ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ»

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Международная научная конференция
«XII Белорусская математическая конференция»

Материалы конференции

Часть 1

Вещественный и комплексный анализ
Функциональный анализ и операторные уравнения
Геометрия и топология

МИНСК 2016

УДК 51
ББК 22.1
Д15

Редактор *С. Г. Красовский*

Конференция проводится при финансовой поддержке
Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований

XII Белорусская математическая конференция: материалы Междунар. науч.
Д 15 конф. Минск, 5 – 10 сентября 2016 г. В 5 ч. / Ред. С. Г. Красовский. — Часть 1. — Мн.:
Институт математики НАН Беларуси, 2016. — 90 с.

ISBN 987-985-6499-91-6 (Часть 1)
ISBN 978-985-6499-90-9

Сборник содержит доклады, представленные на XII Белорусской математической конференции по следующим направлениям: вещественный и комплексный анализ, функциональный анализ и операторные уравнения, геометрия и топология.

ISBN 987-985-6499-91-6 (Часть 1)
ISBN 978-985-6499-90-9

ВЕЩЕСТВЕННЫЙ И КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

Е.В. Абрамова

Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва, Россия
el.v.abramova@gmail.com

Рассматривается задача о наилучшем восстановлении решения задачи Дирихле для верхней полуплоскости на прямой, параллельной оси абсцисс в метрике L_2 по неточно заданному преобразованию Фурье граничной функции, определенной на оси абсцисс.

Пусть r — натуральное число. Обозначим через $W_2^r(\mathbb{R})$ соболевский класс функций на прямой:

$$W_2^r(\mathbb{R}) = \{f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}) : f^{(r-1)}(\cdot) \in LAC(\mathbb{R}), \quad \|f^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant 1\},$$

где $LAC(\mathbb{R})$ обозначает множество функций на $\mathbb{R}$, абсолютно непрерывных на каждом конечном отрезке.

Пусть Δ — оператор Лапласа на плоскости $\mathbb{R}^2$ и $f(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{R})$. Рассмотрим задачу Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad y > 0, \\ u(\cdot, 0) = f(\cdot). \end{cases}$$

Пусть $Y > 0$. Ставится задача о наилучшем восстановлении функции $u(\cdot, Y)$ — решении задачи Дирихле на прямой $y = Y$ — по следующей информации: на отрезке $[-\sigma, \sigma]$, $\sigma > 0$ известно преобразование Фурье $F[f](\cdot)$ функции $f(\cdot)$ приближенно в метрике $L_2([-\sigma,\sigma])$, т. е. известна функция $g(\cdot) \in L_2([-\sigma,\sigma])$ такая, что $\|F[f](\cdot) - g(\cdot)\|_{L_2([-\sigma,\sigma])} \leqslant \delta$, где $\delta \geqslant 0$.

Задача оптимального восстановления $u(\cdot, Y)$ по указанной информации понимается следующим образом. Любое отображение $m : L_2([-\sigma, \sigma]) \to L_2(\mathbb{R})$ назывется *методом восстановления*, а величина

$$e(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma, m) = \sup_{\substack{f(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{R}),\ g(\cdot) \in L_2([-\sigma,\sigma]) \\ \|F[f](\cdot) - g(\cdot)\|_{L_2([-\sigma,\sigma])} \leqslant \delta}} \|u(\cdot, Y) - m(g(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}$$

— *погрешностью метода* m.

Нас интересует метод, на котором погрешность принимает минимальное значение. Точнее говоря, нас интересует величина

$$E(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma) = \inf_{m : L_2[-\sigma,\sigma] \to L_2(\mathbb{R})} e(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma, m),$$

которая называется *погрешностью оптимального восстановления* и те методы $\widehat{m}$, на которых нижняя грань достигается, т. е.

$$E(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma) = e(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma, \widehat{m}).$$

Такие методы мы называем *оптимальными методами восстановления*.

Теорема. *Пусть* $\sigma > 0$, $Y > 0$ *и* $\delta \geqslant 0$. *Тогда*

$$E(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma) = \left(\frac{\delta^2}{2\pi} + \frac{e^{-2Y\sigma}}{\sigma^{2r}}\right)^{1/2}.$$

Линейный непрерывный оператор $\Lambda_a: L_2([-\sigma, \sigma]) \to L_2(\mathbb{R})$, *действующий в образах Фурье по правилу* $F[\Lambda_a g(\cdot)](\xi) = a(\xi) g(\xi) e^{-Y|\xi|}$, *где* $a(\cdot)$ *— измеримая функция на* $\mathbb{R}$ *такая, что для п. в.* $\xi \in [-\sigma, \sigma]$:

$$\left|a(\xi) - \frac{1}{1 + e^{-2Y\sigma}(\xi/\sigma)^{2r}}\right|^2 \leqslant \frac{e^{-2Y\sigma}(\xi/\sigma)^{2r}}{(1 + e^{-2Y\sigma}(\xi/\sigma)^{2r})^2}(e^{2Y|\xi|}(1 + e^{-2Y\sigma}(\xi/\sigma)^{2r}) - 1) \text{ при } \delta > 0$$

и

$$|a(\xi) - 1| \leqslant (\xi/\sigma)^r e^{-Y\sigma} \text{ при } \delta = 0$$

является оптимальным методом.

Приведем примеры оптимальных методов.

1. Пусть $\delta > 0$. Легко видеть, что функция $a(\xi) = 1/(1 + (\xi/\sigma)^{2r} e^{-2Y\sigma})$, $\xi \in [-\sigma, \sigma]$ и $a(\xi) = 0$, если $\xi \notin [-\sigma, \sigma]$, удовлетворяет условиям теоремы. Тогда следующий метод будет оптимальным:

$$(\Lambda_a g(\cdot))(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \frac{e^{-Y|\xi|} \cdot g(\xi)}{1 + (\xi/\sigma)^{2r} \cdot e^{-2Y\sigma}} e^{i\xi x}\, d\xi,$$

где функция $\xi \mapsto \dfrac{1}{1 + (\xi/\sigma)^{2r} \cdot e^{-2Y\sigma}}$ играет роль сглаживающего множителя.

2. Пусть $\delta = 0$. Функция $a(\xi) = 1$, $\xi \in [\sigma, \sigma]$ и $a(\xi) = 0$, если $\xi \notin [-\sigma, \sigma]$, очевидно, удовлетворяет требованиям теоремы. Соответствующий оптимальный метод имеет вид

$$(\Lambda_a g(\cdot))(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} e^{-Y|\xi|} g(\xi) e^{i\xi x}\, d\xi.$$

Литература

1. Марчук А. Г., Осипенко К. Ю. *Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек* // Мат. заметки. 1975. Т. 17, № 3. С. 359–368.
2. Micchelli C. A., Rivlin T. J. *Lectures on Optimal Recovery.* Lecture Notes in Mathematics. 1129. Springer-Verlag. Berlin, 1985. P. 21–93.
3. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. *Оптимальное восстановление функций и их произаодных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных* // Функц. анализ и его прилож. 2003. Т. 37. С. 51–64.
4. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. *О восстановлении операторов сверточного типа по неточной информации* // Тр. МИАН. 2010. Т. 269. С. 181–192.

АППРОКСИМАЦИЯ ЛУЗИНА ДЛЯ КЛАССОВ СОБОЛЕВА НА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ С МЕРОЙ ПРИ $p > 0$

С.А. Бондарев, В.Г. Кротов

Белгосуниверситет, механико-математический факультет, Минск, Беларусь
bsa0393@gmail.com, krotov@bsu.by

Пусть (X, d, μ) — метрическое пространство с метрикой d и борелевской мерой μ, удовлетворяющей уловию γ-удвоения: для некоторой постоянной $a_\mu > 0$ и $0 < r <$

$< R$ выполнено неравенство $\mu(B(x,R)) \leqslant a_\mu (R/r)^\gamma \mu(B(x,r))$. Здесь $B(x,r) = \{y \in \in X : d(x,y) < r\}$ означает шар радиуса $r > 0$ с центром в точке $x \in X$.

Если f — измеримая функция на X и $\alpha > 0$, то $D_\alpha[f]$ обозначает класс всех измеримых функций со свойством: существует такое подмножество $E \subset X$, что $\mu(E) = 0$ и

$$|f(x) - f(y)| \leqslant [d(x,y)]^\alpha [g(x) + g(y)], \quad x, y \in X \setminus E.$$

Для $\alpha, p > 0$ введем классы Хайлаша — Соболева

$$M^p_\alpha(X) = \{f \in L^p(X) : L^p(X) \cap D_\alpha[f] \neq \varnothing\}.$$

$H_\beta(X)$ обозначает обычные классы Гельдера порядка $\beta > 0$.

Теорема. *Пусть* $0 < \beta \leqslant \alpha \leqslant 1$, $0 < p < \gamma/\alpha$ *и задана функция* $f \in M^p_\alpha(X)$. *Пусть также задана внешняя мера* ν, *удовлетворяющая условию*

$$\nu(B) \leqslant c_\nu \mu(B) r_B^{-(\alpha-\beta)p} \quad \text{для всех шаров } B \subset X, \quad r_B \leqslant 1.$$

Тогда для $\varepsilon > 0$ *существуют такие функция* f_ε *и открытое множество* $O \subset X$, *что*: 1) $\nu(O) < \varepsilon$; 2) $f = f_\varepsilon$ *на* $X \setminus O$; 3) $f_\varepsilon \in M^p_\alpha(X)$ *и* $f_\varepsilon \in H_\beta(B)$ *для любого шара* $B \subset X$; 4) $\|f - f_\varepsilon\|_{M^p_\alpha(X)} < \varepsilon$.

В качестве примеров внешней меры в теореме, можно взять емкости

$$\mathrm{Cap}_{\alpha-\beta,p}(E) = \inf\{\|f\|^p_{M^p_{\alpha-\beta}(X)} : f \in M^p_{\alpha-\beta}(X), \quad f \geqslant 1 \text{ в окрестности } E \subset X\},$$

а также классическую и модифицированную (h,R)-вместимости Хаусдорфа

$$H^h_R(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^\infty h(r_i) : E \subset \bigcup_{i=1}^\infty B(x_i, r_i), \quad r_i < R\right\}, \quad h(t) = t^{\gamma-(\alpha-\beta)p},$$

$$\mathcal{H}^h_R(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^\infty \frac{\mu(B(x_i,r_i))}{h(r_i)} : E \subset \bigcup_{i=1}^\infty B(x_i, r_i), \quad r_i < R\right\}, \quad h(t) = t^{(\alpha-\beta)p},$$

соответственно (inf берется по всевозможным покрытиям множества E счетными семействами шаров).

Историю вопроса и различные частные случаи см. в [1–3].

Литература

1. Кротов В. Г., Прохорович М. А. *Аппроксимация Лузина функций из классов* W^p_α *на метрических пространствах с мерой* // Изв. вузов. Математика. 2008. № 5. С. 55–66.

2. Kinnunen J., Tuominen H. *Pointwise behaviour of* $M^{1,1}$ *Sobolev functions* // Math. Zeit. 2007. Vol. 257, no. 3. P. 613–630.

3. Heikkinen T., Tuominen H. *Approximation by Hölder functions in Besov and Triebel-Lizorkin spaces* // arXiv:math.FA/ 1504.02585.

ОПЕРАТОРЫ ВЗВЕШЕННОГО ДРОБНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ В ПРЯМЫХ СУММАХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

И.Л. Васильев, Н.В. Жуковская

Белгосуниверситет, механико-математический факультет, Минск, Беларусь
Zhukouskaya@bsu.by, vassilyev@bsu.by

Введем следующие пространства аналитических функций:

$$\mathrm{PS}_p = \left\{f(x) = \sum_{n=0}^\infty c_n x^n, \quad x \in (0,1), \quad \{c_n\} \in l_p, \quad 1 \leqslant p \leqslant +\infty\right\},$$

$$\mathrm{PS}_p\{x^\mu \ln^\nu x\} = \{f(x) = x^\mu \ln^\nu x \widetilde{f}(x), \quad \widetilde{f}(x) \in \mathrm{PS}_p\}$$

и оператор взвешенного дробного интегрирования:

$$(\mathrm{K}^\gamma \varphi)(x) = \frac{1}{x^\alpha}(\mathrm{I}^\alpha_+ \varphi)(x) = \frac{1}{x^\alpha \Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad \alpha > 0.$$

Пространство PS_p банахово с нормой

$$\|f\|_{\mathrm{PS}_p} = \|\{c_n\}\|_{l_p} = \left\{\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^p\right\}^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < +\infty,$$

$$\|f\|_{\mathrm{PS}_\infty} = \|\{c_n\}\|_{l_\infty} = \sup_n |c_n|, \quad p = +\infty.$$

Пространство $\mathrm{PS}_p\{x^\mu \ln^\nu x\}$ является банаховым относительно нормы

$$\|f\|_{\mathrm{PS}_p\{x^\mu \ln^\nu x\}} = \|\widetilde{f}\|_{\mathrm{PS}_p}.$$

Теорема 1. *Оператор* K^α_+ *ограничен в* $\mathrm{PS}_p\{x^\mu\}$, $\mu > -1, 1 \leqslant p \leqslant +\infty$, *при этом*

$$\|\mathrm{K}^\alpha_+\|_{\mathrm{PS}_p\{x^\mu\}} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}.$$

Введем пространство: $\mathrm{X} = \mathrm{PS}_p\{x^\mu\} \bigoplus \mathrm{PS}_p\{x^\mu \ln x\}$.

Теорема 2. *Оператор* K^α_+ *ограниченно действует из* $\mathrm{PS}_p\{x^\mu \ln x\}$ *в* X. *При этом*

$$\|\mathrm{K}^\alpha_+ \varphi\|_{\mathrm{X}} \leqslant (M+1)\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}\|\varphi\|_{\mathrm{PS}_p\{x^\mu \ln x\}}.$$

Теорема 3. *Оператор* K^α_+ *ограничен в* X, *при этом*

$$\|\mathrm{K}^\alpha_+ \varphi\|_{\mathrm{X}} \leqslant \frac{(M+2)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}\|\varphi\|_{\mathrm{X}}.$$

Оператор взвешенного дробного интегрирования K^α_+ и теоремы 1–3 используются для решения дробно-дифференциального уравнения типа Эйлера с конечным числом производных произвольного порядка.

Литература

1. Самко С. Г, Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Мн.: Наука и техника, 1987.

ОБ АСИМПТОТИКЕ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА — ПАДЕ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

А.В. Герман

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь
avastafeva@mail.ru

Зафиксируем $n, m_1, \ m_2, \ldots, m_k$ — произвольные целые неотрицатетельные числа. Обозначим $\sum_{j=1}^k m_j = m, \ n_j = n+m-m_j, \ j = 1, 2, \ldots, k$. Известно, что для системы экспонент $e^{\lambda_j z}$, где $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ — различные комплексные числа, при $j = 1, 2, \ldots, k$, существуют такие многочлены $Q_m(z)$, $P_{n_j}^j$, $\deg Q_m \leqslant m$, $\deg P_{n_j}^j \leqslant n_j$, для которых $Q_m(z)e^{\lambda_j z} - P_{n_j}^j(z) = A_j z^{n+m+1} + \ldots$, и единственные рациональные функции $\pi_{n,m}^j(z) = \pi_{n_j,m}^j(z, e^{\lambda_j \xi}) = P_{n_j}^j(z)/Q_m(z)$, $j = 1, 2, \ldots, k$, называемые аппроксимациями Эрмита — Паде II типа для системы экспонент [1].

Рассмотрим комплексные числа $\lambda_j = (\alpha + \beta i)b_j$, лежащие на одной прямой, где α, β, $\{b_j\}_{j=1}^k$ — действительные числа. Обозначим через $\{b_j^*\}_{j=0}^k$ множество точек $\{b_j\}_{j=1}^k \cup \{0\}$ занумерованных в порядке возрастания, т. е. $b_0^* < b_1^* < \cdots < b_k^*$. И определим следующие функции:

$$\varphi(x) = (x - b_0^*)(x - b_1^*) \ldots (x - b_k^*) = x(x - b_1) \ldots (x - b_k),$$
$$S(x) = \ln((-1)^{k+p+1}\varphi(x)), \quad x \in (b_{p-1}^*, b_p^*), \quad S(b_p^*) = -\infty, \quad p = 0, 1, \ldots, k.$$

Функция $\varphi(x)$ имеет нули в точках $b_0^*, b_1^*, \ldots, b_k^*$. Тогда на каждом из интервалов $(b_0^*; b_1^*)$, $(b_1^*; b_2^*)$, $\ldots$, $(b_{k-1}^*; b_k^*)$ производная $\varphi'(x)$ обращается в нуль. Обозначим через $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ нули функции $\varphi'(x)$ занумерованные в порядке возрастания, т. е. $x_p \in \in (b_{p-1}^*, b_p^*)$ [2].

Сформулируем основной результат.

Теорема. *Пусть $n = m_1 = \cdots = m_k$ и $\pi_{kn,kn}^j(z; e^{\lambda_j \xi})$ — аппроксимации Эрмита — Паде для системы экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$, где $\lambda_j = (\alpha + \beta i)b_j$ — различные и отличные от нуля комплексные числа. Тогда для любого комплексного z, $|z| \leqslant L$, и $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ при $n \to \infty$ имеем*

$$e^{\lambda_j z} - \pi_{kn,kn}^j(z; e^{\lambda_j \xi}) = (-1)^{(k+1)n}(\alpha + \beta i)^{n(k+1)+1} \frac{z^{kn+n+1}}{(kn+n)!} e^{\lambda_j z} \exp\left(\frac{1}{k+1}\sum_{p=0}^k \lambda_p\right) \times$$
$$\times \operatorname{sign}(b_j) \sum_p{}^{*} (-1)^{np} \sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(x_p)}} e^{nS(x_p)} e^{-z(\alpha+\beta i)x_p}(1 + O_p(1/n)),$$

где в $\sum_p^*$ суммирование распространяется только на те значения p из $\{1, 2, \ldots, k\}$, для которых x_p лежат в интервале с концами в точках 0 и b_j.

Литература

1. Никишин Е. М. *Рациональные аппроксимации и ортогональность.* М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. 256 с.

2. Старовойтов А. П. *Об асимптотике аппроксимаций Эрмита — Паде для системы функций Миттаг — Леффлера* // Изв. вузов. Матем. 2014. № 9. С. 59–68.

NL-ПРОИЗВОДНЫЕ СКАЛЯРНЫХ И ВЕКТОРНЫХ ФУНКЦИЙ

Н.А. Евхута [1], **О.Н. Евхута** [1], **П.П. Забрейко** [2]

[1] Южно-Российский государственный политехнический университет, Новочеркасск, Россия
evhuta@gmail.com
[2] Белгосуниверситет, механико-математический факультет, Минск, Беларусь
zabreiko@mail.ru

NL-производная определенной на интервале (a, b) непрерывной вещественной функции f — это функция g, для которой справедливы равенства

$$f(\beta) - f(\alpha) = \int_\alpha^\beta g(s)\, ds \quad (a < \alpha < \beta < b)$$

(интеграл в этих равенствах следует понимать в смысле Курцвейля — Хенстока).

Классические теоремы анализа влекут за собой следующие утверждения: *NL-производная, если она существует, определена с точностью до значений на множестве меры нуль; при этом почти всюду она совпадает с обычной производной; однако, если функция f имеет почти всюду производную $f'(x)$, то эта производная не обязательно является NL-производной* (контрпример, известная функция Кантора); *если функция f абсолютно непрерывна, то ее существующая почти всюду производная уже является NL-производной; если функция f непрерывна и имеет производную всюду, кроме счетного множества, то эта производная является и NL-производной.*

Справедливо и следующее более тонкое утверждение: *если N — множество меры нуль и каждая непрерывная функция f имеет производную во всех точках, кроме точек N, то множество N является ничтожным* (т. е., не содержит совершенных подмножеств). Обратное также верно: *если множество N не является ничтожным, то существуют функции, дифференцируемые всюду, кроме точек множества N, не обладающие NL-производной.*

Для непрерывных функций f, определенных в области Ω банахова пространства X и принимающего значения в банаховом пространстве Y, NL-производная f' определяется как функция, определенных в области $\Omega \subset X$ со значениями в банаховом пространстве $\mathcal{L}(X,Y)$ непрерывных линейных операторов между пространствами X и Y, для которой справедливы равенства

$$f(\beta) - f(\alpha) = \int\limits_0^1 g((1-\lambda)\alpha + \lambda\beta)(\beta - \alpha)\, d\lambda \quad ([a,b] \subset \Omega)$$

(интеграл здесь понимается как L-интеграл Курцвейля — Хенстока, т. е. как элемент I, для которого

$$\ell(I) = \int\limits_0^1 \ell(g((1-\lambda)\alpha + \lambda\beta)(\beta - \alpha))\, d\lambda \quad (\ell \in L),$$

где L — тотальное подпространство сопряженного к Y пространства Y^*). Функции $f : \Omega(\subset X) \to Y$, дифференцируемые по Фреше или Гато, являются также NL-дифференцируемыми, причем NL-производная совпадает с производной Гато или, соответственно, Фреше; обратное конечно неверно.

Ранее авторами было показано, что в теории приближенных методов Ньютона и ньютоно-подобных методов требуется именно существование NL-производных, что приводит к существенному расширению классов операторных уравнений, к которым применимы эти методы.

ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ТИПА ЭЙЛЕРА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Н.В. Жуковская

Белгосуниверситет, механико-математический факультет, Минск, Беларусь
Zhukouskaya@bsu.by

Пусть PS_p — нормированное векторное пространство функций, разлагающихся в степенной ряд вида: $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k x^k, \quad 0 < x < 1, \quad \{f_k\} \in l_p.$

Пространство PS_p является банаховым с нормой:

$$\|f\|_{\mathrm{PS}_p} = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} |f_k|^p \right\}^{1/p} = \|\{f_k\}\|_{l_p}.$$

Изучено действие на функции из PS_p операторов дробного интегрирования и дифференцирования Римана — Лиувилля порядка α, $0 < \alpha < 1$, определяемых соответственно формулами

$$(\mathrm{I}_+^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \qquad (\mathrm{D}_+^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int\limits_0^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}.$$

Пусть $\mathrm{I}_+^\alpha[\mathrm{PS}_p]$ — пространство функций, представимых в виде дробного интеграла порядка α с плотностью из PS_p :

$$\mathrm{I}_+^\alpha[\mathrm{PS}_p] = \left\{ f(x) = x^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k \;\middle|\; \{d_k k^\alpha\} \in l_p \right\}.$$

Пространство $\mathrm{I}_+^\alpha[\mathrm{PS}_p]$ является банаховым с нормой $\|f\|_{\mathrm{I}_+^\alpha[\mathrm{PS}_p]} = \|\{d_k k^\alpha\}\|_{l_p}$.

