НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко

Введение

Данная работа посвящена задачам оптимального восстановления значений линейных операторов на классах элементов по неточной информации о самих элементах. Основное место в работе занимают конкретные результаты, и они касаются двух типов задач, которые на содержательном уровне можно сформулировать следующим образом.

1. Пусть про периодическую функцию (или функцию на прямой) из некоторого функционального класса известны приближенно какие-то ее коэффициенты Фурье (или ее преобразование Фурье на некотором подмножестве прямой). Как наилучшим образом воспользоваться этой информацией, чтобы восстановить саму функцию и ее производные в той или иной метрике?

2. Пусть в моменты времени $t_1 < \ldots < t_n$ приближенно известно решение некоторого эволюционного уравнения (скажем, уравнения теплопроводности). Как наилучшим образом воспользоваться этой информацией, чтобы восстановить решение этого уравнения в другой момент времени?

Мы отвечаем на эти вопросы в задачах оптимального восстановления функций и их производных из соболевских классов по неточно заданному спектру и в задачах о распространении тепла на d-мерной сфере и на d-мерном пространстве. Точнее говоря, формулируются соответствующие задачи оптимального восстановления и приводятся явные выражения для оптимальных методов восстановления и их погрешностей.

Следует отметить, что в каждой задаче оптимальный метод использует вполне определенный объем имеющейся информации и при этом используемая информация “сглаживается”. В задачах восстановления функций по неточно заданному спектру это согласуется с практикой: при восстановлении сигнала по доступным измерениям гармоникам высокочастотные компоненты отбрасывают, а остальные тем или иным способом сглаживают, чтобы нивелировать естественные погрешности измерения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №08-01-00450, №08–01–90001) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (НШ-3233.2008.1).

Работа носит обзорный характер. Доказательства формулируемых утверждений не приводятся (большая часть их опубликована и соответствующие ссылки даются), но формулируется общий результат, на котором базируются доказательства всех теорем. Нам представляется, что результаты, подобные тем, которые представлены в этой работе, могут оказаться полезными при разработке численных алгоритмов восстановления функций и решений дифференциальных уравнений по неточной и/или неполной информации об исходных данных.

1. Постановка задачи и общий результат

Пусть X, Y — векторные пространства, W — непустое множество (класс элементов) в X и Z — нормированное пространство. Мы хотим восстановить линейный оператор $T\colon X \to Z$ на классе W, располагая о каждом элементе $x \in W$ информацией о приближенном значении оператора $I\colon X \to Y$ на элементе x. Точнее говоря, для каждого $x \in W$ вместо элемента Ix известен элемент $y \in Y$ такой, что $Ix - y \in \Omega$, где $\Omega \subset Y$ — некоторое фиксированное множество (как правило, выпуклое и уравновешенное). Если $\Omega = \{0\}$, то говорят, что информация задана точно.

В качестве методов восстановления рассматриваются произвольные отображения $m\colon Y \to Z$. Погрешностью метода m назовем величину

$$e(T, W, I, \Omega, m) = \sup_{\substack{x \in W,\ y \in Y \\ Ix - y \in \Omega}} \|Tx - m(y)\|_Z.$$

Нас будет интересовать величина

$$E(T, W, I, \Omega) = \inf_{m\colon Y \to Z} e(T, W, I, \Omega, m),$$

называемая *погрешностью оптимального восстановления* и метод $\widehat{m}$, на котором эта нижняя грань достигается (если таковой существует), называемый *оптимальным методом восстановления*.

Впервые задача оптимального восстановления была поставлена С. А. Смоляком [1] для случая, когда $Z = \mathbb{R}$, информация задана точно и $\dim Y < \infty$. Он доказал, что в этой ситуации среди оптимальных методов есть линейный. Впоследствии проблематика оптимального восстановления интенсивно развивалась в самых разных направлениях (см. [2]–[7]). Ряд конкретных задач оптимального восстановления линейных операторов впервые был рассмотрен в [8]. Подход к решению задач восстановления, базирующийся на принципах теории экстремума, развивался в работах [9]–[14].

Приведем теперь один общий результат, касающийся способа нахождения оптимального метода восстановления. Для этого несколько детализируем исходную постановку. Пусть, по-прежнему, X — векторное пространство и Z — нормированное пространство.

Пусть, далее, $Y_1, \dots, Y_n$ — пространства со скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_{Y_j}$ и соответствующими нормами $\|\cdot\|_{Y_j}$, $I_j\colon X \to Y_j$ — линейные операторы и $\delta_j > 0$, $1 \le j \le n$. Рассматривается задача оптимального восстановления линейного оператора $T\colon X \to Z$ на классе

$$W_k = \{\, x \in X : \|I_j x\|_{Y_j} \le \delta_j,\ 1 \le j \le k,\ 0 \le k < n \,\}$$

(при $k = 0$ считаем, что $W_0 = X$) по информации о значениях операторов $I_{k+1}, \dots, I_n$, заданных неточно, т. е. для каждого $x \in W_k$ известен вектор $y = (y_{k+1}, \dots, y_n) \in Y_{k+1} \times \ldots \times Y_n$ такой, что

$$\|I_j x - y_j\|_{Y_j} \le \delta_j, \quad j = k+1, \dots, n.$$

В соответствии с общей постановкой, здесь $Y = Y_{k+1} \times \ldots \times Y_n$ (с нормой, равной сумме норм сомножителей), $W = W_k$ и

$$\Omega = \{\, (y_{k+1}, \dots, y_n) \in Y_{k+1} \times \ldots \times Y_n : \|y_j\|_{Y_j} \le \delta_j,\ j = k+1, \dots, n \,\}.$$

