehat{\lambda}_1\delta_1^2 + \widehat{\lambda}_2\delta_2^2$. Если при этом для всех $y_1(\cdot), y_2(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ существует решение $f_{y_1,y_2}(\cdot)$

экстремальной задачи

$$(8)\quad \widehat{\lambda}_1\|u(R_1x')-y_1(x')\|^2_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \\ +\widehat{\lambda}_2\|u(R_2x')-y_2(x')\|^2_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}\to\min,\quad f(\cdot)\in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$$

(где по-прежнему $u(\cdot)$ — решение задачи (1)), то

$$E_r(R_1,R_2,\delta_1,\delta_2)=\sqrt{\widehat{\lambda}_1\delta_1^2+\widehat{\lambda}_2\delta_2^2},$$

а метод

$$\varphi(y_1,y_2)(x')=u_{y_1,y_2}(rx'),$$

где $u_{y_1,y_2}(\cdot)$ — решение задачи (1) с граничной функцией $f_{y_1,y_2}(\cdot)$, является оптимальным.

Запишем функцию Лагранжа в виде

$$\mathcal{L}(u,\lambda_1,\lambda_2)=\sum_{k=0}^{\infty}r^{2k}g(k)u_k,$$

где

$$g(t)=-1+\lambda_1\left(\frac{R_1}{r}\right)^{2t}+\lambda_2\left(\frac{R_2}{r}\right)^{2t}.$$

Пусть $\delta_1<\delta_2$ и $m\in\mathbb{N}$ таково, что

$$\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^m\le\frac{\delta_1}{\delta_2}<\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{m-1}.$$

Нетрудно проверить, что для $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$, определенных равенством (2), функция $g(t)$ при $t=m-1,m$ равна нулю. Так как функция $g(\cdot)$ является выпуклой, то $g(k)\ge 0$ при всех $k\in\mathbb{N}$. Следовательно, при всех $u_k\ge 0$, $k=0,1,\ldots,$

$$\mathcal{L}(u,\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2)\ge 0.$$

Положим $\widehat{u}_k=0$, $k\ne m-1,m,$

$$\widehat{u}_{m-1}=R_1^2R_2^2\frac{\delta_1^2R_1^{-2m}-\delta_2^2R_2^{-2m}}{R_2^2-R_1^2},\quad \widehat{u}_m=\frac{\delta_2^2R_2^{-2(m-1)}-\delta_1^2R_1^{-2(m-1)}}{R_2^2-R_1^2}.$$

Тогда

$$\mathcal{L}(\widehat{u},\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2)=0,$$

и, следовательно, условие (a) выполнено. Непосредственной проверкой можно убедиться, что условия (b) также выполняются. Тем самым $\widehat{u}$ — решение задачи (7).

Если $\delta_1\ge\delta_2$, то положим

$$\widehat{\lambda}_1=0,\quad \widehat{\lambda}_2=1,\quad \widehat{u}_0=\delta^2,\quad \widehat{u}_k=0,\ k=1,2,\ldots\,.$$

Нетрудно проверить, что определенные так $\widehat{u}$, $\widehat{\lambda}_1$, $\widehat{\lambda}_2$ удовлетворяют условиям $(a),(b)$ и $\widehat{u}$ — допустимая в (7) последовательность, а, следовательно, $\widehat{u}$ — решение задачи (7).

Перейдем к решению задачи (8). Она может быть записана в виде

$$\widehat{\lambda}_1 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} (R_1^k c_{kj} - y_{kj}^{(1)})^2 + \widehat{\lambda}_2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} (R_2^k c_{kj} - y_{kj}^{(2)})^2 \to \min, \qquad f(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}),$$

где c_{kj} — коэффициенты Фурье $f(\cdot)$ (см. (4)). Решая эту задачу, получаем, что

$$f_{y_1,y_2}(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \frac{\widehat{\lambda}_1 R_1^k y_{kj}^{(1)} + \widehat{\lambda}_2 R_2^k y_{kj}^{(2)}}{\widehat{\lambda}_1 R_1^{2k} + \widehat{\lambda}_2 R_2^{2k}} Y_j^{(k)}(x'),$$

