Математические заметки

Том 110 выпуск 6 июнь 2021

УДК 517.51

# Оптимальные методы восстановления решений задачи Дирихле, точные на подпространствах сферических гармоник

**Е. А. Балова, К. Ю. Осипенко**

Рассматривается задача оптимального восстановления решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в единичном $d$-мерном шаре на сфере радиуса $\rho$ по конечному набору неточно заданных коэффициентов Фурье решения на сфере радиуса $r$, $0 < r < \rho < 1$. При этом на методы накладываются условия точности на фиксированных подпространствах сферических гармоник.

Библиография: 11 названий.

**Ключевые слова:** оптимальное восстановление, задача Дирихле, уравнение Лапласа.

## Введение

Одной из распространенных идей при построении численных методов состоит в том, что ищутся методы, точные на некотором подпространстве функций. При этом исходят из естественных соображений, основанных на том, что если исходная функция приближается с достаточной точностью элементами этого подпространства, то и соответствующий метод (как правило, являющийся некоторым линейным функционалом или оператором от этой функции) будет иметь приемлемую погрешность. Характерным примером здесь являются квадратурные формулы, построенные из условия их точности на алгебраических многочленах фиксированной степени, а наиболее ярким примером являются квадратурные формулы Гаусса.

Другой подход к построению численных методов, а в более широком смысле, к аппроксимации в целом, связан с идеями А. Н. Колмогорова. В этом случае вначале фиксируется некоторая априорная информация о функциях — некоторое множество функций (класс), для которых строится оптимальный (наилучший) метод из условия его минимальной погрешности на этом классе функций. Здесь также одним из характерных примеров являются квадратурные формулы, впервые построенные в такой постановке С. М. Никольским [1] и А. Сардом [2].

В дальнейшем из такого подхода развилась теория оптимального восстановления, историю развития которой и конкретные результаты можно найти в монографиях

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 17-01-00649.

[3]–[6]. В рамках этой теории наряду с задачами численного интегрирования рассматривались задачи интерполяции, численного дифференцирования, построения разностных схем и др.

В работе [7] был предложен подход, совмещающий эти две классические идеи, а именно, было предложено искать методы, которые были бы оптимальны на классе и в то же время точны на некотором фиксированном подпространстве.

В рамках такой постановки мы решаем задачу оптимального восстановления решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в единичном $d$-мерном шаре на сфере радиуса $\rho$ по неточно заданным коэффициентам Фурье решения на другой сфере радиуса $r$, $0 < \rho < r < 1$. При этом в качестве подпространств, на которых искомый оптимальный метод должен быть точным, рассматриваются подпространства сферических гармоник.

Задачи оптимального восстановления решения уравнения Лапласа в несколько иных постановках рассматривались ранее в работах [8] и [9].

## 1. Общая постановка

Приведем одну из возможных общих постановок задачи оптимального восстановления значений линейного оператора по неточным значениям другого оператора. Пусть $X$ — линейное пространство, $Y, Z$ — линейные нормированные пространства и $A\colon X \to Z$, $I\colon X \to Y$ — линейные операторы. Рассматривается задача об оптимальном восстановлении значений оператора $A$ на множестве $W \subset X$ по неточно заданным значениям оператора $I$ на элементах этого множества.

Более точно, считается, что для каждого элемента $x \in W$ известно значение $y \in Y$ такое, что $\|Ix - y\|_Y \leqslant \delta$, где $\delta > 0$ — число, характеризующее погрешность исходной информации об элементах множества $W$. Требуется по значению $y$ восстановить наиболее точным образом значение $Ax$. Тем самым любой метод восстановления представляет из себя отображение $\varphi\colon Y \to Z$, которое элементу $y \in Y$ ставит в соответствие значение $\varphi(y) \in Z$, принимаемое за приближенное значение $Ax$.