Введем оператор взвешенного дробного интегрирования:

$$\mathrm{K}^\gamma u = \frac{1}{x^\gamma} \mathrm{I}_+^\gamma u = \frac{1}{x^\gamma} \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int\limits_0^x \frac{u(t)\,dt}{(x-t)^{1-\gamma}}.$$

Теорема 1. x^m *— собственные функции оператора* K^γ *в* PS_p, *соответствующие собственным значениям* $m!/\Gamma(m+1+\gamma)$.

Теорема 2. *Оператор* K^γ *ограничен в* PS_p, $1 \leqslant p < +\infty$, *при этом* $\|\mathrm{K}^\gamma\| = 1/\Gamma(1+\gamma)$.

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение типа Эйлера с конечным числом дробных производных:

$$a_n x^{m_n} (\mathrm{D}_+^{m_n} y)(x) + a_{n-1} x^{m_{n-1}} (\mathrm{D}_+^{m_{n-1}} y)(x) + \cdots + a_1 x^{m_1} (\mathrm{D}_+^{m_1} y)(x) = f(x), \tag{1}$$

где $0 < x < 1$, $m_n > m_{n-1} > \cdots > m_1$. Здесь $y \in \mathrm{I}_+^{m_n}\{\mathrm{PS}_p\}$, f такое, что $x^{-m_n} f(x) \in \mathrm{PS}_p$. Обозначим

$$g = \frac{f}{a_n x^{m_n}}, \quad \frac{a_{n-1}}{a_n} = A_1, \quad \ldots, \quad \frac{a_1}{a_n} = A_{n-1}; m_n - m_{n-1} = \gamma_1, \quad \ldots, \quad m_n - m_1 = \gamma_{n-1}.$$

В ходе решения уравнения (1) в пространстве PS_p получена бесконечная система уравнений:

$$c_k (1 + A_1 d_k^{\gamma_1} + \cdots + A_{n-1} d_k^{\gamma_{n-1}}) = t_k, \quad k = \overline{0, \infty},$$

где c_k — неизвестны, t_k — заданы.

Теорема 3. 1) *Пусть* $1 + A_1 d_k^{\gamma_1} + \cdots + A_{n-1} d_k^{\gamma_{n-1}} \neq 0$, $\forall k = \overline{0, \infty}$. *Тогда уравнение* (1) *имеет в пространстве* PS_p *единственное решение*:

$$y = \frac{x^{m_n}}{\Gamma(m_n)} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{k!}{(m_n)_{k+1}} x^k, \tag{2}$$

где

$$c_k = \frac{t_k}{1 + A_1 d_k^{\gamma_1} + \dots + A_{n-1} d_k^{\gamma_{n-1}}}. \tag{3}$$

2) *Пусть* $\exists k_1, \dots, k_N:\ 1 + A_1 d_{k_i}^{\gamma_1} + \dots + A_{n-1} d_{k_i}^{\gamma_{n-1}} = 0,\ i = \overline{1,N},$ *а* $\forall k \neq k_i,\ i = \overline{1,N}:\ 1 + A_1 d_k^{\gamma_1} + \dots + A_{n-1} d_k^{\gamma_{n-1}} \neq 0.$ *Тогда если* $t_{k_i} = 0,\ i = \overline{1,N},$ *то уравнение* (1) *имеет в пространстве* PS_p N *линейно независимых решений* (2), *где* $c_k,\ k \neq k_i,$ $i = \overline{1,N}$ *находят из* (3), $c_{k_i},\ i = \overline{1,N}$ — *произвольные постоянные. Если хотя бы одно* $t_{k_i} \neq 0,\ i = \overline{1,N},$ *то уравнение* (1) *не имеет решений в* PS_p.

Литература

1. Самко С. Г, Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Мн.: Наука и техника, 1987.

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ПОЛИГАММА-ФУНКЦИЙ

Э.И. Зверович

Белгосуниверситет, механико-математический факультет, Минск, Беларусь
zverovich@bsu.by

Полигамма-функциями называются производные различных порядков от функции $\ln\Gamma(z)$. В частности, пси-функция $\psi(z) = \frac{d}{dz}\ln\Gamma(z)$ называется также бигамма-функцией. Они хорошо изучены, табулированы и обладают многими свойствами, среди которых выделим следующее:

$$\psi^{(n)}(z+1) - \psi^{(n)}(z) = \frac{(-1)^n n!}{z^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{1}$$

В качестве первого обобщения отыскиваются аналитическая при $\operatorname{Re} z > 0$ функция $\psi^{(\alpha)}(z)$, удовлетворяющая следующему функциональному уравнению:

$$\psi^{(\alpha)}(z+1) - \psi^{(\alpha)}(z) = \frac{e^{\pi i\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{z^{\alpha+1}}, \tag{2}$$

где $\operatorname{Re}\alpha > 0$, причем $\psi^{(\alpha)}(z) \to 0$ при $\operatorname{Re} z \to +\infty$. Очевидно, что если $\alpha = 0, 1, 2, \dots,$ то (2) переходит в (1). Чтобы найти функцию $\psi^{(\alpha)}(z)$, зададим параметр $\lambda \in (0,1)$ и будем считать сначала, что $\lambda < \operatorname{Re} z < \lambda + 1$. Применим к функции $1/z^{\alpha+1}$, интегральную формулу Коши в полосе $\Pi = \Pi^\circ \sqcup \partial\Pi := \{\lambda \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \lambda + 1\}$, используя периодический аналог ядра Коши $de^{2\pi i\tau}/(e^{2\pi i\tau} - e^{2\pi iz})$. Тогда получим

$$\frac{1}{z^{\alpha+1}} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Pi} \frac{de^{2\pi i\tau}}{\tau^{\alpha+1}(e^{2\pi i\tau} - e^{2\pi iz})} = \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\lambda+1-i\infty}^{\lambda+1+i\infty} - \int\limits_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty}\right)\frac{de^{2\pi i\tau}}{\tau^{\alpha+1}(e^{2\pi i\tau} - e^{2\pi iz})}.$$

Так как подынтегральный дифференциал мероморфен по переменной τ в правой полуплоскости, то последние интегралы можно вычислить с помощью вычетов, например,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} \frac{de^{2\pi i\tau}}{\tau^{\alpha+1}(e^{2\pi i\tau} - e^{2\pi iz})} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^{\alpha+1}} = -\zeta(\alpha+1, z),$$

где $\zeta(\alpha+1,z)$ — обобщенная дзета-функция Римана (функция Гурвица). Аналогично вычисляется и другой интеграл. Образовав их разность, получим $-\zeta(\alpha+1,z+1)+$ $+\zeta(\alpha+1,z)=1/z^{\alpha+1}$. Сравнив это равенство с (2), найдем $\psi^{(\alpha)}(z)=e^{\pi i(\alpha+1)}\times$ $\times\Gamma(\alpha+1)\zeta(\alpha+1,z)$.

Рассмотрено более общее, чем (2), уравнение

$$F(z+1)-F(z)=e^{\pi i\alpha}\Gamma(\alpha+1)\frac{a^z}{z^{\alpha+1}},$$

где $0<|a|\leqslant 1$, $\operatorname{Re}\alpha>0$. Оно также решается с помощью интегральной формулы Коши в полосе $\Pi=\Pi^\circ\sqcup\partial\Pi:=\{\lambda\leqslant\operatorname{Re}z\leqslant\lambda+1\}$. Опуская вычисления, выпишем его решение

$$F(z)=e^{\pi i(\alpha+1)}\Gamma(\alpha+1)a^z\Phi(a,\alpha+1,z), \tag{3}$$

где $\Phi(a,\alpha+1,z)=\sum_{n=1}^{\infty}a^n(\alpha+n)^{-(\alpha+1)}$ — обобщение функции Гурвица.

В качестве приложения отметим, что использование функции (3) позволяет вычислять суммы всевозможных сходящихся рядов вида $\sum_{n=0}^{\infty}R(n)a^n$, где $0<|a|\leqslant 1$, а $R(n)$ — рациональная функция от индекса суммирования n. Для этого надо сначала разложить рациональную функцию $R(n)$ на сумму простейших рациональных функций. В соответствии с этим представить данный ряд в виде суммы рядов такого же типа, где вместо $R(n)$ стоит простейшая рациональная функция. Такие ряды суммируются непосредственно с помощью функции (3), где $\Phi(a,\alpha+1,z)$ — обобщение функции Гурвица.

КРИТЕРИЙ КОМПАКТНОСТИ КОЛМОГОРОВА В L^p, $p>0$

И.Н. Катковская[1], **В.Г. Кротов**[2]

[1] Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь
ikatkovskaya@bntu.by
[2] Белгосуниверситет, механико-математический факультет, Минск, Беларусь
krotov@bsu.by

Пусть (X,d,μ) — ограниченное метрическое пространство с метрикой d и борелевской мерой μ со свойством удвоения:

$$\mu(B(x,2r))\leqslant a_\mu\mu(B(x,r)),\quad x\in X,\quad r>0.$$

Обозначим $I_B^{(p)}f$ наилучшее приближение функции f в $L^p(B)$ постоянными ($B\subset$ $\subset X$ — шар).

Теорема 1. *Пусть $p\geqslant q>0$ и $S\subset L^p(X)$ — ограниченное множество. Тогда S вполне ограничено в том и только том случае, если*

$$\lim_{r\to+0}\sup_{f\in S}\int\limits_X|f(x)-I^{(q)}_{B(x,r)}f|^p\,d\mu(x)=0. \tag{1}$$

Теорема 1 остается справедливой, если в ней «средние» $I_B^{(q)}f$ заменить на δ-медианы

$$m_f^\delta(B)=\inf\{a\in\mathbb{R}:\mu(\{x\in B:f(x)>a\})<\delta\mu(B)\},\quad 0<\delta\leqslant\frac{1}{2}.$$

Если при $p \geqslant 1$ средние $I_B^{(q)} f$ в (1) заменить на интегральные средние функции f по шарам B, то мы получим классический критерий А. Н. Колмогорова [1] (случай $p=1$ см. в [2]). Однако интегральные средние определены только при $p \geqslant 1$.

Отказ от ограниченности X делает критерий Колмогорова и теорему 1 неверными — условия (1) уже недостаточно для полной ограниченности S [3]. Аналогом теоремы 1 для неограниченных X является

Теорема 2. *Пусть $p \geqslant q > 0$ и $S \subset L^p(X)$ — ограниченное множество. Тогда S вполне ограничено в том и только том случае, если выполнено* (1) *и*

$$\lim_{R\to+\infty} \sup_{f\in S} \int\limits_{X\setminus B(x_0,R)} |f(x)|^p \, d\mu(x) = 0.$$

для некоторого $x_0 \in X$.

Доказательства используют технику из [4].

Литература

1. Kolmogoroff A. N. *Ueber Kompaktheit der Funktionen bei der Konvergenz im Mittel* // Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. 1931. Vol. 9. P. 60–63.

2. Tulajkov A. *Zur Kompaktheit im Raum L_p für $p=1$* // Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. Kl. I. 1933. Vol. 39. P. 167-–170.

3. Tamarkin J. D. *On the compactness in the space L^p* // Bull. Amer. Math. Soc. 1932. Vol. 38, no. 2. C. 79–84.

4. Кротов В. Г. *Критерии компактности в пространствах L^p, $p \geqslant 0$* // Матем. сборник. 2012. Т. 203, № 7. С. 129–148.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОПЕРАТОРА СО СТЕПЕННО-ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ЯДРОМ

В.В. Кашевский

Белгосуниверситет, физический факультет, Минск, Беларусь
kshvskii@mail.ru

Для интеграла

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} \, d\tau$$

известны [1] формулы Сохоцкого

$$\Phi^{\pm}(t) = \pm\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} \, d\tau.$$

В данном сообщении приводятся аналогичные формулы для предельных значений интегралов

$$\Psi_n(z) = \int\limits_0^1 \frac{\varphi(\tau)\ln^n(\tau - z)}{\tau - z} \, d\tau, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где ветвь логарифма $\ln(\tau - z)$ выбрана с разрезом вдоль части действительной оси от τ до $+\infty$ и $-\pi/2 < \arg\ln(\tau - i) < 0$. Если функция $\varphi(\tau)$ удовлетворяет условию Гельдера и

$$\Psi_n^+(t) = \lim_{z\to t,\ \operatorname{Im} z>0} \Psi_n(z), \quad \Psi_n^-(t) = \lim_{z\to t,\ \operatorname{Im} z<0} \Psi_n(z), \quad t \in (0,1),$$

то справедливы формулы для предельных значений

$$\Psi_n^+(t) = \int_0^1 \frac{\varphi(\tau)\ln^n|\tau - t|}{\tau - t}\,d\tau - \frac{\varphi(t)}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k(-\pi i)^{n-k+1}\ln^k t\right) +$$

$$+ \int_0^t \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau - t}\left(\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k(-\pi i)^{n-k}\ln^k|t-\tau|\right)d\tau, \quad t \in (0,1),$$

$$\Psi_n^-(t) = \int_0^1 \frac{\varphi(\tau)\ln^n|\tau - t|}{\tau - t}\,d\tau - \frac{\varphi(t)}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k(\pi i)^{n-k+1}\ln^k t\right) +$$

$$+ \int_0^t \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau - t}\left(\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k(\pi i)^{n-k}\ln^k|t-\tau|\right)d\tau, \quad t \in (0,1).$$

С помощью этих формул может быть получено аддитивное представление для сингулярных интегралов $\int_0^1(\tau-t)^{-1}\varphi(\tau)\ln^n|\tau-t|\,d\tau$.

Литература

1. Гахов Ф. Д. *Краевые задачи.* М.: Наука, 1977.

РАВНОМЕРНЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ И КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ НА ОТРЕЗКЕ

Т.С. Мардвилко[1], **А.А. Пекарский**[2]

[1] Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь
mardvilko@mail.ru
[2] Белгосуниверситет, механико-математический факультет, Минск, Беларусь
pekarskii@gmail.com

Через $L_\infty(I)$ и $C(I)$ обозначим соответсвенно банаховы пространства действительных существенно ограниченных и непрерывных функций на отрезке I $(I := := [-1,1])$. Для $\alpha > 0$ и $p \in (0,\infty)$ через $B_p^\alpha = B_p^\alpha(I)$ обозначим пространство Бесова [1].

Пусть функция $g(x)$ определена на отрезке I и интегрируема на нём с весом $1/\sqrt{1-x^2}$. Тогда $\hat{g}(x)$ — функция, сопряжённая $g(x)$, определяется следующим образом:

$$\hat{g}(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi}\int_I \frac{g(t)}{t-x}\cdot\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad x \in I,$$

где сингулярный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Через $\mathcal{R}_n$ обозначим множество рациональных функций степени не выше n. Для $n, s \in \mathbb{N}$ через $\Pi_n^s = \Pi_n^s(I)$ обозначим множество кусочно-полиномиальных функций, определённых на I, степени не выше $s-1$ с не более чем n узлами. Мы подразумеваем под $R_n(g)_\infty$ и $E_n^{(s)}(g)_\infty$ наилучшие приближения в $L_\infty(I)$ функции $g \in C(I)$ множествами $\mathcal{R}_n$ и Π_n^s соответственно.

Эквивалентность $(i) \Leftrightarrow (iii)$ из сформулированной ниже теоремы получена ранее вторым из авторов [2]. Основной результат настоящей работы заключается в том, что к условиям (i), (iii) мы добавили ещё одно эквивалентное условие (ii).

Теорема [3]. *Пусть* $\alpha > 1$, $s \in \mathbb{N} \cap (\alpha, \infty)$ *и* $g \in C(I)$. *Тогда следующие условия равносильны*:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} (R_n(g)_\infty)^{1/\alpha} < \infty$;

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (E_n^{(s)}(g)_\infty)^{1/\alpha} < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} (E_n^{(s)}(\hat{g})_\infty)^{1/\alpha} < \infty$;

(iii) $g \in B_{1/\alpha}^{\alpha}$.

Вторым из авторов в [4] были получены аналогичные результаты для периодического случая.

Работа выполнена в рамках программы ГПНИ НАН Беларуси «Конвергенция».

Литература

1. DeVore R. A., Lorenz G. G. *Constructive Approximation.* Berlin, Heidelberg, New York.: Springer-Verlag, 1993.

2. Пекарский А. А. *Чебышёвские рациональные приближения в круге, на окружности и на отрезке* // Матем. сб. 1987. Т. 133, № 1. С. 86–102.

3. Мардвилко Т. С., Пекарский А. А. *Сопряжённые функции на отрезке и их связь с равномерными рациональными и кусочно-полиномиальными приближениями* // Матем. заметки. 2016. Т. 99, № 2. С. 248–261.

4. Пекарский А. А. *Сопряжённые функции и их связь с равномерными рациональными и кусочно-полиномиальными приближениями* // Матем. сб. 2014. Т. 206, № 2. С. 175–182.

СОПРЯЖЕННЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ РАВНОМЕРНЫЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

В.Р. Мисюк [1], **А.А. Пекарский** [2]

[1] Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
misiuk@grsu.by
[2] Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
pekarskii@gmail.com

В теории приближения периодических функций посредством тригонометрических полиномов хорошо известны результаты Н. К. Бари и С. Б. Стечкина [1] о связи наилучших равномерных приближений функции и её сопряжённой. Нами решена аналогичная задача в случае приближения функций, заданных на отрезке, посредством алгебраических многочленов. Через $C(I)$ обозначим банахово пространство функций, непрерывных на отрезке $I = [-1, 1]$ и наделённых стандартной нормой. $\mathcal{P}_n$ — множество алгебраических многочленов степени не выше n $(n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \bigcup \{0\})$.

Для функции $g \in C(I)$ введём

$$E_n(g) = \inf\{\|f - p_n\|_{C(I)} : p_n \in \mathcal{P}_n\}$$

— наилучшее равномерное приближение множеством $\mathcal{P}_n$.

Пусть функция $g(t)$ определена на отрезке I и интегрируема на нём с весом $1/\sqrt{1-t^2}$. Тогда $\hat{g}$, функция сопряжённая g, определяется следующим образом:

$$\hat{g}(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int\limits_I \frac{g(t)}{t-x} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad x \in I.$$

Здесь интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Теорема 1. *Пусть функция $g \in C(I)$ такова, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} E_k(g) < \infty.$$

Тогда $\hat{g} \in C(I)$ и для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$E_n(\hat{g}) \leqslant \frac{c_1}{n} \sum_{k=0}^{n} E_k(g) + c_2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k} E_k(g),$$

где c_1 и c_2 абсолютные положительные постоянные.

Следствие 1. *Пусть $g \in C(I)$, $\alpha > 0$ и $E_n(g) = O(n^{-\alpha})$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\hat{g} \in C(I)$ и при $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ имеет место соотношение*

$$E_n(\hat{g}) = \begin{cases} O(1/n^{\alpha}), & 0 < \alpha < 1, \\ O(\ln n/n), & \alpha = 1, \\ O(1/n), & \alpha > 1. \end{cases}$$

Теорема 2. *Пусть $g \in C(I)$, $s \in \mathbb{N}$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k^{s-1} E_k(g)$ сходится. Тогда функция $\hat{g}$ непрерывно дифференцируема s раз на интервале $(-1,1)$ и $\hat{g}^{(s)}(x) = O(1/(1-x^2)^{s-1/2})$ при $x \in (-1,1)$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция–2020».

Литература

1. Тиман А. Ф. *Теория приближения функций действительного переменного.* М., ГИФМЛ, 1960. 624 с.

СВОЙСТВО САМОУЛУЧШЕНИЯ В НЕРАВЕНСТВЕ ПУАНКАРЕ ПРИ $p > 0$

А.И. Порабкович

Белорусский государственный университет, механико-математический факультет, Минск, Беларусь
porabkovich@bsu.by

Пусть (X,d,μ) — хаусдорфово пространство с квазиметрикой d регулярной борелевской мерой μ, причем $\mu(B(x,R)) \leqslant c(R/r)^{\gamma}\mu(B(x,r))$, где $R > r$, $B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$ — шар в X. В работе доказывается ряд неравенств для средних осцилляций

$$\left(\frac{1}{\mu(B)} \int\limits_B |f(y) - I_B^{(\theta)} f|^{\theta} \, d\mu(y)\right)^{1/\theta} = \inf_{c\in\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\mu(B)} \int\limits_B |f(y) - c|^{\theta} \, d\mu(y)\right)^{1/\theta},$$

где $\theta > 0$, B — шар в X и

$$f_B = \frac{1}{\mu(B)} \int\limits_B f \, d\mu.$$

Для любой функции $f \in L^{\theta}_{\mathrm{loc}}(X)$, $\theta > 0$,

$$\lim_{r \to +0} I^{(\theta)}_{B(x,r)} f = f(x) \tag{1}$$

для почти всех $x \in X$. Точки, в которых выполнено (1), будем называть θ-точками Лебега.

Для $0 \leqslant \alpha < \beta < \infty$ определим $\Omega[\alpha, \beta]$ как множество положительных возрастающих функций $\eta : (0,1]) \to (0,1]$, для которых $\eta(t)t^{-\alpha}$ возрастает и $\eta(t)t^{-\beta}$ убывает. Пусть еще

$$\Omega[\alpha, \beta) = \bigcup_{\beta' \in [\alpha, \beta)} \Omega[\alpha, \beta'], \quad \Omega[\alpha, \infty) = \bigcup_{\beta > \alpha} \Omega[\alpha, \beta).$$

Будем говорить, что пара функции $f \in L^{\theta}_{\mathrm{loc}}(X)$, $g \in L^{p}_{\mathrm{loc}}(X)$ удовлетворяет $(\sigma, \eta, \theta, p)$-неравенству Пуанкаре, если для всех шаров $B \subset X$

$$\left(\frac{1}{\mu(B)} \int\limits_B |f(y) - I^{(\theta)}_B f|^{\theta} \, d\mu(y) \right)^{1/\theta} \leqslant \eta(r_B) \left(\frac{1}{\mu(B)} \int\limits_{\sigma B} g^p \, d\mu \right)^{1/p}. \tag{1}$$

Отличием от исследований в [1, 2] неравенств (2) является включение случая $\theta < 1$ и отсутствие требования $f \in L^1_{\mathrm{loc}}$ для таких θ.

