Е. О. Сивкова

Оптимальное восстановление дробных степеней разностного оператора Лапласа

В работе определяется понятие дробной степени разностного оператора Лапласа функции на d-мерной решетке и ставится задача об оптимальном восстановлении этой дробной степени по приближенной информации о самой функции. Построено семейство оптимальных методов восстановления.

Библиография: 11 названий.

Ключевые слова: разностный оператор Лапласа, оптимальное восстановление, оптимальный метод, преобразование Фурье, экстремальная задача.

§ 1. Постановка задачи

Пусть d — натуральное число, $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел и $h>0$. Обозначим через $l_2(\mathbb{Z}_h^d)$ пространство функций f, определенных на решетке

$$\mathbb{Z}_h^d=\{h(k_1,\dots,k_d): k=(k_1,\dots,k_d)\in\mathbb{Z}^d\}$$

с нормой

$$\|f\|_{l_2(\mathbb{Z}_h^d)}=\sqrt{h^d\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}f^2(hk)}\,.$$

Через $\mathbb{T}_h^d$ обозначаем d-мерный тор, который будем отождествлять с кубом $[-\pi/h,\pi/h]\times\ldots\times[-\pi/h,\pi/h]$ (d раз).

Так как $\mathbb{Z}_h^d$ — локально компактная абелева группа, то определено преобразование Фурье $F\colon l_2(\mathbb{Z}_h^d)\to L_2(\mathbb{T}_h^d)$, которое в данном случае действует по правилу

$$F[f](\xi)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}f(hk)e^{-i\langle\xi,\,hk\rangle},$$

где $\xi=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_d)$, $\xi_j\in[-\pi/h,\pi/h]$, $j=1,2,\dots,d$, и $\langle\xi,\,hk\rangle=\sum_{j=1}^d\xi_jhk_j$, и справедлива теорема Планшереля

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{T}_h^d}|F[f](\xi)|^2d\xi=h^d\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}f^2(hk).$$

Определим теперь разностный аналог оператора Лапласа на $\mathbb{R}^d$ и его дробные степени.

Вторая разделенная разность функции $f \in l_2(\mathbb{Z}_h^d)$, например по первой переменной, как нетрудно убедиться, имеет вид

$$\Delta^2_{k_1,\,h} f = \left\{ \frac{f((k_1+2)h, k_2h, \dots, k_dh) - 2f((k_1+1)h, k_2h, \dots, k_dh) + f(k_1h, k_2h, \dots, k_dh)}{h^2} \right\}_{k\in\mathbb{Z}}.$$

Аналогичные формулы справедливы и для остальных переменных. Легко проверить, что $\Delta^2_{k_j,\,h} f \in l_2(\mathbb{Z}_h^d)$, $j = 1, \dots, d$.

Оператор $\Delta_h\colon l_2(\mathbb{Z}_h^d) \to l_2(\mathbb{Z}_h^d)$, действующий по правилу

$$\Delta_h f = \sum_{j=1}^{d} \Delta^2_{k_j,\,h} f, \quad f \in l_2(\mathbb{Z}_h^d),$$

назовем *разностным оператором Лапласа с шагом* h.

Найдем преобразование Фурье функции $\Delta_h f$. Сначала найдем преобразование Фурье, например, функции $\Delta^2_{k_1,\,h} f$. Несложные вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} F[\Delta^2_{k_1,\,h} f] &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \frac{f((k_1+2)h, k_2h, \dots, k_dh) - 2f((k_1+1)h, k_2h, \dots, k_dh) + f(k_1h, k_2h, \dots, k_dh)}{h^2} e^{-i\langle \xi,\, hk\rangle} = \frac{e^{2i\xi_1 h}}{h^2} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f(k_1h, k_2h, \dots, k_dh) e^{-i\langle \xi, kh\rangle} \\ &- \frac{2e^{i\xi_1 h}}{h^2} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f(k_1h, k_2h, \dots, k_dh) e^{-i\langle \xi,\, hk\rangle} + \frac{1}{h^2} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f(k_1h, k_2h, \dots, k_dh) e^{-i\langle \xi,\, hk\rangle} \\ &= \frac{e^{2i\xi_1 h} - 2e^{i\xi_1 h} + 1}{h^2} F[f](\xi) = \frac{(1-e^{i\xi_1 h})^2}{h^2} F[f](\xi). \end{aligned}$$

Аналогично вычисляются $F[\Delta^2_{k_2,\,h} f]$, $\dots$, $F[\Delta^2_{k_d,\,h} f]$, и мы получаем, что

$$F[\Delta_h f](\xi) = \left(\frac{1}{h^2} \sum_{j=1}^{d} (1-e^{i\xi_j h})^2 \right) F[f](\xi).$$