Погрешностью метода $\varphi$ называется величина

$$e(A, W, I, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x \in W,\ y \in Y \\ \|Ix - y\|_Y \leqslant \delta}} \|Ax - \varphi(y)\|_Z.$$

Оптимальной погрешностью восстановления называется величина

$$E(A, W, I, \delta) = \inf_{\varphi\colon Y \to Z} e(A, W, I, \delta, \varphi),$$

а методы, на которых достигается нижняя грань, называются оптимальными на множестве $W$.

Пусть $L \subset X$ — линейное подпространство $X$. Будем говорить, что метод $\varphi\colon Y \to Z$ точен на $L$, если $Ax = \varphi(Ix)$ для всех $x \in L$.

Рассмотрим множество $\mathcal{E}_L$, состоящее из линейных операторов $\varphi\colon Y \to Z$, точных на $L$. Положим

$$E_L(A, W, I, \delta) = \inf_{\varphi \in \mathcal{E}_L} e(A, W, I, \delta, \varphi).$$

Методы, на которых достигается нижняя грань в этом равенстве будем называть оптимальными на $W$ среди точных на $L$.

Предложение 1. *Пусть $L \subset X$ — линейное подпространство $X$ и $\varphi^*\colon Y \to Z$ — линейный оператор, являющийся оптимальным методом восстановления оператора $A$ на множестве $W + L$. Тогда*

$$E_L(A, W, I, \delta) = E(A, W + L, I, \delta).$$

*Если $E_L(A, W, I, \delta) < \infty$, то $\varphi^*$ — оптимальный метод на $W$ среди точных на $L$.*

Доказательство. Пусть $\varphi\colon Y \to Z$ — линейный метод, точный на $L$, $x \in W + L$ и $y \in Y$ такой, что $\|Ix - y\|_Y \leqslant \delta$. Тогда существуют $x_1 \in W$ и $x_2 \in L$ такие, что $x = x_1 + x_2$. Положим $y_1 = y - Ix_2$. Тогда

$$\|Ix_1 - y_1\|_Y = \|I(x_1 + x_2) - y\|_Y \leqslant \delta.$$

В силу точности метода $\varphi$ на $L$ имеем

$$\|Ax - \varphi(y)\|_Z = \|A(x_1 + x_2) - \varphi(y_1 + Ix_2)\|_Z = \|Ax_1 - \varphi(y_1)\|_Z \leqslant e(A, W, I, \delta, \varphi).$$

Отсюда вытекает, что

$$e(A, W + L, I, \delta, \varphi) \leqslant e(A, W, I, \delta, \varphi).$$

Следовательно,

$$E(A, W + L, I, \delta) \leqslant e(A, W, I, \delta, \varphi).$$

В силу того, что это неравенство выполняется для любого линейного метода, точного на $L$, получаем

$$E(A, W + L, I, \delta) \leqslant E_L(A, W, I, \delta). \tag{1.1}$$

Если $E(A, W + L, I, \delta) = \infty$, то $E_L(A, W, I, \delta) = \infty$. Пусть $E(A, W + L, I, \delta) < \infty$. Докажем, что $\varphi^*$ точен на $L$. Предположим противное. Тогда существует $x \in L$ такой, что $\|Ax - \varphi^*(Ix)\|_Z = c > 0$. Пусть $x_0 \in W$ и $\alpha > 0$. Рассмотрим элемент $x_1 = x_0 + \alpha x \in W + L$. Имеем

$$\begin{aligned} E(A, W + L, I, \delta) = e(A, W + L, I, \delta, \varphi^*) \geqslant \|Ax_1 - \varphi^*(Ix_1)\|_Z \\ = \|Ax_0 - \varphi^*(Ix_0) + \alpha(Ax - \varphi(Ix))\|_Z \geqslant \alpha\|Ax - \varphi(Ix)\|_Z - \|Ax_0 - \varphi^*(Ix_0)\|_Z \\ = \alpha c - \|Ax_0 - \varphi^*(Ix_0)\|_Z. \end{aligned}$$

Устремляя $\alpha$ к бесконечности, получаем противоречие с конечностью величины $E(A, W + L, I, \delta)$.