Теорема 1. *Пусть $\theta, p > 0$, $0 < \alpha < \gamma/p$, $\eta \in \Omega[\alpha, \gamma/p)$, $\sigma \geqslant 1$ и функции $f \in L^{\theta}_{\mathrm{loc}}(X)$, $g \in L^{p}_{\mathrm{loc}}(X)$ удовлетворяют $(\sigma, \eta, \theta, p)$-неравенству Пуанкаре* (2),

$$\frac{1}{q} \geqslant \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{\gamma}.$$

Тогда для любого шара $B \subset X$:

1) *если $1/q = 1/p - \alpha/\gamma$, то справедливо неравенство слабого типа*

$$\frac{\mu(\{x \in B : |f(x) - I^{(\theta)}_B f| > \lambda\})}{\mu(B)} \leqslant c \left[\frac{\eta(r_B)}{\lambda} \left(\frac{1}{\mu(B)} \int\limits_{cB} g^p \, d\mu \right)^{1/p} \right]^q, \quad \lambda > 0;$$

2) *если $1/q > 1/p - \alpha/\gamma$, то*

$$\left(\frac{1}{\mu(B)} \int\limits_B |f(y) - I^{(\theta)}_B f|^{q} \, d\mu(y) \right)^{1/q} \leqslant c\eta(r_B) \left(\frac{1}{\mu(B)} \int\limits_{cB} g^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Теорема 2. *Пусть $p > 0$, $\alpha > \gamma/p$, $\eta \in \Omega[\alpha, \infty)$ и x_0 — θ-точка Лебега функции f, $\sigma \geqslant 1$. Пусть также функции $f \in L^{\theta}_{\mathrm{loc}}(X)$, $g \in L^{p}_{\mathrm{loc}}(X)$ удовлетворяют $(\sigma, \eta, \theta, p)$-неравенству Пуанкаре* (2). *Тогда для любого шара $B(x_0, r) \subset X$ выполнено*

$$|f(x_0) - I^{(\theta)}_{B(x_0,r)} f| \leqslant c\eta(r_B) \left(\frac{1}{\mu(B(x_0, r_B))} \int\limits_{B(x_0, r_B)} g^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Теорема 3. *Пусть* $p > 0$, $\alpha = \gamma/p$, $\eta \in \Omega[\alpha, \infty)$ *и* $\sigma \geqslant 1$. *Пусть также функции* $f \in L^{\theta}_{\mathrm{loc}}(X)$, $g \in L^{p}_{\mathrm{loc}}(X)$ *удовлетворяют* $(\sigma, \eta, \theta, p)$ *-неравенству Пуанкаре* (2). *Тогда для любого шара* $B \subset X$

$$\frac{1}{\mu(B)} \int\limits_{B} \exp\left(c \frac{|f - I_B^{(\theta)} f|}{\eta(r_B)} \left(\frac{1}{\mu(B)} \int\limits_{cB} g^p \, d\mu\right)^{-1/p}\right) d\mu \leqslant c.$$

В доказательстве теорем использовались методы работы [3].

Если $\theta \geqslant 1$, то оба неравенства в теореме 1 сохраняют силу, если в них заменить $I_B^{(\theta)} f$ на интегральные средние f_B. В случае $\theta = 1$ это утверждение имеется в [2] (при $\eta(t) = t$ см. также [1, теорема 5.1])

Литература

1. Hajłasz P., Koskela P. *Sobolev met Poincaré* // Memoirs of AMS, 2000. V. 145. P. 1–115.

2. Иванишко И. А., Кротов В. Г. *Обобщенное неравенство Пуанкаре-Соболева на метрических пространствах* // Труды Ин-та математики НАН Беларуси. 2006. Т. 14, №1. С. 51–61.

3. Кротов В. Г., Порабкович А. И. L^p *-осцилляций функций при* $p > 0$ // Математические заметки НАН Беларуси. 2015. Т. 97, № 3. С. 408–420.

О РАЦИОНАЛЬНЫХ РЯДАХ ФУРЬЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ $|x|$

Е.А. Ровба, П.Г. Поцейко

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
rovba.ea@gmail.com, pahamatby@gmail.com

Известно, что функция $|x|$ играет важную роль в теории приближений. Основополагающий результат получил С. Н. Бернштейн в работе [1], где найдены асимптотические оценки наилучших равномерных приближений многочленами на отрезке $[-1, 1]$. Новым этапом в исследовании приближений функции $|x|$ была работа Ньюмана [2] об оценке приближений рациональными функциями. К настоящему времени исследования рациональных приближений функции $|x|$ являются довольно обширными (см., например [3], [4]). Так же получены оценки приближений функции $|x|$ на отрезке $[-1, 1]$ при помощи интерполяционных рациональных процессов по узлам в нулях дробей Чебышева — Маркова [5]. Вместе с тем в этих и других работах не использовались классические методы теории рядов Фурье.

В настоящем докладе предполагается рассмотреть ряды Фурье функции $|x|$ на отрезке $[-1, 1]$ для различных систем ортогональных рациональных функций.

Во-первых, интересным с точки зрения авторов, является разложение по системе рациональных функций, которую ввели в 1964 г. М. М. Джрбашян и А. А. Китбалян [6]. Эта система рациональных функций ортогональна на отрезке $[-1, 1]$ по весу $\rho(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$ и является обобщением многочленов Чебышева. Ряд Фурье для функции $|x|$ на отрезке $[-1, 1]$ по такой системе получен в явном виде.

Исследованы некоторые свойства полученного ряда в зависимости от расположения параметров α_j, $j = 1, 2, \ldots$

Во-вторых, если выбирать только два геометрически различных полюса, то соответствующая система рациональных косинус-дробей Чебышева — Маркова будет ортогональной на отрезке $[-1, 1]$ по несколько измененному весу (в отличие от чебышевского). Получен в явном виде ряд Фурье для функции $|x|$ по такой системе.

Построенные ряды Фурье представляют собой отдельный интерес, в том числе и в качестве дальнейшего исследования полученных результатов. С помощью численного анализа, например, подтверждена эффективность приближения частичными суммами таких рядов Фурье.

Литература

1. Бернштейн С. Н. *Собрание сочинений: в 4 т.* Т. 1. М., 1954.
2. Newman D. J. *Rational approximation to* $|x|$ // Michigan Math. J. 1964. Vol. 11, no. 1. P. 11–14.
3. Вячеславов Н. С. *Равномерные приближения* $|x|$ *рациональными функиями* // Докл. АН СССР. Т. 220, № 3. 1975. С. 512–515.
4. Шталь Г. *Наилучшие равномерные рациональные аппроксимации* $|x|$ *на* $[-1,1]$. // Матем. сб., 1992, Т. 183, №8, с. 85-118.
5. Ровба Е. А. *О рациональной интерполяции* $|x|$ // Вести АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1989. Т. 5, № 39. С. 46.
6. Джрбашян М. М., Китбалян А. А. *Об одном обобщении полиномов Чебышева* // Докл. АН Арм. ССР. 1964. Т. 38, № 5. С. 263–270.

СИНУС-ДРОБИ ЧЕБЫШЕВА — МАРКОВА И ПРИБЛИЖЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

В.Н. Русак [1], **Н.В. Гриб** [2]

[1] Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
rusak@bsu.by
[2] Белорусский государственный педагогический университет им. М. Танка, Минск, Беларусь
nikolay.grib@mail.ru

Пусть $q_{2n-1}(x) = \prod_{j=1}^{2n-1}(1+a_jx)$, где числа a_j либо действительные и $|a_j| < 1$, либо попарно комплексно-сопряженные. Определим функции

$$\lambda_{n+1}(x) = 3 + \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{\sqrt{1-a_k^2}}{1+a_kx}, \quad \varphi'_{2n+2}(x) = \frac{-\lambda_{n+1}(x)}{2\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in [-1,1],$$

$$\varphi_{2n+2}(-1) = (2n+2)\pi, \quad N_n(x) = \frac{\sin\varphi_{2n+2}(x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

где действительная часть всех радикалов берется положительной и функция $N_n(x)$ есть известная синус-дробь Чебышева — Маркова (см., например, [1]), имеющая на интервале $(-1,1)$ n различных простых нулей $\{x_j\}$.

Через $R_{2n-1}(f)$ обозначим наилучшее равномерное приближение функции $f(x)$ из пространства $C[-1,1]$ непрерывных на отрезке $[-1,1]$ функций рациональными функциями вида

$$r_{2n-1}(x) = \frac{p_{2n-1}(x)}{q_{2n-1}(x)}. \tag{1}$$

Теорема. *Квадратурная формула со вторым чебышевским весом*

$$\int_{-1}^{1} f(x)\sqrt{1-x^2}dx = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\frac{2\pi(1-x_k^2)}{\lambda_{n+1}(x_k)} + \rho_n(f)$$

точна на правильных рациональных функциях вида (1), *и для любой функции* $f(x) \in$ $\in C[-1,1]$ *выполняется неравенство*

$$|\rho_n(f)| \leqslant \pi R_{2n-1}(f).$$

Отметим, что теорема содержит также и квадратурные формулы с весовой функцией $\sqrt{1-x^2}$, точные на рациональных функциях $p_{2n-1}/\prod_{j=1}^{n-1}(1+a_jx)^2$, которые были получены ранее в [2] на основе лагранжевой интерполяции.

Литература

1. Русак В. Н. *Рациональные функции как аппарат приближения.* Мн.: Изд-во БГУ, 1979.
2. Ровба Е. А. *Интерполяция и ряды Фурье в рациональной аппроксимации.* Гродно: Изд-во ГрГУ, 2001.

РАЦИОНАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ И ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В.Н. Русак, И.В. Рыбаченко

[1] Белгосуниверситет, физический факультет, Минск, Беларусь
rusak@bsu.by, fisherv@tut.by

Косинус-дробью Чебышёва — Маркова называют функцию

$$M_n(x)=\cos\varphi_{2n}(x),\quad x\in[-1,1],\quad \varphi_{2n}(-1)=2n\pi,$$

$$\varphi'_{2n}(x)=-\frac{\lambda_n(x)}{2\sqrt{1-x^2}},\quad \lambda_n(x)=1+\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\sqrt{1-a_k^2}}{1+a_kx},$$

где числа $\{a_k\}$ действительные и $|a_k|<1$ или попарно комплексно-сопряжённые. Как известно [1], $M_n(x)=m_n(x)/\sqrt{q_{2n-1}(x)}$, где $m_n(x)$ — полином, имеющий n различных простых нулей $\{x_k\}$, $k=\overline{1,n}$ на $(-1,1)$ и $q_{2n-1}(x)=\prod_{k=1}^{2n-1}(1+a_kx)$. С помощью эрмитовской интерполяции построена квадратурная формула

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\sum_{k=1}^{n}\frac{2\pi}{\lambda_n(x_k)}f(x_k)+\rho_n(f), \tag{1}$$

точная на рациональных функциях порядка $2n-1$ с фиксированным знаменателем $q_{2n-1}(x)$.

Рассмотрим интегральное уравнение второго рода

$$y(x)-\lambda\int\limits_{-1}^{1}\frac{h(s,t)y(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=f(s), \tag{2}$$

где $f(s)\in C[-1,1]$ — известная функция, ядро $h(s,t)$ непрерывно по совокупности переменных. Заменяя интеграл в левой части (2) по квадратурной формуле (1) и требуя выполнения этого равенства только в узловых точках $\{x_j\}$, $j=\overline{1,n}$, придем к системе линейных уравнений

$$z_j-\lambda\sum_{k=1}^{n}\frac{2\pi}{\lambda_n(x_k)}h(x_j,x_k)=f(x_j),\quad j=\overline{1,n}, \tag{3}$$

решение которой определяет приближенные значения для решений уравнения (2) в узловых точках. Приближенное решение $z(s)$ для всех $s\in[-1,1]$ определяется через найденные z_j с помощью интерполяционного оператора.

Найдена [2] оценка погрешности приближенного решения в терминах наилучших приближений правых частей и ядер алгебраическими дробями вида

$$p_n(s)/\sqrt{q_{2n-1}(s)},\quad p_n(s,t)/\sqrt{q_{2n-1}(s)},\quad p_n(t,s)/\sqrt{q_{2n-1}(t)},$$

где $p_n(s,t)$ — полином по первой переменной с непрерывными коэффициентами по второй переменной.

Литература

1. Русак В. Н. *Рациональные функции как аппарат приближения.* Мн.: Изд-во БГУ, 1979.
2. Русак В. Н., Рыбаченко И. В. *Косинус-дроби Чебышёва — Маркова в приближенном интегрировании и решении интегральных уравнений* // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 7. С. 928–936.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО РОДА С НОРМИРОВАННОЙ ФУНКЦИЕЙ БЕССЕЛЯ В НЕОДНОРОДНОМ ЯДРЕ

О.В. Скоромник

Полоцкий госуниверситет, радиотехнический факультет, Новополоцк, Беларусь
skoromnik@gmail.com

Рассматривается следующий интегральный оператор типа Абеля:

$$(\mathrm{C}^{\alpha,\lambda}_{0+;\sigma}f)(x)\equiv\int\limits_0^x\frac{(x^\sigma-t^\sigma)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\bar{J}_{\alpha-1}(\lambda\sqrt{x^\sigma-t^\sigma})\sigma t^{\sigma-1}f(t)\,dt=g(x),\quad x>0, \tag{1}$$

$\sigma>0$, $0<\alpha<1$, $\lambda>0$ — некоторый действительный параметр, $\bar{J}_\nu(x)$ — нормированная функция Бесселя [1, § 37.1]. Исходя из предсталения ядра указанного оператора через ряд, получено следующая формула, отражающая структуру оператора (1):

$$\mathrm{C}^{\alpha,\lambda}_{0+;\sigma}=\mathrm{I}^\alpha_{0+;x^\sigma}\exp[(-\lambda^2/4)\mathrm{I}^1_{0+;x^\sigma}], \tag{2}$$

где E — единичный оператор, $(\mathrm{I}^\alpha_{0+;x^\sigma}f)(x)=\sigma\int_0^x\frac{(x^\sigma-t^\sigma)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}t^{\sigma-1}f(t)\,dt$ — дробный интеграл порядка α $(\mathrm{Re}\,(\alpha)>0)$ функции $f(x)$ по функции x^σ $(x>0,\ \sigma\in R)$;

$$(\mathrm{I}^\alpha_{0+;x^\sigma}f)(x)=(\mathrm{D}^{-\alpha}_{0+;x^\sigma}f)(x)=\left(\frac{d}{\sigma x^{\sigma-1}dx}\right)^n(\mathrm{I}^{n-\alpha}_{0+;x^\sigma}f)(x)\quad(\mathrm{Re}\,(\alpha)\leqslant 0,\quad n=\mathrm{Re}\,[n]+1)$$

(см [1, § 18.2]).

Применяя обобщенное преобразование Лапласа [2, ch. 2.5, 3.3]

$$(\mathrm{L}_{k,\alpha}f)(s)=\int\limits_0^\infty(st)^{-\alpha}e^{-|k|(st)^{1/k}}f(t)\,dt,\quad k\in R\setminus\{0\},\quad \alpha\in C,\quad s\in R_+,$$

к левой части (1), получаем

$$(\mathrm{L}_{1/\sigma,1-\sigma}\mathrm{C}^{\alpha,\lambda}_{0+;\sigma}f)(s)=(s^\sigma/\sigma)^{-\alpha}\exp[-\lambda^2/(4s^\sigma/\sigma)](\mathrm{L}_{1/\sigma,1-\sigma}f)(s),\quad \mathrm{Re}\,(s)>0. \tag{3}$$

Заметим, что правая часть (3) получается из формулы (2) заменой $\mathrm{I}^1_{0+;x^\sigma}$ на s^σ/σ.

Оператору $\mathrm{I}^\alpha_{0+;x^\sigma}$ соответствует $(\mathrm{L}_{1/\sigma,1-\sigma}\,\mathrm{I}^\alpha_{0+;x^\sigma})(s)=(s^\sigma/\sigma)^{-\alpha}$, $\mathrm{Re}\,(\alpha)>0$. Для обобщенного преобразования Лапласа $(s^\sigma/\sigma)^\alpha$ ядра обратного оператора $\mathrm{D}^\alpha_{0+;x^\sigma}$ условие $\mathrm{Re}\,(\alpha)>0$ требует представлять $(s^\sigma/\sigma)^\alpha$ в виде $(s^\sigma/\sigma)^\alpha=(s^\sigma/\sigma)^n(s^\sigma/\sigma)^{-(n-\alpha)}$, $\mathrm{Re}\,(n-\alpha)>0$, причем значению $(s^\sigma/\sigma)^n$ соответствует оператор $(d/dx)^n=\mathrm{D}^n_{0+;x^\sigma}$.

Учитывая сказанное,совершаем обращение оператора (1) и получаем формулу решения уравнения в правой части (1):

$$f(x)=\{(\mathrm{C}^{\alpha,\lambda}_{0+;\sigma})^{-1}g\}(x)=\left(\frac{d}{dx}\right)^{l}\int\limits_{0}^{x}\frac{(x^{\sigma}-t^{\sigma})^{l+m-\alpha-1}}{\Gamma(l+m-\alpha)}\bar{J}_{l+m-\alpha-1}(\lambda\sqrt{x^{\sigma}-t^{\sigma}})\sigma t^{\sigma-1}g^{(m)}(t)\,dt. \tag{4}$$

Получены условия обратимости оператора (1), существования и единственности решения (4) уравнения (1) в пространстве $L_{\nu,r}$:

$$\dot{L}_{\nu,r}=\left\{f:\|f\|_{\nu,r}=\left(\int\limits_{0}^{\infty}|t^{\nu}f(t)|^{r}\frac{dt}{t}\right)^{1/r}<\infty\right\}\quad(\nu\in R,\quad 1<r<\infty)$$

(см. [2, ch. 3]).

Литература

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Мн.: Наука и техника, 1987.
2. Kilbas A. A., Saigo M. **H** -*Transforms. Theory and Applications.* London [etc.]: Chapman and Hall. CRC Press, 2004.

РЯДЫ ФУРЬЕ ПО СИСТЕМЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ, ОБОБЩАЮЩИХ МНОГОЧЛЕНЫ ЧЕБЫШЕВА ВТОРОГО РОДА

К.А. Смотрицкий

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
k.smotritski@gmail.com

Ряды Фурье выступают в качестве одного из классических методов теории приближения непрерывных функций. Поэтому, изучение свойств различных систем ортогональных функций, на основании которых строятся ряды Фурье, представляет собой важную задачу теории аппроксимации. Классическими ортогональными системами в полиномиальном случае являются многочлены Чебышева первого и второго рода. Их рациональные обобщения менее изучены. В настоящей работе исследуется ортогональная система рациональных функций Джрбашяна — Китбаляна, обобщающая многочлены Чебышева второго рода (см. [1]):

$$N_0(x)\equiv\sqrt{\frac{2}{\pi}},\quad N_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{i\theta}\eta_n(e^{i\theta})-e^{-i\theta}\eta_n(e^{-i\theta})}{2i\sin\theta},\quad n\in\mathbb{N},\quad x=\cos\theta,$$

где

$$\eta_n(z)=\frac{\sqrt{1-|\alpha_n|^2}}{1-\overline{\alpha_n}z}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}z},\quad n\in\mathbb{N},$$

при этом $\{\alpha_k\}_{k=0}^{n}$ — произвольная последовательность комплексных чисел такая, что $\alpha_0=0,\ \ |\alpha_k|<1,\ \ k\in\mathbb{N}$.

В работе получено интегральное представление частичных сумм рядов Фурье по этой системе, оценена константа Лебега, а также проводится численное исследование некоторых свойств функций этой системы.

Литература

1. Джрбашян М. М., Китбалян А. А. *Об одном обобщении полиномов Чебышева* // Докл. АН Арм. ССР. 1964. Т. 38, № 5. С. 263–270.

РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ МНОГОЧЛЕНОВ ЭРМИТА — ПАДЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ С КОМПЛЕКСНЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

А.П. Старовойтов, Г.Н. Казимиров, М.В. Сидорцов

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь
svoitov@gsu.by, grigory.kazimirov@gmail.com, sidortsov@mail.ru

Многочленами A_n^p, $\deg A_n^p \leqslant n-1$, $p=0,1,\ldots,k$, одновременно тождественно не равные нулю и удовлетворяющие условию

$$\sum_{p=0}^{k} A_n^p(z)e^{\lambda_p z} = O(z^{kn+n-1}), \quad z \to 0,$$

введены в рассмотрение Эрмитом в связи с исследованием арифметических свойств числа e. Их принято называть диагональными многочленами Эрмита — Паде I рода для системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^{k}$.

Рассмотрим набор экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^{k}$, где $\lambda_0 = 0$, а остальные λ_p являются корнями уравнения $\xi^k = 1$. Для нормированных многочленов Эрмита — Паде

$$\widetilde{A}_n^p(z) = A_n^p(z)/A_n^p(0), \quad p = 1,2,\ldots,k,$$

доказана равномерная сходимость на компактах в $\mathbb{C}$ к явно заданным функциям. Для простоты формулировок далее ограничимся случаем, когда $k=3$.

Пусть $\lambda_0 = 0$, $\lambda_p = e^{i\,2\pi(p-1)/3}$, $z_p = \sqrt[3]{1/4}e^{i\,2\pi(p-1)/3}$, $p=1,2,3$.

Теорема 1. *При $n\to\infty$ равномерно на любом компакте из $\mathbb{C}$ $\widetilde{A}_n^p(z) \rightrightarrows e^{(z_p-\lambda_p)z}$, $p=1,2,3$.*

Аналогичный результат справедлив и для нормированных многочленов

$$\widetilde{A}_{3n-2}^0(z) = A_{3n-2}^0(z)/A_{3n-2}^0(0),$$

$$\widetilde{A}_{3n-1}^0(z) = A_{3n-1}^0(z)/[A_{3n-1}^0(z)]'_{z=0}, \quad \widetilde{A}_{3n}^0(z) = A_{3n}^0(z)/[A_{3n}^0(z)]''_{z=0}.$$

Теорема 2. *При $n\to\infty$ равномерно на любом компакте в $\mathbb{C}$*

$$\widetilde{A}_{3n}^0(z) \rightrightarrows \frac{\sqrt[3]{16}}{3}\sum_{j=1}^{3} e^{i2\pi(j-1)/3}e^{(z_j-\lambda_j)z},$$

$$\widetilde{A}_{3n-1}^0(z) \rightrightarrows \frac{\sqrt[3]{4}}{3}\sum_{j=1}^{3} e^{i4\pi(j-1)/3}e^{(z_j-\lambda_j)z}, \quad \widetilde{A}_{3n-2}^0(z) \rightrightarrows \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} e^{(z_j-\lambda_j)z}.$$

Заметим, что до сих пор в журнальной литературе асимптотические свойства многочленов A_n^p изучались только в случае, когда λ_p — действительные числа (подробнее см. [1, 2]).

Литература

1. Wielonsky F. *Asymptotics of Diagonal Hermite-Padé Approximants to e^z* // J. Approx. Theory. 1997. Vol. 90, no. 2. P. 283–298.