Для краткости обозначим

$$\psi(\xi) = \frac{1}{h^2} \sum_{j=1}^{d} (1-e^{i\xi_j h})^2, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{T}_h^d.$$

Пусть $\alpha \geqslant 0$. Положим

$$(\psi(\xi))^{\alpha/2} = |\psi(\xi)|^{\alpha/2} e^{i(\alpha/2)\arg\psi(\xi)}, \quad -\pi < \arg\psi(\xi) \leqslant \pi.$$

Обозначим через $\Delta_h^{\alpha/2}$ оператор, сопоставляющий функции $f \in l_2(\mathbb{Z}_h^d)$ функцию $\Delta_h^{\alpha/2} f \in l_2(\mathbb{Z}_h^d)$, преобразование Фурье которой имеет вид

$$F[\Delta_h^{\alpha/2} f](\xi) = (\psi(\xi))^{\alpha/2}\, F[f](\xi). \tag{1.1}$$

Определение корректно, поскольку множитель перед $F[f](\xi)$ — ограниченная функция и значит, функция справа в (1.1) принадлежит $L_2(\mathbb{T}_h^d)$, а так как F — изоморфизм, то функция $\Delta_h^{\alpha/2}f$ определена однозначно.

Оператор $\Delta_h^{\alpha/2}$ назовем *$\alpha/2$-ой степенью разностного оператора Лапласа* Понятно, что при $\alpha = 2$ мы получаем разностный оператор Лапласа.

Перейдем к постановке задачи оптимального восстановления. Определим следующий класс функций

$$W_2^\alpha(\mathbb{Z}_h^d) = \{f \in l_2(\mathbb{Z}_h^d) : \|\Delta_h^{\alpha/2} f\|_{l_2(\mathbb{Z}_h^d)} \leqslant 1\}.$$

Мы предполагаем, что функции из этого класса известны приближенно. Точнее говоря, о каждой функции $f \in W_2^\alpha(\mathbb{Z}_h^d)$ известна функция $g \in l_2(\mathbb{Z}_h^d)$ такая, что

$$\|f - g\|_{l_2(\mathbb{Z}_h^d)} \leqslant \delta,$$

где $\delta > 0$.

По этой информации мы хотим восстановить (по возможности, наилучшим образом) $\beta/2$-ую степень разностного оператора Лапласа ($0 \leqslant \beta < \alpha$) на классе $W_2^\alpha(\mathbb{Z}_h^d)$.

Далее, для краткости, пишем W вместо $W_2^\alpha(\mathbb{Z}_h^d)$.

Любое отображение $m\colon l_2(\mathbb{Z}_h^d) \to l_2(\mathbb{Z}_h^d)$ рассматриваем как метод восстановления и погрешностью этого метода называем величину

$$e(\beta, W, \delta, m) = \sup_{\substack{f \in W,\ g \in l_2(\mathbb{Z}_h^d), \\ \|f-g\|_{l_2(\mathbb{Z}_h^d)} \leqslant \delta}} \|\Delta_h^{\beta/2} f - m(g)\|_{l_2(\mathbb{Z}_h^d)}.$$

Нас интересует величина

$$E(\beta, W, \delta) = \inf_{m\colon l_2(\mathbb{Z}_h^d) \to l_2(\mathbb{Z}_h^d)} e(\beta, W, \delta, m),$$

которая называется *погрешностью оптимального восстановления* и методы $\widehat{m}$, на которых нижняя грань достигается, называемые *оптимальными методоми восстановления.*

§ 2. Формулировка основного результата

Перед формулировкой теоремы введем некоторые обозначения. Пусть $0 < \beta < \alpha$ и $\delta > 0$. При $\delta \geqslant \left(\dfrac{h^2}{4d}\right)^{\alpha/2}$ обозначим

$$\xi^* = (\xi_1^*, \ldots, \xi_d^*) \in \mathbb{T}_h^d : \quad \xi_j^* = \frac{2}{h} \arcsin \frac{h}{2\sqrt{d}\delta^{1/\alpha}}\,, \quad j = 1, \ldots, d;$$

$$\lambda_1 = \frac{\alpha - \beta}{\alpha}\, \delta^{-\frac{2\beta}{\alpha}}, \qquad \lambda_2 = \frac{\beta}{\alpha}\, \delta^{\frac{2(\alpha-\beta)}{\alpha}}.$$

При $\delta < \left(\dfrac{h^2}{4d}\right)^{\alpha/2}$ обозначим

$$\xi^* \in \mathbb{T}^d : \quad \xi_j^* = \frac{\pi}{h}, \quad j = 1, \ldots, d, \quad \lambda_1 = \left(\frac{4d}{h^2}\right)^\beta, \quad \lambda_2 = 0.$$

