

УДК 517.98

## ТОЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ТИПА КАРЛСОНА СО МНОГИМИ ВЕСАМИ

К. Ю. Осипенко

В работе рассматриваются точные неравенства типа Карлсона вида

$$\|w(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T)} \leq K \|w_0(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T)}^\gamma \max_{1 \leq j \leq n} \|w_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T)}^{1-\gamma},$$

где  $T$  — конус в  $\mathbb{R}^d$ , а веса  $w_j(\cdot)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , являются однородными и обладают некоторым свойством симметрии.

Ключевые слова: неравенства типа Карлсона, точные константы.

**K. Yu. Osipenko. Sharp Carlson type inequalities with many weights.**

The paper is concerned with sharp Carlson type inequalities of the form

$$\|w(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T)} \leq K \|w_0(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T)}^\gamma \max_{1 \leq j \leq n} \|w_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T)}^{1-\gamma},$$

where  $T$  is a cone in  $\mathbb{R}^d$  and the weight functions  $w_j(\cdot)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , are homogeneous with some symmetry property.

Keywords: Carlson type inequalities, sharp constants.

MSC: 26D15

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-4-229-240

## 1. Введение

Пусть  $T$  — некоторое непустое множество,  $\Sigma$  —  $\sigma$ -алгебра подмножеств  $T$  и  $\mu$  — неотрицательная  $\sigma$ -аддитивная мера на  $\Sigma$ . Через  $L_p(T, \mu)$  обозначим совокупность всех  $\Sigma$ -измеримых функций со значениями в  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ , для которых

$$\|x(\cdot)\|_{L_p(T, \mu)} = \left( \int_T |x(t)|^p d\mu \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Для  $T \subset \mathbb{R}^d$  и  $d\mu = dt$ ,  $t \in \mathbb{R}^d$ , положим  $L_p(T) = L_p(T, \mu)$ .

Неравенство Карлсона [1]

$$\|x(t)\|_{L_1(\mathbb{R}_+)} \leq \sqrt{\pi} \|x(t)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^{1/2} \|tx(t)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^{1/2}, \quad \mathbb{R}_+ = [0, +\infty),$$

обобщалось многими авторами (см. [2–9]). В работе [7] была найдена точная константа в неравенстве вида

$$\|w(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T, \mu)} \leq K \|w_0(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T, \mu)}^\gamma \|w_1(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T, \mu)}^{1-\gamma}, \quad (1.1)$$

где  $T$  — конус в линейном пространстве,  $w(\cdot)$ ,  $w_0(\cdot)$  и  $w_1(\cdot)$  — однородные функции,  $\mu$  — однородная мера и  $1 \leq q < p$ ,  $r < \infty$  (при  $T = \mathbb{R}^d$  точная константа была получена в работе [5]). Напомним, что константа  $K$  называется точной, если ее нельзя заменить на меньшую. Само неравенство в таком случае называется точным.

Нахождение точной константы в неравенстве (1.1) тесно связано со следующей экстремальной задачей:

$$\|w(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T,\mu)} \rightarrow \max, \quad \|w_0(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)} \leq \delta, \quad \|w_1(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T,\mu)} \leq 1,$$

где  $\delta > 0$ . В этой работе изучается экстремальная задача

$$\|w(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T,\mu)} \rightarrow \max, \quad \|w_0(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)} \leq \delta, \quad \|w_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T,\mu)} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.2)$$

где  $w(\cdot)$ ,  $w_0(\cdot)$  и  $w_j(\cdot)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , — однородные функции с некоторыми дополнительными свойствами симметрии на функции  $w_j(\cdot)$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Полученные результаты применяются для получения точных неравенств типа Карлсона со многими весами.

Ряд общих результатов относительно задачи (1.2) были получены в работе [9], но там основное внимание было уделено задачам оптимального восстановления линейных операторов, а точные неравенства типа Карлсона получались как следствия экстремальных задач, возникающих при построении оптимальных методов восстановления. В данной работе мы получаем эти неравенства непосредственно.

## 2. Однородные весовые функции на конусе в линейном пространстве

Пусть  $T$  — конус в линейном пространстве,  $\mu(\cdot)$  — однородная мера порядка  $d$ ,  $|w(\cdot)|$ ,  $|w_0(\cdot)|$  — однородные функции порядков  $\theta$ ,  $\theta_0$ , а  $|w_j(\cdot)|$ ,  $j = 1, \dots, n$ , — однородные функции порядка  $\theta_1$ . Будем предполагать, что  $w(t), w_0(t) \neq 0$  и  $\sum_{j=1}^n |w_j(t)| \neq 0$  для почти всех  $t \in T$ . Если  $1 \leq q < p, r < \infty$ , то при  $k \in [0, 1)$  функция  $k^{1/(p-q)}(1-k)^{-1/(r-q)}$  монотонно возрастает от 0 до  $+\infty$ . Следовательно, существует функция  $k(\cdot)$  такая, что для почти всех  $t \in T$

$$\frac{k^{1/(p-q)}(t)}{(1-k(t))^{1/(r-q)}} = \left| \frac{w(t)}{w_0(t)} \right|^{\frac{q(p-r)}{(p-q)(r-q)}} \left( \sum_{j=1}^n \left| \frac{w_j(t)}{w_0(t)} \right|^r \right)^{-1/(r-q)}. \quad (2.1)$$

Положим

$$\gamma = \frac{\theta_1 - \theta - d(1/q - 1/r)}{\theta_1 - \theta_0 + d(1/r - 1/p)}. \quad (2.2)$$