2. Астафьева А.В., Старовойтов А.П. *Асимптотические свойства многочленов Эрмита* // Докл. НАН Беларуси. 2015. Т. 59, № 3. С. 5–11.

АППРОКСИМАЦИИ ЭРМИТА — ПАДЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

А.П. Старовойтов, Е.П. Кечко

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь
svoitov@gsu.by, ekechko@gmail.com

Для заданного натурального числа k рассмотрим произвольный фиксированный набор $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ различных комплексных и произвольный набор $\{n_p\}_{p=0}^k$ натуральных чисел.

Определение. Аппроксимациями Эрмита — Паде I рода для системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$ называются многочлены $A_{n_p}^p(z)$, $\deg A_{n_p}^p \leqslant n_p - 1$, $p = 0, 1, \ldots, k$, одновременно тождественно не равные нулю и удовлетворяющие условию

$$R_{n_0,\, n_1, \ldots, \, n_k}(z) = \sum_{p=0}^{k} A_{n_p}^p(z)\, e^{\lambda_p z} = O(z^{n_0+n_1+\cdots+n_k-1}), \quad z \to 0.$$

Многочлены $A_{n_p}^p(z)$ (их часто называют многочленами Эрмита — Паде I рода) введены в рассмотрение Эрмитом [1] в связи с исследованием арифметических свойств числа e.

Следующие теоремы об асимптотике остаточной функции $R_{n_0,\, n_1, \ldots, \, n_k}$ и о локализации нулей $A_{n_p}^p$ дополняют и обобщают известные результаты Г. Сегё [2], Э. Саффа и Р. Варги [3], П. Борвейна [4], Ф. Вилонского [5], Г. Шталя [6].

Теорема 1. *Пусть* $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ — *произвольный фиксированный набор различных комплексных чисел. Тогда при* $\min\{n_0, n_1, \ldots, n_k\} \to \infty$ *локально равномерно по* z

$$R_{n_0,n_1,\ldots,n_k}(z) \sim \frac{z^{n_0+n_1+\cdots+n_k-1}}{(n_0+n_1+\cdots+n_k-1)!} \exp\left(\frac{n_0\lambda_0 + n_1\lambda_1 + \cdots + n_k\lambda_k}{n_0+n_1+\cdots+n_k}\, z\right).$$

Теорема 2. *Пусть* $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ — *произвольные различные комплексные числа. Тогда при любых фиксированных* $n_p \geqslant 2$, $p = 0, 1, \ldots, k$, $k \geqslant 1$ *нули многочлена* $A_{n_p}^p$, $0 \leqslant p \leqslant k$, *находятся в круге* $\{z : |z| < R_{n_p}^p\}$, *где*

$$R_{n_p}^p = \sum_{\substack{j=0\\ j\neq p}}^{k} \frac{n_p + n_j - 2/3}{|\lambda_p - \lambda_j|}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь.

Литература

1. Hermite C. *Sur la généralisation des fractions continues algébriques* // Ann. Math. Pura. Appl. Ser. 2A. 1883. Vol. 21. P. 289–308.

2. Szegö G. *Uber eienige Eigenschaften der Exponentialreihe* // Sitzunggsberichte Berliner Math. Ges. 1924. No. 23. P. 50–64.

3. Saff E. B., Varga R. S. *On the zeros and poles of Padé approximations to* e^z, *II* // Padé and Rational Approximations. Academic Press, New York, 1977. P. 195–213.

4. Borwein P. B. *Quadratic Hermite-Padé approximation to the exponential function* // Const. Approx. 1986. Vol. 62. P. 291–302.

5. Wielonsky F. *Asymptotics of Diagonal Hermite-Padé Approximants to* e^z // J. Approx. Theory. 1997. Vol. 90, no. 2. P. 283–298.

6. Stahl H. *Asymptotics for quadratic Hermite-Padé polynomials associated with the exponential function* // Electronic Trans. Num. Anal. 2002. No. 14. P. 193–220.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ АНАЛОГ ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА ВЕЙЕРШТРАССА

Ю.В. Трубников, О.В. Пышненко

Витебский государственный университет им. П. М. Машерова, Витебск, Беларусь
Yurii_Trubnikov@mail.ru

Введение. Итерационный алгоритм Вейерштрасса предназначен для одновременного нахождения всех корней алгебраического уравнения

$$P_n(z) \equiv z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

с комплексными коэффициентами в случае отсутствия кратных корней [1]. Пусть

$$\omega(t) = (t - z_1)(t - z_2) \times \ldots \times (t - z_n),$$

тогда расчетные формулы алгоритма Вейерштрасса имеют вид

$$z_j(k+1) = z_j(k) - \frac{P_n[z_j(k)]}{\omega'[z_j(k)]},$$

где $1 \leqslant j \leqslant n,\ \ k = 1, 2, \ldots$

Результаты и их обсуждение. Наблюдения за численными экспериментами, проведенными с применением алгоритма Вейерштрасса, показали нелокальный характер сходимости, т. е., векторная последовательность $z_j(k)\ \ (1 \leqslant j \leqslant n,\ \ k = 1, 2, \ldots)$ сходится к некоторой перестановке корней уравнения при «почти любых» начальных значениях. Однако доказательство факта такой нелокальной сходимости уже для кубического уравнения весьма затруднительно. Авторы настоящей работы [2] предлагают использовать дифференциальный аналог итерационного процесса Вейерштрасса, т. е., использовать для нахождения всех корней алгебраического уравнения систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dz_j}{dt} = -\frac{P_n[z_j(k)]}{\omega'[z_j(k)]}.$$

В настоящей работе конструируется дифференциальный аналог итерационного процесса Вейерштрасса одновременного нахождения всех корней алгебраического уравнения; устанавливаются особенности поведения решений такой системы дифференциальных уравнений и нелокальный характер сходимости вектора $z_j(t)\ \ (1 \leqslant j \leqslant n)$ при $t \to \infty$ к некоторой перестановке корней алгебраического уравнения. Доказана теорема о том, что подмножество пространства начальных условий, для которого все траектории стремятся к одной из перестановок корней, является открытым и связным, при этом отображение данного подмножества на множество значений коэффициентов уравнения является диффеоморфизмом. Найдена система инвариантов такого процесса; доказана асимптотическая устойчивость по Ляпунову состояний равновесия; исследованы вопросы продолжимости решений. Приведены численные примеры, демонстрирующие высокую эффективность такого процесса. Также доказана теорема, в которой результаты обобщаются для дифференциального аналога итерационного процесса Ньюнона — Канторовича в общем случае.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ Республики Беларусь «Конвергенция».

Литература

1. Трубников Ю. В., Пышненко О. В., Орехова И. А. *Оптимальные итерационные процессы.* Витебск: ВГУ, 2011.

2. Трубников Ю. В., Пышненко О. В., Силивончик В. В. *Дифференциальный аналог итерационного процесса Вейерштрасса* // Весн. Вiцебскага дзярж. ун-та. 2013. № 2(74). С. 5–13.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА НЬЮТОНА — КАНТОРОВИЧА ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ КВАДРАТНЫХ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский

Витебский государственный университет им. П. М. Машерова, Витебск, Беларусь
yurii_trubnikov@mail.com, misha360ff@mail.com

Введение. В настоящее время существующие методы решения нелинейных матричных уравнений очень громоздки и могут быть применены к ограниченным классам уравнений. Поэтому, в данной работе была поставлена цель — разработать эффективный приближенный метод решения квадратных матричных уравнений.

Результаты и их обсуждение. Рассмотрим квадратное матричное уравнение (1), где все матрицы имеют размерность $[n \times n]$:

$$AX^2 + BX + C = 0. \tag{1}$$

Как известно, метод Ньюнона — Канторовича [1, с. 679] решения операторного уравнения $F(X) = 0$ в банаховом пространстве состоит в построении последовательности

$$X_{n+1} = X_n - [F'(X_n)]^{-1}F(X_n) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Для уравнения (1) некоторую трудность представляет нахождение оператора $[F'(X_n)]^{-1}$. Предполагая, что матрица A обратима, упростим уравнение (1), умножив обе его части на A^{-1}. Обозначив $A^{-1}B \equiv M$, $A^{-1}C \equiv N$, получаем

$$X^2 + MX + N = 0. \tag{2}$$

Пусть $F(X) = X^2 + MX + N$. Тогда $F(X + H) - F(X) = (X + M)H + HX + {}+H^2$. Следовательно, дифференциалом левой части уравнения (2) является выражение $F'(X) = (X + M)H + HX$, и, таким образом, $[F'(X)]^{-1}F(X) = H$.

Тогда итерационный процесс Ньютона — Канторовича будет иметь вид:

$$X_{n+1} = X_n - H(X_n) \quad (n = 1, 2, \dots). \tag{3}$$

Таким образом, возникает следующий алгоритм решения уравнения (1).

1. Привести уравнение (1) к виду (2).

2. Найти матричную функцию $H = H(X)$ — решение линейного по H уравнения $X^2 + MX + N = (X + M)H + HX$.

3. Осуществить итерационный процесс (3).

Рассмотрим конкретный пример.

Пусть $A=\begin{pmatrix}2&2\\1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&1\\4&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-7&-6\\-4&-8\end{pmatrix}$. Взяв в качестве начального приближения поочередно матрицы $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-4i&0\\0&-4i\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-2-i&1+i\\-5+i&1+i\end{pmatrix}$, после 13 итераций получаем соответствующие корни:

$$X_1=\begin{pmatrix}1,726204&0,039936\\-0,556437&1,452316\end{pmatrix},\quad X_2=\begin{pmatrix}-3,36635-2,19717i&-0,98084-1.07972i\\10,0844+4.59095i&3.58522+2.25607i\end{pmatrix},$$

$$X_3=\begin{pmatrix}-1,927044&-0,273549\\-0,775496&-1,751476\end{pmatrix},\quad X_4=\begin{pmatrix}-1.28323-0.33043i&-0.73568+0.23719i\\-4.00175-0.37829i&0.56436+0.27154i\end{pmatrix}.$$

Заключение. Таким образом, в данной работе рассмотрены особенности применения метода Ньютона — Канторовича для решения квадратных матричных уравнений.

Литература

1. Канторович Л. В. *Функциональный анализ.* М: Наука, 1984.

ТОЧНЫЕ КОНСТАНТЫ В НЕРАВЕНСТВАХ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ НОРМ

Ю.В. Трубников, К.Л. Якуто

Витебский государственный университет им. П. М. Машерова, Витебск, Беларусь
k.yakuto@mail.ru

Введение. Две нормы $\|x\|$ и $\|x\|^*$ в линейном нормированном пространстве X называются эквивалентными [1], если существуют такие постоянные $c_1>0$ и $c_2>0$, что для всех $x\in X$ выполняется неравенство: $c_1\|x\|\leqslant\|x\|^*\leqslant c_2\|x\|$.

Целью настоящей работы является доказательство следующих неравенств и их интегральных аналогов:

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{b_j^p}{a_j^q}\right)^{1/(p-q)}\right)^{1/p-1/q}\leqslant\frac{[\sum_{j=1}^{n}(a_j|x_j|^p)]^{1/p}}{[\sum_{j=1}^{n}(b_j|x_j|^q)]^{1/q}}\leqslant\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\frac{a_j^{1/p}}{b_j^{1/q}}\right),\qquad(1)$$

где $a_j>0$, $b_j>0$, $1<q<p<\infty$,

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\frac{a_j^{1/q}}{b_j^{1/p}}\right)\leqslant\frac{[\sum_{j=1}^{n}a_j|x_j|^q]^{1/q}}{[\sum_{j=1}^{n}b_j|x_j|^p]^{1/p}}\leqslant\left(\sum_{j}\left(\frac{a_j^p}{b_j^q}\right)^{1/(p-q)}\right)^{1/q-1/p},\qquad(2)$$

где $a_j>0$, $b_j>0$, $1<q<p<\infty$).

Материал и методы. Основным методом, который был использован для доказательства, являлся метод математической индукции. Доказательство интегральных аналогов неравенств (1) и (2) производдилось по следующей схеме: сначала неравенства устанавливались для интегральных сумм, а затем осуществлялся переход к пределу при $n\to\infty$.

Результаты и их обсуждение. Отметим некоторые частные случаи неравенств (1) и (2). При $b_j = a_j \ \ (1 \leqslant j \leqslant n)$ получаем

$$\left(\sum_{j=1}^{n}(b_j)\right)^{1/p-1/q} \|x\|_q \leqslant \|x\|_p \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant n}(b_j^{1/p-1/q})\|x\|_q, \tag{3}$$

а если выполненено условие $\sum_{j=1}^{n}(b_j) = 1$, то

$$\|x\|_q \leqslant \|x\|_p \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant n}(b_j^{1/p-1/q})\|x\|_q, \tag{4}$$

причём правое из неравенств (4) в монографии [2] не приводится.

Интегральными аналогами неравенств (1) и (2) являются следующие неравенства:

$$\left(\int_m^M \left(\frac{g^p(x)}{h^q(x)}\right)^{1/(p-q)} dx\right)^{1/p-1/q} \leqslant \frac{(\int_m^M h(x)|f(x)|^p\, dx)^{1/p}}{(\int_m^M g(x)|f(x)|^q\, dx)^{1/q}} \quad (h(x) > 0, \quad g(x) > 0), \tag{5}$$

$$\frac{(\int_m^M h(x)|f(x)|^q\, dx)^{1/q}}{(\int_m^M g(x)|f(x)|^p\, dx)^{1/p}} \leqslant \left(\int_m^M \left(\frac{h^p(x)}{g^q(x)}\right)^{1/(p-q)} dx\right)^{1/q-1/p} \quad (h(x) > 0, \quad g(x) > 0). \tag{6}$$

Заключение. В результате проведённого исследования были доказаны неравенства (1) и (2), их интегральные аналоги (5) и (6). Были рассмотрены частные случаи исследуемых неравенств.

Литература

1. Антоневич А. Б., Радыно Я. В. *Функциональный анализ и интегральные уравнения.* Мн.: Университетское, 1984.

2. Харди Г. Г., Литлвуд Дж. Е., Полиа Г. *Неравенства.* М.: ИЛ, 1948.

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА РАЗДЕЛЕННОЙ РАЗНОСТИ ПО ДВУМ НЕТОЧНО ЗАДАННЫМ РАЗНОСТЯМ

С.А. Унучек

Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ, Москва, Россия
svun@mail.ru

Основные понятия. Рассмотрим пространство $l_{2,h}(\mathbb{Z})$, $h > 0$, всех последовательностей $x = \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ таких, что $\|x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} = (h\sum_{j\in\mathbb{Z}}|x_j|^2)^{1/2} < \infty$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Пусть для каждой последовательности $x \in l_{2,h}(\mathbb{Z})$ неточно известны разделенные разности k_1 и k_2 порядков $(1 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant n)$, т. е. известны две последовательности y_1 и y_2 такие, что $\|\Delta_h^{k_j}x - y_j\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \leqslant \delta_j$, $j = 1, 2$.

Рассмотрим задачу оптимального восстановления оператора k-й разделенной разности $\Delta_h^k x \ \ (k_1 \leqslant k \leqslant k_2)$ последовательности $x \in l_{2,h}(\mathbb{Z})$. В качестве методов восстановления рассмотрим всевозможные отображения $\varphi :\ (l_{2,h}(\mathbb{Z}))^2 \to l_{2,h}(\mathbb{Z})$. Погрешностью метода φ называется величина

$$e(l_{2,h}(\mathbb{Z}), k_1, k_2, \delta_1, \delta_1, \varphi) = \sup_{\substack{x\in l_{2,h}(\mathbb{Z}) \\ y_j\in l_{2,h}(\mathbb{Z}), j=1,2 \\ \|\Delta_h^{k_j}x-y_j\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}\leqslant\delta_j}} \|\Delta_h^k x - \varphi(y)\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(l_{2,h}(\mathbb{Z}),k_1,k_2,\delta_1,\delta_1)=\inf_{\varphi\colon (l_{2,h}(\mathbb{Z}))^2\to l_{2,h}(\mathbb{Z})} e(l_{2,h}(\mathbb{Z}),k_1,k_2,\delta_1,\delta_1,\varphi).$$

Метод $\widehat{\varphi}$, на котором достигается нижняя грань, будем называть оптимальным методом.

Основные результаты. Пусть $k,k_1,k_2,n\in\mathbb{N}$, $1\leqslant k_1<k<k_2\leqslant n$ и $\delta>0$. Положим

$$g(\omega)=\frac{e^{i\omega}-1}{h},\quad w_h^k=\frac{|e^{i\omega}-1|^{2k}}{h^{2k}},$$

$$\widehat{\lambda}_1=\frac{k_2-k}{k_2-k_1}\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^{2(k-k_1)/(k_2-k_1)},\quad \widehat{\lambda}_2=\frac{k-k_1}{k_2-k_1}\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{2(k_2-k)/(k_2-k_1)}.$$

Теорема. *Погрешность оптимального восстановления равна*

$$E(l_{2,h}(\mathbb{Z}),k_1,k_2,\delta_1,\delta_2)=\begin{cases}\delta_1^{(k_2-k)/(k_2-k_1)}\delta_2^{(k-k_1)/(k_2-k_1)}, & \dfrac{h}{2}\left(\dfrac{\delta_2}{\delta_1}\right)^{1/(k_2-k_1)}\leqslant 1,\\ \delta_1\left(\dfrac{2}{h}\right)^{k-k_1}, & \dfrac{h}{2}\left(\dfrac{\delta_2}{\delta_1}\right)^{1/(k_2-k_1)}>1.\end{cases}$$

При $(h/2)(\delta_2/\delta_1)^{1/(k_2-k_1)}>1$ *метод* $\widehat{\varphi}(y)=\Delta_h^{k-k_1}y$ *является оптимальным. При* $(h/2)(\delta_2/\delta_1)^{1/(k_2-k_1)}\leqslant 1$ *метод вида* $\widehat{\varphi}(y)=\Lambda_1y_1+\Lambda_2y_2$, *где* $\Lambda_i: \ l_{2,h}(\mathbb{Z})\to l_{2,h}(\mathbb{Z})$ *— линейные непрерывные операторы, действие которых в образах Фурье имеет вид* $F(\Lambda_iy_i)(\omega)=a_i(\omega)(Fy_i)(\omega)$, $i=1,2$, *где* $a_i(\omega)\in\mathbb{L}_\infty[-\pi;\pi]$ *— периодические функции, удовлетворяющие условиям*

$$\left|\alpha_1(\omega)-\frac{\widehat{\lambda}_1g^{k+k_1-2k_2}(\omega)}{\widehat{\lambda}_2+\widehat{\lambda}_1g^{2(k_1-k_2)}(\omega)}\right|\leqslant\frac{g^{k-k_2}(\omega)\sqrt{\widehat{\lambda}_1\widehat{\lambda}_2}}{\widehat{\lambda}_2+\widehat{\lambda}_1g^{2(k_1-k_2)}(\omega)}\sqrt{\widehat{\lambda}_1g^{2(k_1-k)}+\widehat{\lambda}_2g^{2(k_2-k)}(\omega)-1},$$

$$\alpha_2(\omega)=g^{k-k_2}(\omega)-g^{k_1-k_2}(\omega)\alpha_1(\omega),$$

является оптимальным.

Литература

1. Марчук А. Г., Осипенко К. Ю. *Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек* // Матем. заметки. 1975. Т. 17, № 3. С. 359–368.

2. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. *Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям* // Матем. сб. 2009. Т. 200, № 5. С. 37–54.

3. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Как наилучшим образом восстановить функцию по неточно заданному спектру // Матем. заметки. 2012. Т. 92, № 1. С. 59–67.

ОСОБЕННОСТЬ ВЫБОРА ВЕТВЕЙ ЛОГАРИФМОВ ПРОБЛЕМЫ РИМАНА ДЛЯ ДВУХ ПАР ФУНКЦИЙ

Л.А. Хвощинская[1], **Т.Н. Жоровина**[2]

[1] Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск, Беларусь
ludmila.ark@gmail.com

[2] Белорусский государственный университет, механико-математический факультет, Минск, Беларусь
zhorovina@bsu.by

Рассматривается проблема определения системы функций $Y(z)=(Y_1,Y_2)^\top$, аналитических в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, за исключением точек $a_1,a_2,\ldots,a_n,a_{n+1}=\infty$, по заданной группе монодромии $V_1,V_2,\ldots,V_n,V_{n+1}=(V_1\cdot V_2\cdots V_n)^{-1}$, где V_k — заданные невырожденные матрицы второго порядка.

Обозначив α_k, β_k — характеристические числа матриц V_k $(k = 1, \dots, n+1)$, находим числа $\rho_k = (2\pi i)^{-1} \ln \alpha_k$, $\sigma_k = (2\pi i)^{-1} \ln \beta_k$.

Зафиксируем ветви логарифмов ρ_k, σ_k $(k = 1, \dots, n)$, выбирая их, например, из условий

$$0 \leqslant \operatorname{Re} \rho_k < 1, \quad 0 \leqslant \operatorname{Re} \sigma_k < 1.$$

Тогда ветви логарифмов ρ_{n+1}, σ_{n+1} найдем из соотношения Фукса

$$\frac{dY}{dz} = Y \sum_{k=1}^{n} \frac{U_k}{z - a_k}, \tag{1}$$

причем $0 \leqslant \operatorname{Re}(\sigma_{n+1} - \rho_{n+1}) < 1$.

Решение проблемы Римана удовлетворяет системе дифференциальных уравнений [1]

$$\frac{dY}{dz} = Y \sum_{k=1}^{n} \frac{U_k}{z - a_k},$$

где $U_1 + U_2 + \dots + U_n = \begin{pmatrix} -\rho_{n+1} & \mu \\ 0 & 1 - \sigma_{n+1} \end{pmatrix}$, μ — некоторое число.

Рассматривается случай, когда матрица V_{n+1} приводится к треугольной жордановой форме, т. е. $\alpha_{n+1} = \beta_{n+1}$. Если из (1) следует, что $\rho_{n+1} = \sigma_{n+1}$, то это означает, что при обходе вокруг особой точки $a_{n+1} = \infty$ функция $Y(z)$ испытывает линейное преобразование. Если из (1) следует, что $\sigma_{n+1} = \rho_{n+1} + 1$, то для того, чтобы поведение функции $Y(z)$ оставалось таким же, необходимо скорректировать выбор ветвей логарифмов одной из пар σ_k, ρ_k, а именно: ветви логарифмов выбираются из условий

$$1 \leqslant \operatorname{Re} \rho_k < 2 \ \text{ и } \ 0 \leqslant \operatorname{Re} \sigma_k < 1 \ \text{ или } \ 0 \leqslant \operatorname{Re} \rho_k < 1 \ \text{ и } \ 1 \leqslant \operatorname{Re} \sigma_k < 2,$$

причем $|\operatorname{Re}(\sigma_k - \rho_k)| < 1$.