а метод

$$\varphi(y_1, y_2)(x') = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \sum_{j=1}^{a_k} \frac{\widehat{\lambda}_1 R_1^k y_{kj}^{(1)} + \widehat{\lambda}_2 R_2^k y_{kj}^{(2)}}{\widehat{\lambda}_1 R_1^{2k} + \widehat{\lambda}_2 R_2^{2k}} Y_j^{(k)}(x')$$

является оптимальным. □

Займемся теперь восстановлением решения задачи Дирихле, когда известен конечный набор приближенно заданных коэффициентов Фурье граничной функции. Более точно, предположим, что для любой функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ известен вектор

$$\widetilde{f}^N = \{y_{kj}\}, \ k = 0, 1, \ldots, n_0 - 1, \ j = 1, \ldots, a_k, \quad k = n_0, \ j = 1, \ldots, J_{n_0}, \ 0 \le J_{n_0} < a_{n_0}, \quad N = a_0 + \ldots + a_{n_0 - 1} + J_{n_0},$$

такой, что

$$\|\widetilde{f}^N - f^N\|_{l_p^N} \le \delta,$$

где $\delta > 0$,

$$f^N = \{c_{kj}\}, \ k = 0, 1, \ldots, n_0 - 1, \ j = 1, \ldots, a_k, \quad k = n_0, \ j = 1, \ldots, J_{n_0}, \ 0 \le J_{n_0} < a_{n_0},$$

c_{kj} — коэффициенты Фурье функции $f(\cdot)$ (см. (4)) и для $a = (a_1, \ldots, a_N)$

$$\|a\|_{l_p^N} = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{N} |a_k|^p \right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \max\limits_{k=1,\ldots,N} |a_k|, & p = \infty. \end{cases}$$

Наша задача заключается в том, чтобы по информации о векторе $\widetilde{f}^N$ восстановить решение задачи (1). Будем предполагать, что функция $f(\cdot)$ принадлежит обобщенному соболевскому классу

$$W_2^{\beta}(\mathbb{S}^{d-1}) = \left\{ f(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}) : \|(-\Delta_S)^{\beta/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \le 1 \right\},$$

где для произвольного $\beta > 0$ оператор $(-\Delta_S)^{\beta/2}$ определяется равенством

$$(-\Delta_S)^{\beta/2}Y(x') = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^{\beta/2} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x')$$

для

$$Y(x') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x'),$$

а $-\Lambda_k = -k(k+d-2)$ — собственные числа оператора Бельтрами-Лапласа Δ_S (см. [8]). В качестве методов восстановления рассмотрим всевозможные операторы $\varphi\colon l_p^N \to L_2(\mathbb{B}^d)$. Назовем погрешностью восстановления метода φ величину

$$e_{N,p}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta, \varphi) = \sup_{f(\cdot)\in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1})} \sup_{\substack{\widetilde{f}^N \in l_p^N \\ \|f^N - \widetilde{f}^N\|_{l_p^N} \le \delta}} \|u(\cdot) - \varphi(\widetilde{f}^N)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E_{N,p}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta) = \inf_{\varphi\colon l_p^N \to L_2(\mathbb{B}^d)} e_{N,p}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta, \varphi),$$

а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным.

Рассмотрим сначала случай $p = 2$.

Теорема 2. *Пусть δ и β — произвольные положительные числа, $N = a_0 + \ldots + a_{n_0-1} + J_{n_0}$, $0 \le J_{n_0} < a_{n_0}$, $n_0 > 0$. Тогда*

$$E_{N,2}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta) = \sqrt{\frac{\delta^2}{d} + \frac{1}{\Lambda_{n_0}^\beta(2n_0+d)}},$$

а метод

$$\varphi(\widetilde{f}^N)(x) = \sum_{k=0}^{n_0-1} |x|^k \left(1 + \frac{d}{2n_0+d}\left(\frac{\Lambda_k}{\Lambda_{n_0}}\right)^\beta\right)^{-1} \sum_{j=1}^{a_k} y_{kj} Y_j^{(k)}\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

является оптимальным.