В силу очевидного неравенства

$$e(A, W, I, \delta, \varphi^*) \leqslant e(A, W + L, I, \delta, \varphi^*)$$

имеем

$$E_L(A, W, I, \delta) \leqslant e(A, W, I, \delta, \varphi^*) \leqslant e(A, W + L, I, \delta, \varphi^*) = E(A, W + L, I, \delta).$$

Отсюда, учитывая (1.1), получаем доказываемое утверждение.

Таким образом, если среди просто устроенных методов (линейных) искать оптимальные методы, точные на некотором подпространстве, то достаточно найти линейные оптимальные методы на сумме исходного множества и заданного подпространства.

## 2. Оптимальное восстановление решения задачи Дирихле

Положим

$$\mathbb{B}^d = \left\{ x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : |x|^2 = \sum_{j=1}^{d} x_j^2 < 1 \right\},$$
$$\mathbb{S}^{d-1} = \left\{ x' = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : |x'| = 1 \right\}.$$

Рассмотрим в шаре $\mathbb{B}^d$, $d \geqslant 2$, задачу Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \\ u\big|_{\mathbb{S}^{d-1}} &= f(\cdot), \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Граничное условие здесь понимается в смысле равенства

$$\lim_{r \to 1-0} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |u(rx') - f(x')|^2 \, dx' = 0.$$

Известно (см. [10]), что $L_2(\mathbb{S}^{d-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} H_k$, где $H_k$ — множество сферических гармоник порядка $k$, при этом $\dim H_0 = a_0 = 1$,

$$\dim H_k = a_k = (2k + d - 2) \frac{(k + d - 3)!}{(d-2)!\, k!}, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Выберем в $H_k$ ортонормированный базис $\{Y_j^{(k)}(\cdot)\}_{j=1}^{a_k}$. Тогда, если

$$f(x') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x'), \tag{2.2}$$

то функция

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} |x|^k \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)} \left( \frac{x}{|x|} \right) \tag{2.3}$$

(доопределенная в нуле по непрерывности) является решением задачи (2.1).

Рассмотрим задачу оптимального восстановления решения задачи (2.1) на сфере радиуса $\rho$ по конечному набору неточно заданных коэффициентов Фурье решения на сфере радиуса $r$, $0 < r < \rho < 1$. Будем рассматривать методы восстановления, точные на пространстве

$$L_n = \sum_{k=0}^{n} H_k,$$

считая, что граничные функции принадлежат классу

$$BL_2(\mathbb{S}^{d-1}) = \{ f(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}) : \|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leqslant 1 \}.$$

Сформулируем более точно рассматриваемую задачу восстановления. Рассмотрим оператор $A_\rho \colon L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \to L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, который каждой граничной функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ ставит в соответствие функцию

$$u_\rho(x') = u(x)\big|_{|x|=\rho} = u(\rho x'), \quad x' = \frac{x}{|x|},$$

где $u(\cdot)$ — решение задачи (2.1) (в терминах общей задачи восстановления здесь $X = Z = L_2(\mathbb{S}^{d-1})$).

В качестве оператора $I$ рассматривается оператор $I_r^N\colon L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \to l_2^N$, который каждой граничной функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ ставит в соответствие набор из первых

$$N = \sum_{k=0}^{k^*} a_k$$

коэффициентов Фурье функции

$$u_r(x') = u(x)\Big|_{|x|=r} = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x').$$

Тем самым, если $f(\cdot)$ имеет разложение (2.2), то

$$I_r^N f(\cdot) = \{r^k c_{kj}\}, \quad k = 0, 1, \dots, k^*, \quad j = 1, \dots, a_k.$$

В силу предложения 1 мы будем исследовать задачу о нахождении величины $E(A_\rho, BL_2(\mathbb{S}^{d-1}) + L_n, I_r^N, \delta)$ и соответствующих оптимальных методов.