Литература

1. Хвощинская Л. А. *К проблеме Римана в случае произвольного числа особых точек* // Тр. междунар. конф. «Краевые задачи, специальные функции и дробное исчисление». 1996. С. 377–382.

EXISTENCE AND VIABILITY FOR FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH INITIAL CONDITIONS AT INNER POINTS

Q. Dong, G. Li

School of Mathematical Sciences, Yangzhou University, Yangzhou, China
qxdongyz@outlook.com, gli@yzu.edu.cn

In this report we discuss a Peano-type theorem for fractional differential equations with the Caputo derivative. Specifically, we study the existence of solutions to the initial value problems with initial conditions at inner points. It is also proved that the sufficient condition in order that a locally closed subset be a viable domain is the tangency condition. As a corollary, the existence of positive solutions is obtained.

Consider nonlinear fractional differential equation

$${}^{c}D_a^{\alpha} y(x) = f(x, y(x)), \quad x \geqslant x_0 \in (a, b), \tag{1}$$

with the initial value condition at an inner point (IVP for short)

$$y(x_0) = y_0, \tag{2}$$

where $0 < \alpha \leqslant 1$, ${}^cD_a^\alpha$ is the Caputo fractional derivative, $f : [a, b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ is a given function.

Theorem 1. *Let* $0 < \alpha < 1$ *and* $G = [a, b] \times \mathbb{R}^m$. *Assume that*

(H_1) $f : [a, b] \times C([a, b]; \mathbb{R}^m) \to C([a, b]; \mathbb{R}^m)$ *satisfies the Carathedory condition*;

(H_2) *for every* $r > 0$, *there is a constant* $M_r > 0$, *such that* $\|f(x, y)\| \leqslant M_r$ *for a. e.* $x \in [a, b]$ *and* $y \in \mathbb{R}^m$ *with* $\|y\| \leqslant r$.

Suppose $(x_0, y_0) \in G$ *and that there exists a* $r > 0$ *solving the inequality*

$$\frac{(x_0 - a)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \frac{M_r}{r} < \frac{1}{2}.$$

Then there exists an $h > 0$ *such that the IVP* (1), (2) *has at least a solution* $y \in C([x_0, x_0 + h]; \mathbb{R}^m)$.

Theorem 2. *Let* $D \subset \mathbb{R}^m$ *be a locally closed subset,* $0 < \alpha < 1$, *and assume that the hypotheses* (H_1), (H_2) *hold. Further assume that there is a number* $r_0 > 0$ *satisfying*

$$\frac{(b - a)^\alpha M_{r_0}}{\Gamma(\alpha + 1) r_0} < \frac{1}{2}.$$

If f *satisfies the tangency condition* $\liminf_{h \downarrow 0} h^{-1} d(y_0 + hf(x_0, y_0), D) = 0$ *for a. e.* $x_0 \in (a, b)$ *and all* $y_0 \in D$, *then* D *is the viable domain of the fractional differential equation* (1).

Aknowledgement. This research was supported by the National Natural Science Foundation of China (11271316 and 11571300).

References

1. Diethelm K. *The analysis of fractional differential equations* // Lecture Notes in Mathmatics. 2004. Berlin: Springer-Verlag, 2010.

2. Girejko E., Mozyrska D., Wyrwas D. *A sufficient condition of viabliity for fractional differential equations with the Caputo derivative* // J. Math. Anal. Appl. 2011. Vol. 381. P. 146–154.

3. Vrabie I. I. *Nagumo viability theorem. Revisited* // Nonlinear Anal. 2006. Vol. 64. P. 2043–2052.

4. Dong Q., Li G. *Viability for semilinear differential equations or retarded type* // Bull. Korean Math. Soc. 2007. Vol. 44, no. 4. P. 731–742.

ALMOST EVERYWHERE STRONG SUMMABILITY OF CUBIC PARTIAL SUMS OF d-DIMENSIONAL WALSH — FOURIER SERIES

U. Goginava

Ivane Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia
zazagoginava@gmail.com

Denote by $S_{m_1,\ldots,m_d}(f; x_1, \ldots, x_d)$ the rectangular partial sums of d-dimensional Walsh — Fourier series.

We study the a. e. strong summability of the cubic partial sums of the d-dimensional Walsh — Fourier series. Namely, we prove that the following are true.

Theorem 1. *Let* $f \in L(\log^+ L)^{d-1}(\mathbb{I}^d)$ *and* $d > 1$. *Then*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{2^n-1} (\exp(A|S_{m,\dots,m}(f;x_1,\dots,x_d) - f(x_1,\dots,x_d)|^{1/(d+2)}) - 1) = 0$$

a. e. on $\mathbb{I}^d$.

Theorem 2. *Let* $f \in L(\log^+ L)^{d-1}(\mathbb{I}^d)$ *and* $d > 1$. *Then for any* $p > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{2^n-1} |S_{m,\dots,m}(f;x_1,\dots,x_d) - f(x_1,\dots,x_d)|^p = 0$$

a. e. on $\mathbb{I}^d$.

GENERALIZED HURWITZ MATRICES AND POLYNOMIAL ZEROES LOCALIZATION

O.Y. Kushel, M.Y. Tyaglov

Shanghai Jiao Tong University, Shanghai, China
kushel@mail.com, tyaglov@sjtu.edu.cn

Given a polynomial

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

$a_0 > 0$, $a_i \in \mathbb{R}$, and a positive integer M, $1 \leqslant M \leqslant n$, we define an infinite-dimensional generalized Hurwitz matrix $H_M(f) := \{a_{Mj-i}\}_{i,j}$ (see, for example, [1]).

In our report, we discuss sufficient conditions for a polynomial $f(x)$ do not vanish in the sector

$$\{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| < \alpha\},$$

where $\alpha \leqslant \pi/M$. The obtained results generalize the classical Routh — Hurwitz criterion of the polynomial stability.

Theorem [2]. *A polynomial*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

where $a_0 > 0$, $a_i \in \mathbb{R}$, *of degree* n *has no zeroes in the sector*

$$\{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| < \pi/M\}$$

whenever its generalized Hurwitz matrix $H_M(f)$ *is totally nonnegative.*

References

1. Pinkus A. *Totally positive matrices.* Cambridge University Press, 2010.
2. Holtz O., Khrushchev S. and Kushel O. *Generalized Hurwitz matrices, generalized Euclidean algorithm and forbidden sectors of the complex plane* // Computational Methods and Function Theory. 2016. (to appear).

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ФРЕДГОЛЬМОВЫ ОПЕРАТОРЫ НА ПРОСТРАНСТВЕ ОГРАНИЧЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Е.А. Алехно

Белгосуниверситет, механико-математический факультет, Минск, Беларусь
alekhno@bsu.by

Ниже через ℓ_∞ обозначается пространство всех ограниченных последовательностей с sup-нормой. С помощью продолжения последовательности $x \in \ell_\infty$ до непрерывной функции $\widehat{x}$ на компактификации Стоуна — Чеха $\beta\mathbb{N}$ множества $\mathbb{N}$, пространство ℓ_∞ отождествляется с пространством непрерывных функций $C(\beta\mathbb{N})$. В частности, для произвольной точки $t \in \beta\mathbb{N}$, определим функционал x_t^* по правилу $x_t^* x = \widehat{x}(t)$, где $x \in \ell_\infty$.

Пусть T — (линейный, ограниченный) оператор на ℓ_∞. Как обычно, через $N(T)$ и $R(T)$ обозначаются ядро и область значений T, соответственно. Оператор T называется *полуфредгольмовым*, если либо $n(T) = \dim N(T) < \infty$ и $R(T)$ замкнуто, либо $d(T) = \operatorname{codim} R(T) < \infty$ и *фредгольмовым*, если $n(T) < \infty$ и $d(T) < \infty$.

В работе [1] изучаются необходимые и достаточные условия, при которых оператор T является полуфредгольмовым. С этой целью выделяются специальные классы операторов. Напомним, что всякий оператор T на ℓ_∞ представим в виде $Tx = (x_1^* x, x_2^* x, \dots)$, где $\{x_n^*\}$ — ограниченная последовательность в ℓ_∞^*. Оператор T называется *почти диагональным*, если он определяется последовательностью $\{x_n^*\} = \{d_n x_{t_n}^*\}$, где $\{d_n\}$ и $\{t_n\}$ — последовательности в $\mathbb{R}$ и $\beta\mathbb{N}$, соответственно. Оператор T называется *обобщенно диагональным*, если любой элемент $x^* \in L = \operatorname{Lin}\{x_1^*, x_2^*, \dots\}$ представим в виде линейной комбинации попарно дизъюнктных (в смысле теории полуупорядоченных пространств) функционалов $x_{n_1}^*, \dots, x_{n_k}^*$.

Теорема 1. *Соотношение $n(T) < \infty$ имеет место в том и только том случае, когда существует конечномерное подпространство Y пространства ℓ_∞^*, для которого $\overline{L} \cap Y = \{0\}$ и пространство $L + Y$ разделяет ℓ_∞.*

Теорема 2. *Пусть для обобщенно диагонального оператора T либо $\operatorname{card}\{n : x_n^* \neq 0\} < \infty$, либо $\liminf\limits_{\substack{n\to\infty \\ x_n^* \neq 0}} \|x_n^*\| > 0$. Каждое из следующих условий гарантирует замкнутость $R(T)$:*

1) *для некоторого $\delta > 0$ и всех $x \in \ell_\infty$ справедливо неравенство $\sup\limits_{l^* \in L,\ \|l^*\| \leqslant 1} l^* x \geqslant \delta \|x\|$;*

2) *T — почти диагональный оператор.*

Элемент t_{n_0} называется *изолированным* элементом последовательности $\{t_n\}$, если существует окрестность $\mathcal{U}_{t_{n_0}}$, для которой $t_n \notin \mathcal{U}_{t_{n_0}}$ при всех $n \neq n_0$. *Дефект* $d\{t_n\}$ последовательности $\{t_n\}$ определяется следующим образом. Если все элементы $\{t_n\}$ изолированы, полагаем $d\{t_n\} = 0$, а если их бесконечное число, то $d\{t_n\} = \infty$. В противном случае, $d\{t_n\}$ — это наименьшее число таких элементов последовательности $\{t_n\}$, что после их удаления мы получим последовательность все элементы которой изолированы.

Теорема 3. *Для почти диагонального оператора T справедливы следующие утверждения*:

1) *условие*
$$\{n : 0 < |d_n| < \delta_1\} = \varnothing \tag{1}$$
при некотором $\delta_1 > 0$ является достаточным, а в случае, когда для всех достаточно больших n всякий элемент t_n является изолированным элементом последовательности $\{t_n\}$, и необходимым, для замкнутости области значений $R(T)$;

2) *если имеет место соотношение* (1), *то* $d(T) = \mathrm{card}\{n : d_n = 0\} + d\{t_n\}_{d_n \neq 0}$ *и, в частности, если* $\{n : |d_n| < \delta_2\} = \varnothing$ *для некоторого* $\delta_2 > 0$, *то* $d(T) = d\{t_n\}$;

3) *если же при любом* $\delta_1 > 0$ *не выполняется соотношение* (1), *то* $d(T) = \infty$;

4) *если* $\mathrm{codim}\, R(T) = \infty$, *то* $\mathrm{codim}\, \overline{R(T)} = \infty$.

Докладчик не знает примера оператора T на ℓ_∞, для которого $\overline{R(T)} = \ell_\infty$, но $R(T) \neq \ell_\infty$. В этом направлении имеет место следующий результат (см. также пункт **(d)** выше).

Теорема. *Пусть Y — замкнутое подпространство ℓ_∞, причем* $\mathrm{codim}\, Y = \infty$. *Тогда существует последовательность $\{A_n\}$ попарно непересекающихся подмножеств $\mathbb{N}$, для которых $\chi_{A_n} \notin Y$ при всех n.*

Литература

1. Alekhno E. A. *Fredholm operators on the space of bounded sequences* // Acta Math. Sci. 2016. Vol. 36B, no. 2. P. 614–634.

ВВЕДЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИОНАЛОВ НА C^*-АЛГЕБРЕ

А.Б. Антоневич [1,2], **А.Н. Глаз** [1]

[1] Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
antonevich@bsu.by, anna-glaz@yandex.ru
[2] Университет в Белостоке, Белосток, Польша

В ряде задач естественно возникают и исследуются многими учеными дифференциальные уравнения, содержащие в качестве коэффициентов обобщенные функции. Были предложены различные подходы к разрешению классической проблемы [1] о корректном определении произведения обобщенных функций. В докладе предполагается обсудить следующий подход.

Определения. Пусть $\mathbb{A}$ — C^*–алгебра функций, содержащая $C[a, b]$, и $0 \in (a, b)$.

Линейный ограниченный функционал u на $C[a, b]$ будем называть (классической) обобщенной функцией, а линейный ограниченный функционал U на алгебре $\mathbb{A}$ — новой обобщенной функцией. Будем назвать u и U ассоциированными ($u \approx U$), если сужение U на $C[a, b]$ есть u. Произведение aU новой обобщенной функции U на функцию $a \in \mathbb{A}$ определим по классической формуле $\langle aU, \varphi\rangle = \langle U, a\varphi\rangle$ как функционал на $\mathbb{A}$.

Дельта-функция Дирака $\langle \delta, \varphi\rangle = \varphi(0)$ однозначно продолжается до функционала на $C[a, b]$, а на более широкой алгебре $\mathbb{A}$ может иметь много продолжений, т. е. ассоциированных новых обощенных функций.

Случай $\mathbb{A} = \mathbb{PC}$. Продолжения δ-функции на алгебру $\mathbb{PC}$, порожденную кусочно-непрерывными функциями, образуют однопараметрическое семейство и имеют вид
$$\langle \delta_\vartheta, \varphi\rangle = \vartheta\varphi(+0) + (1 - \vartheta)\varphi(-0), \quad \vartheta \in \mathbb{C},$$

т. е. линейную комбинацию функционалов $\langle \delta^+, \varphi \rangle = \varphi(+0)$, $\langle \delta^-, \varphi \rangle = \varphi(-0)$.

При этом произведение задается формулой

$$\langle u\delta_\vartheta, \varphi \rangle = \vartheta u(+0)\varphi(+0) + (1-\vartheta)u(-0)\varphi(-0).$$

Выбор ϑ диктуется предметной области, где возникают обобщенные функции.

Случай $\mathbb{A} = \mathbb{PCE}$. Пусть $\mathbb{PCE}$ — алгебра функций с разрывами экспоненциального вида, т. е. порожденная функциями вида

$$\omega^\pm_\theta(t) = e^{\pm i/(t-\theta)}.$$

Такие функции возникают, например, при придании смысла понятию решения для формально записанного дифференциального уравнения $(t-\theta)u'(t) = [i + a\delta]u(t)$.

Продолжения δ-функции, согласно теореме 7 [2] об общем виде функционала на $\mathbb{PCE}$, параметризуются числом $\vartheta \in \mathbb{C}$ и функциями g_1, g_2, порождающими нормированные заряды μ_{g_1} и μ_{g_2} на окружности $\mathbf{S}^1$,

$$\langle \delta_{\vartheta,g_1,g_2}, \varphi \rangle = \vartheta \int\limits_{\lambda\in\mathbf{S}^1} \varphi(0+0;\lambda)\,d\mu_{g_1} + (1-\vartheta)\int\limits_{\lambda\in\mathbf{S}^1} \varphi(0-0;\lambda)\,d\mu_{g_2}.$$

Здесь первый интеграл берется от функции, составленной из пределов слева, а второй — от функции, составленной из пределов справа, а именно,

$$\varphi(\tau \pm 0;\lambda) := \lim_{k\to\pm\infty} \varphi\left(\frac{1}{2\pi k + \lambda} + \tau\right), \quad \tau \in (a,b), \quad \lambda \in [0, 2\pi).$$

Литература

1. Данфорд Н., Шварц Дж. *Линейные операторы:* в 3 т. Т. 1: Общая теория. М.: Изд-во иностранной литературы, 1963.

2. Глаз А. Н. *Пространство максимальных идеалов алгебры функций с разрывами экспоненциального типа и меры на нем* // Весн. Вiцебскага дзярж. ўн-та. 2014. № 5. С. 13–20.

ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ АЛГЕБРЫ И ИХ АВТОМОРФИЗМЫ

А.Б. Антоневич, А.Н. Глаз

Белгосуниверситет, механико-математический факультет, Минск, Беларусь
antonevich@bsu.by, anna-glaz@yandex.ru

Пространство максимальных идеалов почти-периодической алгебры. Пусть $CB(\mathbb{R}^m)$ есть пространство ограниченных непрерывных функций на $\mathbb{R}^m$ с sup-нормой. Множество $CAP(\mathbb{R}^m)$ непрерывных почти-периодических функций может быть определено как наименьшая замкнутая подалгебра в $CB(\mathbb{R}^m)$, содержащая все экспоненты — функции вида $e^{i2\pi\langle h,x\rangle}$, где $x \in \mathbb{R}^m$, $h \in \mathbb{R}^m$, $\langle h,x\rangle$ — скалярное произведение.

У алгебры $CAP(\mathbb{R}^m)$ существует много C^*-подалгебр (т. е. замкнутых и симметричных). С каждой такой алгеброй $\mathcal{A}$ связана группа частот $H(\mathcal{A}) \subset \mathbb{R}^m$, состоящая из тех h, при которых $e^{i2\pi\langle h,x\rangle} \in \mathcal{A}$.

Согласно теореме Гельфанда — Наймарка, алгебра $\mathcal{A}$ изоморфна алгебре $C(\mathcal{M}(\mathcal{A}))$, состоящей из всех непрерывных функций на компактном пространстве $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, которое называется *пространством максимальных идеалов* алгебры $\mathcal{A}$.

Пусть G есть коммутативная локально компактная группа. *Характером группы* G называется гомоморфизм $f : G \to \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ в группу комплексных числе с модулем 1. Множество характеров образует *двойственную группу* $\widehat{G}$, которая также является локально компактной в соответствующей топологии. Согласно теории двойственности Понтрягина, если исходная группа дискретна, то двойственная к ней является компактной.

Теорема 1. *Пусть* $\mathcal{A}$ *есть* C^**-подалгебра в* $CAP(\mathbb{R}^m)$. *Тогда* $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \widehat{H(\mathcal{A})}$, *т. е. пространство максимальных идеалов алгебры есть двойственная группа к группе частот.*

Автоморфизмы квазипериодических алгебр. Подалгебра $\mathcal{A}$ в $CAP(\mathbb{R}^m)$ называется *квазипериодической*, если она порождена конечным числом N экспонент $e^{i2\pi\langle h_j,x\rangle}$. Группа частот $H(\mathcal{A})$ такой алгебры есть $\mathbb{Z}^N$, а пространство максимальных идеалов есть N-мерный тор $\mathbb{T}^N$.

Квазипериодические алгебры представляют особый интерес в связи с многочисленными приложениями [1]. В частности, при исследовании квазикристаллов один из основных вопросов заключается в описании афинных отображений $\alpha(x) = Qx+b$ пространства $\mathbb{R}^m$, порождающих автоморфизмы рассматриваемой квазипериодической алгебры [1, 2].

Теорема 2. *Афинное отображение* $\alpha(x) = Qx + b$ *задает автоморфизм некоторой квазипериодической алгебры тогда и только тогда, когда матрица* Q *является алгебраической единицей — существует полином с целыми коэффициентами*

$$p(t) = \sum_{0}^{n} a_k t^k,$$

у которого $a_n = 1$, $a_0 = \pm 1$, *такой, что* $P(Q) = 0$.

Литература

1. Дынников И. А. Новиков С. П. *Топология квазипериодических функций на плоскости* // Успехи мат. наук. 2005. Т. 60, вып. 1(361). С. 3–28.

2. Ле Ты Куок Тханг, Пиунихин С. А., Садов В. А. *Геометрия квазикристаллов* // Успехи мат. наук. 1993. Т. 48, вып. 1(289). С. 41–102.

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ АППРОКСИМИРУЮЩЕГО СЕМЕЙСТВА ОПЕРАТОРОВ

А.Б. Антоневич, М.Г. Кот

Белгосуниверситет, механико-математический факультет, Минск, Беларусь
antonevich@bsu.by, mtorkaylo@mail.ru

Уравнения с обобщенными коэффициентами являются символической записью, так как понятие решения для таких уравнений не определено, поскольку в теории обобщенных функций не определены произведения, входящие в такие уравнения. Один из подходов к определению понятия решения заключается в рассмотрении аппроксимирующего семейства операторов L_ε, зависящего от малого параметра ε. Тогда решением называется предел решений аппроксимирующих уравнений при $\varepsilon \to 0$.

Оказывается, что такой предел не определяется однозначно символической записью уравнения, а зависит от выбранного семейства аппроксимирующих операторов.

В конкретных прикладных задачах возникают не указанные пределы, а решения уравнения с оператором L_ε при некотором малом фиксированном ε. Поэтому представляет интерес информация о свойствах операторов L_ε при малых ε и, в частности, асимптотика собственных значений таких операторов.

В работе рассматриваются символические уравнения

$$-\Delta u + a\delta u - \lambda u = f, \tag{1}$$

в которых коэффициентом является дельта-функция Дирака и аппроксимирующие семейства операторов L_ε в пространстве $L_2(\mathbb{R}^3)$, построенные в [1]. В выражения для L_ε входят аппроксимации коэффициента a, имеющие вид $a(\varepsilon) = a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2$.

Собственные значения $\lambda_j(\varepsilon)$ операторов L_ε определяются как ветви решений уравнения вида $f(\varepsilon, \lambda) = 0$, где f есть аналитическая функция двух переменных, которая строится по заданному аппроксимирующему семейству.

Если $f(\varepsilon, \lambda)$ есть многочлен от двух переменных, то асимптотика ветвей решений может быть построена методом диаграмм Ньютона, описание которого содержится, например, в [2]. Но при применении этого метода в случае произвольных аналитических функций $f(\varepsilon, \lambda)$ возникают существенные препятствия.

В работе показано, что аналитические функции, $f(\varepsilon, \lambda)$, соответствующие рассматриваемым аппроксимациям уравнения (1), имеют специальный вид, что позволяет применить для получения асимптотики некоторую модификация метода диаграмм Ньютона.

Основной результат выглядит следующим образом. Для коэффициентов $a(\varepsilon)$ общего положения все собственные значения $\lambda_j(\varepsilon)$ стремятся к ∞, а пределом аппроксимирующих решений является решение уравнения

$$-\Delta u - \lambda u = f. \tag{2}$$

Но существуют коэффициенты специального вида, удовлетворяющие т.н. *условию резонанса*, при которых имеется одна ветвь $\lambda_{j_0}(\varepsilon)$, имеющая конечный предел при $\varepsilon \to 0$. В случае резонанса аппроксимирующие решения существенно отличаются от решений уравнения (2).

