

УДК 517.98

К. Ю. Осипенко

## О построении семейств оптимальных методов восстановления линейных операторов

В работе предлагается некоторый подход к построению семейств оптимальных методов восстановления линейных операторов по неточно заданной информации. Предложенный метод построения применяется для восстановления производных по неточно заданным другим производным в многомерном случае и для восстановления решений уравнения теплопроводности по неточно заданным распределениям температур в некоторые моменты времени.

Библиография: 25 наименований.

**Ключевые слова:** оптимальное восстановление, линейные операторы, уравнение теплопроводности, разностные уравнения.

### § 1. Введение

Пусть  $X$  — линейное пространство,  $Y, Z$  — линейные нормированные пространства. Задача об оптимальном восстановлении линейного оператора  $\Lambda: X \rightarrow Z$  по неточно заданным значениям линейного оператора  $I: X \rightarrow Y$  на множестве  $W \subset X$  ставится как задача нахождения величины

$$E(\Lambda, W, I, \delta) = \inf_{\varphi: Y \rightarrow Z} \sup_{\substack{x \in W, y \in Y \\ \|Ix - y\|_Y \leq \delta}} \|\Lambda x - \varphi(y)\|_Z,$$

называемой *погрешностью оптимального восстановления*, и отображения  $\varphi$ , на котором достигается нижняя грань, называемым *оптимальным методом восстановления* (здесь  $\delta \geq 0$  — параметр, характеризующий ошибку задания значений оператора  $I$ ). Первоначально эта задача была поставлена для случая, когда  $\Lambda$  — линейный функционал,  $Y$  — конечномерное пространство и информация известно точно ( $\delta = 0$ ), в работе С. А. Смоляка [1]. Фактически эта постановка являлась обобщением задачи А. Н. Колмогорова о наилучшей квадратурной формуле на классе функций [2], в которой интеграл и значения функций заменены на произвольные линейные функционалы и нет условия линейности метода восстановления. В дальнейшем обобщениях этой задачи было посвящено много работ (см. [3]–[10], а также библиографию в этих работах).

Одной из первых работ, в которой рассматривалась задача построения оптимального метода восстановления для линейного оператора, была работа [4]. Дальнейшее развитие эта тематика получила в работах [11]–[19]. Оказалось,

что в некоторых случаях удается построить целое семейство оптимальных методов восстановления линейного оператора. Изучение таких семейств началось в работе [20] и продолжилось в работах [21], [22], [14] и [19].

Цель данной работы — предложить некоторый подход к построению семейств оптимальных методов восстановления линейных операторов и продемонстрировать его применение к ряду конкретных задач.

## § 2. Общая постановка и построение семейств оптимальных методов

Будем рассматривать случай, когда в задаче оптимального восстановления само множество  $W$  (априорная информация об элементах из  $X$ ) задается в виде ограничений, связанных с некоторым набором линейных операторов. Пусть  $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$  — линейные нормированные пространства, а  $I_j: X \rightarrow Y_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , — линейные операторы. Пусть, кроме того, заданы числа  $\delta_1, \dots, \delta_n \geq 0$  и задано множество натуральных чисел  $J \subset \{1, \dots, n\}$ . Положим  $\bar{J} = \{1, \dots, n\} \setminus J$ .

Задача состоит в оптимальном восстановлении оператора  $I_0$  на множестве

$$W_J = \{x \in X : \|I_j x\|_{Y_j} \leq \delta_j, j \in J\}$$

по значениям операторов  $I_j$ , заданным с погрешностью  $\delta_j$ ,  $j \in \bar{J}$  (при  $J = \emptyset$  полагаем  $W = X$ ). Точнее говоря, будем считать, что для каждого  $x \in W$  нам известен вектор

$$y = \{y_j\}_{j \in \bar{J}} \in Y_{\bar{J}} = \prod_{j \in \bar{J}} Y_j$$

такой, что  $\|I_j x - y_j\|_{Y_j} \leq \delta_j$ ,  $j \in \bar{J}$ . В качестве методов восстановления будем рассматривать произвольные отображения  $\varphi: Y_{\bar{J}} \rightarrow Y_0$ . *Погрешностью метода*  $\varphi(\cdot)$  называется величина

$$e_J(I, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x \in W_J, y \in Y_{\bar{J}} \\ \|I_j x - y_j\|_{Y_j} \leq \delta_j, j \in \bar{J}}} \|I_0 x - \varphi(y)\|_{Y_0},$$

а *погрешностью оптимального восстановления* — величина

$$E_J(I, \delta) = \inf_{\varphi: Y_{\bar{J}} \rightarrow Y_0} e_J(I, \delta, \varphi) \quad (2.1)$$

(здесь  $I = (I_0, I_1, \dots, I_n)$ ,  $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ ). Методы, на которых достигается нижняя грань в (2.1) (если таковые существуют), называются *оптимальными*.

**ТЕОРЕМА 1.** Пусть  $1 \leq p < +\infty$ . Предположим, что существуют  $\hat{\lambda}_j \geq 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ , такие, что

$$\sup_{\substack{x \in X \\ \|I_j x\|_{Y_j} \leq \delta_j, j=1, \dots, n}} \|I_0 x\|_{Y_0}^p \geq \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \delta_j^p.$$

Пусть, кроме того, множество линейных операторов  $S_j: Y_j \rightarrow Y_0$ ,  $j = 1, \dots, n$ , таково, что

$$I_0 = \sum_{j=1}^n S_j I_j \quad (2.2)$$

и

$$\left\| \sum_{j=1}^n S_j z_j \right\|_{Y_0}^p \leq \sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j \|z_j\|_{Y_j}^p \quad (2.3)$$

для всех  $z_j \in Y_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Тогда для любого  $J \in \{1, \dots, n\}$  методы

$$\widehat{\varphi}(y) = \sum_{j \in \bar{J}} S_j y_j \quad (2.4)$$

являются оптимальными для соответствующей задачи оптимального восстановления, а для погрешности оптимального восстановления имеет место равенство

$$E_J(I, \delta) = \left( \sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j \delta_j^p \right)^{1/p}. \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $\varphi: Y_{\bar{J}} \rightarrow Y_0$  — произвольный метод восстановления и  $x \in X$  такой, что  $\|I_j x\|_{Y_j} \leq \delta_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Тогда

$$\begin{aligned} 2\|I_0 x\|_{Y_0} &= \|I_0 x - \varphi(0) - (I_0(-x) - \varphi(0))\|_{Y_0} \\ &\leq \|I_0 x - \varphi(0)\|_{Y_0} + \|I_0(-x) - \varphi(0)\|_{Y_0} \leq 2e_J(I, \delta, \varphi). \end{aligned}$$

Отсюда

$$e_J^p(I, \delta, \varphi) \geq \sup_{\substack{x \in X \\ \|I_j x\|_{Y_j} \leq \delta_j, j=1, \dots, n}} \|I_0 x\|_{Y_0}^p \geq \sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j \delta_j^p.$$

В силу произвольности метода  $\varphi(\cdot)$  получаем

$$E_J^p(I, \delta) \geq \sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j \delta_j^p. \quad (2.6)$$

Для оценки  $p$ -ой степени погрешности метода  $\widehat{\varphi}(\cdot)$  надо оценить значение следующей экстремальной задачи

$$\begin{aligned} \left\| I_0 x - \sum_{j \in \bar{J}} S_j y_j \right\|_{Y_0}^p \rightarrow \max, \quad \|I_j x\|_{Y_j} \leq \delta_j, \quad j \in J, \\ \|I_j x - y_j\|_{Y_j} \leq \delta_j, \quad j \in \bar{J}, \quad x \in X. \end{aligned}$$

Положим  $z_j = I_j x - y_j$ ,  $j \in \bar{J}$ . Тогда эта задача переписывается в виде

$$\begin{aligned} \left\| \left( I_0 - \sum_{j \in \bar{J}} S_j I_j \right) x + \sum_{j \in \bar{J}} S_j z_j \right\|_{Y_0}^p \rightarrow \max, \quad \|I_j x\|_{Y_j} \leq \delta_j, \quad j \in J, \\ \|z_j\|_{Y_j} \leq \delta_j, \quad j \in \bar{J}, \quad x \in X. \quad (2.7) \end{aligned}$$

В силу равенства (2.2) и условия (2.3) получаем

$$\begin{aligned} \left\| \left( I_0 - \sum_{j \in \bar{J}} S_j I_j \right) x + \sum_{j \in \bar{J}} S_j z_j \right\|_{Y_0}^p &= \left\| \sum_{j \in J} S_j I_j x + \sum_{j \in \bar{J}} S_j z_j \right\|_{Y_0}^p \\ &\leq \sum_{j \in J} \widehat{\lambda}_j \|I_j x\|_{Y_j}^p + \sum_{j \in \bar{J}} \widehat{\lambda}_j \|z_j\|_{Y_j}^p \leq \sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j \delta_j^p. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$E_J^p(I, \delta) \leq e_J^p(I, \delta, \widehat{\varphi}) \leq \sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j \delta_j^p,$$

что вместе с (2.6) доказывает теорему.