Предложение 2. *Пусть $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ и имеет вид (2.2). Тогда $f(\cdot) \in BL_2(\mathbb{S}^{d-1}) + L_n$ в том и только в том случае, если*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} |c_{kj}|^2 \leqslant 1. \tag{2.4}$$

Доказательство. Пусть $f(\cdot) \in BL_2(\mathbb{S}^{d-1}) + L_n$. Тогда $f(\cdot) = f_1(\cdot) + f_2(\cdot)$, где $f_1(\cdot) \in BL_2(\mathbb{S}^{d-1})$, а $f_2(\cdot) \in L_n$. Если

$$f_1(x') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \alpha_{kj} Y_j^{(k)}(x'), \quad f_2(x') = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=1}^{a_k} \beta_{kj} Y_j^{(k)}(x'),$$

то

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} |\alpha_{kj}|^2 \leqslant 1$$

и $c_{kj} = \alpha_{kj}$ при $k \geqslant n+1$, $j = 1, \dots, a_k$. Поэтому

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} |\alpha_{kj}|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} |\alpha_{kj}|^2 \leqslant 1.$$

Пусть выполнено условие (2.4). Тогда функцию $f(\cdot)$ можно представить в виде $f(\cdot) = f_1(\cdot) + f_2(\cdot)$, где

$$f_1(x') = \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x'), \quad f_2(x') = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x').$$

В силу условия (2.4) $f_1(\cdot) \in BL_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Тем самым $f(\cdot) \in BL_2(\mathbb{S}^{d-1}) + L_n$.

Рассмотрим в плоскости $(x,y)$ ломаную с узлами в точках $(0,0)$ и

$$P_k=\left(\frac{1}{r^{2k}},\frac{\rho^{2k}}{r^{2k}}\right),\quad k=0,1,\dots.$$

Нетрудно убедиться, что это вогнутая ломаная. Найдем точку $P_{k_1}$ такую, что все точки ломаной лежат не выше прямой, проходящей через эту точку с угловым коэффициентом $\rho^{2(k^*+1)}$:

$$k_1=\min\left\{k\in\mathbb{Z}_+:\rho^{2k}\frac{\rho^2-r^2}{1-r^2}\leqslant\rho^{2(k^*+1)}\right\}$$

(таких точек может оказаться две, тогда мы берем ту из них, которая левее). Эта прямая пересекает ось ординат в точке

$$y_0=\frac{\rho^{2k_1}}{r^{2k_1}}(1-\rho^{2(k^*-k_1+1)}).$$

Пусть $n$ таково, что

$$\frac{\rho^{2n}}{r^{2n}}<y_0.$$

Найдем тогда прямую, которая проходит через точки $(0,\rho^{2n}/r^{2n})$ и $P_{k_2}$ такую, что наша ломаная лежит не выше этой прямой. Легко показать, что $k_2$ — число, удовлетворяющее условию:

$$\rho^{2k_2}-\rho^{2n}r^{2(k_2-n)}=\max_{k\in\mathbb{N}}\left\{\rho^{2k}-\rho^{2n}r^{2(k-n)}\right\}.$$

В силу вогнутости ломаной точка $P_{k_2}$ лежит не правее точки $P_{k_1}$ $(k_2\leqslant k_1)$.

Введем следующие обозначения. Если $k^*\geqslant n$, а $n$ таково, что $\rho^{2n}/r^{2n}\geqslant y_0$, положим $\lambda_1=\rho^{2n}/r^{2n}$, а $\lambda_2=\rho^{2(k^*+1)}$.