Доказательство. Рассмотрим экстремальную задачу

$$(9)\quad \|u(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{B}^d)} \to \max, \quad \|f^N\|^2_{l_2^N} \le \delta^2, \quad \|(-\Delta_S)^{\beta/2} f(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \le 1,$$

где $u(\cdot)$ — решение задачи (1). Ее можно переписать в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+d}\sum_{j=1}^{a_k}c_{kj}^2\to\max,\quad \sum_{k=0}^{n_0-1}\sum_{j=1}^{a_k}c_{kj}^2+\sum_{j=1}^{J_{n_0}}c_{n_0j}^2\le\delta^2,$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\Lambda_k^{\beta}\sum_{j=1}^{a_k}c_{kj}^2\le 1.$$

Введем обозначения

$$u_k=\sum_{j=1}^{a_k}c_{kj}^2,\quad u'_{n_0}=\sum_{j=1}^{J_{n_0}}c_{n_0j}^2.$$

В новых обозначениях получим задачу

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u_k}{2k+d}\to\max,\quad \sum_{k=0}^{n_0-1}u_k+u'_{n_0}\le\delta^2,\tag{10}$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\Lambda_k^{\beta}u_k\le 1,\quad u_k\ge 0,\ k=0,1,\dots,\quad u_{n_0}\ge u'_{n_0}\ge 0.$$

Введем для задачи (10) функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(\{u_k\}_0^{\infty},u'_{n_0},\mu_1,\mu_2)=\sum_{k=0}^{n_0-1}\left(-\frac{1}{2k+d}+\mu_1+\mu_2\Lambda_k^{\beta}\right)u_k$$
$$+\mu_1u'_{n_0}+\sum_{k=n_0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2k+d}+\mu_2\Lambda_k^{\beta}\right)u_k.$$

Для рассматриваемого случая из работ [7], [9] следует, что если найдутся неотрицательные $\widehat{\mu}_1,\widehat{\mu}_2$ и допустимые в (10) $\{\widehat{u}_k\}_0^{\infty},\widehat{u}'_{n_0}$ такие, что

$$(a)\qquad \min_{\substack{u_k\ge 0\\ u_{n_0}\ge u'_{n_0}\ge 0}}\mathcal{L}(\{u_k\}_0^{\infty},u'_{n_0},\widehat{\mu}_1,\widehat{\mu}_2)=\mathcal{L}(\{\widehat{u}_k\}_0^{\infty},\widehat{u}'_{n_0},\widehat{\mu}_1,\widehat{\mu}_2),$$

$$(b)\qquad \widehat{\mu}_1\left(\sum_{k=0}^{n_0-1}\widehat{u}_k+\widehat{u}'_{n_0}-\delta^2\right)+\widehat{\mu}_2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\Lambda_k^{\beta}\widehat{u}_k-1\right)=0,$$

то $\{\widehat{u}_k\}_0^{\infty}$ — решение задачи (10). Если при этом для любого фиксированного вектора $\widetilde{f}^N\in l_2^N$ существует решение $\widetilde{f}(\cdot)$ экстремальной задачи

$$\widehat{\mu}_1\|f^N-\widetilde{f}^N\|_{l_2^N}^2+\widehat{\mu}_2\|(-\Delta_S)^{\beta/2}f\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2\to\min,\tag{11}$$
$$f(\cdot)\in W_2^{\beta}(\mathbb{S}^{d-1}),$$

то метод, задаваемый формулой (5) при $f(\cdot) = \widetilde{f}(\cdot)$, является оптимальным, а для погрешности оптимального восстановления имеет место равенство

$$E_{N,2}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta) = \sqrt{\widehat{\mu}_1\delta^2 + \widehat{\mu}_2}. \tag{12}$$

Положим

$$\widehat{\mu}_1 = \frac{1}{d}, \quad \widehat{\mu}_2 = \frac{1}{\Lambda_{n_0}^\beta(2n_0+d)}, \quad \widehat{u}_0 = \delta^2, \quad \widehat{u}_{n_0} = \frac{1}{\Lambda_{n_0}^\beta}, \quad \widehat{u}'_{n_0} = 0,$$
$$\widehat{u}_k = 0, \ k \neq 0, n_0.$$

Нетрудно убедиться в том, что определенные так $\widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2, \{\widehat{u}_k\}_0^\infty, \widehat{u}'_{n_0}$ удовлетворяют условию (b). Подставляя в функцию Лагранжа $\widehat{\mu}_1$ и $\widehat{\mu}_2$, убеждаемся в том, что $\mathcal{L}(\{u_k\}_0^\infty, u'_{n_0}, \widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2) \geq 0$ для всех допустимых в (10) $\{u_k\}_0^\infty$ и u'_{n_0}, а $\mathcal{L}(\{\widehat{u}_k\}_0^\infty, \widehat{u}'_{n_0}, \widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2) = 0$, то есть и условие (a) тоже выполнено.