Погрешностью метода восстановления $m\colon Y_{k+1} \times \ldots \times Y_n \to Z$ называется величина

$$e(T, W_k, I, \delta, m) = \sup_{x \in W_k} \sup_{\substack{y=(y_{k+1},\dots,y_n) \in Y_{k+1} \times \ldots \times Y_n \\ \|I_j x - y_j\|_{Y_j} \le \delta_j,\ j=k+1,\dots,n}} \|Tx - m(y)\|_Z,$$

где $I = (I_1, \dots, I_n)$ и $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$, а *погрешность оптимального восстановления* определяется равенством

$$E(T, W_k, I, \delta) = \inf_{m\colon Y_{k+1} \times \ldots \times Y_n \to Z} e(T, W_k, I, \delta, m).$$

При этом метод $\widehat{m}$, на котором достигается нижняя грань (если таковой существует), называется *оптимальным методом восстановления.*

Отметим, что в задаче оптимального восстановления об элементе $x \in X$ имеется информация двух типов : априорная, заключающаяся в принадлежности x классу W_k и апостериорная, заданной в виде набора элементов $y_{k+1}, \dots, y_n$, которые являются приближенными значениями для $I_{k+1}x, \dots, I_n x$. Таким образом, операторы $I_1, \dots I_k$ вместе с величинами $\delta_1, \dots, \delta_k$, определяющие класс W_k, задают априорную информацию, а операторы $I_{k+1}, \dots, I_n$ вместе с величинами $\delta_{k+1}, \dots, \delta_n$ — апостериорную информацию. Некоторое единообразие в обозначениях этих двух различных типов информации дает возможность по разному интерпретировать данную задачу восстановления, считая ту или иную информацию априорной или апостериорной.

Свяжем с поставленной задаче оптимального восстановления следующую экстремальную задачу

$$(1) \qquad \|Tx\|_Z^2 \to \max, \quad \|I_j x\|_{Y_j}^2 \le \delta_j^2, \quad j = 1, \dots, n, \quad x \in X,$$

которая, как мы видим “не различает” априорную и апостериорную информации.

Основным результатом, на котором базируются построения оптимальных методов восстановления является следующая

Теорема 1. *Пусть существуют такие числа* $\widehat{\lambda}_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$, *что значения задачи*

$$\|Tx\|_Z^2 \to \max, \quad \sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j \|I_j x\|_{Y_j}^2 \leq \sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j \delta_j^2, \quad x \in X$$

и задачи (1) *совпадают. Предположим, кроме того, что для всех* $y = (y_{k+1}, \ldots, y_n) \in Y_{k+1} \times \ldots \times Y_n$ *существует решение* x_y *задачи*

$$\sum_{j=1}^{k} \widehat{\lambda}_j \|I_j x\|_{Y_j}^2 + \sum_{j=k+1}^{n} \widehat{\lambda}_j \|I_j x - y_j\|_{Y_j}^2 \to \min, \quad x \in X.$$

Тогда

$$E(T, W_k, I, \delta) = \sup_{\|I_j x\|_{Y_j} \leq \delta_j, \ j=1,\ldots,n} \|Tx\|_Z$$

и метод

$$\widehat{m}(y) = Tx_y$$

является оптимальным.

2. Оптимальное восстановление функций и их производных по неточно заданному спектру

Рассмотрим данную задачу отдельно для функций на прямой и для периодических функций.

Функции на прямой. Одна из возможных и вполне естественных постановок здесь такова. Обозначим через $\mathcal{W}_2^r(\mathbb{R})$ соболевское пространство функций на прямой $\mathbb{R}$, т. е.

$$\mathcal{W}_2^r(\mathbb{R}) = \{\, x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}) : x^{(r-1)}(\cdot) \in \mathrm{LAC}(\mathbb{R}),\ x^{(r)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}) \,\},$$

где $r \in \mathbb{N}$ и $\mathrm{LAC}(\mathbb{R})$ — совокупность всех локально абсолютно непрерывных функций на $\mathbb{R}$. Пусть

$$W_2^r(\mathbb{R}) = \{\, x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^r(\mathbb{R}) : \|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq 1 \,\}$$

— соболевский класс функций на $\mathbb{R}$, $0 < \sigma \leq \infty$, $\Delta_\sigma = [-\sigma, \sigma]$ ($\Delta_\sigma = \mathbb{R}$, если $\sigma = \infty$), $0 \leq k \leq r-1$ и $\delta > 0$. Ставится задача об оптимальном восстановлении k-ой производной (самой функции, если $k = 0$) на соболевском классе функций $W_2^r(\mathbb{R})$ по следующей неточной информации: о каждой функции $x(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{R})$ известно ее преобразование Фурье $Fx(\cdot)$ на Δ_σ с точностью до δ в метрике $L_2(\Delta_\sigma)$, т. е. известна функция $y(\cdot) \in L_2(\Delta_\sigma)$ такая, что $\|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\Delta_\sigma)} \leq \delta$.

В терминах общей постановки из п. 2 здесь $X = \mathcal{W}_2^r(\mathbb{R})$, $W = W_2^r(\mathbb{R})$, $Y_1 = L_2(\mathbb{R})$, $Y_2 = L_2(\Delta_\sigma)$, $I_1 x(\cdot) = x^{(n)}(\cdot)$, $I_2 x(\cdot) = Fx(\cdot)|_{\Delta_\sigma}$ — сужение преобразования Фурье на Δ_σ, $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = \delta$.

В соответствии с введенными определениями погрешность оптимального восстановления в этой задаче определяется следующим образом

$$E_\sigma(D^k, W_2^r(\mathbb{R}), \delta) = \inf_m \sup_{\substack{x(\cdot)\in W_2^r(\mathbb{R}),\ y(\cdot)\in L_2(\Delta_\sigma) \\ \|Fx(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_2(\Delta_\sigma)}\le\delta}} \|x^{(k)}(\cdot) - m(y(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

где нижняя грань берется по всем методам $m\colon L_2(\Delta_\sigma) \to L_2(\mathbb{R})$.