В случае, если $\rho^{2n}/r^{2n}<y_0$, $\lambda_1$ и $\lambda_2$ определим в зависимости от величины $\delta$ следующим образом:

1) если $0<\delta<r^{k_1}$, то $\lambda_1=y_0$, $\lambda_2=\rho^{2(k^*+1)}$;
2) если при некотором $s$, $k_2\leqslant s<k_1$, $r^{s+1}\leqslant\delta<r^s$, то

$$\lambda_1=\frac{1}{r^{2s}}\frac{1-\rho^2}{1-r^2},\quad \lambda_2=\frac{\rho^{2s}}{r^{2s}}\frac{\rho^2-r^2}{1-r^2};$$

3) если $\delta\geqslant r^{k_2}$, то $\lambda_1=\rho^{2n}/r^{2n}$, $\lambda_2=\rho^{2k_2}-\rho^{2n}r^{2(k_2-n)}$.

Теорема 1. *Если $n>k^*$, то $E(A_\rho,BL_2(\mathbb{S}^{d-1})+L_n,I_r^N,\delta)=\infty$.*

*Если $n\leqslant k^*$, то $E(A_\rho,BL_2(\mathbb{S}^{d-1})+L_n,I_r^N,\delta)=\sqrt{\lambda_1\delta^2+\lambda_2}$. При этом все методы*

$$\varphi(y)(\cdot)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{r^k}\sum_{j=1}^{a_k}y_{kj}Y_j^{(k)}(\cdot)+\sum_{k=n+1}^{k^*}\frac{\rho^k}{r^k}\sum_{j=1}^{a_k}\alpha_{kj}y_{kj}Y_j^{(k)}(\cdot),\tag{2.5}$$

*где $y=\{y_{kj}\}$, $k=0,1,\dots,k^*$, $j=1,\dots,a_k$, а $\alpha_{kj}$ — любые из чисел, удовлетворяющих при $k=n+1,\dots,k^*$, $j=1,\dots,a_k$, условию*

$$\frac{|1-\alpha_{kj}|^2}{\lambda_2}+\frac{|\alpha_{kj}|^2}{\lambda_1r^{2k}}\leqslant\rho^{-2k},\tag{2.6}$$

*являются оптимальными.*

Доказательство. Пусть $n > k^*$. Положим

$$f_0(x') = cY_1^{(k^*+1)}(x'), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, что $f_0(\cdot) \in L_n$ и $I_r^N f_0(\cdot) = 0$. Поэтому для любого метода восстановления $\varphi\colon l_2^N \to L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ имеем

$$\begin{aligned} e(A_\rho, BL_2(\mathbb{S}^{d-1}) + L_n, I_r^N, \delta, \varphi) &\geqslant \|c\rho^{k^*+1}Y_1^{(k^*+1)}(\cdot) - \varphi(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \\ &\geqslant |c|\rho^{k^*+1} - \|\varphi(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}. \end{aligned}$$

При $c \to +\infty$ правая часть этого неравенства стремится к бесконечности. Отсюда вытекает, что в рассматриваемом случае $E(A_\rho, BL_2(\mathbb{S}^{d-1}) + L_n, I_r^N, \delta) = \infty$.

Пусть теперь $n \leqslant k^*$. Пространство $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ изоморфно пространству векторов

$$\widetilde{X} = \left\{ \{c_{kj}\},\ k = 0, 1, \dots,\ j = 1, \dots, a_k : \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} |c_{kj}|^2 < \infty \right\}$$

со скалярным произведением

$$(c^{(1)}, c^{(2)}) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^{(1)} \overline{c}_{kj}^{(2)},$$

где $c^{(s)} = \{c_{kj}^{(s)}\}$, $s = 1, 2$. Поэтому в силу предложения 2 задача о нахождении величины $E(A_\rho, BL_2(\mathbb{S}^{d-1}) + L_n, I_r^N, \delta)$ эквивалентна задаче о нахождении величины $E(\widetilde{A}_\rho, \widetilde{W}_n, \widetilde{I}_r^N, \delta)$, где операторы $\widetilde{A}_\rho\colon \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ и $\widetilde{I}_r^N\colon \widetilde{X} \to l_2^N$ определены равенствами

$$\begin{aligned} \widetilde{A}_\rho c &= \{\rho^k c_{kj}\}, \quad k = 0, 1, \dots,\ j = 1, \dots, a_k, \\ \widetilde{I}_r^N c &= \{r^k c_{kj}\}, \quad k = 0, 1, \dots, k^*,\ j = 1, \dots, a_k \end{aligned}$$