Для построения оптимального метода решим экстремальную задачу (11), которая может быть представлена в виде

$$\widehat{\mu}_1\left(\sum_{k=0}^{n_0-1}\sum_{j=1}^{a_k}(c_{kj}-y_{kj})^2 + \sum_{j=1}^{J_{n_0}}(c_{n_0j}-y_{n_0j})^2\right) + \widehat{\mu}_2\sum_{k=1}^\infty \Lambda_k^\beta \sum_{j=1}^\infty c_{kj}^2 \to \min.$$

Решив эту задачу, после подстановки значений $\widehat{\mu}_1$ и $\widehat{\mu}_2$ получим

$$\widehat{c}_{kj} = \left(1 + \frac{\Lambda_k^\beta d}{\Lambda_{n_0}^\beta(2n_0+d)}\right)^{-1} y_{kj}, \ k = 0, 1, \dots, n_0-1, \ j = 1, \dots, a_k,$$
$$k = n_0, \ j = 1, \dots, J_{n_0}; \quad \widehat{c}_{kj} = 0, \ k = n_0, \ j = J_{n_0+1}, \dots, a_{n_0},$$
$$k \geq n_0+1, \ j = 1, \dots, a_k.$$

Подставляя эти выражения в формулу (5), получаем, что метод

$$\varphi_1(\widetilde{f}^N)(x) = \sum_{k=0}^{n_0-1} |x|^k \left(1 + \frac{d}{2n_0+d}\left(\frac{\Lambda_k}{\Lambda_{n_0}}\right)^\beta\right)^{-1} \sum_{j=1}^{a_k} y_{kj} Y_j^{(k)}\left(\frac{x}{|x|}\right)$$
$$+ |x|^{n_0}\frac{2n_0+d}{2(n_0+d)}\sum_{j=1}^{J_{n_0}} y_{n_0j}Y_j^{(n_0)}(\frac{x}{|x|})$$

является оптимальным. Подставляя в формулу (12) $\widehat{\mu}_1$ и $\widehat{\mu}_2$, получаем

$$E_{N,2}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta) = \sqrt{\frac{\delta^2}{d} + \frac{1}{\Lambda_{n_0}^\beta(2n_0+d)}}\ .$$

Покажем, что метод

$$\varphi(\widetilde{f}^N)(x) = \sum_{k=0}^{n_0-1} |x|^k \left(1 + \frac{d}{2n_0+d}\left(\frac{\Lambda_k}{\Lambda_{n_0}}\right)^\beta\right)^{-1} \sum_{j=1}^{a_k} y_{kj} Y_j^{(k)}\left(\frac{x}{|x|}\right),$$

используя меньший объем информации, также является оптимальным. Рассмотрим задачу (9) для $J_{n_0} = 0$. Положим

$$N_1 = \sum_{k=0}^{n_0-1} a_k.$$

По доказанному выше метод

$$\varphi(\widetilde{f}^{N_1})(x) = \sum_{k=0}^{n_0-1} |x|^k \left(1 + \frac{d}{2n_0+d}\left(\frac{\Lambda_k}{\Lambda_{n_0}}\right)^\beta\right)^{-1} \sum_{j=1}^{a_k} y_{kj} Y_j^{(k)}\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

является оптимальным для этого случая и

$$E_{N_1,2}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta) = \sqrt{\frac{\delta^2}{d} + \frac{1}{\Lambda_{n_0}^\beta(2n_0+d)}}.$$

Используя определение оптимального метода и погрешности оптимального восстановления, а также учитывая, что

$$\|f^{N_1} - \widetilde{f}^{N_1}\|_{l_2^{N_1}} \le \|f^N - \widetilde{f}^N\|_{l_2^N}$$