Задачу нахождения величины $E_\sigma(D^k, W_2^r(\mathbb{R}), \delta)$ и соответствующего оптимального метода будем называть $(D^k, W_2^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma)$-задачей.

Следующий результат доказан в [13].

Теорема 2. *Пусть $k, r \in \mathbb{N}$, $0 < k < r$, $0 < \sigma \le \infty$, $\delta > 0$ и*

$$\widehat{\sigma} = \left(\frac{r}{k}\right)^{\frac{1}{2(r-k)}} \left(\frac{2\pi}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{2r}}.$$

Тогда

$$E_\sigma(D^k, W_2^r(\mathbb{R}), \delta) = \begin{cases} \sigma^k \sqrt{\dfrac{r-k}{2\pi r}\left(\dfrac{k}{r}\right)^{\frac{k}{r-k}}\delta^2 + \dfrac{1}{\sigma^{2r}}}, & \sigma < \widehat{\sigma}, \\ \left(\dfrac{\delta}{\sqrt{2\pi}}\right)^{1-k/r}, & \sigma \ge \widehat{\sigma}, \end{cases}$$

а метод

$$\widehat{m}(y)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} (i\tau)^k \left(1 + \frac{r}{r-k}\left(\frac{r}{k}\right)^{\frac{k}{r-k}}\left(\frac{\tau}{\sigma_0}\right)^{2r}\right)^{-1} y(\tau)e^{i\tau t}\,d\tau,$$

где $\sigma_0 = \min(\sigma, \widehat{\sigma})$, является оптимальным.

Если $k = 0$ и $0 < \sigma < \infty$, то

$$E_\sigma(D^0, W_2^r(\mathbb{R}), \delta) = \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi} + \frac{1}{\sigma^{2r}}},$$

а метод

$$\widehat{m}(y)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma}\left(1 + \left(\frac{\tau}{\sigma}\right)^{2r}\right)^{-1} y(\tau)e^{i\tau t}\,d\tau$$

является оптимальным.

Из теоремы 2 вытекает, что, начиная с $\widehat{\sigma}$, дальнейшее увеличение интервала, на котором преобразование Фурье функции из $W_2^r(\mathbb{R})$ задано с погрешностью δ в метрике $L_2(\Delta_\sigma)$, не приводит к уменьшению погрешности восстановления. Иными словами, при нарушении соотношения

$$\delta^2\sigma^{2r} \le 2\pi\left(\frac{r}{k}\right)^{\frac{r}{r-k}} \tag{2}$$

между погрешностью задания исходных данных и размером интервала, на котором эти данные измеряются, доступная информация оказывается излишней. Соотношение (2) может рассматриваться как своего рода *"принцип неопределенности"*.

Дальнейшие исследования $(D^k, W_2^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma)$-задачи показали, что наряду с методом $\widehat{m}$ из формулировки теоремы существует целое семейство оптимальных методов, и наряду с информационной характеристикой $\widehat{\sigma}$ появляется еще одна характеристика $\widehat{\sigma}_1$. Другими словами, справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть $k, r \in \mathbb{N}$, $0 < k < r$, $0 < \sigma \le \infty$, $\delta > 0$, $\widehat{\sigma}$ и σ_0 — те же, что и в теореме 2 и*

$$\widehat{\sigma}_1 = \left(\frac{r}{k}\right)^{\frac{1}{2(r-k)}} \left(\frac{2\pi}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{2r}}.$$

Тогда при всех

$$0 \le \sigma_1 \le \frac{\widehat{\sigma}_1}{\widehat{\sigma}}\sigma_0$$

методы

$$\widehat{m}(y)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} (i\tau)^k y(\tau) e^{i\tau t}\, d\tau + \tag{3}$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma_1 \le |\tau| \le \sigma_0} (i\tau)^k \left(1 + \frac{r}{r-k}\left(\frac{r}{k}\right)^{\frac{k}{r-k}} \left(\frac{\tau}{\sigma_0}\right)^{2r}\right)^{-1} y(\tau) e^{i\tau t}\, d\tau$$

являются оптимальными в $(D^k, W_2^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma)$-задаче.

Метод (3) отличается от изначально построенного оптимального метода тем, что в последнем неточная информация о преобразовании Фурье сглаживается на всем промежутке $[-\sigma_0, \sigma_0]$, а в методе (3) — только на множестве $\sigma_1 \le |\tau| \le \sigma_0$. Тем самым информационный смысл величины $\widehat{\sigma}'$ заключается в том, что она определяет промежуток, на котором полученная неточная информация о преобразовании Фурье не требует сглаживания.

Возникает естественный вопрос: как сравнивать методы (3), каким из них лучше пользоваться? Вот один из возможных подходов.

Важной характеристикой методов аппроксимации (например, таких как интерполяционные или квадратурные формулы) является их точность на тех или иных множествах функций (обычно это подпространства алгебраических или тригонометрических полиномов). При этом размерность соответствующих подпространств стараются сделать как можно больше. Например, квадратурная формула Гаусса строится как квадратура, точная на полиномах максимально возможной степени.

Для каждого $\sigma > 0$ обозначим через $\mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R})$ подпространство в $L_2(\mathbb{R})$, образованное сужениями на $\mathbb{R}$ целых функций экспоненциального типа σ. Как хорошо известно, $x(\cdot) \in \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда носитель $Fx(\cdot)$ принадлежит отрезку $[-\sigma, \sigma]$. Эти пространства функций на прямой являются аналогом тригонометрических полиномов.