Отметим, что двойственная экстремальная задача

$$\|I_0 x\|_{Y_0} \rightarrow \max, \quad \|I_j x\|_{Y_j} \leq \delta_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

“не различает” какие из операторов  $I_j$  являются информационными, а какие из них задают класс, на котором рассматривается задача восстановления. Иными словами, двойственная экстремальная задача не отличает априорную информацию от апостериорной. В силу этого из теоремы 1 вытекает, что если найдены операторы  $S_j: Y_j \rightarrow Y_0$ ,  $j = 1, \dots, n$ , удовлетворяющие условиям (2.2) и (2.3), то решены сразу  $2^n$  задач восстановления. Причем для получения соответствующего оптимального метода достаточно в методе

$$\widehat{\varphi}(y) = S_1 y_1 + \dots + S_n y_n$$

положить  $y_j = 0$  для  $j \in J$ .

### § 3. Восстановление в $L_p(\mathbb{R}^d)$

Обозначим через  $L_p(\mathbb{R}^d)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , совокупность всех измеримых функций  $x(\cdot)$ , для которых

$$\|x(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} = \left( \int_{\mathbb{R}^d} |x(\xi)|^p d\xi \right)^{1/p} < \infty.$$

Пусть  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}_+^d$ . Для  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$  положим  $(i\xi)^\alpha = (i\xi_1)^{\alpha_1} \dots (i\xi_d)^{\alpha_d}$ ,  $|\xi|^\alpha = |\xi_1|^{\alpha_1} \dots |\xi_d|^{\alpha_d}$ . Для  $\alpha^0, \alpha^1, \dots, \alpha^n \in \mathbb{R}_+^d$  положим

$$I_j x(\xi) = (i\xi)^{\alpha^j} x(\xi), \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Множество измеримых функций  $x(\cdot)$ , для которых  $\|I_j x(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} < \infty$ ,  $j = 1, \dots, n$ , обозначим через  $X$ . Рассмотрим задачу (2.1) для  $Y_0 = Y_1 = \dots = Y_n = L_p(\mathbb{R}^d)$ .

Положим

$$Q = \text{co}\{(\alpha^1, \ln 1/\delta_1), \dots, (\alpha^n, \ln 1/\delta_n)\},$$

где  $\text{co } M$  обозначает выпуклую оболочку множества  $M$ , и определим функцию  $S(\cdot)$  на  $\mathbb{R}^d$  по формуле

$$S(\alpha) = \max\{z \in \mathbb{R} : (\alpha, z) \in Q\}, \quad (3.1)$$

считая, что  $S(\alpha) = -\infty$ , если множество в фигурных скобках пусто.

Пусть  $\alpha^0 \in \text{co}\{\alpha^1, \dots, \alpha^n\}$ . Тогда точка  $(\alpha^0, S(\alpha^0))$  принадлежит границе выпуклого многогранника  $Q$ . Проведем опорную гиперплоскость к выпуклому многограннику  $Q$  в точке  $(\alpha^0, S(\alpha^0))$ . Ее можно записать в виде  $z = \langle \alpha, \widehat{\eta} \rangle + \widehat{a}$

при некоторых  $\widehat{\eta} = (\widehat{\eta}_1, \dots, \widehat{\eta}_d) \in \mathbb{R}^d$  и  $\widehat{a} \in \mathbb{R}$  (через  $\langle \alpha, \widehat{\eta} \rangle$  обозначается скалярное произведение векторов  $\alpha$  и  $\widehat{\eta}$ ). По теореме Каратеодори найдутся точки  $(\alpha^{jk}, \ln 1/\delta_{jk})$ ,  $k = 1, \dots, s$ ,  $s \leq d + 1$ , из этой гиперплоскости такие, что

$$\alpha^0 = \sum_{k=1}^s \theta_{jk} \alpha^{jk}, \quad \theta_{jk} > 0, \quad k = 1, \dots, s, \quad \sum_{k=1}^s \theta_{jk} = 1. \quad (3.2)$$

Положим  $J_0 = \{j_1, \dots, j_s\}$  и

$$\widehat{\lambda}_j = \frac{\theta_j}{\delta_j^p} e^{-pS(\alpha^0)}, \quad j \in J_0.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть  $\alpha^0 \in \text{co}\{\alpha^1, \dots, \alpha^n\}$ . Тогда для любого  $J \in \{1, \dots, n\}$

$$E_J(I, \delta) = e^{-S(\alpha^0)}.$$

При этом все методы

$$\widehat{\varphi}(y) = \sum_{j \in J \cap J_0} a_j(\xi) y_j,$$

где измеримые функции  $a_j(\cdot)$ ,  $j \in J_0$ , удовлетворяют условиям

$$\sum_{j \in J_0} (i\xi)^{\alpha^j} a_j(\xi) = (i\xi)^{\alpha^0}, \quad (3.3)$$

$$\sum_{j \in J_0} \frac{|a_j(\xi)|^{p'}}{\widehat{\lambda}_j^{p'/p}} \leq 1, \quad 1/p + 1/p' = 1, \quad \text{если } 1 < p < \infty, \quad (3.4)$$

$$\max_{j \in J_0} \frac{|a_j(\xi)|}{\widehat{\lambda}_j} \leq 1, \quad \text{если } p = 1, \quad (3.5)$$

для п. в.  $\xi \in \mathbb{R}^d$ , являются оптимальными для соответствующей задачи оптимального восстановления.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим значение экстремальной задачи

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(i\xi)^{\alpha^0} x(\xi)|^p d\xi \rightarrow \max, \quad \int_{\mathbb{R}^d} |(i\xi)^{\alpha^j} x(\xi)|^p d\xi \leq \delta_j^p, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.6)$$

Положим  $\widehat{A} = e^{-p\widehat{a}}$ ,  $\widehat{\xi}_j = e^{-\widehat{\eta}_j}$ ,  $j = 1, \dots, d$ ,  $\widehat{\xi} = (\widehat{\xi}_1, \dots, \widehat{\xi}_d)$ . Для достаточно малых  $\varepsilon > 0$  рассмотрим куб

$$B_\varepsilon = \{ \xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d : \widehat{\xi}_j - \varepsilon \leq \xi_j \leq \widehat{\xi}_j, \quad j = 1, \dots, d \}$$

и функцию

$$x_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} \left( \widehat{A}/|B_\varepsilon| \right)^{1/p}, & \xi \in B_\varepsilon, \\ 0, & \xi \notin B_\varepsilon \end{cases}$$

(через  $|B_\varepsilon|$  обозначен объем куба  $B_\varepsilon$ ). Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(i\xi)^{\alpha^j} x_\varepsilon(\xi)|^p d\xi \leq \widehat{A} |\widehat{\xi}|^{p\alpha^j} = e^{-p(\langle \alpha^j, \widehat{\eta} \rangle + \widehat{a})}.$$

В силу того, что  $z = \langle \alpha, \hat{\eta} \rangle + \hat{a}$  — уравнение опорной гиперплоскости к  $Q$ , имеем

$$\langle \alpha^j, \hat{\eta} \rangle + \hat{a} \geq \ln 1/\delta_j.$$

Отсюда вытекает, что

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(i\xi)^{\alpha^j} x_\varepsilon(\xi)|^p d\xi \leq \delta_j^p, \quad j = 1, \dots, n.$$

Тем самым  $x_\varepsilon(\cdot)$  — допустимая функция в задаче (3.6). Следовательно,

$$\sup_{\substack{x \in X \\ \|I_j x\|_{Y_j} \leq \delta_j, j=1, \dots, n}} \|I_0 x\|_{Y_0}^p \geq \int_{\mathbb{R}^d} |(i\xi)^{\alpha^0} x_\varepsilon(\xi)|^p d\xi \geq \widehat{A} |\widehat{\xi}_\varepsilon|^{p\alpha^0},$$

где

$$\widehat{\xi}_\varepsilon = (\widehat{\xi}_1 - \varepsilon, \dots, \widehat{\xi}_d - \varepsilon).$$

Устремив  $\varepsilon$  к нулю, будем иметь

$$\sup_{\substack{x \in X \\ \|I_j x\|_{Y_j} \leq \delta_j, j=1, \dots, n}} \|I_0 x\|_{Y_0}^p \geq e^{-p\alpha} |\widehat{\xi}|^{p\alpha^0} = e^{-p(\langle \alpha^0, \hat{\eta} \rangle + \hat{a})} = e^{-pS(\alpha^0)}.$$

Таким образом,

$$\sup_{\substack{x \in X \\ \|I_j x\|_{Y_j} \leq \delta_j, j=1, \dots, n}} \|I_0 x\|_{Y_0}^p \geq \sum_{j \in J_0} \widehat{\lambda}_j \delta_j^p.$$

Определим операторы  $S_j: L_p(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_p(\mathbb{R}^d)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , следующим образом

$$S_j z(\xi) = \begin{cases} a_j(\xi) z(\xi), & j \in J_0, \\ 0, & j \notin J_0, \end{cases}$$

