Московский Государственный Университет
им. М.В. Ломоносова
Механико-Математический Факультет

Кафедра общих проблем управления

Курсовая работа
студента 432 группы
Сугробова П.Е.

Оптимальное восстановление производной на сумме классов Харди и пространства полиномов

Научный руководитель:
профессор Осипенко К.Ю.

Москва - 2015

1. Постановка задачи

Обозначим через $\mathbb{T}$ единичную окружность, реализованную как отрезок $[-\pi, \pi]$ с идентифицированными концами. Через $\mathcal{H}_2(D)$ обозначим пространство аналитических в $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций $x(\cdot)$, удовлетворяющих условию:

$$\|x(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2(D)} = \sup_{0<\rho<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_T |x(\rho e^{it})|^2 dt \right)^{1/2} < \infty.$$

Через $H_2^r(D)$ обозначим множество функций x$(\cdot)$, аналитических в D, для которых $\|x^{(r)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2(D)} \le 1$.

Рассмотрим задачу оптимального восстановления первой производной на классе $H_2^2(D)$ по информации о коэффициентах степенного ряда самой функции, заданных с погрешностью δ в норме пространства l_2. Иными словами, мы считаем, что для каждой функции $x(\cdot) \in H_2^2(D)$ такой, что

$$x(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} a_j z^j,$$

известны числа $\{y_j\}_{j \in \mathbb{Z}_+}$ такие, что

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}_+} |a_j - y_j|^2 \le \delta^2.$$

Погрешностью данного метода $m\colon l_2 \to \mathcal{H}_2(D)$ называется величина

$$e(x'(\cdot), H_2^2(D), \delta, m) = \sup_{\substack{x(\cdot) \in H_2^2,\ y \in l_2 \\ \|\Lambda x(\cdot) - y\|_{l_2} \le \delta}} \|x'(\cdot) - m(y)(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2(D)},$$

где $\Lambda x(\cdot) = \{a_j\}_{j \in \mathbb{Z}_+}$ — коэффициенты степенного ряда $x(\cdot)$. Задача заключается в нахождении величины

$$E(x'(\cdot), H_2^2(D), \delta) = \inf_{m\colon l_2 \to \mathcal{H}_2(D)} e(x'(\cdot), H_2^2(D), \delta, m)$$

и соответствующего оптимального метода, т.е. метода, на котором эта нижняя грань достигается.

2. Вспомогательные результаты

Лемма 1.

$$E(x'(\cdot), H_2^2(D), \delta) \ge \sup_{\substack{x(\cdot) \in H_2^2(D) \\ \|\Lambda x(\cdot)\|_{l_2} \le \delta}} \|x'(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2(D)}. \tag{1}$$

Доказательство. Для любого метода m при всех $x(\cdot) \in H_2^2$ таких, что $\|\Lambda x(\cdot)\|_{l_2} \le \delta$, имеем

$$2||x'(\cdot)||_{\mathcal{H}_2(D)} \le ||x'(\cdot) + m(0)||_{\mathcal{H}_2(D)} + ||x'(\cdot) - m(0)||_{\mathcal{H}_2(D)} \le 2e(x'(\cdot), H_2^2(D), \delta, m)$$

Следовательно, для любого метода m

$$e(x'(\cdot), H_2^2(D), \delta, m) \ge \sup_{\substack{x(\cdot)\in H_2^2(D) \\ \|\Lambda x(\cdot)\|_{l_2} \le \delta}} ||x'(\cdot)||_{\mathcal{H}_2(D)},$$

откуда сразу вытекает требуемая оценка.

□

3. Используемые теоремы

Теорема 1. *Пусть* $0 < \delta < \dfrac{1}{2}$ *таково, что* $\dfrac{1}{(s+1)s} \le \delta \le \dfrac{1}{s(s-1)}$ *при некотором* $s \in \mathbb{N}$ *(если* $\delta \ge \dfrac{1}{2}$*, то* s *положим равным 1), а*

$$\lambda_1 = \frac{2s^3 + 3s^2 - 1}{4s}, \quad \lambda_2 = \frac{2s+1}{4s^3}.$$

Тогда

$$E(x'(\cdot), H_2^2(D), \delta) = \sqrt{\lambda_1 \delta^2 + \lambda_2},$$

а метод

$$\widehat{m}(y)(t) = \sum_{j=0}^{\infty} j\alpha_j y_j z^{j-1}$$

для всех α_j *таких что*

$$\left(\frac{|1-\alpha_j|^2}{(j-1)^2\lambda_2} + \frac{j^2|\alpha_j|^2}{\lambda_1}\right) \le 1.$$

является оптимальным. При $j = 1$ *возьмем* $\alpha_j = 1$.