Теорема 1. *Пусть $\delta > 0$ и $0 < \beta < \alpha$. Тогда*

1)
$$E(\beta, W, \delta) = \begin{cases} \delta^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha}}, & \delta \geqslant \left(\dfrac{h^2}{4d}\right)^{\alpha/2}; \\ \left(\dfrac{4d}{h^2}\right)^{\beta/2}\delta, & \delta < \left(\dfrac{h^2}{4d}\right)^{\alpha/2}. \end{cases}$$

2) *Если $\delta \geqslant \left(\dfrac{h^2}{4d}\right)^{\alpha/2}$, то для каждой функции $\omega(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{T}_h^d)$, для которой*

$$\frac{|\omega(\xi)|^2}{\lambda_1} + \frac{\left|(\psi(\xi))^{\beta/2} - \omega(\xi)\right|^2}{\lambda_2 \left|\psi(\xi)\right|^{\alpha}} \leqslant 1, \tag{2.1}$$

метод $\widehat{m}_\omega \colon l_2(\mathbb{Z}_h^d) \to l_2(\mathbb{Z}_h^d)$, действующий в образах Фурье по формуле

$$F\widehat{m}_\omega(g)(\xi) = \omega(\xi)F[g](\xi), \text{ для п. в. } \xi \in \mathbb{T}_h^d,$$

является оптимальным.

3) *Если $\delta < \left(\dfrac{h^2}{4d}\right)^{\alpha/2}$, то метод $\widehat{m} \colon l_2(\mathbb{Z}_h^d) \to l_2(\mathbb{Z}_h^d)$, действующий по правилу*

$$\widehat{m}(g) = \Delta_h^{\beta/2} g,$$

является оптимальным.

Решаемая в данной работе задача является разностным аналогом задачи оптимального восстановления дробных степеней обычного оператора Лапласа на $\mathbb{R}^d$ (см. [1], [2]). Тематика, связанная с оптимальным восстановлением линейных функционалов и операторов на классах множеств по приближенной информации об элементах этих множеств, активно развивается с 60-х годов прошлого века. Подход к изучению задач оптимального восстановления, основанный на методах теории экстремума и выпуклой двойственности, был выработан на семинаре В. М. Тихомирова "Теория приближений и теория экстремальных задач" в МГУ. Отметим здесь несколько работ, а именно, работы [3]–[8], где результаты получены на основе такого подхода. Определенный итог деятельности, связанный с задачами оптимальным восстановления подведен в книге [9]. Отметим еще работу [10], где решается задача оптимального восстановления разностных аналогов производных.

§ 3. Доказательство основного результата

Сначала докажем, что справедлива следующая оценка для погрешности оптимального восстановления:

$$E(\beta, W, \delta) \geqslant \sup_{f \in W,\ \|f\|_{l_2(\mathbb{Z}_h^d)} \leqslant \delta} \|\Delta^{\beta/2} f\|_{l_2(\mathbb{Z}_h^d)}. \tag{3.1}$$

Действительно, пусть $f_0 \in W$ и $\|f_0\|_{l_2(\mathbb{Z}_h^d)} \leqslant \delta$. Очевидно, функция $-f_0$ также удовлетворяет этим соотношениям, и тогда для любого $m\colon l_2(\mathbb{Z}_h^d) \to l_2(\mathbb{Z}_h^d)$

$$\begin{aligned}2\|\Delta^{\beta/2}f_0\|_{l_2(\mathbb{Z}_h^d)} &= \|\Delta^{\beta/2}f_0 - m(0) - (\Delta^{\beta/2}(-f_0) - m(0)\|_{l_2(\mathbb{Z}_h^d)} \\ &\leqslant 2 \sup_{\substack{f\in W,\\ \|f\|_{l_2(\mathbb{Z}_h^d)}\leqslant\delta}} \|\Delta^{\beta/2}f - m(0)\|_{l_2(\mathbb{Z}_h^d)} \\ &\leqslant 2 \sup_{\substack{f\in W,\ g\in l_2(\mathbb{Z}_h^d)\\ \|f-g)\|_{l_2(\mathbb{Z}_h^d)}\leqslant\delta}} \|\Delta^{\beta/2}f - m(g)\|_{l_2(\mathbb{Z}_h^d)} = 2e(\beta, W, \delta, m).\end{aligned}$$

Переходя слева к верхней грани по всем функциям f таким, что $f \in W$ и $\|f\|_{l_2(\mathbb{Z}_h^d)} \leqslant \delta$, приходим к неравенству

$$\sup_{\substack{f\in W,\\ \|f\|_{l_2(\mathbb{Z}_h^d)}\leqslant\delta}} \|\Delta^{\beta/2}f\|_{l_2(\mathbb{Z}_h^d)} \leqslant e(\beta, W, \delta, m).$$

Метод m был выбран произвольно и поэтому переходя справа к нижней грани по всем методам m, получаем соотношение (3.1).