Будем говорить, что в $(D^k, W_2^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma)$-задаче метод $\widehat{m}\colon L_2(\Delta_\sigma) \to L_2(\mathbb{R})$ точен на $\mathcal{B}_{\sigma_1,2}(\mathbb{R})$, если при всех $x(\cdot) \in \mathcal{B}_{\sigma_1,2}(\mathbb{R})$ справедливо равенство

$$\widehat{m}(Fx(\cdot)|_{\Delta_\sigma})(\cdot) = x^{(k)}(\cdot).$$

Из предыдущей теоремы сразу следует, что для каждого $0 < \sigma \le \infty$ оптимальный метод точен на пространстве $\mathcal{B}_{\sigma_1,2}(\mathbb{R})$ для всех $0 \le \sigma_1 \le \widehat{\sigma}' = \widehat{\sigma}_1\sigma_0/\widehat{\sigma}$ и $\mathcal{B}_{\widehat{\sigma}',2}(\mathbb{R})$ — максимальное пространство, обладающее этим свойством. Таким образом, наилучшим среди оптимальных методов (3) можно считать метод, отвечающий $\sigma_1 = \widehat{\sigma}_1\sigma_0/\widehat{\sigma}$, поскольку он точен на максимально широком подпространстве целых функций экспоненциального типа.

Периодические функции. Пусть $r \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{T}$ — отрезок $[-\pi, \pi]$ с идентифицированными концами. Обозначим

$$\mathcal{W}_2^r(\mathbb{T}) = \{\, x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}) : x^{(r-1)}(\cdot) \text{ — абс. непр. },\ x^{(r)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}) \,\}$$

и

$$W_2^r(\mathbb{T}) = \{\, x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^r(\mathbb{R}) : \|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \le 1 \,\}.$$

Как и в предыдущем случае, нас будет интересовать задача об оптимальном восстановлении k-ой производной $(0 \le k < r)$ функции из класса $W_2^r(\mathbb{T})$ по ее приближенно заданным коэффициентам Фурье. Точнее, мы предполагаем, что для всякой функции $x(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{T})$ нам известен вектор $y = \{y_j\}_{|j|\le N}$ такой, что

$$\|x^N - y\|_{l_2} \le \delta,$$

где $x^N = \{x_j\}_{|j|\le N}$, x_j — коэффициенты Фурье функции $x(\cdot)$, т. е.

$$x_j = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} x(t)e^{-ijt}\,dt, \quad j \in \mathbb{Z},$$

а $\|\cdot\|_{l_2}$ — евклидова норма в $\mathbb{C}^{2N+1}$.

Погрешность оптимального восстановления в этой задаче определяется следующим образом

$$E_N(D^k, W_2^r(\mathbb{T}), \delta) = \inf_m \sup_{\substack{x(\cdot)\in W_2^r(\mathbb{T}),\ y\in l_2 \\ \|x^N - y\|_{l_2}\le\delta}} \|x^{(k)}(\cdot) - m(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})},$$

где нижняя грань берется по всем методам $m\colon l_2 \to L_2(\mathbb{T})$.

Эта задача рассматривалась в работе [12] и результат вполне аналогичен теореме 2. Но, как и в случае функций на прямой, здесь также существует целое семейство оптимальных методов восстановления и снова возникает вопрос о разумном выборе из них метода, который обладал бы некоторыми преимуществами по сравнению с остальными. Аналогично предыдущему, будем искать среди оптимальных методов те, которые были бы точны на тригонометрических полиномах как можно более высокой степени. Обозначим через $\mathcal{T}_n$ пространство тригонометрических полиномов степени не выше n. Под точностью метода m на пространстве $\mathcal{T}_n$ понимается выполнение равенства

$$m(x^N)(\cdot) = x^{(k)}(\cdot)$$

для всех $x(\cdot) \in \mathcal{T}_n$. Максимальное из n, при которых существует оптимальный метод, точный на подпространстве $\mathcal{T}_n$ обозначим через $\widehat{n}'$.

Для каждого $N \in \mathbb{N}$ положим

$$s_0 = s_0(N) = \min\left\{ s \in \mathbb{N} : \frac{(s+1)^{2k} - s^{2k}}{(s+1)^{2r} - s^{2r}} \le \frac{1}{(N+1)^{2(r-k)}} \right\}.$$

При $\delta > s_0^{-r}$ определим $s_1 \le s_0$ из условия

$$(s_1 - 1)^r \le \frac{1}{\delta} < s_1^r.$$

Введем следующие обозначения:

$$\widehat{N} = \min\left\{ N \in \mathbb{N} : s_0^r \ge \frac{1}{\delta} \right\}, \quad a(N) = s_0 \left(1 - \left(\frac{s_0}{N+1} \right)^{2(r-k)} \right)^{\frac{1}{2k}},$$

$$\widehat{n} = s_1(s_1 - 1) \left(\frac{s_1^{2(r-k)} - (s_1-1)^{2(r-k)}}{s_1^{2r} - (s_1-1)^{2r}} \right)^{\frac{1}{2k}}.$$

Справедлива следующая

Теорема 4. *Пусть $k, r \in \mathbb{N}$, $0 < k < r$ и $N \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$\widehat{n}' = \begin{cases} a(N), & 1 \le N \le \widehat{N}, \\ \widehat{n}, & N \ge \widehat{N}. \end{cases}$$

Для погрешности оптимального восстановления имеет место равенство

$$E_N(D^k, W_2^r(\mathbb{T}), \delta) = \begin{cases} \left(a^{2k}(N)\delta^2 + \dfrac{1}{(N+1)^{2(r-k)}} \right)^{1/2}, & 1 \le N \le \widehat{N}, \\ \left(\widehat{n}^{2k}\delta^2 + \dfrac{s_1^{2k} - (s_1-1)^{2k}}{s_1^{2r} - (s_1-1)^{2r}} \right)^{1/2}, & N \ge \widehat{N}, \end{cases}$$