и

$$\varphi(\widetilde{f}^{N_1})(x) \equiv \varphi(\widetilde{f}^N)(x),$$

имеем

$$\begin{aligned}
&E_{N_1,2}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta)\\
&= \sup_{f(\cdot)\in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1})} \sup_{\substack{\widetilde{f}^{N_1}\in\, l_2^{N_1}\\ \|f^{N_1}-\widetilde{f}^{N_1}\|_{l_2^{N_1}}\le\delta}} \|u(\cdot) - \varphi(\widetilde{f}^{N_1})(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}\\
&\ge \sup_{f\in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1})} \sup_{\substack{\widetilde{f}^{N}\in\, l_2^{N}\\ \|f^{N}-\widetilde{f}^{N}\|_{l_2^{N}}\le\delta}} \|u(\cdot) - \varphi(\widetilde{f}^{N})(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}\\
&\ge \sup_{f\in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1})} \sup_{\substack{\widetilde{f}^{N_1}\in\, l_2^{N_1}:\\ \|f^{N_1}-\widetilde{f}^{N_1}\|_{l_2^{N_1}}\le\delta}} \|u(x) - \varphi_1(\widetilde{f}^{N})(x)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)} =\\
&\qquad = E_{N,\,2}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta),
\end{aligned}$$

В силу равенства

$$E_{N_1,2}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta) = E_{N,2}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta),$$

получаем, что метод $\varphi(\widetilde{f}^N)(\cdot)$ является оптимальным. □

Из доказанной теоремы следует, что можно построить оптимальный метод, не использующий коэффициенты $y_{n_0 j}, j = 1, \dots, J_{n_0}$, если $J_{n_0} > 0$(то есть количество коэффициентов в последней группе меньше размерности H_{n_0}.)

Перейдем к случаю равномерной метрики ($p = \infty$).

Теорема 3. *Пусть δ и β — произвольные положительные числа, $N = a_0 + \ldots + a_{n_0-1} + J_{n_0}$, $0 \le J_{n_0} < a_{n_0}$, $n_0 > 0$. Положим $\widehat{m} = \min\{m_0, n_0\}$, где*

$$m_0 = \max\left\{m \in \mathbb{Z} : \delta^2 \sum_{k=1}^{m-1} a_k \Lambda_k^{\beta} < 1\right\}.$$

Тогда

$$E_{N,\infty}(W_2^{\beta}(\mathbb{S}^{d-1}), \delta) = \sqrt{\delta^2 \sum_{k=0}^{\widehat{m}-1} \left(\frac{1}{2k+d} - \left(\frac{\Lambda_k}{\Lambda_{\widehat{m}}}\right)^{\beta} \frac{1}{2\widehat{m}+d}\right) + \frac{1}{\Lambda_{\widehat{m}}^{\beta}(2\widehat{m}+d)}}\ ,$$

а метод

$$\varphi(\widetilde{f}^N)(x) = \sum_{k=0}^{\widehat{m}-1} |x|^k \sum_{j=1}^{a_k} \left(1 - \frac{2k+d}{2\widehat{m}+d}\left(\frac{\Lambda_k}{\Lambda_{\widehat{m}}}\right)^{\beta}\right) y_{kj} Y_j^{(k)}\left(\frac{x}{|x|}\right) \tag{13}$$

является оптимальным.

Доказательство. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\|u\|^2_{L_2(\mathbb{B}^d)} \to \max, \quad \|f^N\|^2_{l_\infty^N} \le \delta, \quad \|(-\Delta_S)^{\beta/2} f(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \le 1. \tag{14}$$

Ее можно записать в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+d} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 \to \max, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^{\beta} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 \le 1,$$

$$c_{kj}^2 \le \delta^2,\ k = 0, 1, \ldots, n_0 - 1, j = 1, \ldots, a_k,\ k = n_0, j = 1, \ldots, J_{n_0}.$$

Введем обозначения $c_{kj}^2 = v_{kj}$. Задача (14) в этих переменных имеет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+d} \sum_{j=1}^{a_k} v_{kj} \to \max, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^{\beta} \sum_{j=1}^{a_k} v_{kj} \le 1, \tag{15}$$

$$v_{kj} \le \delta^2, k = 0, 1, \ldots, n_0 - 1, j = 1, \ldots, a_k, k = n_0, j = 1, \ldots, J_{n_0},$$
$$v_{kj} \ge 0, \quad k = 0, 1, \ldots,\ j = 1, \ldots, a_k.$$