Доказательство данной теоремы приводится в [3].

4. Основные результаты

Теорема 2. *Пусть* $0 < \delta < \dfrac{1}{2}$ *таково, что* $\dfrac{1}{(s+1)s} \le \delta \le \dfrac{1}{s(s-1)}$ *при некотором* $s \in \mathbb{N}$ *(если* $\delta \ge \dfrac{1}{2}$*, то* s *положим равным 1), а*

$$\lambda_1 = \frac{2s^3 + 3s^2 - 1}{4s}, \quad \lambda_2 = \frac{2s+1}{4s^3}, \quad l = \left[\sqrt{\frac{2s^3 + 3s^2 - 1}{4s}}\right].$$

Тогда

$$E(x'(\cdot), H_2^2 + \mathcal{P}_l(D), \delta) = \sqrt{\lambda_1 \delta^2 + \lambda_2},$$

а метод

$$\widehat{m}(y)(t) = \sum_{j=0}^{\infty} j\alpha_j y_j z^{j-1}$$

для всех α_j таких что

$$\left(\frac{|1-\alpha_j|^2}{(j-1)^2\lambda_2} + \frac{j^2|\alpha_j|^2}{\lambda_1}\right) \le 1.$$

является оптимальным. При $j = 1$ возьмем $\alpha_j = 1$.

Теорема 3. *Пусть $m > l$, k - значение, на котором достигается максимум*

$$\max_j \frac{j^2 - m^2}{j^2(j-1)^2}.$$

При $\delta \ge \dfrac{1}{k^2(k-1)^2}$ положим

$$\lambda_1 = m^2, \lambda_2 = \frac{k^2 - m^2}{k^2(k-1)^2},$$

а при $0 < \delta < \dfrac{1}{k^2(k-1)^2}$ пусть δ таково, что $\dfrac{1}{(s+1)s} \le \delta \le \dfrac{1}{s(s-1)}$ при некотором $s \in \mathbb{N}$ (если $\delta \ge \dfrac{1}{2}$, то s положим равным 1). Тогда положим

$$\lambda_1 = \frac{2s^3 + 3s^2 - 1}{4s}, \quad \lambda_2 = \frac{2s+1}{4s^3}.$$

Получим

$$E(x'(\cdot), H_2^2 + \mathcal{P}_m, \delta) = \sqrt{\lambda_1\delta^2 + \lambda_2},$$

а метод

$$\widehat{m}(y)(t) = \sum_{j=0}^{\infty} j\alpha_j y_j z^{j-1}$$

для α_j при $j > m$ таких, что

$$\left(\frac{|1-\alpha_j|^2}{(j-1)^2\lambda_2} + \frac{j^2|\alpha_j|^2}{\lambda_1}\right) \le 1.$$

является оптимальным. При $j \le m$ можем взять $\alpha_j = 1$

5. Доказательство

Выведем Теорему 2, пользуясь результатами Теоремы 1. Так как $\alpha_j, j \ge 2$ из Теоремы 1 мы можем брать любое удовлетворяющее неравенству

$$\left(\frac{|1-\alpha_j|^2}{(j-1)^2\lambda_2} + \frac{j^2|\alpha_j|^2}{\lambda_1}\right) \le 1. \tag{2}$$

выясним при каких $j \geq 2$ можно положить $\alpha_j = 1$. Подставляя $\alpha_j = 1$ в неравенство (2) получаем

$$\frac{j^2}{\lambda_1} \leq 1$$

или при подстановке λ_1

$$j \leq \sqrt{\frac{2s^3 + 3s^2 - 1}{4s}}.$$

Аналогично при подстановке $\alpha_j = 0$ в неравенство (1) получаем

$$\frac{1}{(j-1)^2 \lambda_2} \leq 1$$

или

$$j \geq \sqrt{\frac{4s^3}{2s+1}} + 1.$$

Положим $l = \left[\sqrt{\frac{2s^3 + 3s^2 - 1}{4s}}\right]$,

$N = \left[\sqrt{\frac{4s^3}{2s+1}}\right] + 2$, если $\sqrt{\frac{4s^3}{2s+1}}$ - нецелое,

$N = \left[\sqrt{\frac{4s^3}{2s+1}}\right] + 1$, если $\sqrt{\frac{4s^3}{2s+1}}$ - целое. Тогда при заданных α_j наш оптимальный метод примет такой вид

$$\widehat{m}(y)(t) = \sum_{j=0}^{k} j y_j z^{j-1} + \sum_{j=k+1}^{N} j \alpha_j y_j z^{j-1},$$

где α_j удовлетворяют условию (2).