где  $a_j(\cdot)$ ,  $j \in J_0$ , удовлетворяют условиям (3.3)–(3.5). Имеем

$$\left\| \sum_{j=1}^n S_j z_j(\cdot) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^p = \int_{\mathbb{R}^d} \left| \sum_{j \in J_0} a_j(\xi) z_j(\xi) \right|^p d\xi. \quad (3.7)$$

По неравенству Гельдера при  $1 < p < \infty$

$$\left| \sum_{j \in J_0} a_j(\xi) z_j(\xi) \right| = \left| \sum_{j \in J_0} \frac{a_j(\xi)}{\widehat{\lambda}_j^{1/p}} \widehat{\lambda}_j^{1/p} z_j(\xi) \right| \leq \Omega(\xi) \left( \sum_{j \in J_0} \widehat{\lambda}_j |z_j(\xi)|^p \right)^{1/p},$$

где

$$\Omega(\xi) = \left( \sum_{j \in J_0} \frac{|a_j(\xi)|^{p'}}{\widehat{\lambda}_j^{p'/p}} \right)^{1/p'}, \quad 1/p + 1/p' = 1.$$

При  $p = 1$  получаем неравенство

$$\left| \sum_{j \in J_0} a_j(\xi) z_j(\xi) \right| \leq \Omega(\xi) \left( \sum_{j \in J_0} \widehat{\lambda}_j |z_j(\xi)| \right),$$

в котором

$$\Omega(\xi) = \max_{j \in J_0} \frac{|a_j(\xi)|}{\widehat{\lambda}_j}.$$

Используя полученные неравенства, из (3.7) следует, что

$$\left\| \sum_{j=1}^n S_j z_j(\cdot) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^p \leq \int_{\mathbb{R}^d} \Omega^p(\xi) \left( \sum_{j \in J_0} \widehat{\lambda}_j |z_j(\xi)|^p \right) d\xi.$$

В силу условий (3.4)–(3.5) получаем

$$\left\| \sum_{j=1}^n S_j z_j(\cdot) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^p \leq \sum_{j \in J_0} \widehat{\lambda}_j \|z_j(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^p.$$

Остается показать, что множество функций  $a_j(\cdot)$ ,  $j \in J_0$ , удовлетворяющих условиям (3.3)–(3.5) не пусто. Рассмотрим на  $\mathbb{R}^d$  функцию

$$f(\eta) = -1 + \sum_{j \in J_0} \widehat{\lambda}_j e^{-p\langle \alpha^j - \alpha^0, \eta \rangle}.$$

Это, очевидно, выпуклая функция, причем легко убедиться, что  $f(\widehat{\eta}) = 0$  и производная этой функции в точке  $\widehat{\eta}$  также равна нулю. Отсюда вытекает, что  $f(\eta) \geq 0$  при всех  $\eta \in \mathbb{R}^d$ . Следовательно,

$$-e^{-p\langle \alpha^0, \eta \rangle} + \sum_{j \in J_0} \widehat{\lambda}_j e^{-p\langle \alpha^j, \eta \rangle} \geq 0.$$

Положив  $e^{-\eta_j} = |\xi_j|$ ,  $j = 1, \dots, d$ , получаем, что

$$-|\xi|^{p\alpha^0} + \sum_{j \in J_0} \widehat{\lambda}_j |\xi|^{p\alpha^j} \geq 0 \tag{3.8}$$

при всех  $\xi \in \mathbb{R}^d$ . Положим

$$a_j(\xi) = (i\xi)^{\alpha^0} \widehat{\lambda}_j \frac{(-i\xi)^{\alpha^j} |\xi|^{(p-2)\alpha^j}}{\sum_{j \in J_0} \widehat{\lambda}_j |\xi|^{p\alpha^j}}, \quad j \in J_0.$$

Легко убедиться, что условие (3.3) выполнено. При  $p = 1$ , учитывая (3.8), получаем

$$\frac{|a_j(\xi)|}{\widehat{\lambda}_j} = \frac{|\xi|^{\alpha^0}}{\sum_{j \in J_0} \widehat{\lambda}_j |\xi|^{\alpha^j}} \leq 1.$$

Если  $p > 1$ , то

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J_0} \frac{|a_j(\xi)|^{p'}}{\widehat{\lambda}_j^{p'/p}} &= \sum_{j \in J_0} \frac{|\xi|^{p'\alpha^0} \widehat{\lambda}_j^{p'} |\xi|^{(p-1)p'\alpha^j}}{\widehat{\lambda}_j^{p'/p} \left( \sum_{j \in J_0} \widehat{\lambda}_j |\xi|^{p\alpha^j} \right)^{p'}} = \frac{|\xi|^{p'\alpha^0} \sum_{j \in J_0} \widehat{\lambda}_j |\xi|^{p\alpha^j}}{\left( \sum_{j \in J_0} \widehat{\lambda}_j |\xi|^{p\alpha^j} \right)^{p'}} \\ &= \left( \frac{|\xi|^{p\alpha^0}}{\sum_{j \in J_0} \widehat{\lambda}_j |\xi|^{p\alpha^j}} \right)^{p'-1}. \end{aligned}$$

Теперь из (3.8) следует, что

$$\sum_{j \in J_0} \frac{|a_j(\xi)|^{p'}}{\widehat{\lambda}_j^{p'/p}} \leq 1.$$

Пусть  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}_+^d$ . Для функции  $x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$  через  $D^\alpha x(\cdot)$  будем обозначать производную порядка  $\alpha$  по Вейлю, определяемую равенством

$$D^\alpha x(t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} (i\xi)^\alpha Fx(\xi) e^{i\langle \xi, t \rangle} d\xi,$$

где  $Fx(\cdot)$  — преобразование Фурье функции  $x(\cdot)$ .

Пусть  $\alpha^0, \alpha^1, \dots, \alpha^n \in \mathbb{R}_+^d$ . Положим

$$I_j = D^{\alpha^j} \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Множество измеримых функций  $x(\cdot)$ , для которых  $\|D^{\alpha^j} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} < \infty$ ,  $j = 1, \dots, n$ , обозначим через  $X$ . Рассмотрим задачу (2.1) для  $Y_0 = Y_1 = \dots = Y_n = L_2(\mathbb{R}^d)$ . Используя ранее введенные обозначения для  $p = 2$ , получаем

**ТЕОРЕМА 3.** Пусть  $\alpha^0 \in \text{co}\{\alpha^1, \dots, \alpha^n\}$ . Тогда для любого  $J \in \{1, \dots, n\}$

$$E_J(I, \delta) = e^{-S(\alpha^0)}.$$

При этом все методы

$$\widehat{\varphi}(y) = \sum_{j \in \overline{J} \cap J_0} \Lambda_j y_j,$$

где  $\Lambda_j: L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$ ,  $j \in J_0$ , — линейные непрерывные операторы, действия которых в образах Фурье имеют вид:  $F\Lambda_j y_j(\cdot) = a_j(\cdot) Fy_j(\cdot)$ , а измеримые функции  $a_j(\cdot)$ ,  $j \in J_0$ , удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J_0} (i\xi)^{\alpha^j} a_j(\xi) &= (i\xi)^{\alpha^0}, \\ \sum_{j \in J_0} \frac{|a_j(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_j} &\leq 1, \end{aligned}$$

для п. в.  $\xi \in \mathbb{R}^d$ , являются оптимальными для соответствующей задачи оптимального восстановления.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Переходя к образам Фурье и пользуясь равенством Парсеваля, условия

$$\begin{aligned} \|D^{\alpha^j} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 &\leq \delta_j^2, \\ \|D^{\alpha^j} x(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 &\leq \delta_j^2, \end{aligned}$$

могут быть переписаны в виде

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha^j} |f(\xi)|^2 d\xi &\leq \delta_j^2, \\ \int_{\mathbb{R}^d} |(i\xi)^{\alpha^j} f(\xi) - Y_j(\xi)|^2 d\xi &\leq \delta_j^2, \end{aligned}$$

где

$$f(\cdot) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} Fx(\cdot), \quad Y_j(\cdot) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} Fy_j(\cdot).$$

Для любого метода восстановления  $\varphi: (L_2(\mathbb{R}^d))^m \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$ ,  $m = \text{card } \bar{J}$ ,

$$\|D^{\alpha^0} x(\cdot) - \varphi(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |(i\xi)^{\alpha^0} f(\xi) - \Phi(y)(\xi)|^2 d\xi,$$

где

$$\Phi(y)(\cdot) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} F\varphi(y)(\cdot).$$

Тем самым рассматриваемая задача эквивалентна задаче (для  $p = 2$ ), решение которой дано в теореме 2.

Отметим, что из теорем 1 и 2 вытекает равенство

$$\sup_{\|D^{\alpha^j} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta_j, j=1, \dots, n} \|D^{\alpha^0} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = e^{-S(\alpha^0)} = \prod_{j \in J_0} \delta_j^{\theta_j}. \quad (3.9)$$

Экстремальная задача в левой части (3.9) тесно связана с нахождением точной константы в обобщенном неравенстве Харди–Литлвуда–Полия, которое в рассматриваемом случае имеет вид

$$\|D^{\alpha^0} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \prod_{j \in J_0} \|D^{\alpha^j} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{\theta_j}$$

(подробнее см. [23]).