Литература

1. Антоневич А. Б., Романчук Т. А. *Уравнения с дельта-образными коэффициентами: метод конечномерных аппроксимаций.* Saarbrucken, Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012. 137 с.

2. Забрейко П. П., Кривко-Красько А. В. *Диаграммы Ньютона и алгебраические крывые* // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2014. Т. 22, №. 2. С. 32–45.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОПЕРАТОРНО ЛИПШИЦЕВЫХ ФУНКЦИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А.А. Атвиновский, А.Р. Миротин

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь
aatvinovskiy@gmail.com, amirotin@yandex.ru

Операторно липшицевым функциям в гильбертовых пространствах посвящена обширная литература (см., например, [1 — 3]). В докладе рассматривается класс операторно липшицевых функций в банаховых пространствах.

Определение 1. Пусть $b > 0$. Скажем, что функция f относится к классу S_b^0, если она имеет вид $g(z)z$, где функция g принадлежит классу R^0 [4].

Определение 2. Будем говорить, что замкнутый плотно определенный оператор A в комплексном банаховом пространстве X принадлежит классу $V_b^0(X)$, если $(0,b] \subset \rho(A)$ и для некоторой постоянной $M_A > 0$ выполняется неравенство

$$\|R(t,A)\| \leqslant \frac{M_A}{t}, \quad t \in (0,b].$$

Определение 3. Для функции $f(z) = g(z)z$ класса S_b^0 и оператора $A \in V_b^0(X)$ положим $f(A) := g(A)A$, где $g(A)$ понимается в смысле [4].

Теорема 1. *Функции класса $f \in S_b^0$ являются операторно липшицевыми в том смысле, что для любых операторов $A, B \in V_b^0(X)$ таких, что оператор $A - B$ ограничен, оператор $f(A) - f(B)$ тоже ограничен, и выполняется неравенство*

$$\|f(A) - f(B)\| \leqslant M_A M_B f'(0)\|A - B\|.$$

Кроме того, для рассматриваемого функционального исчисления справедливо следующее неравенство моментов.

Теорема 2. *Пусть $A \in V_b^0(X)$, $f \in S_b^0$. Тогда для любого $x \in D(A)$, $\|x\| = 1$*

$$\|f(A)x\| \leqslant -(2M_A + 1)f(-\|Ax\|).$$

Следствие. *Если функция f ограничена на $(-\infty, 0]$, то оператор $f(A)$ ограничен.*

Литература

1. Peller V. V. *The behavior of functions of operators under perturbations.* April 10, 2009. Preprint, http://arxiv.org/abs/0904.1761 [math. FA].

2. Kissin E., Shulman V. S. *Classes of operator-smooth functions. I. Operator Lipschitz functions* // Proc. Edinburgh Math. Soc. 2005. Vol. 48. P. 151—173.

3. Kissin E., Potapov D., Sukochev F., Shulman V. S. *Lipschitz functions, Schatten ideals and unbounded derivations* // Functional Analysis and its Applications. 2011. Vol. 45, no. 2. P. 93–96.

4. Атвиновский А. А., Миротин А. Р. *Об одном функциональном исчислении замкнутых операторов в банаховом пространстве. II* // Изв. вузов. Математика. 2015. № 5. С. 3–16.

ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Е.В. Банюкевич

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
cheb-alena@mail.ru

История вейвлетов исчисляется с начала 80-х годов XX века, первоначально они использовались для исследования сигналов. Непрерывное вейвлет-преобразование было впервые предложено французским геофизиком Ж. Морле при изучении сейсмических данных. В 1984 году Ж. Морле и А. Гроссман разработали детальное математическое учение о непрерывном вейвлет-преобразовании и его приложениях. Не смотря на то, что в дальнейшем теория вейвлетов стала активно развиваться, остаются открытыми некоторые актуальные вопросы, в частности, исследование вейвлет-преобразования на пространстве обобщенных функций. Рассмотрим некоторые результаты полученные при изучении этой проблемы.

Пространство Шварца $S(\mathbb{R})$ — пространство бесконечно дифференцируемых быстро убывающих комплексно-значных функций f на прямой $\mathbb{R}$ и

$$S = \left\{ f \in C^{\infty} : |x^m f^{(k)}| < +\infty \right\},$$

для всех $k,\ m \in \mathbb{N}_0$, $\mathbb{N}_0$ — множество целых неотрицательных чисел.

Пусть $\widetilde{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ пространство всех функций $f \in C^{\infty}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ таких, что для $\alpha, \beta, l, k \in \mathbb{N}_0$ выполняется следующее условие

$$\gamma_{l,\alpha,k,\beta}(f) = \sup_{\substack{(a,b)\in(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)\\ l+\alpha\leqslant k+\beta}} \left| a^l b^{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial a}\right)^k \left(\frac{\partial}{\partial b}\right)^{\beta} f(a,b) \right| < \infty.$$

Очевидно, пространство $S(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ содержится в $\widetilde{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$. Доказано, что вейвлет-преобразование на пространстве Шварца является непрерывным линейным отображением.

Пусть S' сопряженное пространство, т. е. является пространством всех медленно растущих обобщенных функций. Предположим, что вейвлет $\psi \in S$, тогда вейвлет-преобразование обобщенной функции $f \in S'$ медленного раста

$$Wf(a,b) = \left\langle f(x), \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \right\rangle, \quad b \in \mathbb{R}, \quad a > 0,$$

значение обобщенной функции медленного роста f на функции ψ быстро убывающей. В связи со сказанным выше $W'T$ обобщенное вейвлет-преобразование функции $T \in \widetilde{S}'$, двойственное для $\widetilde{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$, может быть определено следующим образом:

$$\langle W'T, f \rangle = \langle T, Wf \rangle, \quad f \in S(\mathbb{R}).$$

Доказано, что обобщенное вейвлет-преобразование $W' : \widetilde{S}' \to S'$ является линейным и непрерывным.

Рассмотрено вейвлет-преобразование на пространстве Соболева и доказана его непрерывность.

Изучено вейвлет-преобразование обобщенных функций D'_{L_2}-типа и доказано, что вейвлет-преобразование D'_{L_2}-типа обобщенных функций является взаимно однозначным непрерывным линейным отображением.

На основании теоремы Трибеля доказана непрерывность вейвлет-преобразования на пространстве Бесова и на пространстве Лизоркина — Трибеля.

ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТИПА РИМАНА — ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ НОРМАЛЬНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В $\mathbb{R}^4$

А.И. Басик, Н.В. Солопов

Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина, Брест, Беларусь

alex-basik@rambler.ru, snv2559469@gmail.com

В настоящей работе рассматривается класс нормальных эллиптических систем четырех дифференциальных уравнений первого порядка с четырьмя переменными [1].

Для таких систем в неограниченной двухсвязной области специального вида изучается неклассическая краевая задача, аналогичная задаче Римана — Гильберта [2].

Пусть $h>0$, через Ω обозначим множество $\{x=(x_1,x')\in\mathbb{R}^4 \mid 0<x_1<h,\ x'\in \in\mathbb{R}^3\}$. Под задачей типа Римана — Гильберта будем понимать задачу отыскания решения $U=(u_1(x),u_2(x),u_3(x),u_4(x))^\top$ эллиптической системы

$$\Lambda U := \sum_{j=1}^{4} A_j \frac{\partial U}{\partial x_j} + BU = F(x) \quad (x\in\Omega), \tag{1}$$

удовлетворяющего граничным условиям

$$u_1|_{x_1=0} = u_2|_{x_1=h} = u_3|_{\partial\Omega} = u_4|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

Здесь $A_1=E_4$ — единичная матрица четвертого порядка, A_2,A_3,A_4 — постоянные действительные квадратные матрицы размера 4×4, удовлетворяющие соотношениям

$$A_k A_j^\top + A_j A_k^\top = 2\delta_{jk}E_4 \quad (j,k=\overline{1,4}), \tag{3}$$

где $^\top$ означает транспонирование, δ_{jk} — символ Кронекера (при выполнении (3) системы вида (1) являются нормальными эллиптическими [1]); B,F — заданные в области Ω, соответственно матрица-функция размера 4×4 и четырехмерный вектор-столбец.

Через $C_\Lambda(\Omega)$ обозначим класс бесконечно дифференцируемых вектор-функций U удовлетворяющих граничным условиям (2) и интегрируемых в квадрате по Ω вместе со всеми производными до второго порядка включительно. Замыкание $C_\Lambda(\Omega)$ по норме пространства $W_2^1(\Omega)$ обозначим через $S_\Lambda(\Omega)$.

Через

$$\Lambda^* := -A_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \sum_{j=2}^{4} A_j\frac{\partial}{\partial x_j} + B^\top$$

обозначим формально сопряженный оператор оператору Λ, $S_{\Lambda^*}(\Omega)$ — соответствующее формально сопряженное пространство.

Будем называть вектор-функцию $U\in L_2(\Omega)$ обобщенным решением задачи (1), (2), если для любой вектор-функции $V\in S_{\Lambda^*}(\Omega)$ выполняется равенство

$$\langle F,V\rangle_{L_2(\Omega)} = \langle U,\Lambda^*V\rangle_{L_2(\Omega)}.$$

Теорема. *Пусть* $C=\min\{1/\sqrt{2},1/h\}$, *матрица* $B(x)$ *непрерывна в слое* $\overline{\Omega}$ *и существует число* $\delta\in[0,(\sqrt{2}-1)C]$, *такое, что для любой вектор-функции* $U\in \in S_\Lambda(\Omega)$ *выполняется неравенство*

$$\|BU\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \delta\|U\|_{L_2(\Omega)}.$$

Тогда для любой $F\in L_2(\Omega)$ *существует обобщенное решение задачи типа Римана — Гильберта.*

Литература

1. Балабаев В. Е. *Нормальные эллиптические системы первого порядка* // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 1. С. 71–84.

2. Ошоров Б. Б. *Об одном четырехмерном аналоге системы уравнений Коши — Римана* // Неклассические уравнения математической физики. 2007. С. 212–220.

ЛОКАЛЬНЫЙ ПРИНЦИП БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ ЭМПИРИЧЕСКИХ МЕР ПО ОТНОШЕНИЮ К БЕСКОНЕЧНЫМ МЕРАМ

В.И. Бахтин, Э.Э. Сокол

Белгосуниверситет, механико-математический факультет, Минск, Беларусь
bakhtin@tut.by, edward.e.sokol@gmail.com

Рассматривается действие Кульбака, область определения которого расширяется по второму аргументу до σ-конечных мер. Обобщается локальный принцип больших уклонений [1] (первые шаги к этому были сделаны в работе [2]), а именно, устанавливается его справедливость для σ-конечных мер.

Пусть $(X,\mathfrak{A})$ — измеримое пространство, на котором заданы: $M_1(X)$ — множество всех вероятностных мер и $M_\sigma(X)$ — совокупность всех σ-конечных мер.

Определим *действие Кульбака* $\rho(\nu,\mu)$ как функцию от вероятностной меры $\nu \in M_1(X)$ и σ-конечной меры $\mu \in M_\sigma(X)$ следующим образом:

$$\rho(\nu,\mu)=\begin{cases} -\infty, & \text{если } \exists\, \varphi(x)=\dfrac{d\nu(x)}{d\mu(x)} \text{ и } \displaystyle\int\limits_{\{\varphi<1\}} \varphi\ln\varphi\, d\mu=-\infty, \\ \displaystyle\int\limits_X \varphi\ln\varphi\, d\mu, & \text{если } \exists\, \varphi(x)=\dfrac{d\nu(x)}{d\mu(x)} \text{ и } \displaystyle\int\limits_{\{\varphi<1\}} \varphi\ln\varphi\, d\mu>-\infty, \\ +\infty, & \text{если } \nexists\, \varphi(x)=\dfrac{d\nu(x)}{d\mu(x)}. \end{cases}$$

Для каждой конечной выборки $x=(x_1,\dots,x_n)\in X^n$ определим *эмпирическую меру* $\delta_{x,n}$, приписывающую каждому x_i вероятность $1/n$.

Тонкую топологию на $M_1(X)$ определим с помощью системы окрестностей

$$O(\mu)=\left\{\nu\in M_1(X): \left|\int\limits_X f_i\,d\nu-\int\limits_X f_i\,d\mu\right|<\varepsilon,\quad i=1,2,\dots,k\right\},\qquad \mu\in M_1(X),$$

где $f_1,f_2,\dots,f_k\in L^1(X,\mu)$ и $\varepsilon>0$. Считается, что окрестность $O(\mu)$ содержит лишь такие меры ν, для которых интегралы $\int_X f_i\,d\nu$ сходятся.

Теорема. *Для любых мер $\nu\in M_1(X)$, $\mu\in M_\sigma(X)$ и числа $\varepsilon>0$ найдется такая тонкая окрестность $O(\nu)\subset M_1(X)$, что*

$$\mu^n\bigl\{x=(x_1,\dots,x_n)\in X^n \bigm| \delta_{x,n}\in O(\nu)\bigr\}\leqslant e^{-n(\rho(\nu,\mu)-\varepsilon)}. \tag{1}$$

С другой стороны, для любых мер $\nu\in M_1(X)$, $\mu\in M_\sigma(X)$, положительного числа ε и тонкой окрестности $O(\nu)\subset M_1(X)$ имеет место асимптотическая оценка

$$\mu^n\bigl\{x=(x_1,\dots,x_n)\in X^n \bigm| \delta_{x,n}\in O(\nu)\bigr\}\geqslant e^{-n(\rho(\nu,\mu)+\varepsilon)},\qquad n\to\infty. \tag{2}$$

При $\rho(\nu,\mu)=+\infty$ разность $\rho(\nu,\mu)-\varepsilon$ в (1) следует заменить на $1/\varepsilon$, а если $\rho(\nu,\mu)=-\infty$, то сумму $\rho(\nu,\mu)+\varepsilon$ в (2) следует заменить на $-1/\varepsilon$.

Литература

1. Бахтин В. И. *Спектральный потенциал, действие Кульбака и большие уклонения эмпирических мер на измеримых пространствах* // Теор. вер. и примен. 2014. Т. 59, № 4. С. 625–638.
2. Сокол Э. Э. *Обобщение теоремы Макмиллана на случай счетного алфавита* // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2015. Т. 23, № 1. С. 115–122.

АСИМПТОТИЧЕСКИ ОБРАТНЫЕ К ПОЛИНОМИАЛЬНЫМ СИСТЕМНЫМ ЭВОЛЮЦИОННЫМ ОПЕРАТОРАМ

Ю.М. Вувуникян

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
vuv@grsu.by

Определяется основной объект исследования — асимптотически обратный оператор к общему полиномиальному системному оператору, который является обобщением эволюционного оператора с импульсными характеристиками, представляющие собой векторнозначные обобщенные функции с носителями на положительных гипероктантах.

В работах автора (см., например, [1–3]) был развит метод моделирования сложных нелинейных систем с помощью эволюционных операторов с обобщенными импульсными и спектральными характеристиками. Напомним, что полиномиальным эволюционным оператором степени k называется оператор A, определяемый равенством

$$Ax = \sum_{n=1}^{k} S_n(a_n * x^{\otimes n}),$$

где $x^{\otimes n}$ — n-я тензорная степень функции $x \in X$, a_n — обобщенная функция на пространстве $\mathbb{R}^n$, носитель которой содержится в положительном гипероктанте $[0; +\infty)^n$, $*$ — операция свертки, S_n — оператор сокращения переменных степени n : $S_n f(t_1, t_2, \ldots, t_n) = f(t, t, \ldots, t)$.

При этом линейный оператор A_1, определяемый равенством

$$A_1 x = a_1 * x,$$

называется *первой операторной компонентой оператора* A. Билинейный оператор A_2, определяемый равенством

$$A_2(x_1, x_2) = S_2(a_2 * (x_1 \otimes x_2)) \quad (x_1, x_2 \in X),$$

называется *второй операторной компонентой оператора* A. В общем случае, для любого натурального числа $n \leqslant k$ определяется полилинейный оператор A_n,

$$A_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = S_n(a_n * (x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_n)) \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n \in X),$$

который называется n-й *операторной компонентой оператора* A.

Полиномиальным системным оператором степени k будем называть оператор A, действующий из пространства X в пространство Y, определяемый равенством

$$Ax = \sum_{n=1}^{k} A_n x^{\otimes n},$$

где A_n $(n = 1, 2, \ldots, k)$ — n-линейные операторы, действующие из пространства $X^{\otimes n}$ в пространство X, $x^{\otimes n}$ — n-я тензорная степень вектора $x \in X$, n — линейный оператор A_n $(n \leqslant k)$ будем называть n-й *операторной компонентой оператора* A.

Пусть A — полиномиальный системный оператор степени k, B — полиномиальный системный оператор степени r, C — оператор, являющийся композицией операторов B и A, т. е.

$$F = A^{\circ} B.$$

Оператор B называется *асимптотически обратным* степени r к оператору A, если $C = I + \sum_{j=r+1}^{kr} C_j$ и $F = I + \sum_{j=r+1}^{kr} F_j$, где I — тождественный оператор в пространстве X.

Доказана теорема о композиции полиномиальных системных оператором, с помощью которой разработаны методы построения асимптотических операторов любой степени к произвольным полиномиальным системным операторам.

Литература

1. Вувуникян Ю. М. *Эволюционные операторы с обобщёнными импульсными и спектральными характеристиками.* Гродно: ГрГУ, 2007.

2. Вувуникян Ю. М. *Нелинейные эволюционные операторы с композиционно симметричными обобщенными характеристиками* // Докл. НАН Беларуси. 2010. Т. 54, № 2. С. 5–11.

3. Вувуникян Ю. М. *Обобщенные функции и нелинейные эволюционные операторы.* Гродно: ГрГУ, 2014.

ОБ УТОЧНЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ НУЛЕВЫХ СТЕПЕНЕЙ ВЫРОЖДЕННОЙ МАТРИЦЫ И ОПЕРАТОРА ДИСКРЕТНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Е.А. Ермолаев

Институт технологии металлов НАН Беларуси, Могилёв, Беларусь
lavani@tut.by

Пусть A — квадратная матрица конечного порядка n над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Обычно полагают, что нулевая степень A^0 матрицы A всегда равна единичной $(n \times n)$-матрице I (см., например, [1, с. 24]). Представляет интерес, однако, и понимание A^0 как произведения [2]:

$$A^0 = A^{-1}A = AA^{-1}, \tag{1}$$

где $A^{-1} \equiv A^D$ — (обобщенная) обратная матрица Дразина для A [3, гл. 1]. При этом A^0 оказывается проекционной матрицей, которая совпадает с I, если $\det A \neq 0$, но отличается от I, если $\det A = 0$. Последнее свойство A^0 послужило толчком к созданию матричной теории оператора дифференцирования [4, разд. 3], так как поставило вопрос об уточненном значении нулевой степени данного оператора, у которого, как известно, одно из собственных значений является нулевым.

В настоящей работе, для повышения объективности рассмотрения, применяются два способа вычисления нулевой степени A^0 матрицы A : 1) с помощью экстраполяции значений показателя степени, если A приводится к диагональному виду; 2) на основе понимания A^0 как предельной величины (в общем случае A). Эти способы логически не связаны друг с другом, но представляются одинаково естественными.

Полученные с помощью них результаты оказались согласованными как между собой, так и с (1).

В частности, при анализе скалярного случая $(n = 1)$ установлено, что величина 0^0, кажущаяся, на первый взгляд, неопределенной, имеет в поле $\mathbb{C}$ лишь одно самосогласованное значение — нулевое:

$$0^0 = \lim_{p\to\infty} 0^{1/p} = \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{0} = 0 \quad (p = 1, 2, \dots). \tag{2}$$

Равенство же $0^0 = 1$, обычно используемое как обозначение, оказалось внутренне противоречивым, т. е. неудачным. Естественность и непротиворечивость уточненного равенства $0^0 = 0$ видны как из (2), так и из соотношений:

$$0^m = 0 = 0 \cdot \lambda^m; \quad m = 0, \pm1, \pm2, \dots; \quad |m| < \infty; \quad \lambda \neq 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{3}$$

где величина 0^{-1} (равная 0) есть обобщенное обратное число для 0 [2] (см. также [1, с. 34]), при этом $0^{-1} \neq 1/0$, но и не обязательно $0^{-1} = 0/0$; как обычно, $(\cdot)^{-k} \equiv \equiv [(\cdot)^{-1}]^k$ $(k = 1, 2, \dots)$.

С учетом (1)–(3) рассмотрены целые степени $D^0, D^{\pm1}, D^{\pm2}, \dots$ матричной модели D оператора дифференцирования, действующего в пространстве периодических функций. Здесь D — вырожденная циркулянтная матрица порядка $n = 2, 3, \dots < \infty$ (оператор дискретного дифференцирования); D^{-1} является для D обратной матрицей Дразина и одновременно псевдообратной матрицей Мура — Пенроуза; нулевая степень D^0 матрицы D равна $D^{-1}D = DD^{-1} = I - P_0$, где P_0 — проекционная $(n \times n)$-матрица, у которой все элементы равны $1/n$. Показана применимость данного формализма к периодическим краевым задачам для разностных и обыкновенных дифференциальных уравнений.

Литература

1. Гантмахер Ф. Р. *Теория матриц.* М.: Наука, 1967.
2. Ермолаев Е. А. *О коммутативном обращении вырожденных матриц* // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1991. №2. С. 102–104.
3. Бояринцев Ю. Е. *Методы решения вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.* Новосибирск: Наука, 1988.
4. Ермолаев Е. А. *Ассоциативные алгебры в теории классических полей.* Могилёв: БРУ, 2008.

АССОЦИИРОВАННЫЕ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В АЛГЕБРЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

А.И. Жук

Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь
aizhuk85@mail.ru

Рассмотрим следующую систему на отрезке $T = [0, a] \subset \mathbb{R}$:

$$\dot{x}^i(t) = \sum_{j=1}^{q} f^{ij}(t, x(t))\dot{L}^j(t), \quad i = \overline{1, p} \tag{1}$$

с начальным условием $x(0) = x_0$, где f^{ij}, $i = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, q}$ — некоторые функции, $x(t) = [x^1(t), x^2(t), \dots, x^p(t)]$, а $L^i(t)$, $i = \overline{1, q}$, — функции ограниченной вариации на отрезке T. Без ограничения общности будем считать, что функции $L^i(t)$, $i=\overline{1,q}$, непрерывны справа, $L^i(0)=L^i(0-)=0$ и $L^i(a-)=L^i(a)$, $i=\overline{1,q}$.