**Теорема 1.** Пусть  $1 \leq q < p, r < \infty$  и  $\theta_1 - \theta - d(1/q - 1/r) \neq 0$ . Предположим, что

$$I_1 = \int_T \left| \frac{w(z)}{w_0(z)} \right|^{pq/(p-q)} k^{p/(p-q)}(z) d\mu(z) < \infty,$$

$$I_{j+1} = \int_T \frac{|w(z)|^{qr/(p-q)}}{|w_0(z)|^{pr/(p-q)}} |w_j(z)|^r k^{r/(p-q)}(z) d\mu(z) < \infty, \quad j = 1, \dots, n,$$

и, кроме того,  $I_2 = \dots = I_{n+1}$ . Тогда для всех  $x(\cdot) \neq 0$  таких, что  $w_0(\cdot)x(\cdot) \in L_p(T, \mu)$  и  $w_j(\cdot)x(\cdot) \in L_r(T, \mu)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , имеет место точное неравенство

$$\|w(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T,\mu)} \leq K \|w_0(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)}^\gamma \max_{1 \leq j \leq n} \|w_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T,\mu)}^{1-\gamma}, \quad (2.3)$$

где

$$K = I_1^{-\gamma/p} I_2^{-(1-\gamma)/r} (I_1 + nI_2)^{1/q}. \quad (2.4)$$

Для доказательства этой теоремы нам потребуются две леммы. Первая из них по сути является достаточным условием экстремума из теоремы Каруша — Куна — Таккера (см., например, [10, с. 39] (в силу простоты ее доказательства, состоящего из одной выкладки, оно приведено).

Пусть  $f_j: A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 0, 1, \dots, k$ , — функции, определенные на некотором множестве  $A$ . Рассмотрим экстремальную задачу

$$f_0(x) \rightarrow \max, \quad f_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, k, \quad x \in A, \quad (2.5)$$

и ее функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = -f_0(x) + \sum_{j=1}^k \lambda_j f_j(x), \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k).$$

**Лемма 1.** Пусть существуют  $\hat{\lambda}_j \geq 0$ ,  $j = 1, \dots, k$ , и допустимый в задаче (2.5) элемент  $\hat{x} \in A$ , для которых

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \min_{x \in A} \mathcal{L}(x, \hat{\lambda}) = \mathcal{L}(\hat{x}, \hat{\lambda}), \quad \hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_k), \\ \text{(b)} \quad & \hat{\lambda}_j f_j(\hat{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Тогда  $\hat{x}$  — экстремальный элемент в задаче (2.5).

**Доказательство.** Для любого допустимого в задаче (2.5) элемента  $x \in A$  имеем

$$-f_0(x) \geq \mathcal{L}(x, \hat{\lambda}) \geq \mathcal{L}(\hat{x}, \hat{\lambda}) = -f_0(\hat{x}). \quad \square$$

Лемма 2 — частный случай леммы 3 из работы [7].

**Лемма 2.** Для всех  $a, b \geq 0$  таких, что  $a + b > 0$ , и всех  $1 \leq q < p, r < \infty$  существует единственное решение  $\hat{u} > 0$  уравнения

$$q + rau^{p-q} + rbu^{r-q} = 0.$$

При этом для всех  $u \geq 0$

$$-\hat{u}^q + a\hat{u}^p + b\hat{u}^r \leq -u^q + au^p + bu^r.$$

**Доказательство** теоремы 1. Положим

$$\hat{x}(t) = |w_0(t)|^{-p/(p-q)} \left( \frac{q|w(t)|^q}{p\lambda_0} \right)^{1/(p-q)} k^{1/(p-q)}(\xi t),$$

где параметры  $\lambda_0, \xi > 0$  подберем так, чтобы выполнялись равенства

$$\int_T |w_0(t)|^p \hat{x}^p(t) d\mu(t) = \delta^p, \quad \int_T |w_j(t)|^r \hat{x}^r(t) d\mu(t) = 1, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.6)$$

Сделав замену  $z = \xi t$  и учитывая однородность функций  $w(\cdot), w_0(\cdot), w_j(\cdot), j = 1, \dots, n$ , а также меры  $\mu(\cdot)$ , получаем

$$\int_T |w_0(t)|^p \hat{x}^p(t) d\mu(t) = \left( \frac{q}{p\lambda_0} \right)^{p/(p-q)} I_1 \xi^{(\theta_0 - \theta)qp/(p-q) - d}.$$

Аналогично находим

$$\int_T |w_j(t)|^r \hat{x}^r(t) d\mu(t) = \left( \frac{q}{p\lambda_0} \right)^{r/(p-q)} I_{j+1} \xi^{(\theta_0 - \theta)qr/(p-q) + r(\theta_0 - \theta_1) - d}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Таким образом, равенства (2.6) имеют вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{q}{p\lambda_0}\right)^{p/(p-q)} I_1 \xi^{(\theta_0-\theta)qp/(p-q)-d} &= \delta^p, \\ \left(\frac{q}{p\lambda_0}\right)^{r/(p-q)} I_{j+1} \xi^{(\theta_0-\theta)qr/(p-q)+r(\theta_0-\theta_1)-d} &= 1, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что при

$$\xi = (\delta I_1^{-1/p} I_2^{1/r})^{1/(\theta_1-\theta_0+d(1/r-1/p))}, \quad \lambda_0 = \frac{q}{p} I_1^{1-q/p} \xi^{(\theta_0-\theta)q-d(1-q/p)} \delta^{q-p}$$

эти равенства выполняются.