а метод

$$\widehat{m}(y)(t) = \sum_{|j| \le \widehat{n}'} (ij)^k y_j e^{ijt} + \sum_{\widehat{n}' < |j| \le N'} (ij)^k \frac{y_j}{(1 + \gamma j^{2r})} e^{ijt},$$

где $N' = \min\{N, \widehat{N}\}$,

$$\gamma = \begin{cases} \dfrac{1}{(N+1)^{2(r-k)}\widehat{n}^{2k}}, & 1 \le N \le \widehat{N}, \\ \dfrac{s_1^{2k} - (s_1-1)^{2k}}{(s_1^{2r} - (s_1-1)^{2r})\widehat{n}^{2k}}, & N \ge \widehat{N}, \end{cases}$$

является оптимальным.

Очевидно, что метод $\widehat{m}$ точен на подпространстве $\mathcal{T}_{\widehat{n}'}$.

3. Оптимальное восстановление решений эволюционных уравнений (дискретный случай)

Начнем с некоторой абстрактной постановки задач оптимального восстановления.

Пусть H — гильбертово пространство, $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ — ортонормированный базис в H, $\{\mu_j\}_{J\in\mathbb{N}}$ — монотонно возрастающая числовая последовательность такая, что $\lim_{j\to+\infty}\mu_j = +\infty$,

$$H_0 = \left\{ x \in H : \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu_j^2 |c_j(x)|^2 < \infty \right\}, \quad c_j(x) = (x, e_j)_H,$$

$A\colon H_0 \to H$ — линейный оператор, определенный равенством

$$Ax = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu_j c_j(x) e_j$$

и $x_0 \in H$.

Рассмотрим следующую абстрактную задачу Коши:

$$\frac{dx}{dt} + Ax = 0, \tag{4}$$

$$x_{t=0} = x_0. \tag{5}$$

Под решением этой задачи понимается непрерывная функция $x(\cdot)\colon [0,\infty) \to H_0$, дифференцируемая при каждом $t > 0$ и удовлетворяющая условиям (4) и (5). Нетрудно убедиться, что единственным решением данной задачи является функция

$$x(t) = \sum_{j\in\mathbb{N}} e^{-\mu_j t} c_j(x_0) e_j. \tag{6}$$

Предположим, что известны приближенные решения $\widehat{x}_k$, $k = 1, 2$, этой задачи в моменты времени $0 \le t_1 < t_2$. Требуется по этим двум элементам наилучшим образом восстановить ее решение в момент времени τ, $t_1 < \tau < t_2$.

Перейдем к точной постановке. Предположим, что известны такие $\widehat{x}_k \in H$, что

$$\|x(t_k) - \widehat{x}_k\|_H \le \delta_k, \quad \delta_k > 0, \quad k = 1, 2.$$

В качестве методов восстановления будем рассматривать произвольные отображения $m\colon H\times H\to H$. *Погрешностью метода* m назовем величину

$$e(\tau,A,\delta_1,\delta_2,m)=\sup_{\substack{x_0,\widehat{x}_1,\widehat{x}_2\in H\\ \|x(t_k)-\widehat{x}_k\|_H\le\delta_k,\ k=1,2}}\|x(\tau)-m(\widehat{x}_1,\widehat{x}_2)\|_H,$$

где $x(\cdot)$ определено равенством (6). *Погрешностью оптимального восстановления* называется величина

$$E(\tau,A,\delta_1,\delta_2)=\inf_{m\colon H\times H\to H}e(\tau,A,\delta_1,\delta_2,m),$$

а метод $\widehat{m}$, на котором достигается нижняя грань, называется *оптимальным методом.*

Перед формулировкой теоремы определим некоторые величины. Пусть

$$\mu_1=\ldots=\mu_{j_1}<\mu_{j_1+1}=\ldots=\mu_{j_2}<\mu_{j_2+1}=\ldots=\mu_{j_3}<\ldots\ .$$

При

$$e^{-\mu_{j_{s+1}}(t_2-t_1)}\le\frac{\delta_2}{\delta_1}<e^{-\mu_{j_s}(t_2-t_1)},\quad s\in\mathbb{N},$$

положим

$$\begin{aligned}\widehat{\lambda}_1&=\frac{e^{2\mu_{j_{s+1}}(t_2-\tau)}-e^{2\mu_{j_s}(t_2-\tau)}}{e^{2\mu_{j_{s+1}}(t_2-t_1)}-e^{2\mu_{j_s}(t_2-t_1)}},\\ \widehat{\lambda}_2&=\frac{e^{-2\mu_{j_s}(\tau-t_1)}-e^{-2\mu_{j_{s+1}}(\tau-t_1)}}{e^{-2\mu_{j_s}(t_2-t_1)}-e^{-2\mu_{j_{s+1}}(t_2-t_1)}}.\end{aligned}$$

В случае, если $\delta_2/\delta_1\ge e^{-\mu_1(t_2-t_1)}$ положим $\widehat{\lambda}_1=e^{-2\mu_1(\tau-t_1)}$, а $\widehat{\lambda}_2=0$.