Задаче (1) поставим в соответствие следующую конечно-разностную задачу с осреднением

$$x_n^i(t+h_n)-x_n^i(t)=\sum_{j=1}^{q} f_n^{ij}(t,x_n(t))[L_n^j(t+h_n)-L_n^j(t)],\quad i=\overline{1,p} \tag{2}$$

с начальным условием $x_n(t)|_{[0,h_n)}=x_{n0}(t)$. Здесь $L_n^j(t)=(L^j*\rho_n)(t)=\int_0^{1/n}L^j(t+s)\times$ $\times\rho_n(s)\,ds$, $j=\overline{1,q}$, где $\rho_n(t)=n\rho(nt)$, $\rho\in C^\infty(R)$ и $\rho\geqslant 0$, $\operatorname{supp}\rho\subseteq[0,1]$, $\int_0^{1/n}\rho(s)\,ds=1$, а $f_n^{ij}=f^{ij}*\widetilde{\rho}_n$, $i=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,q}$, где $\widetilde{\rho}_n(x_0,x_1,\ldots,x_p)=n^{p+1}\times$ $\times\widetilde{\rho}(nx_0,nx_1,\ldots,nx_p)$, $\widetilde{\rho}\in C^\infty(R^{p+1})$, $\widetilde{\rho}\geqslant 0$, $\operatorname{supp}\widetilde{\rho}\subseteq[0,1]^{p+1}$, $\int_{[0,1]^{p+1}}\widetilde{\rho}(x_0,x_1,\ldots$ $\ldots,x_p)\,dx_0\ldots dx_p=1$.

Для описания предельного поведения решения задачи (2) рассмотрим систему

$$x^i(t)=x_0^i+\sum_{j=1}^{q}\int\limits_0^{t+} f^{ij}(s,x(s^-))\,dL^j(s), i=\overline{1,p} \tag{3}$$

Теорема. *Пусть f^{ij}, $i=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,q}$, удовлетворяют условию Липшица и ограничены. $L^j(t)$, $j=\overline{1,q}$, — непрерывные справа функции ограниченной вариации. Тогда при $n\to\infty$, $h_n\to 0$ так, что $nh_n\to\infty$, решение $x_n(t)$ задачи Коши (2) сходится к решению системы уравнений* (3) *в пространстве $L^p(T)$, если $|x_{n0}(\tau_t)-$ $-x_0|\to 0$ в пространстве $L^p(T)$.*

Аналогичная теорема в пространстве $L^1(T)$ была получена в [1].

Литература

1. Жук А. И., Яблонский О. Л. *Оценки скорости сходимости к ассоциированным решениям дифференциальных уравнений с обобщенными коэфициентами в алгебре мнемофункций* // Докл. НАН Беларуси. 2015. Т. 59, № 2. С. 17–22.

СВОЙСТВА ОПЕРАТОРА МАРКОВА — СТИЛТЬЕСА В ПРОСТРАНСТВАХ $H^p(\mathbb{D})$ И $L^p(0,1)$

И.С. Ковалева, А.Р. Миротин

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь
isida89@list.ru, amirotin@yandex.by

В работе исследуются свойства оператора Маркова — Стилтьеса в пространствах $H^p(\mathbb{D})$ и $L^p(0,1)$, получены оценки нормы этого оператора в указанных пространствах.

Определение. Оператор Маркова — Стилтьеса формально задается соотношением

$$Sf(z):=\int\limits_0^1\frac{f(t)}{1-tz}\,dt$$

и является специальным случаем общего преобразования Стилтьеса, введенного в [1].

Теорема 1. *Оператор Маркова — Стилтьеса S в пространстве Харди $H^p(\mathbb{D})$ $(1 < p < \infty)$ является ограниченным некомпактным ганкелевым с матрицей Гильберта в стандартном базисе. Его норма удовлетворяет неравенствам*

$$\pi \leqslant \|S\|_{H^p \to H^p} \leqslant \frac{\pi}{\sin(\pi/\max\{p, p'\})}.$$

В частности, в пространстве $H^2(\mathbb{D})$ спектр оператора S чисто непрерывный, совпадает с существенным спектром и равен $[0, \pi]$, $\|S\|_{H^2 \to H^2} = \pi$.

Следствие. *Пусть $f \in H^p$ и $f(x) > 0$ в некотором интервале $(\lambda, 1)$. Тогда величина наименьшего уклонения в метрике $H^p(\mathbb{D})$ функции f от множества рациональных функций степени не выше n, не имеющих полюсов в $\mathbb{D}$, удовлетворяет соотношению*

$$H^p R_n(Sf) \ll n^{1/(2p)} e^{-\pi\sqrt{2n/p}}.$$

Теорема 2. 1. *Оператор Маркова — Стилтьеса S в пространстве $L^p(0,1)$ $(1 < p < \infty)$ является ограниченным некомпактным, причем*

$$\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}} \leqslant \|S\|_{L^p \to L^p} \leqslant \pi \mathrm{ctg}\, \frac{\pi}{2\max\{p, p'\}}.$$

2. *Оператор Маркова — Стилтьеса в пространстве $L^2(0,1)$ унитарно эквивалентен оператору Маркова — Стилтьеса в пространстве $H^2(\mathbb{D})$. В частности, $\|S\|_{L^2 \to L^2} = \pi$, а спектр оператора S в пространстве $L^2(0,1)$ чисто непрерывный, совпадает с существенным спектром и равен $[0, \pi]$.*

Литература

1. Миротин А. Р. *Гармонический анализ на абелевых полугруппах.* Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2008.
2. Duren P. L. *Theory of H^p spaces.* New York and London: Academic Press, 1970.
3. Böttcher A., Silbermann B. *Analysis of Toeplitz Operators.* Springer, 1990.

АССОЦИИРОВАННЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОШИ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОБОБЩЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Н.В. Лазакович, С.А. Спасков

Белгосуниверситет, механико-математический факультет, Минск, Беларусь
sergey.spaskov@gmail.com

В докладе мы будем изучать стохастические дифференциальные уравнения с обобщенными коэффициентами в алгебре обобщенных случайных процессов. К изучению решений таких уравнений существует несколько подходов, мы, однако, остановимся на подходе, описанном в работах [1, 2]. Данный подход основан на рассмотрении стохастического дифференциального уравнения в алгебре обобщенных случайных процессов. Заметим также, что выбранный подход охватывает в некотором смысле все другие известные подходы к интерпретации решений исходного уравнения.

Мы рассмотрим следующее стохастическое дифференциальное уравнение с обобщенными коэффициентами

$$X'(t, \omega) = f(X(t, \omega))L'(t) + g(X(t, \omega))B'(t, \omega). \qquad (1)$$

где $t \in [0,b] = T \subset \mathbb{R}$, $f(\cdot), g(\cdot)$ — функция ограниченной вариации на T, $B(\cdot,\cdot)$ — процесс броуновского движения.

В классическом смысле приведенное уравнение некорректно, так как функция $L(\cdot)$ не дифференцируема. Если рассматривать производную $L'(t)$ как обобщенную производную, то в уравнении возможно присутствие произведения разрывной функции на обобщенную $f(X(t,\omega))L'(t)$, что, в свою очередь, тоже приводит к некорректности постановки задачи. Изучение задачи Коши для подобного стохастического дифференциального уравнения исследовал в своей работе по финансовой математике Г. А. Медведев [3].

Описываемый подход к интерпретации решений стохастического дифференциального уравнения (1) опирается на замену его соответствующим классом конечно-разностных уравнений с осреднением. Общий вид задачи Коши для такого уравнения на уровне представителей будет выглядеть следующим образом:

$$X_n(t+h_n,\omega) - X_n(t,\omega) =$$
$$= f_n(X_n(t,\omega))(L_n(t+h_n) - L_n(t)) + g_n(X_n(t,\omega))(B_n(t+h_n,\omega) - B_n(t,\omega)),$$
$$X_n(t)|_{[0,h_n)} = X_{n0}$$

где $L_n(t) = (L * \rho_n)(t)$, $f_n(t) = (f * \rho_n)(t)$, $g_n(t) = (g * \rho_n)(t)$, $B_n(t,\omega) = (B * \rho_n)(t,\omega)$, $\rho_n(t) = \gamma(n)\rho(\gamma(n)t)$, где $\gamma(n) \to \infty$, при $n \to \infty$, $\rho(t) \geqslant 0$, $\rho(t) \in C^\infty(t)$, $\operatorname{supp}(\rho) \subseteq$ $\subseteq [0,1]$, $\int_0^1 \rho(s)\,ds = 1$.

В докладе предполагается обсудить представление ассоциированных решений как решений соответствующих интегральных уравнений и представление решений через фундаментальные матрицы соответствующих дифференциальных уравнений и исследование свойств решений.

Литература

1. Лазакович Н. В., Сташуленок С. П., Стемковская Т. В., *Ассоциированные решения уравнений в дифференциалах в прямом произведении алгебр обобщенных случайных процессов* // Теория вероятностей и ее применения. 1998. Т. 43, № 2. С. 272–293.

2. Лазакович Н. В., Яблонский О. Л., Хмызов А. К., *Задача Коши для систем дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в прямом произведении алгебр мнемофункций* // Докл. НАН Беларуси. 2011. Т. 55, № 2. С. 5–9.

3. Медведев Г. А. *Стохастические процессы финансовой математики.* Мн.: БГУ, 2005. 243 с.

ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОБОБЩЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПРЯМОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ АЛГЕБР МНЕМОФУНКЦИЙ

Н.В. Лазакович, А.К. Хмызов, С.А. Спасков

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
Anton.Khmyzov@gmail.com, Sergey.Spaskov@gmail.com

Рассмотрим следующую граничную задачу (см. [1]):

$$\dot{Y}(t) = \dot{C}(t)Y(t) + F(t), \quad M_1Y(0) + M_2Y(a) = Q, \tag{1}$$

где $t \in T = [0;a]$, $Y(t)$ — неизвестная вектор функция $Y : T \to R^2$; $\dot{C}(t)$ — обобщенная производная матричнозначной функции $C(t)$, компоненты $C^{ij}(t)$, $i,j = 1,2$, которой являются непрерывными справа функциями ограниченной вариации; $F(t)$ — заданная вектор функция; M_1, M_2, Q — матрицы, компоненты которых суть некоторые заданные константы.

Исследование задачи (1) проводится в прямом произведении алгебр мнемофункций (см. [2]). На уровне представителей задача (1) примет вид конечно-разностной задачи с осреднением:

$$Y_n(t+h_n) - Y_n(t) = [C_n(t+h_n) - C_n(t)]Y_n(t) + F_n(t),$$
$$M_{1n}Y_n(t)|_{[0;h_n)} + M_{2n}Y_n(t)|_{[a;a+h_n)} = Q_n. \tag{2}$$

Здесь $C_n(t) = (C * \rho_n)(t) = \{(C^{ij} * \rho_n)(t)\}_{i,j=1,2}$, где $\rho_n(t) = \rho(nt)$,

$$\rho(t) \in C^\infty(R), \quad \operatorname{supp}\rho \subset [0,1], \quad \rho(t) \geqslant 0, \quad \int\limits_0^1 \rho(s)\,ds = 1,$$

а $F_n(t) = (f * \tilde\rho_n)(t) = \{(f^i * \tilde\rho_n)(t)\}_{i=1,2}$, где $\tilde\rho_n(t) = n\tilde\rho(nt)$,

$$\tilde\rho(t) \in C^\infty(\mathrm{R}), \quad \operatorname{supp}\tilde\rho \subset [0,1], \quad \tilde\rho(t) \geqslant 0, \quad \int\limits_0^1 \tilde\rho(l)\,dl = 1.$$

Предполагается описать предельное поведение решений задачи (2), при $n \to \infty$, $h_n \to 0$, и различных связях между $1/n$ и h_n.

Литература

1. Таций Р. М. *Условия разрешимости многоточечной задачи для обобщенной дифференциальной системы* // Докл. НАН Беларуси. 2011. Т. 55, № 3. С. 12–16.

2. Лазакович Н. В. *Стохастические дифференциалы в алгебре обобщенных случайных процессов* // Докл. НАН Беларуси. 1994. Т. 35, № 5. С. 23–27.

СОПРЯЖЁННЫЙ ОПЕРАТОР ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Ф.Е. Ломовцев

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
lomovcev@bsu.by

Пусть $S : X \supset D(S) \to Y$ и $P : Y \supset D(P) \to Z$ — линейные операторы в банаховых пространствах X, Y, Z с плотными областями определения $\overline{D(S)} = X$ и $\overline{D(P)} = Y$ соответственно. Если оператор P ограничен, то для их произведения $PS : X \supset D(PS) \to Z$ сопряжённый оператор $(PS)^* : Z' \supset D((PS)^*) \to X'$, где Z' и X' — (сильные) сопряженные пространства соответственно к банаховым пространствам Z и X, очевидно равен произведению $(PS)^* = S^*P^*$ сопряженных операторов P^* и S^* к операторам P и S соответственно.

Когда операторы S, P неограничены и оператор S является d-нормальным, т. е. S замкнут, множество его значений $R(S)$ замкнуто в Y и дефект подпространства

$R(S)$ в Y конечномерен, тогда область определения $D(PS)$ оператора произведения PS плотна в X и сопряженный оператор их произведения тоже равен $(PS)^* = S^*P^*$ [1].

Установлено, что для ограниченного оператора S, неограниченного замкнутого оператора P и плотной области определения $\overline{D(PS)} = X$ их произведения PS его сопряженный оператор равен слабому замыканию $(PS)^* = \overline{S^*P^*}^{\,w}$ произведения S^*P^* их сопряженных операторов P^* и S^* [2].

Известно, что если пространство Y рефлексивное, операторы S, P неограничены и замкнуты, оператор P является n-нормальным, т. е. P замкнут, множество его значений $R(P)$ замкнуто в Z и его ядро $N(P)$ конечномерно, то сопряженный оператор их произведения PS с плотной областью определения $\overline{D(PS)} = X$ тоже равен $(PS)^* = \overline{S^*P^*}^{\,w}$ [3].

В случае рефлексивности пространств X, Y, Z выше слабое замыкание $\overline{S^*P^*}^{\,w}$ в декартовом произведении сопряжённых пространств $Z'_\sigma \times X'_\sigma$ со слабыми топологиями $\sigma(Z';Z)$ и $\sigma(X';X)$ соответственно поточечной w-сходимости можно заменить на сильное (обычное) замыкание $\overline{S^*P^*}^{\,s} = \overline{S^*P^*}$ в декартовом произведении сопряжённых пространств $Z'_\beta \times X'_\beta = Z' \times X'$ с сильными (исходными) топологиями $\beta(Z')$ и $\beta(X')$ ограниченной β-сходимости соответственно, так как эти слабые σ-топологии согласуются с двойственностью в Z'_σ и X'_σ. Примерами d- и n-нормальных операторов служат краевые задачи для правильных эллиптических дифференциальных операторов с нормальными граничными условиями [1].

Для неограниченных и незамкнутых S и P эти формулы не применимы, но справедлива

Теорема. *Пусть X, Y, Z — банаховы пространства и $S : X \supset D(S) \to Y$, $P : Y \supset D(P) \to Z$ — линейные неограниченные операторы с плотными областями определения $\overline{D(S)} = X$, $\overline{D(P)} = Y$ и плотными множествами значений $\overline{R(S)} = Y$, $\overline{R(P)} = Z$. Если область определения $D(PS)$ произведения PS плотна в X и соответственно существуют их обратные операторы S^{-1} и P^{-1}, то сопряженный оператор их произведения равен $(PS)^* = (\overline{(P^{-1})^*(S^{-1})^*}^{\,w})^{-1}$, где $(S^{-1})^*$ и $(P^{-1})^*$ — сопряженные операторы к обратным операторам S^{-1} и P^{-1}.*

Следствие. *Если в этой теореме оператор S^{-1} непрерывен, то $(PS)^* = S^*P^*$.*

Литература

1. Крейн С. Г. *Линейные уравнения в банаховом пространстве.* 1971. М.: Наука.

2. Ломовцев Ф. Е. *Метод энергетических неравенств в исследовании операторных уравнений* // Докл. АН БССР. 1983. Т. 27, № 3. С. 200–203.

3. Ломовцев Ф. Е. *Критерий сопряжённого оператора произведения неограниченного и n-нормального операторов в банаховых пространствах* // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2008. № 2. С. 42–47.

УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ В $\ell^{m\times m}_{\infty,\lambda}$ МАТРИЧНОГО РАЗНОСТНОГО ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Д.А. Новичкова

Белгосуниверситет, механико-математический факультет, Минск, Беларусь
navdasha@tut.by

Работа посвящена нахождению условий, при которых матричное разностное гипергеометрическое уравнение будет разрешимо в банаховой алгебре $\ell^{m\times m}_{\infty,\lambda}$ [1].

Рассматривается множество $\ell_{\infty,\lambda}$, $\lambda > 0$, числовых последовательностей вида

$$x = \{\underline{x_0}, \dots, x_n, \dots\} = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$$

таких, что $\exists A > 0: \ \forall k \quad |x_k|k^{1+\lambda} \leqslant A$. Векторное пространство $\ell_{\infty,\lambda}$ является банаховым с нормой

$$\|x\|_{\ell_{\infty,\lambda}} = \|x\|_{\ell_1} + \sup_k |x_k|k^{1+\lambda}.$$

Пространство $\ell_{\infty,\lambda}$ — банахова алгебра относительно поэлементного сложения и умножения в виде дискретной свертки Лапласа.

$$h = \{\underline{0}, 1, 0, \dots, 0, \dots\}, \quad h^k = \{\underline{0}, \dots, 0, \underset{k}{1}, 0, \dots, 0, \dots\},$$

$$h^0 = I = \{\underline{1}, \dots, 0, \dots, 0, \dots\}.$$

Строится матричная банахова алгебра $\ell_{\infty,\lambda}^{m\times m}$:

$$X = [x^{ij}]_{i,j=1}^m \in \ell_{\infty,\lambda}^{m\times m} \quad \Leftrightarrow \quad \forall i,j = \overline{1,m} \quad x^{ij} \in \ell_{\infty,\lambda}$$

с нормой

$$\|X\|_{\ell_{\infty,\lambda}^{m\times m}} = \|\widetilde{m}(X)\|_{\ell_{\infty,\lambda}},$$

где $\widetilde{m}(X_n) = \max\limits_{i,j=\overline{1,m}} |x_n^{ij}|$, $\widetilde{m}(X) = \{\underline{\widetilde{m}(X_0)}, \dots, \widetilde{m}(X_n), \dots\}$ — мажорантная последовательность.

Матричным символом Похгаммера назовем

$$(A)_n = A(A+E)(A+2E)\cdots(A+(n-1)E),$$

если $n \in \mathbb{N}$, и $(A)_0 = E$, где $E = \mathrm{diag}[I, \dots, I]$ — единичная матрица-последовательность.

Вводится понятие матричной гипергеометрической последовательности

$${}_2f_1[A,B;C;h] = \sum_{n=0}^{\infty} f_n[A,B;C]h^n = \left\{E, C^{-1}AB, \dots, \frac{1}{n!}(C)_n^{-1}(A)_n(B)_n, \dots\right\}, \qquad (1)$$

где

$$f_n[A,B;C] := \frac{1}{n!}(C)_n^{-1}(A)_n(B)_n.$$

Рассматривается матричное разностное гипергеометрическое уравнение

$$(nE+E)(nE+C)X_{n+1} - (nE+A)(nE+B)X_n = \mathrm{O}, \quad n = 0,1,2,\dots, \qquad (2)$$

где $A, B, C \in \mathbb{C}^{m\times m}$ — заданные матрицы. Приводятся условия, при которых уравнение (2) имеет решение в $\ell_{\infty,\lambda}^{m\times m}$, которое выражается в виде (1).

Литература

1. Навічкова Д. А. *Развязанне матрычных рознасных раўнанняў першага парадку ў банахавым модулі $\ell_p^{m\times m}$ і банахавых алгебрах $\ell_1^{m\times m}$, $\ell_{\infty,\lambda}^{m\times m}$ у камутатыўным выпадку* // Весці Беларускага дзярж. пед. ун-та. Сер. 3. Фізіка. Матэматыка. Інфарматыка. Біялогія. Геаграфія. 2014. №. 2. С. 28-32.

ОБОБЩЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА ХАЙЛАША — СОБОЛЕВА $W^p_\alpha(X)$, $\alpha > 0$, НА УЛЬТРАМЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ С МЕРОЙ

М.А. Прохорович, Е.М. Радыно

Белгосуниверситет, механико-математический факультет, Минск, Беларусь
prohorovich@mail.ru, yauhen.radyna@gmail.com

Работа посвящена изучению функций из обобщенных соболевских классов $W^p_\alpha(X)$, $\alpha > 0$, на любом ультраметрическом пространстве X с мерой и метрикой, которые связаны условием удвоения. В ходе доклада будет:

1. Описана количественная картина массивности множества точек Лебега и рассмотрена задача о скорости сходимости средних Стеклова функций из соболевских классов в терминах емкостей и в терминах мер Хаусдорфа.

2. Решена задача аппроксимации Лузина для классов $W^p_\alpha(X)$, $\alpha > 0$, — доказано, что для любой функции из $W^p_\alpha(X)$, $\alpha > 0$, в этом же классе существует локально гельдеровская функция, совпадающая с исходной вне некоторого открытого множества, сколь угодно малых емкости и вместимости Хаусдорфа, и приближающая исходную функцию по норме первоначального класса $W^p_\alpha(X)$, $\alpha > 0$.

Эти результаты являются в определенном смысле точными и не допускают улучшения. Они были получены и анонсированы в работах [1,2].

Однако, позднее было найдено более простое и короткое доказательство, позволяющее распространить ранее известные результаты для классов $W^p_1(X)$ на случай обобщенных пространств $W^p_\alpha(X)$, $\alpha > 0$, — оно опубликовано в [3]. Отметим, что метод из работы [3] подходит для произвольных метрических пространств при дополнительном ограничении $\alpha \leqslant 1$.

Все необходимые определения и точные формулировки соответствующих теорем приведены в [3]. Историю предшествующих результатов в этом направлении смотри там же.

Литература

1. Губкина Е. В., Прохорович М. А., Радыно Е. М. *Точки Лебега и скорость сходимости средних Стеклова для классов Соболева на ультраметрических пространствах с условием удвоения* // Докл. НАН Беларуси. 2013. Т. 57, № 2. С. 17–19.

2. Губкина Е. В., Забелло К. В. Прохорович М. А., Радыно Е. М. *Аппроксимация Лузина функций из классов Соболева на ультраметрических пространствах с условием удвоения* // Докл. НАН Беларуси. 2014. Т. 58, № 2. С. 22–25.