Рассмотрим экстремальную задачу, эквивалентную задаче (1.2)

$$\begin{aligned} \int_T |w(t)|^q |x(t)|^q d\mu(t) \rightarrow \max, \quad \int_T |w_0(t)|^p |x(t)|^p d\mu(t) \leq \delta^p, \\ \int_T |w_j(t)|^r |x(t)|^r d\mu(t) \leq 1, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид

$$\mathcal{L}(x(\cdot), \bar{\lambda}) = \int_T L(t, x(t), \bar{\lambda}) d\mu(t), \quad \bar{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

где

$$L(t, x(t), \bar{\lambda}) = -|w(t)|^q |x(t)|^q + \lambda_0 |w_0(t)|^p |x(t)|^p + |x(t)|^r \sum_{j=1}^n \lambda_j |w_j(t)|^r.$$

Из определения функции  $\hat{x}(\cdot)$  получаем

$$p\lambda_0 |w_0(t)|^p \hat{x}^{p-q}(t) = q |w(t)|^q k(\xi t) \quad (2.8)$$

и

$$r \sum_{j=1}^n |w_j(t)|^r \hat{x}^{r-q}(t) = r \sum_{j=1}^n |w_j(t)|^r |w_0(t)|^{-p(r-q)/(p-q)} \left(\frac{q |w(t)|^q}{p\lambda_0}\right)^{(r-q)/(p-q)} k^{(r-q)/(p-q)}(\xi t).$$

Из (2.1) и однородности функций  $|w(\cdot)|$ ,  $|w_0(\cdot)|$ ,  $w_j(\cdot)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , вытекает, что

$$\begin{aligned} k^{(r-q)/(p-q)}(\xi t) &= \left| \frac{w(\xi t)}{w_0(\xi t)} \right|^{q(p-r)/(p-q)} \left( \sum_{j=1}^n \left| \frac{w_j(\xi t)}{w_0(\xi t)} \right|^r \right)^{-1} (1 - k(\xi t)) \\ &= \xi^{(\theta-\theta_0)q(p-r)/(p-q)-(\theta_1-\theta_0)r} \left| \frac{w(t)}{w_0(t)} \right|^{q(p-r)/(p-q)} \left( \sum_{j=1}^n \left| \frac{w_j(t)}{w_0(t)} \right|^r \right)^{-1} (1 - k(\xi t)). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$r \sum_{j=1}^n |w_j(t)|^r \hat{x}^{r-q}(t) = r \left(\frac{q}{p\lambda_0}\right)^{(r-q)/(p-q)} \xi^{(\theta-\theta_0)q(p-r)/(p-q)-(\theta_1-\theta_0)r} |w(t)|^q (1 - k(\xi t)).$$

Положим

$$\lambda = \frac{q}{r} \left(\frac{q}{p\lambda_0}\right)^{-(r-q)/(p-q)} \xi^{(\theta_0-\theta)q(p-r)/(p-q)+(\theta_1-\theta_0)r}.$$

Тогда

$$r\lambda \sum_{j=1}^n |w_j(t)|^r \widehat{x}^{r-q}(t) = q|w(t)|^q(1 - k(\xi t)). \quad (2.9)$$

Складывая (2.8) и (2.9), получаем

$$p\lambda_0|w_0(t)|^p \widehat{x}^{p-q}(t) + r\lambda \sum_{j=1}^n |w_j(t)|^r \widehat{x}^{r-q}(t) = q|w(t)|^q. \quad (2.10)$$

Из леммы 2 вытекает, что для всех допустимых в (2.7) функций  $x(\cdot)$  и почти всех  $t \in T$  при  $\bar{\lambda} = (\lambda_0, \lambda, \dots, \lambda)$  имеет место неравенство

$$L(t, \widehat{x}(t), \bar{\lambda}) \leq L(t, x(t), \bar{\lambda}).$$

Следовательно,

$$\mathcal{L}(\widehat{x}(\cdot), \bar{\lambda}) \leq \mathcal{L}(x(\cdot), \bar{\lambda}).$$

Учитывая выполнение равенств (2.6), из леммы 1 получаем, что  $\widehat{x}(\cdot)$  — экстремальная функция в задаче (2.7). Принимая во внимание равенства (2.10) и (2.6), находим

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{\|w_0(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)} \leq \delta \\ \|w_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T,\mu)} \leq 1, j=1,\dots,n}} \|w(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T,\mu)}^q = \int_T |w(t)|^q |\widehat{x}(t)|^q d\mu(t) \\ & = q^{-1} \int_T \left( p\lambda_0|w_0(t)|^p \widehat{x}^p(t) + r\lambda \sum_{j=1}^n |w_j(t)|^r \widehat{x}^r(t) \right) d\mu(t) = \frac{p\lambda_0\delta^p + nr\lambda}{q} \\ & = I_1^{1-q/p} \xi^{(\theta_0-\theta)q-d(1-q/p)} \delta^q + n \left( \frac{p\lambda_0}{q} \right)^{(r-q)/(p-q)} \xi^{(\theta_0-\theta)q(p-r)/(p-q)+(\theta_1-\theta_0)r} \\ & = I_1^{1-q/p} \xi^{(\theta_0-\theta)q-d(1-q/p)} \delta^q + n I_1^{r/p-q/p} \xi^{(\theta_0-\theta)q-d(r/p-q/p)+(\theta_1-\theta_0)r} \delta^{q-r} = \delta^{q\gamma} K^q. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Пусть  $x(\cdot) \neq 0$ ,  $w_0(\cdot)x(\cdot) \in L_p(T, \mu)$  и  $w_j(\cdot)x(\cdot) \in L_r(T, \mu)$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Положим

$$A = \max_{1 \leq j \leq n} \|w_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T,\mu)}, \quad \delta = A^{-1} \|w_0(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)}.$$

Тогда из (2.11) вытекает, что

$$A^{-q} \|w(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T,\mu)}^q \leq \delta^{q\gamma} K^q.$$

Отсюда следует неравенство (2.3). Если предположить, что существует постоянная  $K_1 < K$ , для которой тоже выполняется неравенство (2.3), то тогда

$$\sup_{\substack{\|w_0(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)} \leq \delta \\ \|w_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T,\mu)} \leq 1, j=1,\dots,n}} \|w(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T,\mu)}^q \leq K_1^q \delta^{q\gamma} < K^q \delta^{q\gamma},$$

что противоречит (2.11).