Величина справа в (3.1) есть значение следующей экстремальной задачи

$$\|\Delta^{\beta/2}f\|_{l_2(\mathbb{Z}_h^d)} \to \max, \quad \|f\|_{l_2(\mathbb{Z}_h^d)} \leqslant \delta, \quad \|\Delta^{\alpha/2}f\|_{l_2(\mathbb{Z}_h^d)} \leqslant 1, \tag{3.2}$$

т. е. точная верхняя грань максимизируемого функционала при данных ограничениях.

Согласно определению дробной степени разностного оператора Лапласа и теореме Планшереля, квадрат значения задачи (3.2) равен значению такой задачи

$$\begin{gathered}\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{T}_h^d} |\psi(\xi)|^\beta\, |F[f](\xi)|^2\, d\xi \to \max, \\ \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{T}_h^d} |F[f](\xi)|^2\, d\xi \leqslant \delta^2, \\ \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{T}_h^d} |\psi(\xi)|^\alpha\, |F[f](\xi)|^2\, d\xi \leqslant 1.\end{gathered} \tag{3.3}$$

Эту задачу можно рассматривать как задачу на множестве конечных положительных мер вида $d\mu_f(E) = (2\pi)^{-d}\int_E |F[f](\xi)|^2\, d\xi$ на σ-алгебре Σ измеримых по Лебегу подмножеств $\mathbb{T}_h^d$, когда f пробегает все допустимые функции. Но удобно рассмотреть ее расширенный вариант, когда переменными являются все конечные положительные меры на Σ:

$$\int\limits_{\mathbb{T}_h^d} |\psi(\xi)|^\beta \, d\mu(\xi) \to \max,$$

$$\int\limits_{\mathbb{T}_h^d} d\mu(\xi) \leqslant \delta^2, \quad \int\limits_{\mathbb{T}_h^d} |\psi(\xi)|^\alpha \, d\mu(\xi) \leqslant 1, \quad d\mu(\cdot) \geqslant 0. \quad (3.4)$$

Значение этой задачи, очевидно, не меньше значения задачи (3.3).

Задача (3.4) — это выпуклая задача на линейном пространстве всех конечных мер на Σ. Теорема Каруша–Куна–Таккера (см. [11]) дает необходимые и достаточные условия максимума для таких задач. Используя данную теорему, можно найти решение задачи (3.4). Это будет δ-функция Дирака в точке ξ^*, определенной перед формулировкой теоремы. Далее можно построить последовательность функций φ_n, допустимых в задаче (3.3), преобразования Фурье которых аппроксимируют данную δ-функцию. Ясно, что значение максимизируемого функционала на каждой функции φ_n в задаче (3.3) не больше значения самой задачи. Переходя к пределу при $n \to \infty$, мы получаем оценку снизу для значения задачи (3.3), а тем самым и для задачи (3.2). Следовательно, в силу (3.1), получена оценка снизу для погрешности оптимального восстановления. Эта оценка оказывается точной. Опуская довольно-таки рутинные построения, связанные с применением теоремы Каруша–Куна–Таккера, мы сразу предъявим последовательность функций, дающую нужную оценку снизу для погрешности оптимального восстановления.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\square_n$ куб, образованный векторами $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d) \in \mathbb{T}_h^d$, для которых $\xi_j^* - 1/n \leqslant \xi_j \leqslant \xi_j^*$, $j = 1, \ldots, d$. Очевидно, что $\square_n \subset \mathbb{T}_h^d$ при достаточно больших n. Рассмотрим последовательность функций, $\varphi_n \in l_2(\mathbb{Z}_h^d)$, $n \in \mathbb{N}$, таких, что их преобразования Фурье имеют вид

$$F[\varphi_n](\xi) = \begin{cases} \delta(2\pi n)^{d/2}, & \xi \in \square_n, \\ 0, & \xi \notin \square_n. \end{cases}$$

Ясно, что $F[\varphi_n](\cdot) \in L_2(\mathbb{T}_h^d)$ и поэтому функции φ_n определены корректно. Покажем, что они допустимы в задаче (3).