Справедлива следующая

Теорема 5. *При всех* $0\le t_1<\tau<t_2$ *и всех* $\delta_1,\delta_2>0$ *имеет место равенство*

$$E(\tau,A,\delta_1,\delta_2)=\sqrt{\widehat{\lambda}_1\delta_1^2+\widehat{\lambda}_2\delta_2^2},$$

а метод

$$\widehat{m}(\widehat{x}_1,\widehat{x}_2)=\sum_{j\in\mathbb{N}}e^{-\mu_j\tau}\frac{\widehat{\lambda}_1e^{-\mu_jt_1}c_j(\widehat{x}_1)+\widehat{\lambda}_2e^{-\mu_jt_2}c_j(\widehat{x}_2)}{\widehat{\lambda}_1e^{-2\mu_jt_1}+\widehat{\lambda}_2e^{-2\mu_jt_2}}e_j$$

является оптимальным.

Число приложений этой теоремы огромно. Ограничимся здесь задачей о распространении тепла на d-мерной сфере.

Пусть

$$\mathbb{S}^d=\left\{x=(x_1,\ldots,x_{d+1})\in\mathbb{R}^{d+1}:\sum_{j=1}^{d+1}x_j^2=1\right\}$$

— единичная d-мерная сфера. Известно (см. [15]), что $L_2(\mathbb{S}^d) = \sum_{j=0}^{\infty} H_j$, где H_j — множество сферических гармоник порядка j, $\dim H_0 = n_0 := 1$,

$$\dim H_j = n_j := \frac{2j+d-1}{j}\binom{j+d-2}{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots .$$

Кроме того, для всех $x(\cdot) \in H_j$, $j = 0, 1, \dots$, имеет место равенство

$$\Delta x(\cdot) = -\mu_j x(\cdot),$$

где $\mu_j = j(j+d-1)$, а Δ — оператор Лапласа–Бельтрами. Обозначим через $\{Y_k^j(\cdot)\}_{k=1}^{n_j}$ ортонормированный базис в H_j. Для $\alpha > 0$ оператор $(-\Delta)^{\alpha/2}$ определяется равенством

$$(-\Delta)^{\alpha/2} x(\cdot) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu_j^{\alpha/2} \sum_{k=1}^{n_k} c_{kj} Y_k^j(\cdot),$$

где

$$x(\cdot) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{n_k} c_{kj} Y_k^j(\cdot).$$

Рассмотрим задачу Коши для обобщенного уравнения теплопроводности на $\mathbb{S}^d$

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} + (-\Delta)^{\alpha/2} x = 0, \\ &x\Big|_{t=0} = x_0(\cdot), \quad x_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^d). \end{aligned}$$

Для задачи оптимального восстановления решения этого уравнения в момент времени τ по его решениям, заданным с погрешностями δ_1 и δ_2 в моменты t_1 и t_2 из теоремы 5 получаем

Следствие. *Положим*

$$\begin{aligned} \widehat{\lambda}_1 &= \frac{e^{2\mu_{s+1}^{\alpha/2}(t_2-\tau)} - e^{2\mu_s^{\alpha/2}(t_2-\tau)}}{e^{2\mu_{s+1}^{\alpha/2}(t_2-t_1)} - e^{2\mu_s^{\alpha/2}(t_2-t_1)}}, \\ \widehat{\lambda}_2 &= \frac{e^{-2\mu_s^{\alpha/2}(\tau-t_1)} - e^{-2\mu_{s+1}^{\alpha/2}(\tau-t_1)}}{e^{-2\mu_s^{\alpha/2}(t_2-t_1)} - e^{-2\mu_{s+1}^{\alpha/2}(t_2-t_1)}} \end{aligned}$$

при

$$e^{-\mu_{s+1}^{\alpha/2}(t_2-t_1)} \le \frac{\delta_2}{\delta_1} < e^{-\mu_s^{\alpha/2}(t_2-t_1)}, \quad s \in \mathbb{Z}_+,$$

и $\widehat{\lambda}_1 = 1$, $\widehat{\lambda}_2 = 0$ *в случае, если* $\delta_2 \ge \delta_1$. *Тогда при всех* $0 \le t_1 < \tau < t_2$ *и всех* $\delta_1, \delta_2 > 0$ *имеет место равенство*

$$E(\tau, (-\Delta)^{\alpha/2}, \delta_1, \delta_2) = \sqrt{\widehat{\lambda}_1 \delta_1^2 + \widehat{\lambda}_2 \delta_2^2},$$

а метод

$$\widehat{m}(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2)(\cdot) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\mu_j^{\alpha/2}\tau} \sum_{k=1}^{n_j} \frac{\widehat{\lambda}_1 e^{-\mu_j^{\alpha/2}t_1} c_{jk}(\widehat{x}_1) + \widehat{\lambda}_2 e^{-\mu_j^{\alpha/2}t_2} c_{jk}(\widehat{x}_2)}{\widehat{\lambda}_1 e^{-2\mu_j^{\alpha/2}t_1} + \widehat{\lambda}_2 e^{-2\mu_j^{\alpha/2}t_2}} Y_k^j(\cdot),$$

где

$$c_{jk}(x) = \int_{\mathbb{S}^d} x(\xi) Y_k^j(\xi)\, d\xi,$$

является оптимальным.

Рассмотренная здесь задача относится к операторам с дискретным спектром. Аналогичная постановка возможна и для оператора, скажем, с непрерывным спектром. В следующем параграфе мы приводим частную постановку такой задачи, но с произвольным конечным набором измерений.

