

# О ВОССТАНОВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В $d$ -МЕРНОМ ШАРОВОМ ПОЯСЕ ПО НЕТОЧНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЯМ

Е. А. БАЛОВА

Рассматривается задача оптимального восстановления решения задачи Дирихле в  $d$ -мерном шаровом поясе  $D_1 = \{x \in \mathbb{R}^d : 0 < R < |x| < 1\}$  по конечному набору коэффициентов Фурье граничных функций, заданных с погрешностью в  $l_2$  и  $l_\infty$ -нормах для  $d \geq 3$  (задача для  $d = 2$  была рассмотрена в работе [5].) При решении были использованы методы и результаты, полученные в работах [1], [2], [3] и [4].

Рассматривается задача Дирихле

$$(1) \quad \Delta u = 0, \quad u|_{|x|=R} = f_1(x'), \quad u|_{|x|=1} = f_2(x'),$$

где

$$x' \in \mathbb{S}^{d-1} = \{x' \in \mathbb{R}^d : |x'| = 1\}, \quad f_i(x') \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}), \quad i = 1, 2.$$

Функции  $f_1(x'), f_2(x') \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$  заданы своими рядами Фурье

$$(2) \quad f_i(x') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^{(i)} Y_j^{(k)}(x'), \quad i = 1, 2,$$

где  $Y_j^{(k)}(x')$ —ортонормированный базис пространства  $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$  из сферических гармоник,  $a_k$ —размерность пространства  $\mathcal{H}_k$  гармоник порядка  $k$ . Функции  $f_1(x')$  и  $f_2(x')$  заданы неточно. Предполагается, что известны векторы

$$\tilde{f}_i^N = \{y_{kj}^{(i)}\}, \quad k = 0, 1, \dots, k_0, \quad j = 1, \dots, a_k, \quad N = \sum_{k=0}^{k_0} a_k, \quad i = 1, 2$$

такие, что

$$\|\tilde{f}_i^N - f_i^N\|_{l_p^N} \leq \delta_i, \quad \delta_i > 0, \quad f_i^N = \{c_{kj}^{(i)}\}, \quad k = 0, 1, \dots, k_0, \quad j = 1, \dots, a_k,$$

где  $c_{kj}^{(i)}$  — коэффициенты Фурье функций  $f_i(x')$ ,  $i = 1, 2$  и для  $a = (a_1, \dots, a_N)$

$$\|a\|_{l_p^N} = \begin{cases} \left( \sum_{k=1}^N |a_k|^p \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \max_{k=1, \dots, N} |a_k|, & p = \infty. \end{cases}$$

Задача восстановления заключается в том, чтобы по информации о векторах  $\tilde{f}_1^N, \tilde{f}_2^N$  восстановить решение задачи (1). Предполагается, что функции  $f_i(x'), i = 1, 2$  принадлежат обобщенному соболевскому классу

$$W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}) = \{f(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}) : \|(-\Delta_S)^{\beta/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq 1\},$$

где для  $\beta > 0$  оператор  $(-\Delta_S)^{\beta/2}$  определяется равенством

$$\begin{aligned} (-\Delta_S)^{\beta/2} g(x') &= \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^{\beta/2} \sum_{j=1}^{a_k} g_{kj} Y_j^{(k)}(x'), \\ g(x') &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} g_{kj} Y_j^{(k)}(x'), \end{aligned}$$

а  $\Lambda_k = k(k + d - 2)$  — собственные числа оператора Бельтрами-Лапласа  $(-\Delta_S)$ . В качестве методов восстановления рассматриваются всевозможные операторы  $\varphi: l_p^N \times l_p^N \rightarrow L_2(D_1)$ . Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E_{N,p}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta_1, \delta_2) = \inf_{\varphi: l_p^N \times l_p^N \rightarrow L_2(D_1)} \sup_{\substack{f_i \in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \\ i=1,2}} \sup_{\substack{\tilde{f}_i^N \in l_p^N, \\ \|f_i^N - \tilde{f}_i^N\|_{l_p^N} \leq \delta_i, i=1,2}} \|u - \varphi(\tilde{f}_1^N, \tilde{f}_2^N)\|_{L_2(D_1)}.$$

а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным.

В работе найдены значения погрешностей оптимального восстановления для  $p = 2$  и  $p = \infty$ , а также для этих случаев построены оптимальные методы, линейные относительно  $\{y_{kj}^{(1)}\}$  и  $\{y_{kj}^{(2)}\}$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью // Матем. сб. 2002. Т. 193. С. 79–100.
- [2] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., Тихомиров В. М. On optimal recovery of heat equation solutions. In: Approximation Theory: A volume dedicated to V. Vojanov (D. K. Dimitrov, G. Nikolov, and R. Uluchev, Eds.), 163–175, Sofia: Marin Drinov Academic Publishing House, 2004.
- [3] Осипенко К. Ю. О восстановлении решения задачи Дирихле по неточным исходным данным // Владикавказский мат. журн. 2004. Т. 6, вып. 4. С. 55–62.
- [4] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функ. анализ и его прил. 2003. Т. 37. С. 51–64.
- [5] Балова Е. А. Об оптимальном восстановлении решения задачи Дирихле в кольце // Владикавказский мат. журн. 2006. Т. 8, вып. 2. С.