Теорема доказана.

При  $n = 1$  утверждение теоремы 1 было доказано в [7].

### 3. Однородные весовые функции на конусе в $\mathbb{R}^d$

Пусть  $T$  — конус в  $\mathbb{R}^d$ ,  $d\mu(t) = dt$ ,  $|w(\cdot)|$ ,  $|w_0(\cdot)|$  — однородные функции порядков  $\theta$ ,  $\theta_0$ , а  $|w_j(\cdot)|$ ,  $j = 1, \dots, n$ , — однородные функции порядка  $\theta_1$ . Будем по-прежнему предполагать, что  $w(t), w_0(t) \neq 0$  и  $\sum_{j=1}^n |w_j(t)| \neq 0$  для почти всех  $t \in T$ . Рассмотрим сферическую систему координат

$$\begin{aligned} t_1 &= \rho \cos \omega_1, \\ t_2 &= \rho \sin \omega_1 \cos \omega_2, \\ &\dots\dots\dots \\ t_{d-1} &= \rho \sin \omega_1 \sin \omega_2 \dots \sin \omega_{d-2} \cos \omega_{d-1}, \\ t_d &= \rho \sin \omega_1 \sin \omega_2 \dots \sin \omega_{d-2} \sin \omega_{d-1}. \end{aligned}$$

Положим  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{d-1})$ . Для любой функции  $f(\cdot)$ , заданной на  $\mathbb{R}^d$ , введем следующее обозначение:

$$\tilde{f}(\omega) = |f(\cos \omega_1, \dots, \sin \omega_1 \sin \omega_2 \dots \sin \omega_{d-2} \sin \omega_{d-1})|.$$

Заметим, что если  $|f(\cdot)|$  — однородная функция порядка  $\kappa$ , то  $\tilde{f}(\omega) = \rho^{-\kappa} |f(t)|$ . Обозначим через  $\Omega$  область изменения  $\omega$ , когда  $t \in T$ . Из того, что  $T$  — конус, следует, что  $\Omega$  не зависит от  $\rho$ .

Предположим, что  $\gamma \in (0, 1)$ , где  $\gamma$  определено формулой (2.2). Положим

$$\frac{1}{q^*} = \frac{1}{q} - \frac{\gamma}{p} - \frac{1-\gamma}{r}.$$

Нетрудно убедиться, что  $q^* > q \geq 1$ . Кроме того,

$$q^* = \frac{pqr(\theta_1 - \theta_0 + d(1/r - 1/p))}{(\theta_1 - \theta_0)r(p - q) - (\theta - \theta_0)q(p - r)}.$$

Положим

$$J(\omega) = \sin^{d-2} \omega_1 \sin^{d-3} \omega_2 \dots \sin \omega_{d-2}.$$

**Теорема 2.** Пусть  $1 \leq q < p, r < \infty$  и  $\gamma \in (0, 1)$ . Предположим, что

$$I = \int_{\Omega} \frac{\tilde{w}^{q^*}(\omega)}{\tilde{w}_0^{q^*\gamma}(\omega) (\sum_{k=1}^n \tilde{w}_k^r(\omega))^{q^*(1-\gamma)/r}} J(\omega) d\omega < \infty$$

и  $I'_1 = \dots = I'_n$ , где

$$I'_j = \int_{\Omega} \frac{\tilde{w}^{q^*}(\omega) \tilde{w}_j^r(\omega)}{\tilde{w}_0^{q^*\gamma}(\omega) (\sum_{k=1}^n \tilde{w}_k^r(\omega))^{q^*(1-\gamma)/r+1}} J(\omega) d\omega, \quad j = 1, \dots, n.$$

Тогда для всех  $x(\cdot) \neq 0$  таких, что  $w_0(\cdot)x(\cdot) \in L_p(T)$  и  $w_j(\cdot)x(\cdot) \in L_r(T)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , имеет место точное неравенство

$$\|w(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T)} \leq \tilde{K} \|w_0(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T)}^\gamma \max_{1 \leq j \leq n} \|w_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T)}^{1-\gamma},$$

где

$$\tilde{K} = \gamma^{-\gamma/p} \left( \frac{1-\gamma}{n} \right)^{-(1-\gamma)/r} \left( \frac{B(q^*\gamma/p, q^*(1-\gamma)/r) I}{|\theta_1 - \theta_0 + d(1/p - 1/r)|(\gamma r + (1-\gamma)p)} \right)^{1/q^*}, \tag{3.1}$$

а  $B(\cdot, \cdot)$  —  $B$ -функция Эйлера.