Рассмотрим Функцию Лагранжа для этой задачи

$$\mathcal{L}(v, \mu, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2k+d} + \lambda \Lambda_k^{\beta}\right) \sum_{j=1}^{a_k} v_{kj} + \sum_{k=0}^{n_0-1} \sum_{j=1}^{a_k} \mu_{kj} v_{kj} + \sum_{j=1}^{J_{n_0}} \mu_{n_0 j} v_{n_0 j},$$

где

$$
\begin{aligned}
&v=\{v_{kj}\}, \quad k=0,1,\dots,\ j=1,...,a_k,\\
&\mu=\{\mu_{kj}\}, k=0,1,\dots,n_0-1, j=1,\dots,a_k, k=n_0, j=1,\dots,J_{n_0}.
\end{aligned}
$$

Используя те же общие результаты из работ [7] и [9], что и в предыдущих доказательствах, сводем задачу к нахождению неотрицательных $\widehat{\mu}_{kj}$, $\widehat{\lambda}$ и допустимых в задаче (15) $\widehat{v}_{kj}$ таких, что

$$
\begin{aligned}
&(a) \quad \min_{v_{kj}\ge 0}\mathcal{L}(v,\widehat{\mu},\widehat{\lambda})=\mathcal{L}(\widehat{v},\widehat{\mu},\widehat{\lambda}),\\
&(b) \quad \sum_{k=0}^{n_0-1}\sum_{j=1}^{a_k}\widehat{\mu}_{kj}(\widehat{v}_{kj}-\delta^2)+\sum_{j=1}^{J_{n_0}}\widehat{\mu}_{n_0j}(\widehat{v}_{n_0j}-\delta^2)\\
&\qquad\qquad +\widehat{\lambda}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\Lambda_k^{\beta}\sum_{j=1}^{a_k}\widehat{v}_{kj}-1\right)=0.
\end{aligned}
$$

Если при этом для любого фиксированного вектора $\widetilde{f}^N\in l_\infty^N$ существует решение $\widetilde{f}(\cdot)$ экстремальной задачи

$$
\begin{aligned}
(16) \quad &\sum_{k=0}^{n_0-1}\sum_{j=1}^{a_k}\widehat{\mu}_{kj}(c_{kj}-y_{kj})^2+\sum_{j=1}^{J_{n_0}}\widehat{\mu}_{n_0j}(c_{n_0j}-y_{n_0j})^2\\
&\qquad +\widehat{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\Lambda_k^{\beta}\sum_{j=1}^{a_k}c_{kj}^2\to\min, \quad f(\cdot)\in W_2^{\beta}(\mathbb{S}^{d-1})
\end{aligned}
$$

(c_{kj} — коэффициенты Фурье функции $f(\cdot)$), то метод, задаваемый формулой (5) при $f(\cdot)=\widetilde{f}(\cdot)$, является оптимальным и

$$
(17) \qquad E_{N,\infty}(W_2^{\beta}(\mathbb{S}^{d-1}),\delta)=\sqrt{\delta^2\left(\sum_{k=0}^{n_0-1}\sum_{j=1}^{a_k}\widehat{\mu}_{kj}+\sum_{j=1}^{J_{n_0}}\widehat{\mu}_{n_0j}\right)+\widehat{\lambda}}\,.
$$

Положим

$$
\begin{aligned}
&\widehat{v}_{kj}=\delta^2, \quad k=0,1,\dots,m_0-1,\ j=1,\dots,a_k,\\
&\widehat{v}_{m_0,j}=\frac{1-\delta^2\displaystyle\sum_{k=1}^{m_0-1}a_k\Lambda_k^{\beta}}{a_{m_0}\Lambda_{m_0}^{\beta}}\,, \quad j=1,\dots,a_{m_0},\\
&\widehat{v}_{kj}=0,\ k>m_0,\ j=1,...,a_k.
\end{aligned}
$$

Докажем допустимость последовательности $\widehat{v}$. При $m_0\le n_0$ (в случае, когда $m_0\ge n_0+1$, это очевидно) докажем, что $\widehat{v}_{m_0j}\le\delta^2$,

$j = 1, \dots, a_{m_0}$. Если предположить противное, то

$$\frac{1 - \delta^2 \sum_{k=1}^{m_0-1} a_k \Lambda_k^\beta}{a_{m_0} \Lambda_{m_0}^\beta} > \delta^2.$$