#### § 4. Обобщенное уравнение теплопроводности на сфере

Положим

$$\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}, \quad d \geq 2,$$

где  $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2}$ . Оператор Лапласа–Бельтрами  $\Delta_S$  определяется для функций, заданных на единичной сфере  $\mathbb{S}^{d-1}$ , следующим образом

$$\Delta_S Y(x') = \Delta Y \left( \frac{x}{|x|} \right) \Big|_{x=x'},$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа. Обозначим через  $\mathcal{H}_k$  множество сферических гармоник порядка  $k$ . Известно (см. [24]), что  $L_2(\mathbb{S}^{d-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k$ , при этом  $\dim \mathcal{H}_0 = a_0 = 1$ ,

$$\dim \mathcal{H}_k = a_k = (d + 2k - 2) \frac{(d + k - 3)!}{(d - 2)!k!}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Выберем в  $\mathcal{H}_k$  ортонормированный базис  $Y_j^{(k)}(\cdot)$ ,  $j = 1, \dots, a_k$ . Для  $\alpha > 0$  оператор  $(-\Delta_S)^{\alpha/2}$  определяется равенством

$$(-\Delta_S)^{\alpha/2} Y(\cdot) = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^{\alpha/2} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(\cdot),$$

где

$$Y(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(\cdot),$$

а  $\Lambda_k = k(k + d - 2)$  — собственные значения оператора  $-\Delta_S$ .

Рассмотрим задачу нахождения решения уравнения

$$u_t + (-\Delta_S)^{\alpha/2} u = 0, \quad (4.1)$$

с начальным условием

$$u(\cdot, 0) = f(\cdot),$$

где  $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ . Если

$$f(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(\cdot), \quad (4.2)$$

то методом Фурье несложно получить решение этой задачи

$$u(x', t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\Lambda_k^{\alpha/2} t} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x').$$

Предположим, что приближенно известны решения рассматриваемой задачи при  $t = 0, T$ . Требуется восстановить решение в момент времени  $\tau$ ,  $0 < \tau < T$ . Для функций  $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ , имеющих разложение (4.2), положим  $I_1 f(\cdot) = f(\cdot)$ ,

$$I_0 f(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\Lambda_k^{\alpha/2} \tau} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(\cdot),$$

$$I_2 f(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\Lambda_k^{\alpha/2} T} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(\cdot).$$

Тем самым мы приходим к задаче (2.1) при  $X = Y_0 = Y_1 = Y_2 = L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ ,  $p = 2$  и  $J = \emptyset$ .

ТЕОРЕМА 4. Если  $\delta_1/\delta_2 \in [e^{\Lambda_m^{\alpha/2}T}, e^{\Lambda_{m+1}^{\alpha/2}T}]$  при некотором  $t \in \mathbb{Z}_+$ , то для всех  $\alpha_{kj}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ ,  $j = 1, \dots, a_k$ , удовлетворяющих условию

$$\frac{\left(e^{\Lambda_k^{\alpha/2}(T-\tau)} - \alpha_{kj}\right)^2}{\lambda_1 e^{2\Lambda_k^{\alpha/2}T}} + \frac{\alpha_{kj}^2}{\lambda_2} \leq 1, \quad (4.3)$$

где

$$\lambda_1 = \frac{e^{2\Lambda_{m+1}^{\alpha/2}(T-\tau)} - e^{2\Lambda_m^{\alpha/2}(T-\tau)}}{e^{2\Lambda_{m+1}^{\alpha/2}T} - e^{2\Lambda_m^{\alpha/2}T}},$$

$$\lambda_2 = \frac{e^{-2\Lambda_m^{\alpha/2}\tau} - e^{-2\Lambda_{m+1}^{\alpha/2}\tau}}{e^{-2\Lambda_m^{\alpha/2}T} - e^{-2\Lambda_{m+1}^{\alpha/2}T}},$$

методы

$$\widehat{\varphi}(y_1, y_2)(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \left( e^{-\Lambda_k^{\alpha/2}T} \left( e^{\Lambda_k^{\alpha/2}(T-\tau)} - \alpha_{kj} \right) y_{kj}^{(1)} + \alpha_{kj} y_{kj}^{(2)} \right) Y_j^{(k)}(\cdot),$$

где

$$y_s(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} y_{kj}^{(s)} Y_j^{(k)}(\cdot), \quad s = 1, 2,$$

являются оптимальными, а

$$E_{\emptyset}(I, \delta) = \sqrt{\lambda_1 \delta_1^2 + \lambda_2 \delta_2^2}.$$

Если  $\delta_1/\delta_2 \in (0, 1]$ , то метод

$$\widehat{\varphi}(y_1, y_2)(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\Lambda_k^{\alpha/2}\tau} \sum_{j=1}^{a_k} y_{kj}^{(1)} Y_j^{(k)}(\cdot)$$

является оптимальным, а  $E_{\emptyset}(I, \delta) = \delta_1$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\|I_0 f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 \rightarrow \max, \quad \|I_j f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 \leq \delta_j^2, \quad j = 1, 2.$$

Эту задачу можно записать в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2}\tau} f_k^2 \rightarrow \max, \quad \sum_{k=0}^{\infty} f_k^2 \leq \delta_1^2, \quad \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2}T} f_k^2 \leq \delta_2^2, \quad (4.4)$$

где

$$f_k^2 = \sum_{j=1}^{a_k} c_{jk}^2, \quad k = 0, 1, \dots$$

Пусть  $\delta_1/\delta_2 \in [e^{\Lambda_m^{\alpha/2}T}, e^{\Lambda_{m+1}^{\alpha/2}T}]$ . Определим  $f_m$  и  $f_{m+1}$  из условий

$$f_m^2 + f_{m+1}^2 = \delta_1^2,$$

$$e^{-2\Lambda_m^{\alpha/2}T} f_m^2 + e^{-2\Lambda_{m+1}^{\alpha/2}T} f_{m+1}^2 = \delta_2^2.$$

Имеем

$$f_m^2 = \frac{\delta_2^2 - \delta_1^2 e^{-2\Lambda_{m+1}^{\alpha/2} T}}{e^{-2\Lambda_m^{\alpha/2} T} - e^{-2\Lambda_{m+1}^{\alpha/2} T}},$$

$$f_{m+1}^2 = \frac{\delta_1^2 e^{-2\Lambda_m^{\alpha/2} T} - \delta_2^2}{e^{-2\Lambda_m^{\alpha/2} T} - e^{-2\Lambda_{m+1}^{\alpha/2} T}}.$$

Последовательность  $\{f_k\}$ , в которой  $f_k = 0$  при  $k \neq m, m+1$  является допустимой в экстремальной задаче (4.4). Поэтому

$$\sup_{\substack{f(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \\ \|I_j f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta_j, j=1,2}} \|I_0 f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 \geq e^{-2\Lambda_m^{\alpha/2} \tau} f_m^2 + e^{-2\Lambda_{m+1}^{\alpha/2} \tau} f_{m+1}^2$$

$$= \lambda_1 \delta_1^2 + \lambda_2 \delta_2^2.$$

Если  $\delta_1/\delta_2 \in (0, 1]$ , то последовательность  $\{f_k\}$ , в которой  $f_0 = \delta_1^2$ , а  $f_k = 0$  при  $k \geq 1$ , является допустимой в задаче (4.4). Поэтому в этом случае

$$\sup_{\substack{f(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \\ \|I_j f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta_j, j=1,2}} \|I_0 f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 \geq f_0^2 = \delta_1^2.$$

Пусть снова  $\delta_1/\delta_2 \in [e^{\Lambda_m^{\alpha/2} T}, e^{\Lambda_{m+1}^{\alpha/2} T}]$ . Для функций  $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ , имеющих разложение (4.2), определим операторы  $S_j: L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \rightarrow L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ ,  $j = 1, 2$ , равенствами

$$S_1 f(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} e^{-\Lambda_k^{\alpha/2} T} \left( e^{\Lambda_k^{\alpha/2} (T-\tau)} - \alpha_{kj} \right) c_{kj} Y_j^{(k)}(\cdot),$$

$$S_2 f(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \alpha_{kj} c_{kj} Y_j^{(k)}(\cdot),$$

где  $\alpha_{kj}$  удовлетворяют условию (4.3). Нетрудно убедиться, что  $I_0 = S_1 I_1 + S_2 I_2$ . Для  $f_1(\cdot), f_2(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$  имеем

$$\|S_1 f_1(\cdot) + S_2 f_2(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \left( e^{-\Lambda_k^{\alpha/2} T} \left( e^{\Lambda_k^{\alpha/2} (T-\tau)} - \alpha_{kj} \right) f_{kj}^{(1)} + \alpha_{kj} f_{kj}^{(2)} \right)^2,$$