Доказательство. Вычислим величину  $I_1$  из теоремы 1 с помощью перехода к сферическим координатам. Имеем

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_T \left| \frac{w(z)}{w_0(z)} \right|^{pq/(p-q)} k^{p/(p-q)}(z) dz \\ &= \int_{\Omega} \left( \frac{\tilde{w}(\omega)}{\tilde{w}_0(\omega)} \right)^{qp/(p-q)} J(\omega) d\omega \int_0^{+\infty} \rho^{(\theta-\theta_0)qp/(p-q)+d-1} k^{p/(p-q)}(\rho, \omega) d\rho. \end{aligned}$$

Переходя к сферическим координатам, для функции  $k(\cdot)$  получим равенство

$$\frac{k^{1/(p-q)}(\rho, \omega)}{(1 - k(\rho, \omega))^{1/(r-q)}} = \rho^{\frac{(\theta-\theta_0)q(p-r) - (\theta_1-\theta_0)r(p-q)}{(p-q)(r-q)}} \frac{\tilde{w}^{\frac{q(p-r)}{(p-q)(r-q)}(\omega)} \tilde{w}_0^{p/(p-q)}(\omega)}{\left( \sum_{j=1}^n \tilde{w}_j^r(\omega) \right)^{1/(r-q)}}.$$

Отсюда следует, что

$$\rho^{(\theta_1-\theta_0)r(p-q) - (\theta-\theta_0)q(p-r)} = \frac{(1 - k(\rho, \omega))^{p-q} \tilde{w}^{q(p-r)}(\omega) \tilde{w}_0^{p(r-q)}(\omega)}{k^{r-q}(\rho, \omega) \left( \sum_{j=1}^n \tilde{w}_j^r(\omega) \right)^{p-q}}.$$

Зафиксируем  $\omega \in \Omega$ . Тогда

$$\begin{aligned} d\rho^{(\theta-\theta_0)qp/(p-q)+d} &= \left( \frac{\tilde{w}^{q(p-r)}(\omega) \tilde{w}_0^{p(r-q)}(\omega)}{\left( \sum_{j=1}^n \tilde{w}_j^r(\omega) \right)^{p-q}} \right)^{\zeta} d \frac{(1 - k)^{(p-q)\zeta}}{k^{(r-q)\zeta}} \\ &= -\zeta \left( \frac{\tilde{w}^{q(p-r)}(\omega) \tilde{w}_0^{p(r-q)}(\omega)}{\left( \sum_{j=1}^n \tilde{w}_j^r(\omega) \right)^{p-q}} \right)^{\zeta} \frac{(1 - k)^{(p-q)\zeta-1}}{k^{(r-q)\zeta+1}} (r - q + (p - r)k) dk, \end{aligned}$$

где

$$\zeta = \frac{(\theta - \theta_0)qp + d(p - q)}{(p - q)((\theta_1 - \theta_0)r(p - q) - (\theta - \theta_0)q(p - r))} = \frac{q^*(1 - \gamma)}{r(p - q)}.$$

Если  $\rho$  меняется от 0 до  $+\infty$ , то  $k$  будет меняться от 0 до 1 при  $(\theta_1 - \theta_0)r(p - q) - (\theta - \theta_0)q(p - r) < 0$  и от 1 до 0 при  $(\theta_1 - \theta_0)r(p - q) - (\theta - \theta_0)q(p - r) > 0$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \rho^{(\theta-\theta_0)qp/(p-q)+d-1} k^{p/(p-q)}(\rho, \omega) d\rho &= \frac{p - q}{(\theta - \theta_0)qp + d(p - q)} \int_0^{+\infty} k^{p/(p-q)}(\rho, \omega) d\rho^{(\theta-\theta_0)qp/(p-q)+d} \\ &= \frac{1}{|(\theta_1 - \theta_0)r(p - q) - (\theta - \theta_0)q(p - r)|} \left( \frac{\tilde{w}^{q(p-r)}(\omega) \tilde{w}_0^{p(r-q)}(\omega)}{\left( \sum_{j=1}^n \tilde{w}_j^r(\omega) \right)^{p-q}} \right)^{\zeta} \\ &\quad \times \int_0^1 k^{p/(p-q)} \frac{(1 - k)^{(p-q)\zeta-1}}{k^{(r-q)\zeta+1}} (r - q + (p - r)k) dk \\ &= \frac{1}{|(\theta_1 - \theta_0)r(p - q) - (\theta - \theta_0)q(p - r)|} \left( \frac{\tilde{w}^{q(p-r)}(\omega) \tilde{w}_0^{p(r-q)}(\omega)}{\left( \sum_{j=1}^n \tilde{w}_j^r(\omega) \right)^{p-q}} \right)^{\zeta} (K_1 + K_2), \end{aligned}$$

где

$$K_1 = (r - q) \int_0^1 k^{\hat{p}} (1 - k)^{\hat{q}-1} dk = (r - q) B(\hat{p} + 1, \hat{q}),$$

$$K_2 = (p-r) \int_0^1 k^{\widehat{p}+1} (1-k)^{\widehat{q}-1} dk = (p-r) B(\widehat{p}+2, \widehat{q}) = (p-r) \frac{\widehat{p}+1}{\widehat{p}+\widehat{q}+1} B(\widehat{p}+1, \widehat{q}),$$

$$\widehat{p} = \frac{(\theta_1 - \theta)qr - d(r-q)}{(\theta_1 - \theta_0)r(p-q) - (\theta - \theta_0)q(p-r)} = q^* \frac{\gamma}{p},$$

$$\widehat{q} = \frac{(\theta - \theta_0)qp + d(p-q)}{(\theta_1 - \theta_0)r(p-q) - (\theta - \theta_0)q(p-r)} = q^* \frac{1-\gamma}{r}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} K_1 + K_2 &= p \frac{(\theta_1 - \theta_0)r(p-q) - (\theta - \theta_0)q(p-r)}{(\theta_1 - \theta_0)pr + d(p-r)} B(\widehat{p}+1, \widehat{q}) = \frac{pq}{q^*} B(\widehat{p}+1, \widehat{q}) \\ &= \frac{q\gamma}{q^*} \left( \frac{\gamma}{p} + \frac{1-\gamma}{r} \right)^{-1} B(\widehat{p}, \widehat{q}). \end{aligned}$$

Отсюда

$$I_1 = \frac{\gamma}{pr|\theta_1 - \theta_0 + d(1/r - 1/p)|} \left( \frac{\gamma}{p} + \frac{1-\gamma}{r} \right)^{-1} B(\widehat{p}, \widehat{q}) \widehat{I}.$$