По определению φ_n:

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{T}_h^d} |F[\varphi_n](\xi)|^2 \, d\xi = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\square_n} |\delta(2\pi n)^{d/2}|^2 \, d\xi = \delta^2 n^d \int\limits_{\square_n} d\xi = \delta^2.$$

Далее, для всех $\xi \in \Box_n$, учитывая выражения для ξ_j^*, $j = 1, \ldots, d$, имеем

$$|\psi(\xi)| \leqslant \frac{1}{h^2}\sum_{j=1}^{d}|1 - e^{i\xi_j h}|^2 = \frac{1}{h^2}\sum_{j=1}^{d}((1-\cos\xi_j h)^2 + \sin^2\xi_j h)$$

$$= \frac{1}{h^2}\sum_{j=1}^{d}4\sin^2\frac{\xi_j h}{2} \leqslant \frac{1}{h^2}\sum_{j=1}^{d}4\sin^2\frac{\xi_j^* h}{2} = \begin{cases} \delta^{-2/\alpha}, & \delta \geqslant \left(\dfrac{h^2}{4d}\right)^{\alpha/2}, \\ \dfrac{4d}{h^2}, & \delta < \left(\dfrac{h^2}{4d}\right)^{\alpha/2}, \end{cases} \tag{3.5}$$

откуда получаем, что

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{T}_h^d}|\psi(\xi)|^\alpha\,|F[\varphi_n](\xi)|^2\,d\xi = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\Box_n}|\psi(\xi)|^\alpha\,(\delta(2\pi n)^{d/2})^2\,d\xi$$

$$= \delta^2 n^d\int\limits_{\Box_n}|\psi(\xi)|^\alpha\,d\xi \leqslant \begin{cases} n^d\int\limits_{\Box_n}d\xi = 1, & \delta \geqslant \left(\dfrac{h^2}{4d}\right)^{\alpha/2}, \\ \left(\dfrac{4d}{h^2}\right)^\alpha\delta^2 n^d\int\limits_{\Box_n}d\xi < 1, & \delta < \left(\dfrac{h^2}{4d}\right)^{\alpha/2}, \end{cases}$$

и таким образом, последовательность φ_n допустима в задаче (3.3).

Оценим теперь значение максимизируемого функционала в (3.3) на функциях φ_n.

Заметим сначала, что если $a_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, d$, то справедливо очевидное неравенство

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_d \geqslant d\min\{a_1,\, a_2, \ldots, a_d\},$$

из которого следует такое неравенство

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_d)^2 \geqslant d^2\min\{a_1^2,\, a_2^2, \ldots, a_d^2\}, \tag{3.6}$$

справедливое для a_i одного знака.

Пусть $\xi \in \Box_n \subset \mathbb{T}_h^d$. Нетрудно видеть, что при достаточно больших n выражения

$$(1-\cos\xi_j h)\sin\xi_j h, \quad j = 1, \ldots, d,$$

одного знака, а также одного знака и выражения

$$(1-\cos\xi_j h)^2 - \sin^2\xi_j h, \quad j = 1, \ldots, d.$$

Применяя неравенство (3.6) к суммам

$$\sum_{j=1}^{d}((1-\cos\xi_j h)^2 - \sin^2\xi_j h), \quad \sum_{j=1}^{d}2(1-\cos\xi_j h)\sin\xi_j h,$$

будем иметь

$$
\begin{aligned}
|\psi(\xi)|^2 &= \frac{1}{h^4}\left|\sum_{j=1}^{d}((1-\cos\xi_j h)^2-\sin^2\xi_j h)-2i\sum_{j=1}^{d}(1-\cos\xi_j h)\sin\xi_j h\right|^2\\
&= \frac{1}{h^4}\left(\sum_{j=1}^{d}((1-\cos\xi_j h)^2-\sin^2\xi_j h)\right)^2+\frac{1}{h^4}\left(\sum_{j=1}^{d}2(1-\cos\xi_j h)\sin\xi_j h\right)^2\\
&\geqslant \frac{d^2}{h^4}\Big(\min(((1-\cos\xi_1 h)^2-\sin^2\xi_1 h)^2,\dots,((1-\cos\xi_d h)^2-\sin^2\xi_d h)^2)\\
&\qquad\qquad +4\min((1-\cos\xi_1 h)^2\sin^2\xi_1 h,\dots,(1-\cos\xi_d h)^2\sin^2\xi_d h)\Big)
\end{aligned}
$$

Обозначим через $K(\xi)$, $\xi\in\square_n$, функцию в скобках в правой части неравенства. Очевидно, что эта функция непрерывна. Тогда, по теореме о среднем для интегралов, имеем

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{T}_h^d}|\psi(\xi)|^\beta\,|F[\varphi_n](\xi)|^2\,d\xi &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\square_n}|\psi(\xi)|^\beta\,(\delta(2\pi n)^{d/2})^2\,d\xi\\
&\geqslant \frac{\delta^2 n^d d^\beta}{h^{2\beta}}\int\limits_{\square_n}(K(\xi))^{\beta/2}\,d\xi=\frac{\delta^2 d^\beta}{h^{2\beta}}(K(\xi_0))^{\beta/2},
\end{aligned}
$$

где $\xi_0\in\square_n$. Ясно, что $K(\xi_0)$ при $n\to\infty$ стремится к величине

$$
K(\xi^*)=(1-\cos\xi_\delta^* h)^2-\sin^2\xi_\delta^* h)^2+4(1-\cos\xi_\delta^* h)^2\sin^2\xi_\delta^* h,
$$