где  $f_{kj}^{(1)}, f_{kj}^{(2)}$  — коэффициенты Фурье функций  $f_1(\cdot), f_2(\cdot)$ . Из неравенства Коши–Буняковского, учитывая условие (4.3), получаем

$$\left( e^{-\Lambda_k^{\alpha/2} T} \left( e^{\Lambda_k^{\alpha/2} (T-\tau)} - \alpha_{kj} \right) f_{kj}^{(1)} + \alpha_{kj} f_{kj}^{(2)} \right)^2$$

$$\leq \left( \frac{\left( e^{\Lambda_k^{\alpha/2} (T-\tau)} - \alpha_{kj} \right)^2}{\lambda_1 e^{2\Lambda_k^{\alpha/2} T}} + \frac{\alpha_{kj}^2}{\lambda_2} \right) \left( \lambda_1 (f_{kj}^{(1)})^2 + \lambda_2 (f_{kj}^{(2)})^2 \right)$$

$$\leq \lambda_1 (f_{kj}^{(1)})^2 + \lambda_2 (f_{kj}^{(2)})^2.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \|S_1 f_1(\cdot) + S_2 f_2(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \left( \lambda_1 (f_{kj}^{(1)})^2 + \lambda_2 (f_{kj}^{(2)})^2 \right) \\ &= \lambda_1 \|f_1(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 + \lambda_2 \|f_2(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2. \end{aligned}$$

Покажем, что существуют  $\alpha_{kj}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ ,  $j = 1, \dots, a_k$ , удовлетворяющие условию (4.3). Рассмотрим на плоскости  $(x, y)$  множество точек с координатами

$$\begin{aligned} x_k &= e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2} T}, \\ y_k &= e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2} \tau}, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Это множество точек лежит на вогнутой кривой  $y = x^{\tau/T}$ . Проведем прямую через точки  $(x_{m+1}, y_{m+1})$  и  $(x_m, y_m)$ . Нетрудно убедиться, что уравнение этой прямой записывается в виде  $y = \lambda_1 + \lambda_2 x$ . В силу вогнутости кривой, на которой лежат рассматриваемые точки, имеем

$$y_k \leq \lambda_1 + \lambda_2 x_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Следовательно, для всех  $k = 0, 1, \dots$

$$\frac{e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2} \tau}}{\lambda_1 + \lambda_2 e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2} T}} \leq 1.$$

Положим

$$\widehat{\alpha}_{kj} = \frac{\lambda_2 e^{\Lambda_k^{\alpha/2} (T-\tau)}}{\lambda_1 e^{2\Lambda_k^{\alpha/2} T} + \lambda_2}.$$

Тогда

$$\frac{\left( e^{\Lambda_k^{\alpha/2} (T-\tau)} - \widehat{\alpha}_{kj} \right)^2}{\lambda_1 e^{2\Lambda_k^{\alpha/2} T}} + \frac{\widehat{\alpha}_{kj}^2}{\lambda_2} = \frac{e^{2\Lambda_k^{\alpha/2} (T-\tau)}}{\lambda_1 e^{2\Lambda_k^{\alpha/2} T} + \lambda_2} = \frac{e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2} \tau}}{\lambda_1 + \lambda_2 e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2} T}} \leq 1.$$

Если  $\delta_1/\delta_2 \in (0, 1]$ , то положим  $S_1 = I_0$ , а  $S_2 = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \|S_1 f_1(\cdot) + S_2 f_2(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 &= \|I_0 f_1(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2} \tau} \sum_{j=1}^{a_k} (f_{kj}^{(1)})^2 \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} (f_{kj}^{(1)})^2 = \|f_1(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2. \end{aligned}$$

Теперь утверждение доказываемой теоремы вытекает из теоремы 1.

Условие (4.3) можно записать в эквивалентной форме

$$(\alpha_{kj} - \widehat{\alpha}_{kj})^2 \leq \lambda_1 \lambda_2 e^{4\Lambda_k^{\alpha/2} T} \frac{e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2} \tau} + \lambda_1 + \lambda_2 e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2} T}}{\left( \lambda_1 + \lambda_2 e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2} T} \right)^2}.$$

Тем самым все  $\alpha_{kj}$ , удовлетворяющие условию (4.3), имеют вид

$$\alpha_{kj} = \hat{\alpha}_{kj} + \theta_{kj} e^{2\Lambda_k^{\alpha/2} T} \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \frac{\sqrt{-e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2} \tau} + \lambda_1 + \lambda_2 e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2} T}}}{\lambda_1 + \lambda_2 e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2} T}},$$

где  $|\theta_{kj}| \leq 1$ .

Если рассмотреть задачу об оптимальном восстановлении решения в момент времени  $\tau$  по неточно заданному решению в момент времени  $T > \tau$  на классе

$$W = \{ f(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}) : \|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta_1 \},$$

то из той же теоремы 1 (при  $J = \{1\}$ ) будет следовать, что методы  $\hat{\varphi}(0, y_2)(\cdot)$  будут оптимальными. Оказывается, что среди этого семейства оптимальных методов есть подсемейство оптимальных методов, которые обладают некоторым преимуществом по сравнению с остальными.

Для того, чтобы указать это подсемейство, сформулируем сначала расширенный вариант рассматриваемой задачи. Пусть задан некоторый класс функций  $\mathcal{F} \subset L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ . Положим

$$e(\mathcal{F}, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{f(\cdot) \in \Omega, y(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \\ \|u(\cdot, T) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta}} \|u(\cdot, \tau) - \varphi(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})},$$

$$E(\mathcal{F}, \delta) = \inf_{\varphi: L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \rightarrow L_2(\mathbb{S}^{d-1})} e(\mathcal{F}, \delta, \varphi).$$

Задача о нахождении погрешности оптимального восстановления  $E(\mathcal{F}, \delta)$  и соответствующего оптимального метода отличается от рассмотренной ранее лишь произвольным классом  $\mathcal{F}$ .

Будем говорить, что метод  $\varphi(y)(\cdot)$  точен на множестве  $L \subset L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ , если  $\varphi(u(\cdot, T))(\cdot) = u(\cdot, \tau)$  для всех  $f(\cdot) \in L$ .

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.** *Если  $\hat{\varphi}(y)(\cdot)$  — оптимальный метод для класса  $\mathcal{F}$ , являющийся линейным и точным на множестве  $L \subset L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ , содержащем ноль, то он оптимален и на классе  $\mathcal{F} + L$ . При этом*

$$E(\mathcal{F}, \delta) = E(\mathcal{F} + L, \delta). \quad (4.5)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $f(\cdot) \in \mathcal{F} + L$ ,  $f(\cdot) = f_1(\cdot) + f_2(\cdot)$ , где  $f_1(\cdot) \in \mathcal{F}$ ,  $f_2(\cdot) \in L$ . Обозначим через  $u_j(\cdot, \cdot)$  решение уравнения (4.1) с начальной функцией  $f_j(\cdot)$ ,  $j = 1, 2$ . Пусть функция  $y(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$  такова, что  $\|u(\cdot, T) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta$ . Положим  $y_1(\cdot) = y(\cdot) - u_2(\cdot, T)$ . Ясно, что  $y_1(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ . Так как  $u_1(\cdot, T) - y_1(\cdot) = u(\cdot, T) - y(\cdot)$ , то

$$\|u_1(\cdot, T) - y_1(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta. \quad (4.6)$$

Из линейности и точности  $\hat{\varphi}(y)(\cdot)$  на  $L$  следует равенство

$$\|u(\cdot, \tau) - \hat{\varphi}(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} = \|u_1(\cdot, \tau) - \hat{\varphi}(y_1)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}. \quad (4.7)$$

Выражение справа в (4.7) в силу (4.6) не превосходит величины  $e(\mathcal{F}, \delta, \widehat{\varphi})$ , которая равна  $E(\mathcal{F}, \delta)$ , так как метод  $\widehat{\varphi}(y)(\cdot)$  оптимален. Учитывая это обстоятельство и переходя в левой части (4.7) к верхней грани по  $f(\cdot) \in \mathcal{F} + L$  и соответствующим  $y(\cdot)$ , получаем, что

$$e(\mathcal{F} + L, \delta, \widehat{\varphi}) \leq E(\mathcal{F}, \delta).$$

Отсюда и из того, что  $\mathcal{F} \subset \mathcal{F} + L$ , имеем

$$E(\mathcal{F}, \delta) \leq E(\mathcal{F} + L, \delta) \leq e(\mathcal{F} + L, \delta, \widehat{\varphi}) \leq E(\mathcal{F}, \delta).$$

Следовательно,  $\widehat{\varphi}(y)(\cdot)$  — оптимальный метод для класса  $\mathcal{F} + L$  и справедливо равенство (4.5).