Теперь найдем  $I_2$ . Имеем

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_T \frac{|w(z)|^{qr/(p-q)}}{|w_0(z)|^{pr/(p-q)}} |w_1(z)|^r k^{r/(p-q)}(z) dz \\ &= \int_{\Omega} \frac{\widetilde{w}^{qr/(p-q)}(\omega)}{\widetilde{w}_0^{pr/(p-q)}(\omega)} \widetilde{w}_1^r(\omega) J(\omega) d\omega \int_0^{+\infty} \rho^{(\theta-\theta_0)qr/(p-q) + (\theta_1-\theta_0)r+d-1} k^{r/(p-q)}(\rho, \omega) d\rho. \end{aligned}$$

Зафиксируем  $\omega \in \Omega$ . Тогда

$$\begin{aligned} d\rho^{(\theta-\theta_0)qr/(p-q) + (\theta_1-\theta_0)r+d} &= \left( \frac{\widetilde{w}^{q(p-r)}(\omega) \widetilde{w}_0^{p(r-q)}(\omega)}{(\sum_{j=1}^n \widetilde{w}_j^r(\omega))^{p-q}} \right)^{\zeta_1} d \frac{(1-k)^{(p-q)\zeta_1}}{k^{(r-q)\zeta_1}} \\ &= -\zeta_1 \left( \frac{\widetilde{w}^{q(p-r)}(\omega) \widetilde{w}_0^{p(r-q)}(\omega)}{(\sum_{j=1}^n \widetilde{w}_j^r(\omega))^{p-q}} \right)^{\zeta_1} \frac{(1-k)^{(p-q)\zeta_1-1}}{k^{(r-q)\zeta_1+1}} (r-q + (p-r)k) dk, \end{aligned}$$

где

$$\zeta_1 = \frac{(\theta - \theta_0)qr + ((\theta_1 - \theta_0)r + d)(p-q)}{(p-q)((\theta_1 - \theta_0)r(p-q) - (\theta - \theta_0)q(p-r))} = \frac{q^*(1-\gamma)}{r(p-q)} + \frac{1}{p-q}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \rho^{(\theta-\theta_0)qr/(p-q) + (\theta_1-\theta_0)r+d-1} k^{r/(p-q)}(\rho, \omega) d\rho \\ &= \frac{p-q}{(\theta - \theta_0)qr + ((\theta_1 - \theta_0)r + d)(p-q)} \int_0^{+\infty} k^{r/(p-q)}(\rho, \omega) d\rho^{(\theta-\theta_0)qr/(p-q) + (\theta_1-\theta_0)r+d} \\ &= \frac{1}{|(\theta_1 - \theta_0)r(p-q) - (\theta - \theta_0)q(p-r)|} \left( \frac{\widetilde{w}^{q(p-r)}(\omega) \widetilde{w}_0^{p(r-q)}(\omega)}{(\sum_{j=1}^n \widetilde{w}_j^r(\omega))^{p-q}} \right)^{\zeta_1} (L_1 + L_2); \end{aligned}$$

здесь

$$L_1 = (r-q) \int_0^1 k^{\widehat{p}-1} (1-k)^{\widehat{q}} dk = (r-q) B(\widehat{p}, \widehat{q}+1),$$



$$L_2 = (p-r) \int_0^1 k^{\widehat{p}}(1-k)^{\widehat{q}} dk = (p-r)B(\widehat{p}+1, \widehat{q}+1) = (p-r) \frac{\widehat{p}}{\widehat{p}+\widehat{q}+1} B(\widehat{p}, \widehat{q}+1).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} L_1 + L_2 &= r \frac{(\theta_1 - \theta_0)r(p-q) - (\theta - \theta_0)q(p-r)}{(\theta_1 - \theta_0)pr + d(p-r)} B(\widehat{p}, \widehat{q}+1) = \frac{qr}{q^*} B(\widehat{p}, \widehat{q}+1) \\ &= \frac{q(1-\gamma)}{q^*} \left(\frac{\gamma}{p} + \frac{1-\gamma}{r}\right)^{-1} B(\widehat{p}, \widehat{q}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$I_2 = \frac{1-\gamma}{pr|\theta_1 - \theta_0 + d(1/r - 1/p)|} \left(\frac{\gamma}{p} + \frac{1-\gamma}{r}\right)^{-1} B(\widehat{p}, \widehat{q}) I'_1.$$

Из того, что  $I'_1 + \dots + I'_n = I$ , вытекает, что  $I'_j = I/n$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Тем самым

$$I_2 = \frac{1-\gamma}{pr|\theta_1 - \theta_0 + d(1/r - 1/p)|} \left(\frac{\gamma}{p} + \frac{1-\gamma}{r}\right)^{-1} B(\widehat{p}, \widehat{q}) \frac{I}{n}.$$

Остается подставить выражения для  $I_1$  и  $I_2$  в формулу (2.4).

Теорема 2 доказана.

При  $n = 1$  утверждение теоремы 2 было доказано в [5].

Приведем пример весов, для которых выполнены условия теоремы 2. Пусть  $T = \mathbb{R}_+^d$ ,

$$w(t) = (t_1^2 + \dots + t_d^2)^{\theta/2}, \quad w_0(t) = (t_1^2 + \dots + t_d^2)^{\theta_0/2}, \quad w_j(t) = t_j^{\theta_1}, \quad j = 1, \dots, d. \quad (3.2)$$

Будем считать, что  $\gamma \in (0, 1)$ . Это эквивалентно тому, что  $\theta_1 + d(1/r - 1/q) > \theta > \theta_0 + d(1/p - 1/q)$  или  $\theta_1 + d(1/r - 1/q) < \theta < \theta_0 + d(1/p - 1/q)$ .