где ξ_δ^* — значение при данном δ равных друг другу координат вектора ξ^*, определенного перед формулировкой теоремы. Таким образом,

$$
\frac{\delta^2 d^\beta}{h^{2\beta}}(K(\xi^*))^{\beta/2}=\frac{\delta^2 d^\beta}{h^{2\beta}}\left(4\sin^2\frac{\xi_\delta^* h}{2}\right)^\beta=\begin{cases}\delta^{\frac{2(\alpha-\beta)}{\alpha}}, & \delta\geqslant\left(\dfrac{h^2}{4d}\right)^{\alpha/2};\\[2ex] \left(\dfrac{4d}{h^2}\right)^\beta\delta^2, & \delta<\left(\dfrac{h^2}{4d}\right)^{\alpha/2}.\end{cases}
$$

Итак, значение задачи (3.3) не меньше величины справа в этом равенстве и значит, для погрешности оптимального восстановления получена следующая оценка

$$
E(\beta,W,\delta)\geqslant\begin{cases}\delta^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha}}, & \delta\geqslant\left(\dfrac{h^2}{4d}\right)^{\alpha/2};\\[2ex] \left(\dfrac{4d}{h^2}\right)^{\frac{\beta}{2}}\delta, & \delta<\left(\dfrac{h^2}{4d}\right)^{\alpha/2}.\end{cases}\tag{3.7}
$$

Теперь докажем оценку сверху для погрешности оптимального восстановления и оптимальность указанных в теореме методов восстановления.

Сначала рассмотрим случай $\delta \geqslant \left(\dfrac{h^2}{4d}\right)^{\alpha/2}$. Пусть числа λ_1 и λ_2, определенные перед формулировкой теоремы, соответствуют этому случаю. Докажем, что множество функций $\omega(\cdot)$, удовлетворяющих неравенству (2.1) не пусто.

На отрезке $[0, 4d/h^2]$ определим функцию $h(\cdot)$ по правилу

$$h(t) = -t^\beta + \lambda_1 + \lambda_2 t^\alpha.$$

Нетрудно проверить, что $h(\cdot)$ неотрицательна на этом отрезке.

Модуль функции $\psi(\cdot)$ свои значения принимает из отрезка $[0, 4d/h^2]$. Действительно,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant |\psi(\xi)| \leqslant \frac{1}{h^2}\sum_{j=1}^{d}|1-e^{i\xi_j h}|^2 = \frac{1}{h^2}\sum_{j=1}^{d}((1-\cos\xi_j h)^2 + \sin^2\xi_j h) \\ = \frac{1}{h^2}\sum_{j=1}^{d}4\sin^2\frac{\xi_j h}{2} \leqslant \frac{1}{h^2}\sum_{j=1}^{d}4\sin^2\frac{\pi}{2} = \frac{4d}{h^2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$-|\psi(\xi)|^\beta + \lambda_1 + \lambda_2|\psi(\xi)|^\alpha \geqslant 0, \ \ \forall\, \xi \in \mathbb{T}_h^d.$$

Выделяя полный квадрат, несложно проверить, что это неравенство (2.1) равносильно следующему соотношению

$$\left|\omega(\xi) - \frac{\lambda_1(\psi(\xi))^{\beta/2}}{\lambda_1+\lambda_2|\psi(\xi)|^\alpha}\right| \leqslant \frac{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\,|\psi(\xi)|^{\alpha/2}}{\lambda_1+\lambda_2\,|\psi(\xi)|^\alpha}\sqrt{\lambda_1+\lambda_2\,|\psi(\xi)|^\alpha - |\psi(\xi)|^\beta}$$

для п. в. $\xi \in \mathbb{T}_h^d$, причем, как показано выше, выражение под знаком корня неотрицательно. Отсюда, очевидно, следует, что множество функций $\omega(\cdot)$, удовлетворяющих неравенству (2.1), не пусто.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству оценки сверху для погрешности оптимального восстановления и доказательству оптимальности методов, указанных в теореме.