4. Распространение тепла на $\mathbb{R}^d$

Распространение тепла в $\mathbb{R}^d$ описывается, как хорошо известно, уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \tag{7}$$

(где Δ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^d$ и $u(\cdot,\cdot)$ — функция на $[0,\infty)\times\mathbb{R}^d$) с заданным начальным распределением температуры

$$u(0,\cdot) = u_0(\cdot). \tag{8}$$

Мы предполагаем, что $u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Единственным решением задачи (7)–(8) при $t > 0$ является интеграл Пуассона

$$u(t,x) = u(t,x;u_0(\cdot)) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} u_0(\xi)\, d\xi, \tag{9}$$

где $x = (x_1,\ldots,x_d)$, $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_d)$, $|x-\xi|^2 = \sum_{i=1}^d (x_i-\xi_i)^2$, и при этом $u(t,\cdot) \to u_0(\cdot)$ при $t \to 0$ в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Ставится следующая задача, аналогичная тем, которые уже ставились ранее. Пусть в моменты времени $0 \le t_1 < \ldots < t_n$ приближенно известны распределения температур $u(t_1,\cdot),\ldots,u(t_n,\cdot)$. Точнее говоря, известны функции $y_i(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ такие, что

$$\|u(t_i,\cdot) - y_i(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \delta_i, \quad i = 1,\ldots,n,$$

где $\delta_i > 0$, $i = 1,\ldots,n$. Мы хотим каждому такому набору функций сопоставить функцию из $L_2(\mathbb{R}^d)$, которая бы в некотором смысле наилучшим образом аппроксимировала истинное распределение температуры в $\mathbb{R}^d$ в фиксированный момент времени τ.

Под этим понимается следующее. Любое отображение m из $(L_2(\mathbb{R}^d))^n = L_2(\mathbb{R}^d) \times \ldots \times L_2(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$ объявляется методом восстановления (температуры в $\mathbb{R}^d$ в момент времени τ по данной информации). Погрешностью этого метода называем величину

$$e(\tau, \overline{\delta}, m) = \sup_{\substack{u_0(\cdot),\ \overline{y}(\cdot) \in (L_2(\mathbb{R}^d))^n \\ \|u(t_i,\cdot) - y_i(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \delta_i,\ i=1,\dots,n}} \|u(\tau, \cdot) - m(\overline{y}(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

где $\overline{y}(\cdot) = (y_1(\cdot), \dots, y_n(\cdot))$ и $\overline{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_n)$.

Нас интересует величина

$$E(\tau, \overline{\delta}) = \inf_{m\colon (L_2(\mathbb{R}^d))^n \to L_2(\mathbb{R}^d)} e(\tau, \overline{\delta}, m),$$

которую назовем *погрешностью оптимального восстановления* и метод $\widehat{m}$, на котором нижняя грань достигается, т. е. для которого

$$E(\tau, \overline{\delta}) = e(\tau, \overline{\delta}, \widehat{m}),$$

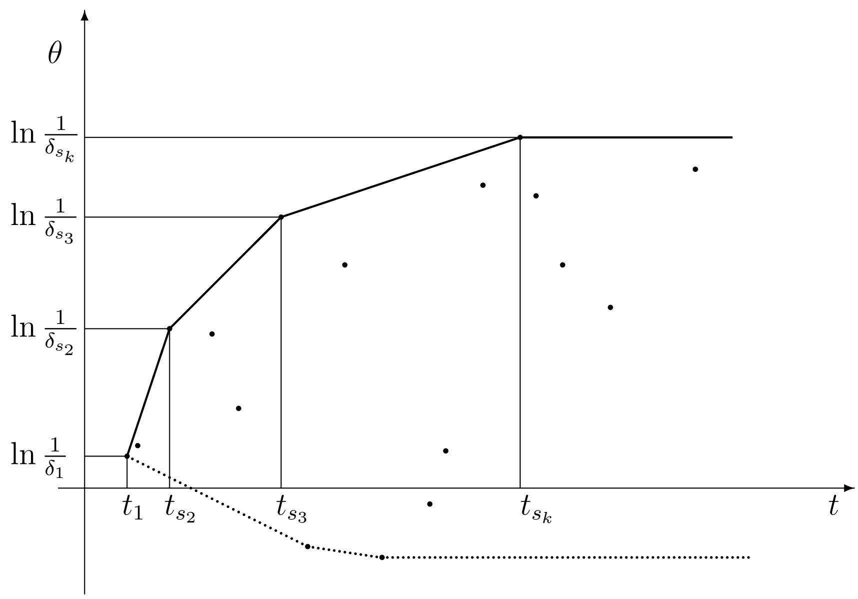
называемый *оптимальным методом восстановления* (температуры в $\mathbb{R}^d$ в момент времени τ по данной информации).

Перед формулировкой теоремы сделаем некоторые построения. На двумерной плоскости (t, x) построим множество

$$M = \operatorname{co}\{\, (t_j, \ln(1/\delta_j)),\ 1 \le j \le n \,\} + \{\, (t, 0) \mid\ t \ge 0 \,\},$$

где $\operatorname{co} A$ обозначает выпуклую оболочку множества A.

Определим функцию $\theta(\cdot)$ на $[0, \infty)$ равенством: $\theta(t) = \max\{\, x \mid (t, x) \in M \,\}$, причем $\theta(t) = -\infty$, если $(t, x) \notin M$ ни для какого x. Ясно, что на $[t_1, \infty)$ функция $\theta(\cdot)$ — вогнутая ломаная. Обозначим через $t_{s_1} < \ldots < t_{s_k}$ ее точки излома (считая t_1 также точкой излома, т. е. $t_{s_1} = t_1$), которые, очевидно, являются подмножеством точек $\{t_1, \dots, t_n\}$ (см. рисунок, на котором изображенные точки имеют координаты $(t_i, \ln(1/\delta_i))$).



Формула (9) для каждого $t > 0$ определяет линейный непрерывный оператор в $L_2(\mathbb{R}^d)$,[1] который обозначим P_t и если через P_0 обозначить тождественный оператор, то $u(t, \cdot; u_0(\cdot)) = P_t u_0(\cdot)$ для всех $t \geq 0$.

Следующий результат доказан в [16].