Нетрудно убедиться, что  $\tilde{w}(\cdot) = \tilde{w}_0(\cdot) = 1$ , а  $\tilde{w}_j(\omega) = \tilde{t}_j^{\theta_1}(\omega)$ ,  $j = 1, \dots, d$ , где

$$\begin{aligned} \tilde{t}_1(\omega) &= \cos \omega_1, \\ \tilde{t}_2(\omega) &= \sin \omega_1 \cos \omega_2, \\ &\dots\dots\dots \\ \tilde{t}_{d-1}(\omega) &= \sin \omega_1 \sin \omega_2 \dots \sin \omega_{d-2} \cos \omega_{d-1}, \\ \tilde{t}_d(\omega) &= \sin \omega_1 \sin \omega_2 \dots \sin \omega_{d-2} \sin \omega_{d-1}. \end{aligned}$$

Заметим, что  $\sum_{k=1}^d \tilde{t}_k^2(\omega) = 1$ .

Для величины  $I$  из теоремы 2 имеем

$$I = \int_{\Pi_+^{d-1}} \frac{J(\omega) d\omega}{\left(\sum_{k=1}^d \tilde{t}_k^{r\theta_1}(\omega)\right)^{q^*(1-\gamma)/r}}, \quad \Pi_+^{d-1} = [0, \pi/2]^{d-1}. \quad (3.3)$$

Если  $r\theta_1 \leq 2$ , то

$$\sum_{k=1}^d \tilde{t}_k^{r\theta_1}(\omega) \geq \sum_{k=1}^d \tilde{t}_k^2(\omega) = 1. \quad (3.4)$$

Если же  $r\theta_1 > 2$ , то по неравенству Гельдера

$$1 = \sum_{k=1}^d \tilde{t}_k^2(\omega) \leq \left(\sum_{k=1}^d \tilde{t}_k^{r\theta_1}(\omega)\right)^{2/(r\theta_1)} d^{1-2/(r\theta_1)}.$$

Тем самым

$$\sum_{k=1}^d \tilde{t}_k^{r\theta_1}(\omega) \geq d^{1-r\theta_1/2}. \tag{3.5}$$

Из (3.4) и (3.5) вытекает, что  $I < \infty$ .

Для  $I'_j$  имеем

$$I'_j = \int_{\Pi_+^{d-1}} \frac{\tilde{t}_j^{r\theta_1} J(\omega) d\omega}{\left(\sum_{k=1}^d \tilde{t}_k^{r\theta_1}(\omega)\right)^{q^*(1-\gamma)/r+1}}, \quad j = 1, \dots, d.$$

Рассмотрим интегралы

$$M_j = \int_{\mathbb{R}_+^d \cap \mathbb{B}^d} \frac{\left(\sum_{k=1}^d t_k^2\right)^{\theta_1 q^*(1-\gamma)/2} t_j^{r\theta_1}}{\left(\sum_{k=1}^d t_k^{r\theta_1}\right)^{q^*(1-\gamma)/r+1}} dt, \quad j = 1, \dots, d,$$

где  $\mathbb{B}^d$  — единичный шар в  $\mathbb{R}^d$ . Если сделать замену переменных в интеграле  $M_j$ , поменяв местами переменные  $t_j$  и  $t_k$ , то интеграл  $M_j$  перейдет в интеграл  $M_k$ . Следовательно,  $M_1 = \dots = M_d$ . Переходя к сферическим координатам, получим, что  $M_j = I'_j/d$ ,  $j = 1, \dots, d$ . Таким образом,  $I'_1 = \dots = I'_d$ .

Для рассматриваемого случая из теоремы 2 получаем

**Следствие 1.** Пусть  $1 \leq q < p, r < \infty$  и выполнены неравенства  $\theta_1 + d(1/r - 1/q) > \theta > \theta_0 + d(1/p - 1/q)$  или  $\theta_1 + d(1/r - 1/q) < \theta < \theta_0 + d(1/p - 1/q)$ . Тогда для весов (3.2) и всех  $x(\cdot)$ , для которых  $w_0(\cdot)x(\cdot) \in L_p(\mathbb{R}_+^d)$  и  $w_j(\cdot)x(\cdot) \in L_r(\mathbb{R}_+^d)$ ,  $j = 1, \dots, d$ , имеет место точное неравенство

$$\|w(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}_+^d)} \leq \tilde{K} \|w_0(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}_+^d)}^\gamma \max_{1 \leq j \leq d} \|w_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(\mathbb{R}_+^d)}^{1-\gamma},$$

где величина  $\tilde{K}$  определена равенством (3.1), в котором значение  $I$  определено (3.3).

Приведем еще один результат для весов (3.2).

**Следствие 2.** Пусть  $1 \leq q < p, r < \infty$ . Веса (3.2) таковы, что  $\theta = d(1 - 1/q)$ ,  $\theta_0 = d - (\lambda + d)/p$ ,  $\theta_1 = d + (\mu - d)/r$ , где  $\lambda, \mu > 0$ . Положим

$$\alpha = \frac{\mu}{p\mu + r\lambda}, \quad \beta = \frac{\lambda}{p\mu + r\lambda}.$$

Тогда для всех  $x(\cdot)$ , для которых  $w_0(\cdot)x(\cdot) \in L_p(\mathbb{R}_+^d)$  и  $w_j(\cdot)x(\cdot) \in L_r(\mathbb{R}_+^d)$ ,  $j = 1, \dots, d$ , имеет место точное неравенство

$$\|w(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}_+^d)} \leq C \|w_0(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}_+^d)}^{p\alpha} \max_{1 \leq j \leq d} \|w_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(\mathbb{R}_+^d)}^{r\beta},$$