Предположим, что  $\delta_1/\delta_2 \in [e^{\Lambda_m^{\alpha/2}T}, e^{\Lambda_{m+1}^{\alpha/2}T}]$ . Нетрудно показать, что при достаточно большом  $m$  выполняется неравенство  $\lambda_2 \geq 1$ . Тем самым, если  $\delta_1$  фиксировано, то при достаточно малых  $\delta_2$  выполняется неравенство  $\lambda_2 \geq 1$ . В этом случае положим

$$\widehat{k} = \max \left\{ k \in \mathbb{Z}_+ : \Lambda_k \leq \left( \frac{\ln \lambda_2}{2(T-\tau)} \right)^{2/\alpha} \right\}.$$

Несложно убедиться, что

$$\widehat{k} = \left[ \sqrt{\frac{(d-2)^2}{4} + \left( \frac{\ln \lambda_2}{2(T-\tau)} \right)^{2/\alpha}} - \frac{d-2}{2} \right]$$

( $[a]$  — целая часть числа  $a$ ).

Рассмотрим методы

$$\widehat{\varphi}_0(y)(\cdot) = \sum_{k=0}^{\widehat{k}} \sum_{j=1}^{a_k} e^{\Lambda_k^{\alpha/2}(T-\tau)} Y_j^{(k)}(\cdot) + \sum_{k=\widehat{k}+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \alpha_{kj} y_{kj} Y_j^{(k)}(\cdot),$$

где  $\alpha_{kj}$ ,  $k = \widehat{k} + 1, \widehat{k} + 2, \dots$ ,  $j = 1, \dots, a_k$ , удовлетворяют условию (4.3). В силу того, что для

$$\alpha_{kj} = e^{\Lambda_k^{\alpha/2}(T-\tau)}, \quad k = 0, 1, \dots, \widehat{k}, \quad j = 1, \dots, a_k,$$

выполнены условие (4.3), методы  $\widehat{\varphi}_0(y)(\cdot)$  — оптимальные на классе  $W$ .

Кроме того, методы  $\widehat{\varphi}_0(y)(\cdot)$  — точные на подпространстве

$$L_{\widehat{k}} = \sum_{k=0}^{\widehat{k}} \mathcal{H}_k.$$

Действительно, пусть  $f(\cdot) \in L_{\widehat{k}}$ . Тогда

$$f(\cdot) = \sum_{k=0}^{\widehat{k}} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(\cdot).$$

Поэтому

$$u(x', T) = \sum_{k=0}^{\widehat{k}} e^{-\Lambda_k^{\alpha/2} T} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x').$$

Следовательно,

$$\widehat{\varphi}_0(u(\cdot, T))(\cdot) = \sum_{k=0}^{\widehat{k}} e^{-\Lambda_k^{\alpha/2} \tau} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(\cdot) = u(\cdot, \tau).$$

Тем самым из предложения 1 вытекает, что методы  $\widehat{\varphi}_0(y)(\cdot)$  не только оптимальны на классе  $W$ , но они остаются оптимальными на более широком классе  $W + L_{\widehat{k}}$ .

## § 5. Оптимальное восстановление решений разностных уравнений

Рассмотрим процесс распространения тепла в бесконечном стержне, описываемый дискретной моделью, а именно, неявной разностной схемой

$$\frac{u_{s+1,j} - u_{sj}}{\tau} = \frac{u_{s+1,j+1} - 2u_{s+1,j} + u_{s+1,j-1}}{h^2}. \quad (5.1)$$

Здесь  $\tau$  и  $h$  — положительные числа,  $(s, j) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}$ ,  $u_{s,j}$  — температура стержня в момент времени  $s\tau$  в точке  $jh$ .

Обозначим через  $l_{2,h}$  множество векторов  $x = \{x_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ , для которых

$$\|x\|_{l_{2,h}} = \left( h \sum_{j \in \mathbb{Z}} |x_j|^2 \right)^{1/2} < \infty, \quad h > 0.$$

Предположим, что приближенно измерена температура стержня в нулевой момент времени и в момент времени  $n\tau$ , т. е. приближенно известны векторы  $u_0 = \{u_{0,j}\}$  и  $u_n = \{u_{n,j}\}$ , или, точнее говоря, нам известны векторы  $y_1, y_2 \in l_{2,h}$  такие, что

$$\|u_0 - y_1\|_{l_{2,h}} \leq \delta_1, \quad \|u_n - y_2\|_{l_{2,h}} \leq \delta_2,$$

где  $\delta_j > 0$ ,  $j = 1, 2$ . По этой информации требуется восстановить вектор  $u_m = \{u_{m,j}\}$ , где  $0 < m < n$ , т. е. восстановить значение температуры стержня в момент времени  $m\tau$ .

Тем самым мы снова приходим к задаче (2.1), в которой  $X = Y_0 = Y_1 = Y_2 = l_2$ ,  $p = 2$ ,  $J = \emptyset$ , а операторы  $I_j: l_{2,h} \rightarrow l_{2,h}$ ,  $j = 0, 1, 2$ , определены равенствами

$$I_0 u_0 = u_m, \quad I_1 u_0 = u_0, \quad I_2 u_0 = u_n.$$

Преобразованием Фурье последовательности  $x = \{x_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \in l_{2,h}$  назовем функцию

$$Fx(\xi) = h \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_j e^{-ijh\xi}.$$

Несложно убедиться, что  $Fx(\cdot) \in L_2([-\pi/h, \pi/h])$  и

$$\|Fx(\cdot)\|_{L_2([-\pi/h, \pi/h])}^2 = 2\pi \|x\|_{l_{2,h}}^2. \quad (5.2)$$

Применим преобразование Фурье к обеим частям равенства (5.1)

$$h \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{u_{s+1,j} - u_{sj}}{\tau} e^{-ijh\xi} = h \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{u_{s+1,j+1} - 2u_{s+1,j} + u_{s+1,j-1}}{h^2} e^{-ijh\xi}.$$

Отсюда

$$\frac{U_{s+1}(\xi) - U_s(\xi)}{\tau} = \frac{e^{ih\xi} - 2 + e^{-ih\xi}}{h^2} U_{s+1}(\xi),$$

где

$$U_s(\xi) = h \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_{s,j} e^{-ijh\xi}.$$

Тем самым

$$U_{s+1}(\xi) = \left(1 + \frac{4\tau}{h^2} \sin^2 \frac{h\xi}{2}\right)^{-1} U_s(\xi).$$

Следовательно,

$$U_s(\xi) = \Lambda^s(\xi) U_0(\xi), \quad \Lambda(\xi) = \left(1 + \frac{4\tau}{h^2} \sin^2 \frac{h\xi}{2}\right)^{-1}.$$

Положим  $a = (1 + 4\tau/h^2)^{-1}$ ,

$$\lambda_1 = \begin{cases} 0, & \delta_2/\delta_1 \in (0, a^n], \\ \left(1 - \frac{m}{n}\right) \left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^{2m/n}, & \delta_2/\delta_1 \in (a^n, 1), \\ 1, & \delta_2/\delta_1 \in [1, +\infty), \end{cases}$$

$$\lambda_2 = \begin{cases} a^{2(m-n)}, & \delta_2/\delta_1 \in (0, a^n], \\ \frac{m}{n} \left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^{2(m/n-1)}, & \delta_2/\delta_1 \in (a^n, 1), \\ 0, & \delta_2/\delta_1 \in [1, +\infty). \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 5. *Имеет место равенство*

$$E_\emptyset(I, \delta) = \sqrt{\lambda_1 \delta_1^2 + \lambda_2 \delta_2^2}.$$

Для всех  $\alpha(\cdot)$ , удовлетворяющих при  $\delta_2/\delta_1 \in (a^n, 1)$  условию

$$\Lambda^{2m}(\xi) \left( \frac{|1 - \alpha(\xi)|^2}{\lambda_1} + \Lambda^{-2n}(\xi) \frac{|\alpha(\xi)|^2}{\lambda_2} \right) \leq 1, \quad (5.3)$$

а в остальных случаях равенству

$$\alpha(\xi) = \begin{cases} 1, & \delta_2/\delta_1 \in (0, a^n], \\ 0, & \delta_2/\delta_1 \in [1, +\infty), \end{cases}$$

методы

$$\widehat{\varphi}(y_1, y_2) = F^{-1}(\Lambda^m(\cdot)(1 - \alpha(\cdot))Fy_1(\cdot) + \Lambda^{m-n}(\cdot)\alpha(\cdot)Fy_2(\cdot))$$

являются оптимальными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\|u_m\|_{l_{2,h}}^2 \rightarrow \max, \quad \|u_0\|_{l_{2,h}}^2 \leq \delta_1^2, \quad \|u_n\|_{l_{2,h}}^2 \leq \delta_2^2.$$