Теорема 6. *Для любого $\tau \geq 0$ справедливо равенство*

$$E(\tau, \overline{\delta}) = e^{-\theta(\tau)}.$$

(1) *Если $t_1 > 0$ и $0 \leq \tau < t_1$, то любой метод является оптимальным;*

(2) *если $\tau = t_{s_j}$, $1 \leq j \leq k$, то метод $\widehat{m}$, определенный равенством $\widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot) = y_{s_j}(\cdot)$, является оптимальным;*

(3) *если $k \geq 2$ и $\tau \in (t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$, $1 \leq j \leq k-1$, то метод $\widehat{m}$, определенный равенством*

$$\widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot) = (K_{s_j} * y_{s_j})(\cdot) + (K_{s_{j+1}} * y_{s_{j+1}})(\cdot),$$

где $K_{s_j}(\cdot)$ и $K_{s_{j+1}}(\cdot)$ — функции из $L_2(\mathbb{R}^d)$, преобразования Фурье которых имеет вид

$$FK_{s_j}(\xi) = \frac{\widehat{\lambda}_{s_j} e^{-|\xi|^2(\tau - t_{s_j})}}{\widehat{\lambda}_{s_j} + \widehat{\lambda}_{s_{j+1}} e^{-2|\xi|^2(t_{s_{j+1}} - t_{s_j})}} \;,$$

$$FK_{s_{j+1}}(\xi) = \frac{\widehat{\lambda}_{s_{j+1}} e^{-|\xi|^2(\tau + t_{s_{j+1}} - 2t_{s_j})}}{\widehat{\lambda}_{s_j} + \widehat{\lambda}_{s_{j+1}} e^{-2|\xi|^2(t_{s_{j+1}} - t_{s_j})}},$$

и

$$\widehat{\lambda}_{s_j} = \frac{t_{s_{j+1}} - \tau}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}} \left(\frac{\delta_{s_{j+1}}}{\delta_{s_j}} \right)^{\frac{2(\tau - t_{s_j})}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}}} \;,$$

$$\widehat{\lambda}_{s_{j+1}} = \frac{\tau - t_{s_j}}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}} \left(\frac{\delta_{s_j}}{\delta_{s_{j+1}}} \right)^{\frac{2(t_{s_{j+1}} - \tau)}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}}} \;,$$

является оптимальным;

(4) *если $\tau > t_{s_k}$, то метод $\widehat{m}$, определенный равенством*

$$\widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot) = P_{\tau - t_{s_k}} y_{s_k}(\cdot),$$

является оптимальным.

Сделаем несколько замечаний по поводу сформулированной теоремы.

1. Если $t_1 > 0$ и $0 \leq \tau < t_1$, то $\theta(\tau) = -\infty$ и значит, $E(\tau, \overline{\delta}) = +\infty$ — прошлое нельзя восстановить по неточному настоящему. В этом случае любой метод можно считать оптимальным.

2. Отметим, что оптимальный метод линеен, “сглаживает” наблюдения (свертка — бесконечно дифференцируемая функция) и

[1]Это следует, например, из неравенства Юнга, так как интеграл Пуассона есть свертка ограниченной функции и функции из $L_2(\mathbb{R}^d)$.

использует информацию не более чем о двух измерениях до и после времени τ, либо только до времени τ (если $\tau > t_{s_k}$).

3. Если $\tau = t_i$ и t_i не является точкой излома функции $\theta(\cdot)$, то оптимальный метод позволяет данное измерение уточнить.

4. Случай $\tau > t_{s_k}$ означает, что самое точное измерение температуры было произведено раньше времени τ. В этой ситуации оптимальный метод — решение уравнения теплопроводности в момент времени $\tau - t_{s_k}$ с начальным распределением температуры $y_{s_k}(\cdot)$.

Список литературы

[1] *Смоляк С. А.* Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них. Канд. дисс., МГУ, М., 1965.

[2] *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* A survey of optimal recovery. In: Optimal Estimation in Approximation Theory (C. A. Micchelli and T. J. Rivlin, eds.). Plenum Press, New York, 1977, pp. 1–54.

[3] *Traub J. F., Woźniakowski H.* A General Theory of Optimal Algorithms. Academic Press, New York, 1980.

[4] *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* Lectures on Optimal Recovery. Lecture Notes in Math., Vol. 1129, Springer-Verlag, Berlin, 1985, pp. 21–93.

[5] *Арестов В. В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи. УМН, **51**. №6. 89–124 (1996).

[6] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным. Матем. заметки, **50**:6, 85–93 (1991).

[7] *Osipenko K. Yu.* Optimal Recovery of Analytic Functions, Nova Science Publ., Inc., Huntington, New York, 2000.

[8] *Melkman A. A., Micchelli C. A.* Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data. SIAM J. Numer. Anal., **16**. 87–105 (1979).

[9] *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* О неравенствах для производных колмогоровского типа. Матем. сб., **188**. №12. 73–106 (1997).

[10] *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ и его приложения. Эдиториал УРСС, М., 2003 (2-ое изд).

[11] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., Тихомиров В. М.* Оптимальное восстановление и теория экстремума. Докл. РАН., **379**. №2. 161–164 (2001).

[12] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью. Матем. сб., **193**. №3. 79–100 (2002).

[13] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных. Функц. анализ и его приложения, **137**. вып. 3. 51-64 (2003).

[14] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление значений функций и их производных по неточно заданному преобразованию Фурье. Матем. сб., **195**. №10. 67–82 (2004).

[15] *Стеин И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.

[16] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям. Матем. сб., (2009) (в печати).

Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет)
E-mail address: magaril@mirea.ru

"МАТИ" — Российский государственный технологический университет им. К. Э. Циолковского
E-mail address: kosipenko@yahoo.com