Пусть функция $\omega(\cdot)$ удовлетворяет неравенству (2.1). Оценим погрешность метода $\widehat{m}_\omega$. По определению, погрешность этого метода равна значению следующей задачи

$$\|\Delta^{\beta/2}f - \widehat{m}_\omega(g)\|_{l_2(\mathbb{Z}_h^d)} \to \max,$$
$$\|f-g\|_{l_2(\mathbb{Z}_h^d)} \leqslant \delta, \quad \|\Delta^{\alpha/2}f\|_{l_2(\mathbb{Z}_h^d)} \leqslant 1, \quad g \in l_2(\mathbb{Z}_h^d).$$

Переходя к образам Фурье, получим по теореме Планшереля, что квадрат значения этой равен значению такой задачи

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{T}_h^d}\left|(\psi(\xi))^{\beta/2}\,F[f](\xi)-\omega(\xi)F[g](\xi)\right|^2\,d\xi\to\max,$$

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{T}_h^d}|F[f](\xi)-F[g](\xi)|^2\,d\xi\leqslant\delta^2,$$

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{T}_h^d}|\psi(\xi)|^\alpha\,|F[f](\xi)|^2\,d\xi\leqslant 1,\quad g\in l_2(\mathbb{Z}_h^d).\quad(3.8)$$

Пусть сначала $\delta\geqslant\left(\frac{h^2}{4d}\right)^{\alpha/2}$. Оценим выражение под знаком интеграла в максимизируемом функционале в (3.8). Пусть λ_1 и λ_2 — те, что определены перед формулировкой теоремы для этого случая. Имеем по неравенству Коши–Буняковского

$$\begin{aligned}&|(\psi(\xi))^{\beta/2}F[f](\xi)-\omega(\xi)F[g](\xi)|^2\\&=|(\psi(\xi))^{\beta/2}F[f](\xi)-\omega(\xi)F[f](\xi)+\omega(\xi)F[f](\xi)-\omega(\xi)F[g](\xi)|^2\\&=|\omega(\xi)(F[f](\xi)-F[g](\xi))+F[f](\xi)((\psi(\xi))^{\beta/2}-\omega(\xi))|^2\\&=\left|\frac{\omega(\xi)}{\sqrt{\lambda_1}}\sqrt{\lambda_1}(F[f](\xi)-F[g](\xi))+\frac{(\psi(\xi))^{\beta/2}-\omega(\xi)}{\sqrt{\lambda_2}((\psi(\xi))^{\alpha/2}}\sqrt{\lambda_2}(\psi(\xi))^{\alpha/2}F[f](\xi)\right|^2\\&\leqslant\left(\frac{|\omega(\xi)|^2}{\lambda_1}+\frac{|(\psi(\xi))^{\beta/2}-\omega(\xi)|^2}{\lambda_2|\psi(\xi)|^\alpha}\right)\left(\lambda_1|F[f](\xi)-F[g](\xi)|^2+\lambda_2|\psi(\xi)|^\alpha|F[f](\xi)|^2\right)\\&\leqslant\left(\lambda_1|F[f](\xi)-F[g](\xi)|^2+\lambda_2|\psi(\xi)|^\alpha|F[f](\xi)|^2\right)\end{aligned}$$

Интегрируя это неравенство, получим, что максимизируемый функционал в задаче (3.8) не превосходит величины

$$\lambda_1\delta^2+\lambda_2=\delta^{\frac{2(\alpha-\beta)}{\alpha}}$$

и значит,

$$e(\beta,W,\delta,\widehat{m}_\omega)\leqslant\delta^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha}}.$$

Отсюда и из оценки (3.7) следует, что

$$\delta^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha}}\geqslant e(\beta,W,\delta,\widehat{m}_\omega)\geqslant E(\beta,W,\delta)\geqslant\delta^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha}}$$

и значит, если $\delta\geqslant\left(\frac{h^2}{4d}\right)^{\alpha/2}$, то $\widehat{m}_\omega$ — оптимальный метод и получена нужная оценка сверху для погрешности оптимального восстановления.

Пусть теперь $\delta < \left(\frac{h^2}{4d}\right)^{\alpha/2}$. Оценим погрешность метода $\widehat{m}$. В этом случае оценка выражения под знаком интеграла в максимизируемом функционале задачи (3.8), учитывая (3.5), имеет вид

$$\left|(\psi(\xi))^{\beta/2} F[f](\xi) - (\psi(\xi))^{\beta/2} F[g](\xi)\right|^2$$
$$= |\psi(\xi)|^\beta |F[f](\xi) - F[g](\xi)|^2 \leqslant \left(\frac{4d}{h^2}\right)^\beta |F[f](\xi) - F[g](\xi)|^2,$$

откуда

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{T}_h^d} \left|(\psi(\xi))^{\beta/2} F[f](\xi) - (\psi(\xi))^{\beta/2} F[g](\xi)\right|^2 d\xi$$
$$\leqslant \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{T}_h^d} \left(\frac{4d}{h^2}\right)^\beta |F[f](\xi) - F[g](\xi)|^2 d\xi \leqslant \left(\frac{4d}{h^2}\right)^\beta \delta^2.$$

Следовательно, с учетом оценки (6) для случая $\delta < \left(\frac{h^2}{4d}\right)^{\alpha/2}$, получаем, что метод $\widehat{m}$ оптимален и справедливо выражение для погрешности оптимального восстановления, указанное в теореме. Теорема доказана.