где

$$C = \frac{d^\beta}{(p\alpha)^\alpha (r\beta)^\beta} \left( \frac{I}{\lambda + \mu} B\left(\frac{\alpha}{1/q - \alpha - \beta}, \frac{\beta}{1/q - \alpha - \beta}\right) \right)^{1/q - \alpha - \beta},$$

а

$$I = \int_{\Pi_+^{d-1}} \frac{J(\omega) d\omega}{\left(\sum_{k=1}^d \tilde{t}_k^{r(d-1)+\mu}(\omega)\right)^{\beta/(1/q - \alpha - \beta)}}.$$

При  $d = 1$  и  $q = 1$  утверждение следствия 2 было получено в [2].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Carlson F.** Une inégalité // *Ark. Mat. Astr. Fysik.* 1934. Vol. 25B. P. 1–5.
2. **Левин В.И.** Точные константы в неравенствах типа Карлсона // *Докл. АН СССР.* 1948. Т. 59. С. 635–638.
3. **Андреанов Ф.И.** Многомерные аналоги неравенства Карлсона и его обобщения // *Изв. вузов. Математика.* 1967. № 1. С. 3–7.
4. **Арестов В.В.** Приближение линейных операторов и родственные экстремальные задачи // *Тр. Математического ин-та АН СССР.* 1975. Т. 138. С. 29–42.
5. **Barza S., Burenkov V., Pečarić J., Persson L.-E.** Sharp multidimensional multiplicative inequalities for weighted  $L_p$  spaces with homogeneous weights // *Math. Ineq. Appl.* 1998. Vol. 1, no. 1. P. 53–67. doi: 10.7153/mia-01-04
6. **Luo M.-J., Raina R.K.** A new extension of Carlson's inequality // *Math. Ineq. Appl.* 2016. Vol. 19, no. 2. P. 417–424. doi: 10.7153/mia-19-33
7. **Osipenko K.Yu.** Optimal recovery of operators and multidimensional Carlson type inequalities // *J. Complexity.* 2016. Vol. 32, no. 1. P. 53–73. doi: 10.1016/j.jco.2015.07.004
8. **Osipenko K.Yu.** Inequalities for derivatives with the Fourier transform // *Appl. Comp. Harm. Anal.* 2021. Vol. 53. P. 132–150. doi: 10.1016/j.acha.2021.02.001
9. **Osipenko K.Yu.** Optimal recovery and generalized Carlson inequality for weights with symmetry properties [e-resource]. 2023. 32 p. URL: <https://arxiv.org/pdf/2303.10355.pdf>. doi: 10.48550/arXiv.2303.10355
10. **Осипенко К. Ю.** Выпуклый анализ. М.: УРСС, 2022. 144 с.

Поступила 15.06.2023

После доработки 20.09.2023

Принята к публикации 25.09.2023

Осипенко Константин Юрьевич  
д-р физ.-мат. наук, профессор  
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова  
механико-математический факультет, кафедра Общих проблем управления  
г. Москва  
e-mail: office@mech.math.msu.su;  
Институт проблем передачи информации имени А. А. Харкевича РАН  
г. Москва  
e-mail: director@iitp.ru

## REFERENCES

1. Carlson F. Une inégalité. *Ark. Mat. Astron. Fys.*, 1934, vol. 25B, pp. 1–5.
2. Levin V. I. Exact constants in Carlson type inequalities. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1948, vol. 59, pp. 635–638 (in Russian).
3. Andrianov F. I. Multidimensional analogs of Carlson inequalities and its generalizations. *Izvestiya VUZ. Mat.*, 1967, no. 1, pp. 3–7 (in Russian).
4. Arestov V. V. Approximation of linear operators and related extremal problems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1977, vol. 138, pp. 31–44.
5. Barza S., Burenkov V., Pečarić J., Persson L.-E. Sharp multidimensional multiplicative inequalities for weighted  $L_p$  spaces with homogeneous weights. *Math. Ineq. Appl.*, 1998, vol. 1, no. 1, pp. 53–67. doi: 10.7153/mia-01-04
6. Luo M.-J., Raina R.K. A new extension of Carlson's inequality. *Math. Ineq. Appl.*, 2016, vol. 19, no. 2, pp. 417–424. doi: 10.7153/mia-19-33
7. Osipenko K.Yu. Optimal recovery of operators and multidimensional Carlson type inequalities. *J. Complexity*, 2016, vol. 32, no. 1, pp. 53–73. doi: 10.1016/j.jco.2015.07.004
8. Osipenko K.Yu. Inequalities for derivatives with the Fourier transform. *Appl. Comp. Harm. Anal.*, 2021, vol. 53, pp. 132–150. doi: 10.1016/j.acha.2021.02.001

9. Osipenko K.Yu. *Optimal recovery and generalized Carlson inequality for weights with symmetry properties*. 2023. 32 p. Available at: <https://arxiv.org/pdf/2303.10355.pdf>.  
doi: 10.48550/arXiv.2303.10355
10. Osipenko K.Yu. *Vypuklyi analiz*. [Convex analysis], Moscow, URSS, 2022, 144 p.  
ISBN: 978-5-9710-9724-2.

Received June 15, 2023  
Revised September 20, 2023  
Accepted September 25, 2023

*Konstantin Yur'evich Osipenko*, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Department of general problems of control, Moscow, 119991, Russia, e-mail: mmmf@mech.math.msu.su; Kharkevich Institute for Information Transmission Problems, Moscow, 127051 Russia, e-mail: director@iitp.ru.

Cite this article as: K. Yu. Osipenko. Sharp Carlson type inequalities with many weights. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 4, pp. 229–240.