Отсюда вытекает, что

$$\delta^2 \sum_{k=1}^{m_0} a_k \Lambda_k^\beta < 1,$$

что противоречит пределению m_0. Положим

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{\Lambda_{\widehat{m}}^\beta (2\widehat{m} + d)}\ , \quad \widehat{\mu}_{kj} = \frac{1}{2k+d} - \frac{1}{2\widehat{m} + d} \left(\frac{\Lambda_k}{\Lambda_{\widehat{m}}} \right)^k,$$
$$k = 0, 1, \dots, \widehat{m} - 1,\ j = 1, \dots, a_k.$$

Остальные $\widehat{\mu}_{kj}$ положим равными 0. Подставляя в функцию Лагранжа $\widehat{\mu}$, $\widehat{\lambda}$ и $\widehat{v}$, нетрудно проверить, что $\mathcal{L}(v, \widehat{\mu}, \widehat{\lambda}) \geq 0$ для всех допустимых v и $\mathcal{L}(\widehat{v}, \widehat{\mu}, \widehat{\lambda}) = 0$. Тем самым условие (a) выполнено. Непосредственная проверка показывает, что условие (b) тоже выполнено.

Перейдем к построению оптимального метода. Для этого рассмотрим задачу (16). Ее решением будут коэффициенты

$$\widehat{c}_{kj} = \frac{\widehat{\mu}_{kj}}{\widehat{\mu}_{kj} + \widehat{\lambda} \Lambda_k^\beta}\, y_{kj}, \quad k = 0, 1, \dots, \widehat{m} - 1,\ j = 1, \dots, a_k,$$
$$\widehat{c}_{kj} = 0, \quad k \geq \widehat{m},\ j = 1, \dots, a_k.$$

Подставляя эти коэффициенты в формулу (5) и учитывая вид $\widehat{\mu}_{kj}$ и $\widehat{\lambda}$, получаем, что метод (13) является оптимальным. Подставляя $\widehat{\mu}_{kj}$ и $\widehat{\lambda}$ в формулу (17), получаем выражение для $E_{N,\infty}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta)$. $\square$

Пусть фиксирована погрешность $\delta > 0$ вычисления коэффициентов Фурье граничной функции $f(\cdot)$ в задаче Дирихле. Из теоремы 3 вытекает, что для максимально точного восстановления решения задачи Дирихле по приближенным значениям коэффициентов Фурье функции $f(\cdot)$ требуется знание первых $\sum_{k=0}^{m_0-1} a_k$ коэффициентов Фурье. Вычисление следующих коэффициентов Фурье (при условии, что они вычисляются с той же погрешностью) не приводит к уменьшению погрешности оптимального восстановления. Аналогичный эффект насыщения наблюдается в задачах оптимального восстановления производных по неточным коэффициентам Фурье (см. [6]) и при оптимальном восстановлении решения уравнения теплопроводности по неточной информации о начальной температуре (см. [1]).

Список литературы

[1] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., Тихомиров В. М. On optimal recovery of heat equation solutions. In: Approximation Theory: A volume dedicated to B. Bojanov (D. K. Dimitrov, G. Nikolov, and R. Uluchev, Eds.), 163–175, Sofia: Marin Drinov Academic Publishing House, 2004.

[2] Осипенко К. Ю. О восстановлении решения задачи Дирихле по неточным исходным данным // Владикавказский мат. журн. 2004. Т. 6, вып. 4. С. 55–62.

[3] Введенская Е. В. Об оптимальном восстановлении решения уравнения теплопроводности по неточно заданной температуре в различные моменты времени // Владикавказский мат. журн. 2006. Т. 8, вып. 1. С. 16–21.

[4] Балова Е. А. Об оптимальном восстановлении решения задачи Дирихле в кольце // Владикавказский мат. журн. 2006. Т. 8, вып. 2. С. 15–23.

[5] Выск Н. Д., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление решения волнового уравнения по неточным начальным данным // Матем. заметки. 2006.

[6] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью // Матем. сб. 2002. Т. 193. №3. С. 79–100.

[7] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функ. анализ и его прил. 2003. Т. 37. С. 51–64.

[8] Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М: Мир, 1974.

[9] Осипенко К. Ю. Неравенство Харди–Литтлвуда–Полиа для аналитических функций из пространств Харди–Соболева // Матем. сб. 2006. Т. 197. №3. С. 15–34.

МАТИ — Российский государственный технологический университет им. К. Э. Циолковского