Переходя к образам Фурье, получим следующую задачу

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \|\Lambda^m(\cdot)U_0(\cdot)\|_{L_2([-\pi/h, \pi/h])}^2 \rightarrow \max, \quad \frac{1}{2\pi} \|U_0(\cdot)\|_{L_2([-\pi/h, \pi/h])}^2 \leq \delta_1^2, \\ \frac{1}{2\pi} \|\Lambda^n(\cdot)U_0(\cdot)\|_{L_2([-\pi/h, \pi/h])}^2 \leq \delta_2^2. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Предположим, что  $\delta_2/\delta_1 \in (a^n, 1)$ . Функция  $\Lambda(\xi)$  при  $\xi \in [0, \pi/h]$  монотонно убывает от 1 до  $a$ . Поэтому найдется  $\hat{\xi} \in (0, \pi/h)$  такое, что  $\Lambda^n(\hat{\xi}) = \delta_2/\delta_1$ . Положим для достаточно малых  $\varepsilon > 0$

$$\widehat{U}_0(\xi) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon}} \delta_1, & \xi \in (\hat{\xi}, \hat{\xi} + \varepsilon), \\ 0, & \xi \notin (\hat{\xi}, \hat{\xi} + \varepsilon). \end{cases}$$

Имеем

$$\frac{1}{2\pi} \|\widehat{U}_0(\cdot)\|_{L_2([-\pi/h, \pi/h])}^2 = \delta_1^2,$$

а

$$\frac{1}{2\pi} \|\Lambda^n(\cdot)\widehat{U}_0(\cdot)\|_{L_2([-\pi/h, \pi/h])}^2 = \frac{\delta_1^2}{\varepsilon} \int_{\hat{\xi}}^{\hat{\xi}+\varepsilon} \Lambda^{2n}(\xi) d\xi \leq \delta_1^2 \Lambda^{2n}(\hat{\xi}) = \delta_2^2.$$

Тем самым функция  $\widehat{U}_0(\cdot)$  является допустимой в задаче (5.4). Следовательно,

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{u_0 \in l_{2,h} \\ \|u_0\|_{l_{2,h}}^2 \leq \delta_1^2 \\ \|u_n\|_{l_{2,h}}^2 \leq \delta_2^2}} \|u_m\|_{l_{2,h}}^2 &\geq \frac{1}{2\pi} \|\Lambda^m(\cdot)\widehat{U}_0(\cdot)\|_{L_2([-\pi/h, \pi/h])}^2 = \frac{\delta_1^2}{\varepsilon} \int_{\hat{\xi}}^{\hat{\xi}+\varepsilon} \Lambda^{2m}(\xi) d\xi \\ &= \delta_1^2 \Lambda^{2m}(c), \end{aligned}$$

где  $c \in [\hat{\xi}, \hat{\xi} + \varepsilon]$ . Переходя к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получаем

$$\sup_{\substack{u_0 \in l_{2,h} \\ \|u_0\|_{l_{2,h}}^2 \leq \delta_1^2 \\ \|u_n\|_{l_{2,h}}^2 \leq \delta_2^2}} \|u_m\|_{l_{2,h}}^2 \geq \delta_1^2 \Lambda^{2m}(\hat{\xi}) = \delta_1^{2(1-m/n)} \delta_2^{2m/n} = \lambda_1 \delta_1^2 + \lambda_2 \delta_2^2.$$

Предположим, что  $\delta_2/\delta_1 \in (0, a^n]$ . Положим для достаточно малых  $\varepsilon > 0$

$$\widehat{U}_0(\xi) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon}} \frac{\delta_2}{\Lambda^n(\xi)}, & \xi \in (\pi/h - \varepsilon, \pi/h], \\ 0, & \xi \notin (\pi/h - \varepsilon, \pi/h]. \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{1}{2\pi} \|\Lambda^n(\cdot)\widehat{U}_0(\cdot)\|_{L_2([-\pi/h, \pi/h])}^2 = \delta_2^2,$$

а

$$\frac{1}{2\pi} \|\widehat{U}_0(\cdot)\|_{L_2([-\pi/h, \pi/h])}^2 = \frac{\delta_2^2}{\varepsilon} \int_{\pi/h-\varepsilon}^{\pi/h} \Lambda^{-2n}(\xi) d\xi \leq \delta_2^2 a^{-2n} \leq \delta_1^2.$$

Тем самым функция  $\widehat{U}_0(\cdot)$  является допустимой в задаче (5.4). Следовательно,

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{u_0 \in l_{2,h} \\ \|u_0\|_{l_{2,h}}^2 \leq \delta_1^2 \\ \|u_n\|_{l_{2,h}}^2 \leq \delta_2^2}} \|u_m\|_{l_{2,h}}^2 &\geq \frac{1}{2\pi} \|\Lambda^m(\cdot)\widehat{U}_0(\cdot)\|_{L_2([-\pi/h, \pi/h])}^2 = \frac{\delta_2^2}{\varepsilon} \int_{\pi/h-\varepsilon}^{\pi/h} \Lambda^{2(m-n)}(\xi) d\xi \\ &= \delta_2^2 \Lambda^{2(m-n)}(c), \end{aligned}$$

где  $c \in [\pi/h - \varepsilon, \pi/h]$ . Переходя к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получаем

$$\sup_{\substack{u_0 \in l_{2,h} \\ \|u_0\|_{l_{2,h}}^2 \leq \delta_1^2 \\ \|u_n\|_{l_{2,h}}^2 \leq \delta_2^2}} \|u_m\|_{l_{2,h}}^2 \geq \delta_2^2 a^{2(m-n)} = \lambda_2 \delta_2^2.$$

Если, наконец,  $\delta_2/\delta_1 \in [1, +\infty)$ , положим для достаточно малых  $\varepsilon > 0$

$$\widehat{U}_0(\xi) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon}} \delta_1, & \xi \in (0, \varepsilon), \\ 0, & \xi \notin (0, \varepsilon). \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{1}{2\pi} \|\widehat{U}_0(\cdot)\|_{L_2([-\pi/h, \pi/h])}^2 = \delta_1^2,$$

а

$$\frac{1}{2\pi} \|\Lambda^n(\cdot)\widehat{U}_0(\cdot)\|_{L_2([-\pi/h, \pi/h])}^2 = \frac{\delta_1^2}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \Lambda^{2n}(\xi) d\xi \leq \delta_1^2 \leq \delta_2^2.$$

Таким образом, функция  $\widehat{U}_0(\cdot)$  является допустимой в задаче (5.4). Следовательно,

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{u_0 \in l_{2,h} \\ \|u_0\|_{l_{2,h}}^2 \leq \delta_1^2 \\ \|u_n\|_{l_{2,h}}^2 \leq \delta_2^2}} \|u_m\|_{l_{2,h}}^2 &\geq \frac{1}{2\pi} \|\Lambda^m(\cdot)\widehat{U}_0(\cdot)\|_{L_2([-\pi/h, \pi/h])}^2 = \frac{\delta_1^2}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \Lambda^{2m}(\xi) d\xi \\ &= \delta_1^2 \Lambda^{2m}(c), \end{aligned}$$

где  $c \in [0, \varepsilon]$ . Переходя к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получаем

$$\sup_{\substack{u_0 \in l_{2,h} \\ \|u_0\|_{l_{2,h}}^2 \leq \delta_1^2 \\ \|u_n\|_{l_{2,h}}^2 \leq \delta_2^2}} \|u_m\|_{l_{2,h}}^2 \geq \delta_1^2.$$

Займемся теперь оценкой (2.3). Пусть  $\delta_2/\delta_1 \in (a^n, 1)$ . Определим операторы  $S_j: l_{2,h} \rightarrow l_{2,h}$ ,  $j = 1, 2$ , так, чтобы

$$\begin{aligned} F(S_1 u)(\cdot) &= \Lambda^m(\cdot)(1 - \alpha(\cdot))F u(\cdot), \\ F(S_2 u)(\cdot) &= \Lambda^{m-n}(\cdot)\alpha(\cdot)F u(\cdot). \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что для всех  $u_0 \in l_{2,h}$

$$F((I_0 - S_1 I_1 - S_2 I_2)u)(\cdot) \equiv 0.$$

Поэтому  $I_0 = S_1 I_1 + S_2 I_2$ . В силу (5.2) получаем

$$\|S_1 z_1 + S_2 z_2\|_{l_{2,h}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \Lambda^{2m}(\xi) |(1 - \alpha(\xi)Fz_1(\xi) + \Lambda^{-n}(\xi)\alpha(\xi)Fz_2(\xi))|^2 d\xi.$$

Из неравенства Коши–Буняковского вытекает, что

$$\Lambda^{2m}(\xi) |(1 - \alpha(\xi)Fz_1(\xi) + \Lambda^{-n}(\xi)\alpha(\xi)Fz_2(\xi))|^2 \leq \Omega(\xi)(\lambda_1|Fz_1(\xi)|^2 + \lambda_2|Fz_2(\xi)|^2),$$

где

$$\Omega(\xi) = \Lambda^{2m}(\xi) \left( \frac{|1 - \alpha(\xi)|^2}{\lambda_1} + \Lambda^{-2n}(\xi) \frac{|\alpha(\xi)|^2}{\lambda_2} \right).$$

В силу условия (5.3) получаем

$$\begin{aligned} \|S_1 z_1 + S_2 z_2\|_{l_{2,h}}^2 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} (\lambda_1|Fz_1(\xi)|^2 + \lambda_2|Fz_2(\xi)|^2) d\xi \\ &= \lambda_1 \|z_1\|_{l_{2,h}}^2 + \lambda_2 \|z_2\|_{l_{2,h}}^2. \end{aligned}$$