Следствие 1. Для всех $f \in l_2(\mathbb{Z}_h^d)$, таких, что

$$\|f\|_{l_2(\mathbb{Z}_h^d)} \geqslant \left(\frac{h^2}{4d}\right)^{\alpha/2} \|\Delta_h^{\alpha/2} f\|_{l_2(\mathbb{Z}_h^d)} \tag{3.9}$$

справедливо точное неравенство

$$\|\Delta_h^{\beta/2} f\|_{l_2(\mathbb{Z}_h^d)} \leqslant \|f\|_{l_2(\mathbb{Z}_h^d)}^{1-\frac{\beta}{\alpha}} \|\Delta_h^{\alpha/2} f\|_{l_2(\mathbb{Z}_h^d)}^{\frac{\beta}{\alpha}}. \tag{3.10}$$

Для всех $f \in l_2(\mathbb{Z}_h^d)$, таких, что

$$\|f\|_{l_2(\mathbb{Z}_h^d)} \leqslant \left(\frac{h^2}{4d}\right)^{\alpha/2} \|\Delta_h^{\alpha/2} f\|_{l_2(\mathbb{Z}_h^d)}$$

справедливо точное неравенство

$$\|\Delta_h^{\beta/2} f\|_{l_2(\mathbb{Z}_h^d)} \leqslant \left(\frac{4d}{h^2}\right)^{\beta/2} \|f\|_{l_2(\mathbb{Z}_h^d)}. \tag{3.11}$$

Доказательство. Докажем неравенство (3.10). Пусть функция $f \in l_2(\mathbb{Z}_h^d)$ такова, что выполнено (3.9). Ясно, что функция $f_1 = \|\Delta_h^{\alpha/2} f\|_{l_2(\mathbb{Z}_h^d)}^{-1} f$ допустима в задаче (3.2) с

$$\delta = \frac{\|f\|_{l_2(\mathbb{Z}_h^d)}}{\|\Delta_h^{\alpha/2} f\|_{l_2(\mathbb{Z}_h^d)}}. \tag{3.12}$$

Значение максимизируемого функционала в задаче (3.2) на этой функции не больше значения самой задачи, равного величине погрешности оптимального восстановления. Так как $\delta \geqslant \left(h^2/4d\right)^{\alpha/2}$ в силу (3.9), то значение максимизируемого функционала на f_1 не больше $\delta^{(\alpha-\beta)/\alpha}$, т .е.

$$\frac{\|\Delta_h^{\beta/2} f\|_{l_2(\mathbb{Z}_h^d)}}{\|\Delta_h^{\alpha/2} f\|_{l_2(\mathbb{Z}_h^d)}} \leqslant \delta^{(\alpha-\beta)/\alpha}.$$

Подставляя сюда выражение для δ из (3.12), получаем неравенство (3.10).

Неравенство (3.11) доказывается аналогично. Следствие доказано.

Список литературы

[1] Г. Г. Магарил-Ильяев, Е. О. Сивкова, “Наилучшее восстановление оператора Лапласа функции по ее неточно заданному спектру”, *Матем сб.*, **203**:4 (2012), 119-–130.

[2] Е. О. Сивкова, “Наилучшее восстановление лапласиана функции и точные неравенства”, *Фундамент. и прикл. матем*, **18**:5 (2013), 175-–185.

[3] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, В. М. Тихомиров, “Оптимальное восстановление и теория экстремума”, *Докл. РАН*, **379**:2 (2001), 161–164.

[4] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных”, *Функц. анализ и его прил.*, **37**:3 (2003), 51–64.

[5] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям”, *Матем сб.*, **200**:5 (2009), 37-–54.

[6] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Об оптимальном гармоничнском синтезе по неточно заданному спектру”, *Функц. анализ и его прил.*, **44**:3 (2010), 76–79.

[7] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “О наилучших методах восстаовления производных на соболевских классах”, *Изв. РАН Сер. матем.*, **78**:6 (2014), 83–102.

[8] Г. Г. Магарил-Ильяев, Е. О. Сивкова, “О наилучшем восстановлении семейства операторов на многообразии $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m$”, *Труды МИАН*, **323** (2023), 196-–203.

[9] К. Ю. Осипенко, *Введение в теорию оптимльного восстановления*, Лань, Санкт-Петербург, 2022.

[10] С. А. Унучек, “Восстановление операторов разделенной разности неточно заданной последовательности по ее преобразованию Фурье”, *Владекавк. матем. журн.*, **323** (2018), 196-–203.

[11] Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, *Выпуклый анализ и его приложения*, ЛЕНАНД, М. Изд. 5-ое, доп., 2020.

Е. О. Сивкова (E. O. Sivkova)
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
Национальный исследовательский университет «МЭИ»
E-mail: e.o.sivkova@mail.ru