Пусть $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in H_2^2$, а $x_2 \in \mathcal{P}_k$. Тогда

$$x_1 = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j, \quad x_2 = \sum_{j=0}^{k} b_j z^j.$$

Положим $b_j = 0$ при $j > l$. Предположим, что числа $y_j, j \in \mathbb{Z}_+$ таковы, что

$$\sum_{j=0}^{\infty} |y_j - (a_j + b_j)|^2 \leq \delta^2$$

или

$$\sum_{j=0}^{\infty} |a_j - (y_j - b_j)|^2 \leq \delta^2.$$

Тогда по ранее решенной задаче восстановления мы знаем оценку снизу для погрешности метода, а именно

$$|x_1'(z) - \sum_{j=0}^{k} j(y_j - b_j)z^{j-1} - \sum_{j=k+1}^{N} j\alpha_j y_j z^{j-1}| \leq \sqrt{\lambda_1\delta^2 + \lambda_2}$$

Равносильными преобразованиями получаем

$$|x_1'(z) + x_2'(z) - \sum_{j=0}^{k} jy_j z^{j-1} - \sum_{j=k+1}^{N} j\alpha_j y_j z^{j-1}| \leq \sqrt{\lambda_1\delta^2 + \lambda_2},$$

$$|x'(z) - \sum_{j=0}^{k} jy_j z^{j-1} - \sum_{j=k+1}^{N} j\alpha_j y_j z^{j-1}| \leq \sqrt{\lambda_1\delta^2 + \lambda_2}.$$

Тогда

$$e(x'(\cdot), H_2^2 + \mathcal{P}_l(D), \delta, \widehat{m}) \leq \sqrt{\lambda_1\delta^2 + \lambda_2}.$$

Следовательно,

$$E(x'(\cdot), H_2^2(D) + \mathcal{P}_l, \delta) \leq \sqrt{\lambda_1\delta^2 + \lambda_2}.$$

Таким образом мы получили оценку сверху для погрешности того же самого метода, осталось получить оценку сверху. Из Леммы 1 имеем

$$E(x'(\cdot), H_2^2(D) + \mathcal{P}_l, \delta) \geq \sup_{\substack{\|\Lambda x(\cdot)\|_{l_2} \leq \delta \\ x(\cdot) \in H_2^2(D) + \mathcal{P}_l}} \|x'(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2(D)}$$

$$\geq \sup_{\substack{\|\Lambda x(\cdot)\|_{l_2} \leq \delta \\ x(\cdot) \in H_2^2(D)}} \|x'(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2(D)} = \sqrt{\lambda_1\delta^2 + \lambda_2}$$

Учитывая оценку снизу получаем

$$E(x'(\cdot), H_2^2(D) + \mathcal{P}_l, \delta) = \sqrt{\lambda_1\delta^2 + \lambda_2}$$

Теорема 2 доказана. Теперь найдем оптимальный метод и погрешность для класса $H_2^2 + \mathcal{P}_m$, где $m > l$.
Для этого докажем вспомогательную лемму

Лемма 2. *$x \in H_2^2(D) + \mathcal{P}_{m-1} \Leftrightarrow \sum_{j=m}^{\infty} j^2(j-1)^2|a_j|^2 \leq 1$, где $x = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ $\quad x \in H_2^2(D) + \mathcal{P}_{m-1} \Leftrightarrow x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in H_2^2(D), x_2 \in \mathcal{P}_{m-1}$ Пусть $x_1 = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j, x_2 = \sum_{j=0}^{m-1} b_j z^j$.
Заметим, что при $j \geq m$ $a_j = c_j$. Тогда $x_1 \in H_2^2(D) \Rightarrow$
$\Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} j^2(j-1)^2|c_j|^2 \leq 1 \Rightarrow \sum_{j=m}^{\infty} j^2(j-1)^2|c_j|^2 =$
$= \sum_{j=m}^{\infty} j^2(j-1)^2|a_j|^2 \leq 1.$

2) $\Leftarrow$ Обратно,

$$x = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$$

и

$$\sum_{j=m}^{\infty} j^2(j-1)^2|a_j|^2 \le 1.$$

Тогда $x = \sum_{j=0}^{m-1} a_j z^j + \sum_{j=m}^{\infty} a_j z^j$, но $\sum_{j=0}^{m-1} a_j z^j \in \mathcal{P}_{m-1}$, а $\sum_{j=m}^{\infty} a_j z^j \in H_2^2(D)$, так как по условию $\sum_{j=m}^{\infty} j^2(j-1)^2|a_j|^2 \le 1$. $\square$