Из теоремы 1 вытекает, что в рассматриваемом случае методы

$$\widehat{\varphi}(y_1, y_2) = S_1 y_1 + S_2 y_2$$

являются оптимальными, а

$$E_\emptyset(I, \delta) = \sqrt{\lambda_1 \delta_1^2 + \lambda_2 \delta_2^2}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда  $\delta_2/\delta_1 \in (0, a^n]$ . Определим оператор  $S_2: l_{2,h} \rightarrow l_{2,h}$  так, чтобы

$$F(S_2 u)(\cdot) = \Lambda^{m-n}(\cdot) F u(\cdot).$$

Так как

$$F((I_0 - S_2 I_2)u_0)(\xi) \equiv 0,$$

то  $I_0 = S_2 I_2$ . Кроме того,

$$\|S_2 z_2\|_{l_{2,h}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \Lambda^{2(m-n)}(\xi) |Fz_2(\xi)|^2 d\xi \leq a^{2(m-n)} \|z_2\|_{l_{2,h}}^2.$$

Из теоремы 1 вытекает, что в рассматриваемом случае метод

$$\widehat{\varphi}(y_1, y_2) = S_2 y_2$$

является оптимальным, а

$$E_\emptyset(I, \delta) = a^{m-n} \delta_2.$$

Наконец, если  $\delta_2 \geq \delta_1$ , определим оператор  $S_1: l_{2,h} \rightarrow l_{2,h}$  так, чтобы

$$F(S_1 u)(\cdot) = \Lambda^m(\cdot) F u(\cdot).$$

Тогда  $I_0 = S_1 I_1$  и

$$\|S_1 z_1\|_{l_{2,h}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \Lambda^{2m}(\xi) |Fz_1(\xi)|^2 d\xi \leq \|z_1\|_{l_{2,h}}^2.$$

Из теоремы 1 следует, что метод

$$\widehat{\varphi}(y_1, y_2) = S_1 y_1$$

является оптимальным, а

$$E_{\emptyset}(I, \delta) = \delta_1.$$

Докажем, что при  $\delta_2/\delta_1 \in (a^n, 1)$  множество функций  $\alpha(\cdot)$ , удовлетворяющих условию (5.3) не пусто. Рассмотрим вогнутую функцию

$$y = x^{m/n}, \quad x \geq 0. \tag{5.5}$$

Проведем касательную к графику этой функции в точке  $x_0 > 0$ . Нетрудно убедиться, что касательная будет иметь вид  $y = \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 x$ , где

$$\widehat{\lambda}_1 = \left(1 - \frac{m}{n}\right) x_0^{m/n}, \quad \widehat{\lambda}_2 = \frac{m}{n} x_0^{m/n-1}.$$

В силу вогнутости кривой (5.5) для всех  $x \geq 0$  будет выполняться неравенство

$$x^{m/n} \leq \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 x.$$

Положим

$$x = \Lambda^{2n}(\xi), \quad x_0 = \left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^2.$$

Тогда  $\widehat{\lambda}_j = \lambda_j$ ,  $j = 1, 2$ , и для всех  $\xi \in [-\pi/h, \pi/h]$  выполняется неравенство

$$\Lambda^{2m}(\xi) \leq \lambda_1 + \lambda_2 \Lambda^{2n}(\xi).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\Lambda^{2m}(\xi)}{\lambda_1 + \lambda_2 \Lambda^{2n}(\xi)} \leq 1.$$

Положив

$$\alpha(\xi) = \frac{\lambda_2 \Lambda^{2n}(\xi)}{\lambda_1 + \lambda_2 \Lambda^{2n}(\xi)},$$

получаем

$$\Lambda^{2m}(\xi) \left( \frac{|1 - \alpha(\xi)|^2}{\lambda_1} + \Lambda^{-2n}(\xi) \frac{|\alpha(\xi)|^2}{\lambda_2} \right) = \frac{\Lambda^{2m}(\xi)}{\lambda_1 + \lambda_2 \Lambda^{2n}(\xi)} \leq 1.$$

Если рассмотреть задачу об оптимальном восстановлении решения в момент времени  $m\tau$  по неточно заданному решению в момент времени  $n\tau$  на классе

$$W = \{u_0 \in l_{2,h} : \|u_0\|_{l_{2,h}} \leq \delta_1\},$$

то из той же теоремы 1 будет следовать, что методы  $\widehat{\varphi}(0, y_2)(\cdot)$  будут оптимальными.

Отметим, что для непрерывной модели распространения тепла результат, полученный в работе [25] для  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = T$  ( $n = 2$ ) и промежуточной точки  $\tau_0$ , в которой требуется восстановить распределение температуры, в одномерном случае совпадает с предельным значением погрешности восстановления и одним из методов, построенных в теореме 5 при  $h \rightarrow 0$  и  $\tau \rightarrow 0$  (в этом случае надо положить  $a = 0$ ).

Отметим также, что задача, аналогичная рассмотренной, когда процесс распространения тепла происходит на окружности, рассматривалась в работе [22].

### Список литературы

- [1] С. Ф. Смоляк, *Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них*, Дисс. ... канд. физ.-матем. наук, Изд-во Моск. ун-та, М., 1965.
- [2] С. М. Никольский, “К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами”, *Успехи мат. наук*, **5:2** (1950), 165–177.
- [3] C. A. Micchelli, T. J. Rivlin, “A survey of optimal recovery”, *Optimal Estimation in Approximation Theory (C. A. Micchelli and T. J. Rivlin, eds.)*, Plenum Press, New York, 1977, 1–54.
- [4] A. A. Melkman, C. A. Micchelli, “Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **16** (1979), 87–105.
- [5] J. F. Traub, H. Woźniakowski, *A General Theory of Optimal Algorithms*, Academic Press, New York, 1980.
- [6] В. В. Арестов, “Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи”, *Тр. Мат. ин-та АН СССР*, **189** (1989), 3–20.
- [7] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным”, *Матем. заметки*, **50:6** (1991), 85–93.
- [8] L. Plaskota, *Noisy Information and Computational Complexity*, Cambridge University Press, 1996.
- [9] K. Yu. Osipenko, *Optimal Recovery of Analytic Functions*, Nova Science Publ., Inc., Huntington, New York, 2000.
- [10] Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, *Выпуклый анализ и его приложения*, Эдиториал УРСС, М., 2003.
- [11] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с ошибкой”, *Матем. сб.*, **193:3** (2002), 79–100.
- [12] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных”, *Функ. анализ и его прил.*, **37:3** (2003), 51–64.
- [13] К. Ю. Осипенко, “Неравенство Харди–Литтлвуда–Поля для аналитических функций из пространств Харди–Соболева”, *Матем. сб.*, **197:3** (2006), 15–34.
- [14] К. Ю. Осипенко, “Оптимальное восстановление линейных операторов в неевклидовых метриках”, *Матем. сб.*, **205:10** (2014), 77–106.
- [15] K. Yu. Osipenko, “Optimal recovery of operators and multidimensional Carlson type inequalities”, *J. Complexity*, **32:1** (2016), 53–73.
- [16] В. В. Арестов, “Наилучшее равномерное приближение оператора дифференцирования ограниченными в пространстве  $L_2$  операторами”, *Тр. ИММ УрО РАН*, **24:4** (2018), 34–56.
- [17] V. V. Arestov, “Best approximation of a differentiation operator on the set of smooth functions with exactly or approximately given Fourier transform”, *Mathematical Optimization Theory and Operation Research. MOTOR 2019 (M. Khachay,*

- Y. Kochetov, P. Pardalos, eds.*), *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, 2019, 434–448.
- [18] V. V. Arestov, “Uniform approximation of differentiation operators by bounded linear operators in the space  $L_r$ ”, *Analysis Math.*, **46**:3 (2020), 425–445.
- [19] К. Ю. Осипенко, “Оптимальное восстановление в весовых пространствах с одномерными весами”, *Матем. сб.*, **213**:3 (2022), 111–138.
- [20] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру”, *Функ. анализ и его прил.*, **44**:3 (2010), 76–79.
- [21] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Неравенство Харди-Литтлвуда-Поля и восстановление производных по неточной информации”, *Докл. РАН*, **438**:3 (2011), 300–302.
- [22] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Об оптимальном восстановлении решений разностных уравнений по неточным измерениям”, *Проблемы математического анализа*, **69** (2013), 47–54.
- [23] Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, “О неравенствах для производных колмогоровского типа”, *Матем. сб.*, **188**:12 (1997), 73–106.
- [24] И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974.
- [25] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., “Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям”, *Матем. сб.*, **200**:5 (2009), 37–54.

К. Ю. ОСИПЕНКО (K. Yu. OSIPENKO)  
Механико-математический факультет, Московский  
государственный университет им. М. В. Ломоносова  
Институт проблем передачи информации  
им. А. А. Харкевича РАН  
E-mail: [kosipenko@yahoo.com](mailto:kosipenko@yahoo.com)

Поступило в редакцию  
03.06.2022