($c = \{c_{kj}\}$, $k = 0, 1, \dots$, $j = 1, \dots, a_k$), а

$$\widetilde{W}_n = \left\{ \{c_{kj}\},\ k = 0, 1, \dots,\ j = 1, \dots, a_k : \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} |c_{kj}|^2 \leqslant 1 \right\}.$$

Введем следующие обозначения:

$$X = \left\{ \{x_{kj}\},\ k = 0, 1, \dots,\ j = 1, \dots, a_k : \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{r^{2k}} \sum_{j=1}^{a_k} |x_{kj}|^2 < \infty \right\},$$

$$W_n = \left\{ \{x_{kj}\},\ k = 0, 1, \dots,\ j = 1, \dots, a_k : \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{r^{2k}} \sum_{j=1}^{a_k} |x_{kj}|^2 \leqslant 1 \right\}.$$

Положив $x_{kj} = r^k c_{kj}$ и введя операторы $\Lambda\colon X \to \widetilde{X}$, $I^N\colon X \to l_2^N$, определенные равенствами

$$\begin{aligned} \Lambda x &= \left\{ \frac{\rho^k}{r^k} x_{kj} \right\}, \quad k = 0, 1, \dots,\ j = 1, \dots, a_k, \\ I^N x &= \{x_{kj}\}, \quad k = 0, 1, \dots, k^*,\ j = 1, \dots, a_k \end{aligned}$$

($x=\{x_{kj}\}$, $k=0,1,\dots$, $j=1,\dots,a_k$), мы приходим к задаче о нахождении величины $E(\Lambda,W_n,I^N,\delta)$. Для решения этой задачи воспользуемся теоремой 10 из работы [11].

Множество $M$, в терминах которого дается решение этой задачи, имеет вид

$$M=\operatorname{co}\Big\{(1/r^{2n})\cup\big\{(1/r^{2k},\rho^{2k}/r^{2k})\big\}_{k>n}\Big\}+\{(t,t\rho^{2(k^*+1)}):t\geqslant 0\}$$

($\operatorname{co}A$ — выпуклая оболочка множества $A$). Для функции $\theta(x)=\max\{y:(x,y)\in M\}$ справедливо равенство

$$\theta(1/\delta^2)=\lambda_1+\lambda_2\frac{1}{\delta^2}.$$

Далее, непосредственно применяется теорема 10 из [11].

Среди семейства оптимальных методов (2.5) естественно выбрать те, которые используют минимальное количество исходной информации. Если множитель $\alpha_{kj}$ можно выбрать, равным нулю, то соответствующая информация о приближенном значении коэффициента Фурье не будет использоваться в таком методе. Из условия (2.6) вытекает, что можно взять $\alpha_{kj}=0$ в случае, если выполнено неравенство $\lambda_2\geqslant\rho^{2k}$.

Среди семейства методов (2.5) хороши также те методы, которые остаются оптимальными при расширении исходного класса функций.

Пусть $n\leqslant k^*$. Положим

$$\widehat{k}=\min\{k:\rho^{2k}\leqslant\lambda_2\}-1,\quad \widehat{n}=\max\left\{k:\frac{\rho^{2k}}{r^{2k}}\leqslant\lambda_1\right\}.$$

Нетрудно проверить, что $k^*\geqslant\widehat{k}\geqslant\widehat{n}\geqslant n$.