Таким образом экстремальная задача, очевидно, принимает вид

$$\sum_{j=0}^{\infty} j^2|a_j|^2 \to \max, \quad \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 \le \delta, \quad \sum_{j=m+1}^{\infty} j^2(j-1)^2|a_j|^2 \le 1.$$

Выпишем множитель Лагранжа

$$\mathcal{L} = \sum_{j=0}^{\infty} (-j^2|a_j|^2 + \lambda_1|a_j|^2 + \lambda_2 \mathcal{X}_{jm} j^2(j-1)^2|a_j|^2), \mathcal{X}_{jm} = 0, j \le m$$

По предыдущей лемме, если $\lambda_1, \lambda_2, \widehat{a_j}$ такие, что

$$1) \min_{a_j} \mathcal{L}(\{a_j\}, \lambda_1, \lambda_2) = \mathcal{L}(\{\widehat{a_j}\}, \lambda_1, \lambda_2),$$

$$2) \lambda_1(\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 - \delta^2) = 0,$$

$$3) \lambda_2(\sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{X}_{jm} j^2(j-1)^2|a_j|^2 - 1) = 0,$$

то $\widehat{a_j}$ является решением экстремальной задачи.

Проведем из точки $(0, m^2)$ прямую, проходящую через точку $(k^2(k-1)^2, k^2)$ и такую, что все точки $(j^2(j-1)^2, j^2)$ лежат ниже этой прямой. Это такое k, на котором достигается

$$\max_j \frac{j^2 - m^2}{j^2(j-1)^2}$$

Пусть отличны от нуля только a_m, a_k. Тогда

$$\begin{cases} |a_m|^2 + |a_k|^2 = \delta^2. \\ |a_k|^2 k^2(k-1)^2 = 1. \end{cases}$$

Решив систему, получим

$$|a_k|^2 = \frac{1}{k^2(k-1)^2}, |a_m|^2 = \frac{\delta^2 k^2(k-1)^2 - 1}{k^2(k-1)^2},$$

а ограничение на δ

$$\delta \ge \frac{1}{k^2(k-1)^2}$$

Нарисуем график

$$\begin{cases} x = j^2(j-1)^2\mathcal{X}_{jm}. \\ y = j^2. \end{cases}$$

Найдем для прямой, проведенной через точки $(0, m^2), (k^2(k-1)^2, k^2)$ коэффициенты λ_1, λ_2 из уравнения $\lambda_2 x + \lambda_1 = y$.

При таких λ_1, λ_2 функция Лагранжа $\mathcal{L}(\{\widehat{a_j}\}, \lambda_1, \lambda_2)$ равна нулю, а $\mathcal{L}(\{a_j\}, \lambda_1, \lambda_2) \geq 0$, так как прямая находится выше графика.

Путем несложных вычислений получим, что

$$\lambda_1 = m^2, \lambda_2 = \frac{k^2 - m^2}{k^2(k-1)^2}.$$

Осталось подставить a_m и a_k в $\sum_{j=0}^{\infty} j^2|a_j|^2$, решив тем самым нашу экстремальную задачу окончательно. Подставив и проведя элементарные преобразования получим, что

$$m^2|a_m|^2 + k^2|a_k|^2 = \lambda_1\delta^2 + \lambda_2$$

Заметим, что мы решили экстремальную задачу только для $\delta \geq \dfrac{1}{k^2(k-1)^2}$

В случае $\delta \leq \dfrac{1}{k^2(k-1)^2}$ можно легко доказать, что $s > k$, а при таких s мы можем действовать аналогично решенной задаче в Теореме 1. Необходимо лишь доказать, что

$$\lambda_1 = \frac{2s^3 + 3s^2 - 1}{4s} \geq m^2.$$

График $x = j^2(j-1)^2, y = j^2$ выпуклый, следовательно λ_1 монотонно возрастает. Тогда достаточно будет доказать, что проведя прямую через точки, отвечающие параметрам k и $k+1$, получим $\lambda_1 \geq m^2$ в уравнении прямой $\lambda_2 x + \lambda_1 = y$.

Докажем от противного - пусть $\lambda_1 < m^2$. Тогда можно легко прийти к противоречию, проведя прямую через точки $(0, m^2)$ и $(k^2(k+1)^2, (k+1)^2)$ и доказав, что полученный тангенс угла наклона прямой будет больше, чем $\dfrac{k^2 - m^2}{k^2(k-1)^2}$, чего быть не может по условию.

