ВОССТАНОВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПО НЕТОЧНЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ

Г. Г. МАГАРИЛ-ИЛЬЯЕВ, К. Ю. ОСИПЕНКО

Рассматривается задача об оптимальном восстановлении температуры бесконечного стержня в момент времени τ по ее приближенным измерениям в моменты $t_1, \dots, t_n$.

Приведем точную постановку. Распространение тепла в бесконечном стержне (т. е. на прямой $\mathbb{R}$) описывается уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

с заданным начальным распределением температуры

$$u(0, x) = u_0(x). \tag{2}$$

Мы предполагаем, что $u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$. Единственным решением задачи (1)–(2) при $t > 0$ является интеграл Пуассона

$$u(t, x) = u(t, x; u_0(\cdot)) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} u_0(\xi)\, d\xi$$

и при этом $u(t, \cdot) \to u_0(\cdot)$ при $t \to 0$ в метрике $L_2(\mathbb{R})$.

Пусть в моменты времени $0 \le t_1 < \dots < t_n$ приближенно известны распределения температур $u(t_1, \cdot), \dots, u(t_n, \cdot)$, т. е. известны функции $y_i(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ такие, что $\|u(t_i, \cdot) - y_i(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \delta_i$, где $\delta_i > 0$, $i = 1, \dots, n$. Любое отображение $m\colon (L_2(\mathbb{R}))^n = L_2(\mathbb{R}) \times \dots \times L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ объявляется методом восстановления(температуры в $L_2(\mathbb{R})$ в момент времени τ по данной информации). *Погрешность метода* m определяется равенством

$$e(\tau, \delta, m) = \sup_{\substack{u_0(\cdot), y_1(\cdot), \dots, y_n(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}) \\ \|u(t_i, \cdot) - y_i(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \delta_i,\ i = 1, \dots, n}} \|u(\tau, \cdot) - m(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

где $y = (y_1(\cdot), \dots, y_n(\cdot))$, а $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$. Нас интересует величина

$$E(\tau, \delta) = \inf_m e(\tau, \delta, m),$$

где нижняя грань берется по всем методам $m\colon (L_2(\mathbb{R}))^n \to L_2(\mathbb{R})$), которую назовем *погрешностью оптимального восстановления*, и метод $\widehat{m}$, на котором нижняя грань достигается, называемый *оптимальным методом восстановления* (температуры в $L_2(\mathbb{R})$ в момент времени τ по данной информации).

Отметим, что такой подход к определению оптимального метода идеологически восходит к работам А. Н. Колмогорова тридцатых годов прошлого века, посвященных нахождению наилучшего средства приближения сразу для всех функций из данного класса.

Перед формулировкой теоремы сделаем некоторые построения. На плоскости с координатами (t, x) обозначим $M = \operatorname{co}\{(t_j, \ln(1/\delta_j)),\ 1 \le j \le n\} + \{(t, 0) \mid t \ge 0\}$, где $\operatorname{co} A$ — выпуклая оболочка множества A. Пусть функция $\theta(\cdot)$ на $[0, \infty)$ определена равенством: $\theta(t) = \max\{x \mid (t, x) \in M\}$ (причем $\theta(t) = +\infty$, если $(t, x) \ne M$ ни для какого x). Ясно, что $\theta(\cdot)$ — ломаная на $[t_1, \infty)$. Пусть $t_{s_1} < \dots < t_{s_k}$ — ее точки излома ($s_1 = 1$), которые, очевидно, являются подмножеством точек $\{t_1, \dots, t_n\}$ (если $\theta(\cdot)$ — прямая, то считаем, что излом только один в точке t_1, т. е. $k = 1$).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №07-01-90102, №06-01-00530).

Теорема. *При всех $\tau > t_1$*
$$E(\tau, \delta) = e^{-\theta(\tau)}.$$
Если $\tau \in (t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$ для некоторого $1 \le j \le k-1$, то
$$\widehat{m}(y)(\cdot) = u(\tau, \cdot; K(\cdot) * (\lambda_1 u(t_{s_j}, \cdot; y_{s_j}(\cdot)) + \lambda_2 u(t_{s_j+1}, \cdot; y_{s_j+1}(\cdot)))),$$
— оптимальный метод, где
$$\lambda_1 = \frac{t_{s_{j+1}} - \tau}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}} \left(\frac{\delta_{s_{j+1}}}{\delta_{s_j}}\right)^{\frac{2(\tau - t_{s_j})}{t_{s_j+1} - t_{s_j}}}, \quad \lambda_2 = \frac{\tau - t_{s_j}}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}} \left(\frac{\delta_{s_{j+1}}}{\delta_{s_j}}\right)^{\frac{2(t_{s_j+1} - \tau)}{t_{s_j+1} - t_{s_j}}},$$
$K(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ и преобразование Фурье функции $K(\cdot)$ имеет вид
$$FK(\xi) = \frac{1}{\lambda_1 e^{-2\xi^2 t_{s_j}} + \lambda_2 e^{-2\xi^2 t_{s_{j+1}}}}.$$
Если $\tau > t_{s_k}$, то
$$\widehat{m}(y)(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\tau - t_{s_k})}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(\tau - t_{s_k})}} y_{s_k}(\xi)\, d\xi$$
— оптимальный метод.

Из выражения для оптимального метода видно, что при $\tau \in (t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$ из всего наблюдаемого набора функций $y_1(\cdot), \dots, y_n(\cdot)$ используются только две (и выбор их зависит от величин погрешности δ_i). Далее происходит их некоторое усреднение и сглаживание (свертка с ядром $K(\cdot)$) и полученная таким образом функция воспринимается как первоначальное распределение температур.

Рассматриваемая задача является частным случаем общей задачи об оптимальном восстановлении линейного оператора по неточной информации, которая изучалась в работах [1]–[3].

Список литературы

[1] A. A. Melkman and C. A. Micchelli, "Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data *SIAM J. Numer. Anal.*, **16** (1979), 87–105.

[2] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, "Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью", *Матем. сб.*, **193**:3 (2002), 79–100.

[3] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, "Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных", *Функц. анализ и его прилож.*, **37** (2003), 51–64.

Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет)

E-mail address: magaril@mirea.ru

"МАТИ" — Российский государственный технологический университет им. К. Э. Циолковского

E-mail address: kosipenko@yahoo.com