Следствие 1. *При $n\leqslant k^*$ имеет место равенство*

$$E(A_\rho,BL_2(\mathbb{S}^{d-1})+L_n,I_r^N,\delta)=E(A_\rho,BL_2(\mathbb{S}^{d-1})+L_{\widehat{n}},I_r^N,\delta),\tag{2.7}$$

*а все методы*

$$\varphi(y)(\cdot)=\sum_{k=0}^{\widehat{n}}\frac{\rho^k}{r^k}\sum_{j=1}^{a_k}y_{kj}Y_j^{(k)}(\cdot)+\sum_{k=\widehat{n}+1}^{\widehat{k}}\frac{\rho^k}{r^k}\sum_{j=1}^{a_k}\alpha_{kj}y_{kj}Y_j^{(k)}(\cdot),\tag{2.8}$$

*в которых $\alpha_{kj}$ при $k=\widehat{n}+1,\dots,\widehat{k}$, $j=1,\dots,a_k$, удовлетворяют условию (2.6), являются оптимальными не только для класса $BL_2(\mathbb{S}^{d-1})+L_n$, но и для класса $BL_2(\mathbb{S}^{d-1})+L_{\widehat{n}}$.*

Доказательство. Из определения величин $\widehat{n}$ и $\widehat{k}$ вытекает, что в оптимальных методах (2.5) можно положить $\alpha_{kj}=1$ для $k=n+1,\dots,\widehat{n}$, $j=1,\dots,a_k$, и $\alpha_{kj}=0$ для $k=\widehat{k}+1,\dots,k^*$, $j=1,\dots,a_k$. Тем самым методы (2.8) принадлежат семейству (2.5) и, следовательно, оптимальны на классе $BL_2(\mathbb{S}^{d-1})+L_n$. Кроме того, они точны на подпространстве $L_{\widehat{n}}$. В силу предложения 1 из работы [7] они являются оптимальными на классе $BL_2(\mathbb{S}^{d-1})+L_{\widehat{n}}$, и справедливо равенство (2.7).

Отметим, что при $\widehat{k}<k^*$ построенное семейство оптимальных методов (2.8) использует не всю исходную информацию, а при $\widehat{n}>n$ построенные методы остаются оптимальными для более широкого класса функций, чем исходный, с сохранением погрешности оптимального восстановления.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


[1] С. М. Никольский, "К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами", *УМН*, **5**:2(36) (1950), 165–177.

[2] A. Sard, "Best approximative integration formulas; best approximation formulas", *Amer. J. Math.*, **71**:1 (1949), 80–91.

[3] J. F. Traub, H. Woźniakowski, *A general theory of optimal algorithms*, ACM Monograph Series, Academic Press, Inc, New York–London, 1980.

[4] L. Plaskota, *Noisy information and computational complexity*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[5] K. Yu. Osipenko, *Optimal recovery of analytic functions*, Nova Science Publ., Inc., Huntington, New York, 2000.

[6] Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, *Выпуклый анализ и его приложения*, Эдиториал УРСС, М., 2011.

[7] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, "Точность и оптимальность методов восстановления функций по их спектру", *Функциональные пространства, теория приближений, смежные разделы математического анализа*, Сборник статей. К 110-летию со дня рождения академика Сергея Михайловича Никольского, Тр. МИАН, **293**, МАИК, М., 2016, 201–216.

[8] К. Ю. Осипенко, "О восстановлении решения задачи Дирихле по неточным исходным данным", *Владикавказский мат. журн.*, **6**:4 (2004), 55–62.

[9] Е. А. Балова, "Об оптимальном восстановлении решений задачи Дирихле по неточным исходным данным", *Матем. заметки*, **82**:3 (2007), 323–334.

[10] И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974.

[11] К. Ю. Осипенко, "Оптимальное восстановление линейных операторов в неевклидовых метриках", *Матем. сб.*, **205**:10 (2014), 77–106.


**Е. А. Балова**
МАИ (национальный исследовательский университет),
г. Москва
*E-mail*: vabal@rambler.ru

Поступило
Исправленный вариант

**К. Ю. Осипенко**
МГУ, ИППИ, г. Москва
*E-mail*: kosipenko@yahoo.com