Мы решили задачу для всех δ, теперь займемся построением оптимального метода. Будем искать его в виде

$$\widehat{m}(y)(t) = \sum_{j=0}^{\infty} j\alpha_j y_j z^j,$$

где α_j некоторые числа (сглаживающие множители). Тогда, чтобы найти погрешность данного метода, необходимо решить экстремальную задачу

$$\sum_{j=0}^{\infty} j^2|a_j-\alpha_j y_j|^2 \to \max, \quad \sum_{j=m+1}^{\infty}(j-1)^2 j^2|a_j|^2 \leq 1, \quad \sum_{j=0}^{\infty}|a_j-y_j|^2 \leq \delta^2.$$

Положив $z_j = a_j - y_j$, эту задачу можно переписать в виде

$$\sum_{j=0}^{\infty} j^2|a_j(1-\alpha_j)+\alpha_j z_j|^2 \to \max, \sum_{j=m+1}^{\infty} j^2(j-1)^2|a_j|^2 \leq 1, \sum_{j=0}^{\infty}|z_j|^2 \leq \delta^2.$$

Из неравенства Коши-Буняковского при $j \geq m$ имеем

$$\begin{aligned}&|(1-\alpha_j)a_j+\alpha_j z_j|^2 \\ &\qquad \leq \left(\frac{|1-\alpha_j|^2}{(j-1)^2\lambda_2}+\frac{j^2|\alpha_j|^2}{\lambda_1}\right)(\lambda_2(j-1)^2|a_j|^2+j^{-2}\lambda_1|z_j|^2).\end{aligned}$$

Для $j \leq m$ положим $\alpha_j = 1$, а для $\forall j \geq m+1$ найдется такое α_j, что

$$\left(\frac{|1-\alpha_j|^2}{(j-1)^2\lambda_2}+\frac{j^2|\alpha_j|^2}{\lambda_1}\right) \leq 1.$$

Докажем это, для этого извлечем в этом неравенстве полный квадрат. Пусть

$$A = \frac{j^2}{\lambda_1}, \ \ B = \frac{1}{(j-1)^2\lambda_2}.$$

Тогда неравенство выглядит так

$$A|\alpha_j|^2 - B|1-\alpha_j|^2 \leq 1.$$

Выделяя в нем полный квадрат можно прийти к виду

$$\left|\alpha_j - \frac{B}{A+B}\right|^2 \leq \frac{A+B-AB}{(A+B)^2}.$$

Или после подстановки

$$\left|\alpha_j - \frac{B}{A+B}\right|^2 \leq \frac{-j^2+j^2(j-1)^2\lambda_2+\lambda_1}{\lambda_1\lambda_2(j-1)^2}.$$

Тогда для существования необходимых α_j достаточно будет доказать, что

$$\frac{-j^2+j^2(j-1)^2\lambda_2+\lambda_1}{\lambda_1\lambda_2(j-1)^2} \geq 0 \ \ \forall j \geq m+1.$$

Но знаменатель $\geq$ 0, а числитель $\geq$ 0 потому что график
$$\begin{cases} x = j^2(j-1)^2. \\ y = j^2. \end{cases}$$

Вогнут, а все его точки лежат ниже прямой $\lambda_2 x + \lambda_1 = y$.
Возвращаясь к неравенству Коши-Буняковского при $j \geq m+1$

$$|(1-\alpha_j)a_j + \alpha_j z_j|^2 \leq \lambda_2 (j-1)^2 |a_j|^2 + j^{-2}\lambda_1 |z_j|^2.$$

Для $j \leq m$ это неравенство так же верно при подстановке $\alpha_j = 1$.
Вспоминая нашу экстремальную задачу получаем

$$\sum_{j=0}^{\infty} j^2 |a_j(1-\alpha_j) + \alpha_j z_j|^2 \leq \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_2 (j-1)^2 j^2 |a_j|^2 + \lambda_1 |z_j|^2 \leq \lambda_1 \delta^2 + \lambda_2.$$

Или

$$e(x'(\cdot), H_2^2 + \mathcal{P}_m(D), \delta, m) \leq \sqrt{\lambda_1 \delta^2 + \lambda_2}.$$

Учитывая оценку сверху

$$E(x'(\cdot), H_2^2(D) + \mathcal{P}_m, \delta) = \sqrt{\lambda_1 \delta^2 + \lambda_2},$$

а метод

$$\widehat{m}(y)(t) = \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha_j y_j z^j$$

является оптимальным.

Список литературы

[1] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Точность и оптимальность методов восстановления функций по их спектру, Тр. МИАН, — 2016, 293, 1-16.

[2] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с ошибкой, Мат. сб., — 2002, 193, 79-100.

[3] Сугробов П.Е, Оптимальное восстановление первой производной функции в классе Харди. Курсовая работа. 3-ий курс мехмат МГУ, 2015.