3. Губкина Е. В., Прохорович М. А., Радыно Е. М. *Обобщенные классы Хайлаша — Соболева на ультрапараметрических пространствах с мерой, удовлетворяющей условию удвоения* // Сибирский мат. ж. 2015. Т. 56, № 5. С. 1030–1036.

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ БРЮА — ШВАРЦА НА КЛАССАХ ИДЕЛЕЙ И АДЕЛЯХ

Е.М. Радыно, А.В. Солодухин

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
yauhen.radyna@gmail.com, andrew.solodukhin@gmail.com

Рассмотрим кольцо аделей $\mathbb{A}$, соответствующее полю рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Данное кольцо содержит в качестве подколец пополнения $\mathbb{Q}$ по всем возможным нормированиям, а именно, поле $\mathbb{R}$ и всевозможные поля p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$. Элементы мультипликативной группы $\mathbb{A}^\times$ называются иделями, $\mathbb{Q}^\times \subset \mathbb{A}^\times$, см. [1].

В работе [2] рассматривалась задача отображения локально интегрируемых функций умеренного роста на группе $\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times$ в пространство распределений на $\mathbb{A}$. Фактически, элементам $(L_1^{\mathrm{loc}} \cap S')(\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times)$ ставились в соответствие элементы $S'(\mathbb{A})$, что позволяло использовать преобразование Фурье $\mathcal{F} : S'(\mathbb{A}) \to S'(\mathbb{A})$.

Мы покажем, что подобное отображение имеет место для всех распределений, т. е. элементов $S'(\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times)$. Конструкция опирается на использование отображения

$$E : S(A) \to S(\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times) : \varphi(\lambda) \mapsto |\lambda|^{1/2} \sum_{q \in \mathbb{Q}^\times} \varphi(q\lambda) - \frac{1}{|\lambda|^{1/2}} \int\limits_{\mathbb{A}} \varphi.$$

Литература

1. Гельфанд И. М., Граев М. И., Пятецкий-Шапиро И. И. *Обобщенные функции. Т.6: Теория представлений и обобщённые функции.* М.: Наука, 1966. 512 с.

2. Радыно Е. М. *Локальные и адельные распределения. Преобразование Фурье* // Докл. НАН Беларуси. 2004. №3. С.14–18.

НЕЗАМЫКАЕМЫЕ ОПЕРАТОРЫ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ЗАДАЧИ

Я.В. Радыно

Белгосуниверситет, механико-математический факультет, Минск, Беларусь
radyno@bsu.by

В докладе обсуждаются следующие вопросы.

Классический функциональный анализ:

1. Ограниченные линейные операторы.
2. Неограниченные замкнутые линейные операторы.
3. Неограниченные замыкаемые линейные операторы.
4. Пополнение нормированных пространств.
5. Продолжение отображений и обобщенные решения операторных уравнений.
6. Замыкаемые операторы и теория двойственности.
7. Незамыкаемые операторы.

Обобщенные функции:

1. Невозможность умножения распределений. Теорема Л. Шварца.
2. Причина этого явления. Незамыкаемость оператора умножения на обобщенную функцию.
3. Новые обобщенные функции Ф. Коломбо.
4. Общая теория мнемофункций.
5. Функтор мнемофикации.
6. Продолжение отображений на мнемофицированные нормированные пространства.
7. Обобщенные решения операторных уравнений.
8. Построение общей теории незамыкаемых операторов.

Литература

1. Schwartz L. *Sur l'impossibilite de la multiplication des distributions* // C. r. Acad. Sci. Paris, 1954. Vol. 239. P. 847–848.

2. Colombeau J.-F. *A multiplication of distributions* // J. Math. Anal. Appl. 1983. Vol. 94, no. 1. P. 96–115.

3. Atonevich A. B., Radyno Ya. V. *On general method of constructing algebras of generalized functions* // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1991. Vol. 318, no. 2. P. 267–270.

4. Antonevich A., Burachewski A., Radyno Ya. *n closability of non-closable operators* // Pan American Mathematical Journal. 1997. Vol. 7, no. 4. P. 37–51.

МЕТОД АППРОКСИМАЦИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ СИНГУЛЯРНЫМИ ВЕЙВЛЕТАМИ

В.М. Романчак

Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь
orugen@mail.ru

Рассматривается новый метод решения задач, основанный на квази-интерполяции граничных условий рядом, состоящим из рекуррентной последовательности сингулярных вейвлетов [1]. В качестве примера решалась задача Дирихле для уравнения Лапласа в односвязной области D, ограниченной поверхностью S. Дельта-аппроксимация сингулярными вейвлетами является универсальным способом аппроксимации данных так как позволяет в рамках единого алгоритма одновременно решать задачу сглаживания и интерполяции данных. Сингулярные вейвлеты соединяют простоту ядерного сглаживания с возможностью локальной вейвлет-аппроксимации. В нашем случае метод позволяет построить решение уравнения Лапласа в явном виде, как сумму фундаментальных решений. Особые точки фундаментальных решений при этом будут стремиться к границе S, оставаясь вне области D.

Аппроксимация Парзена — Розенблатта является примером непараметрических статистических оценок, использующих дельта-образные ядерные функции. Ядерные оценки функции регрессии рассматривались в работах Надарая и Ватсона [2]. Задача выбора параметра размытости p функции $\psi(t)$ имеет аналогию с задачей оптимального выбора параметра регуляризации при решении некорректных задач. Регрессионные оценки, не использующие дельта-образные функции, применяются в вейвлет-анализе.

Вейвлет-анализ представляет собой непараметрическую оценку регрессионной модели сигнала, где при конструировании базиса используют функцию, которая имеет нулевое среднее значение. Это условие называется условием допустимости. В работе [1] нами рассматривался сингулярный дельта-вейвлет, в котором в качестве функции $\psi(t)$ можно использовать дельтаобразную функцию. Кроме того нами предложен дискретный рекуррентный алгоритм, для нахождения коэффициентов вейвлетов. Вместо оценки Надарая — Ватсона с одним параметром размытости p, асимптотически стремящимся к нулю, мы рассматриваем функциональный ряд, каждому члену которого с номером n соответствует свой параметр p_n, причем последовательность p_n стремится к нулю

Чтобы применить данный способ аппроксимации к задачам теории потенциала, предлагается в качестве дельтаобразных функций использовать фундаментальные решения соответствующих уравнений. Фундаментальные решения рассматривались в работах М. А. Алексидзе [3] для численного решения граничных задач, путем разложении функции в ряд по фундаментальным решениям соответствующих дифференциальных операторов. Задача регуляризации некорректной задачи здесь решается путем поиска одной поверхности S_1, на которой рассматривается интегральные уравнения, к поверхности S граничной задачи. В предлагаемом нами методе аппроксимации вместо одной вспомогательные поверхности S_1 задается последовательность поверхностей S_n так, что расстояние между поверхностями S_n и S стремится к нулю с ростом n. В качестве примера решена задача Дирихле для уравнения Лапласа в случае куба и квадрата. Получены необходимые условия сходимости последовательности сингулярных вейвлетов.

Литература

1. Романчак В. М. *D-аппроксимация граничных задач теории потенциала* // Тез. докл. 8-го междунар. науч. семинара «AMADE–2015». Мн.: БГУ, 2015. С. 48.

2. Хардле В.*Прикладная непараметрическая регрессия.* М.: Мир, 1993.

3. Алексидзе М. А.*Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функциям.* М.: Наука, 1978.

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

А.Ю. Русецкий

Белгосуниверситет, механико-математический факультет, Минск, Беларусь
artyom.ruseckiy@gmail.com

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — полное вероятностное пространство.

Рассмотрим систему стохастических интегральных уравнений

$$X(t,\omega) = X_0 + \int\limits_0^t dL^c(s) f(s, X(s,\omega)) + \sum_{\mu_l \leqslant t} \Psi(\mu_l, X(\mu_l-, \omega), \Delta L(\mu_l)) +$$

$$+ \int\limits_0^t g(s)\, dW(s,\omega), \quad t \in \mathbb{T} = [0,T], \quad \omega \in \Omega, \tag{1}$$

$$X(t,\omega) = (X_i(t,\omega))^\top, \quad X_0 = (X_0^i)^\top \in \mathbb{R}^n, \quad W(t,\omega) = (B_i(t,\omega))^\top, \quad i = \overline{1,n},$$

$$L(t) = (L_{ij}(t)),$$

где $L_{ij} : \mathbb{T} = [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ — непрерывные справа функции ограниченной вариации $\forall i,j = \overline{1,n}$, $B_i(t,\omega)$ — независимые случайные процессы броуновского движения $\forall i = \overline{1,n}$, $g \in L_2(T)$, $L^c(t)$ — непрерывная составляющая функции $L(t)$, а $\Delta L(\mu_l) = L(\mu_l) - L(\mu_l-)$, где μ_l, $l \in \mathbb{N}$ — точки разрыва функции $L(t)$.

Рассмотрим функции, действующие из отрезка $\mathbb{T} = [0,T]$ в гильбертово пространство случайных величин, непрерывные справа в среднеквадратичном и имеющие предел слева. Зададим норму на пространстве случайных процессов $\mathbb{X}$.

$$\|X(t,\omega)\|_{\mathbb{X}} = \sup_{[0,T]} (E\|X(t,\omega)\|^2)^{1/2}$$

Здесь и далее $\|Y\| = \sum_{i=1}^n |Y_i|$, $\forall Y \in \mathbb{R}^n$, $\|X\| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |X_{ij}|$, $\forall X \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Пространство $\mathbb{X}$ с нормой $\|\cdot\|_{\mathbb{X}}$ — банахово пространство.

Теорема. *Пусть функции $f(t,x)$ и $\Psi(t,x,u)$ — борелевские функции по (t,x) и для любых $x,y \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $t \in [0,T]$ эти функции удовлетворяют условиям Липшица и линейного роста*

$$\|f(t,x)-f(t,y)\| \leqslant h_1(t)\|x-y\|, \quad \|f(t,x)\| \leqslant h_2(t)(1+\|x\|), \quad \sup_{[0,T]}\|f(t,0)\| < \infty,$$

$$\|\Psi(t,x,u)-\Psi(t,y,u)\| \leqslant h_3(t)\|u\|\|x-y\|, \quad \|\Psi(t,x,u)\| \leqslant h_4(t)\|u\|(1+\|x\|),$$

где для $i=\overline{1,4}$

$$\int_0^\top h_i^2(s)\,d\operatorname{Var}L(s) < \infty.$$

Тогда $\forall$ начального условия $X(t_0-,\omega)=X_0$ для почти всех $\omega\in\Omega$ в пространстве $\mathbb{X}$ существует и единственно решение уравнения (1).

Данная теорема является обобщением теоремы 8.24 из работы [1, с. 393].

Литература

1. Миллер Б. М., Рубинович Е. Я. *Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями.* М.: Наука, 2005.

ДВУХШАГОВЫЙ МЕТОД НЬЮТОНА — КАНТОРОВИЧА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С РЕГУЛЯРНО ГЛАДКИМИ ОПЕРАТОРАМИ

А.Н. Таныгина

Белгосуниверситет, механико-математический факультет, Минск, Беларусь
anast-minsk@yandex.ru

Пусть X, Y — банаховы пространства; $f : X \to Y$ — нелинейное отображение, дифференцируемое в каждой внутренней точке замкнутого шара $\overline{B(x_0,R)} \subset X$; x_0 — известное начальное приближение. В работе проводится анализ сходимости двухшагового метода Ньютона — Канторовича

$$x_{n+1} = y_n - [f'(x_n)]^{-1}f(y_n), \quad y_n = x_n - [f'(x_n)]^{-1}f(x_n), \quad n=0,1,\ldots, \tag{1}$$

для приближенного решения нелинейных уравнений вида

$$f(x)=0, \tag{2}$$

в предположении, что оператор f удовлетворяет модифицированному условию регулярной гладкости [1]

$$\|f'(x'')-f'(x')\| \leqslant \omega((\chi - r - \|x''-x'\|)^+ + \|x''-x'\|) - \omega((\chi - r - \|x''-x'\|)^+), \tag{3}$$

где $r=\min\{\|x'-x_0\|,\|x''-x_0\|\}$; $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ — непрерывная строго возрастающая вогнутая функция, обладающая свойством $\omega(0)=0$; $\chi \in [0,\omega^{-1}(1)]$ — некоторая постоянная; $\lambda^+ = \max\{\lambda,0\}$.

Пусть $\Omega(t) = \int\limits_0^t \omega(\tau)\,d\tau$, $a \geqslant \|f(x_0)\|$, $a>0$,

$$\Phi(t) = a - \Omega(\chi) + \Omega(\chi - t) - t(1-\omega(\chi)), \quad t\in[0,\chi]. \tag{4}$$

Без ограничения общности будем считать, что $f'(x_0) = I$. Определим числовые последовательности $\{t_n\}$ и $\{s_n\}$ следующими рекуррентными соотношениями:

$$t_{n+1} = s_n + \frac{a - \Omega(\chi) + \Omega(\chi - s_n) - s_n(1 - \omega(\chi))}{1 - [\omega(\chi) - \omega(\chi - t_n)]}, \tag{5}$$

$$s_n = t_n + \frac{a - \Omega(\chi) + \Omega(\chi - t_n) - t_n(1 - \omega(\chi))}{1 - [\omega(\chi) - \omega(\chi - t_n)]}, \tag{6}$$

где $n = 0, 1, \ldots,$ $t_0 = 0$.

Теорема. *Пусть существует постоянная* $\chi \in [0, \omega^{-1}(1)]$ *такая, что выполнено неравенство* $a \leqslant \Omega(\chi) - \chi\omega(\chi) + \chi$, *оператор* f *удовлетворяет на* $\overline{B(x_0, R)}$ *условию* (3) *с таким* χ *и функция* (4) *имеет единственный нуль* $t_* \leqslant R$ *на отрезке* $[0, \chi]$. *Тогда*

1) *уравнение* (2) *имеет единственное решение* x_* *в шаре* $\overline{B(x_0, t_*)}$;

2) *последовательные приближения* $\{x_n\}$, *заданные соотношениями* (1), *определены для всех* $n = 0,\ 1,\ \ldots,$ *принадлежат шару* $\overline{B(x_0, t_*)}$ *и сходятся к* x_*;

3) *для всех* $n = 0,\ 1,\ \ldots$ *справедливы оценки*:

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant t_{n+1} - t_n, \quad \|x_* - x_n\| \leqslant t_* - t_n,$$

где последовательность $\{t_n\}$ *определена с помощью рекуррентных соотношений* (5) *и* (6), *монотонно возрастает и сходится к* t_*.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф13М–036).

Литература

1. Забрейко П. П., Таныгина А. Н. *Модификация условия Гальперина — Ваксмана для решения нелинейных операторных уравнений методом Ньютона — Канторовича* // Докл. НАН Беларуси. 2013. Т. 57, № 6. С. 8–12.

ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОБРАТНОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОЙ КРАТНОСТИ ДЛЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Д.С. Шпак, И.В. Трифонова

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
d.s.shpak@grsu.by, irint@grsu.by

Рассмотрим применение теории нелинейных эволюционных операторов второй кратности для системы двух дифференциальных уравнений второго порядка.

Пусть задана система

$$\frac{dx_1}{dt} - \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 - \alpha_3 x_1^2 - \alpha_4 x_1 x_2 - \alpha_5 x_2^2 = f_1(t),$$

$$\frac{dx_2}{dt} - \beta_1 x_1 - \beta_2 x_2 - \beta_3 x_1^2 - \beta_4 x_1 x_2 - \beta_5 x_2^2 = f_2(t), \tag{1}$$

которую можно записать в операторном виде как $Ax = f$ [1], где

$$A = \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1_1 + A^1_2 \\ A^2_1 + A^2_2 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

$$A^1_1(x_1,x_2) = (\delta' - \alpha_1\delta) * x_1 - \alpha_2\delta * x_2, \quad A^1_2(x_1,x_2) = -\alpha_3\delta^{\otimes 2} * x_1^{\otimes 2} - \alpha_4\delta^{\otimes 2} * (x_1 \otimes x_2) - \alpha_5\delta^{\otimes 2} * x_2^{\otimes 2},$$

$$A^2_1(x_1,x_2) = -\beta_1\delta * x_1 + (\delta' - \beta_2\delta) * x_2, \quad A^2_2(x_1,x_2) = -\beta_3\delta^{\otimes 2} * x_1^{\otimes 2} - \beta_4\delta^{\otimes 2} * (x_1 \otimes x_2) - \beta_5\delta^{\otimes 2} * x_2^{\otimes 2}.$$

Рассмотрим частный случай системы (1):

$$x' - y = f_1(t), \quad y' - 3y - 2x - x^2 = f_2(t),$$

которому соответствует оператор второй кратности, действующий в пространстве двухкомпонентных вектор-функций одной переменной, с компонентами

$$A^1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta' & -\delta \\ -2\delta & \delta' - 3\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A^2 \begin{pmatrix} x \otimes x \\ x \otimes y \\ y \otimes y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta^{\otimes 2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \otimes x \\ x \otimes y \\ y \otimes y \end{pmatrix}.$$

Поставим следующую задачу: построить покомпонентно асимптотически обратный эволюционный оператор второй кратности вида $B = (B^1 \ B^2)^\top$.

Для построения оператора B второй кратности к оператору A, необходимо составить композицию $A \circ B$. Так как операторы A и B — нелинейные эволюционные операторы второй кратности, то композицию можно записать следующим образом: $A \circ B = A^1(B^1) + A^2(B^1, B^2)$.

Так как оператор B — асимптотически обратный эволюционный оператор, то $A^1(B^1) = E$, $A^2(B^1, B^2) = 0$, где E — единичная матрица.

Рассмотрим первый компонент композиции $A^1(B^1)$ и представим его в матричном виде. Получим

$$\begin{pmatrix} \delta' & -\delta \\ -2\delta & \delta' - 3\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1_1 & b^2_1 \\ b^1_2 & b^2_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $\begin{pmatrix} b^1_1 & b^2_1 \\ b^1_2 & b^2_2 \end{pmatrix} = B^1$.

Из матричного уравнения (2) составим систему

$$\delta' b^1_1 - \delta b^1_2 = \delta, \quad \delta' b^2_1 - \delta b^2_2 = 0, \quad -2\delta b^1_1 + (\delta' - 3\delta) b^1_2 = 0, \quad -2\delta b^2_1 + (\delta' - 3\delta) b^2_2 = \delta,$$

из которой последовательно можно найти импульсные характеристики первой компоненты B^1 оператора B второй кратности.

Второй компонент композиции можно записать в виде

$$A^2(B^1, B^2) = B^2 (A^1)^{\otimes 2} + B^1 A^2 = 0.$$

Следовательно, вторая компонента B^2 оператора B может быть найдена из равенства

$$B^2 = -B^1 A^2 ((A^1)^{\otimes 2})^{-1}.$$

Литература

1. Вувуникян Ю. М., Трифонова И. В. *Тензорное произведение и тензорная степень полиномиальных эволюционных операторов второй кратности* // Изв. Смоленского гос. ун-та. 2014. № 2(26). С. 326–338.

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ ПРОЦЕССЫ ЛЕВИ В АЛГЕБРЕ ОБОБЩЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

О.Л. Яблонский

Белгосуниверситет, механико-математический факультет, Минск, Беларусь
yablonski@bsu.by

В докладе рассматривается стохастическое дифференциальное уравнение

$$\mathrm{d}X(t) = f(X(t))\mathrm{d}L(t), \quad t \in T, \tag{1}$$

с начальным условием $X(0) = x^0$, где L — квадратично интегрируемый процесс Леви.

Данное уравнение изучается в алгебре обобщенных случайных процессов (см., напр., [1]). При этом уравнению (1) ставится в соответствие задача Коши следующего вида

$$\mathrm{d}_{\widetilde{h}}\widetilde{X}(\widetilde{t}) = \widetilde{f}(\widetilde{X}(\widetilde{t}))\mathrm{d}_{\widetilde{h}}\widetilde{L}(\widetilde{t}), \quad \widetilde{X}(\widetilde{t})|_{[\widetilde{0},\widetilde{h})} = \widetilde{X}^0(\widetilde{t}). \tag{2}$$

Задача (2) может быть переписана при помощи представителей обобщенных процессов следующим образом:

$$X_n(t+h_n) - X_n(t) = f_n(X_n(t))(L_n(t+h_n) - L_n(t)), \quad X_n|_{t\in[0,h_n)} = X_n^0. \tag{3}$$

Здесь предполагается, что

$$L_n(t) = (L * \rho_n)(t) = \int\limits_0^{1/n} L(t+s)\rho_n(s)\mathrm{d}s, \quad f_n(x) = (f * \overline{\rho}_n)(x),$$

где $\rho_n \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\rho_n \geqslant 0$, $\operatorname{supp}\rho_n \subseteq [0;1/n]$, $\int_0^{1/n}\rho_n(s)\mathrm{d}s = 1$.

В докладе будут обсуждаться условия при которых мнемопроцесс $\widetilde{X}$ ассоциирует обычный случайный процесс, т. е. предельное поведение последовательности решений задачи (3) при помощи стохастического исчисления вариаций развитого в работе [2].

Пусть $(\mathcal{F})_{t\in T}$ поток сигма-алгебр, порожденных процессом L, а $\mathbb{D}^{1,p}$ — класс случайных величин имеющих производную Маллявэна интегрируемую в степени $p \geqslant 1$ (см. [2]). Положим $F_n(x) = \int_x^{1/n}\rho_n(s)\,\mathrm{d}s$, $F_n^{-1}(u) = \sup\{x : F_n(x) \geqslant u\}$.

Теорема. *Пусть функция $f \in C_B^2(\mathbb{R})$ и L — квадратично интегрируемый процесс Леви на отрезке $T = [0,a]$. Начальные условия $X_n^0(t)$ задачи (3) являются $\mathcal{F}_{t+1/n}$-измеримыми и лежат в $\mathbb{D}^{1,p}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 1$ и $t \in [0,h_n)$. Предположим, что неубывающая функция $\sigma : [0,1] \to [0,1]$ такая, что для всех ее точек непрерывности $u \in [0,1]$ и всех $\delta \in (0,1)$ $F_n(F_n^{-1}(u) - \delta h_n) \to \sigma(u)$ при $n \to \infty$, $h_n \to 0$. Кроме того пусть существует $x^0 \in \mathbb{R}$ такое что $\sup\limits_{t\in[0;h_n)} \mathsf{E}|X_n^0(t) - x^0|^2 \to 0$ и*

$$\frac{1}{n^2h_n^2}\left(\int\limits_T (F_n(s-h_n) - F_n(s))^2\mathrm{d}s\right)^{1/2} \to 0.$$

Тогда X_n сходится в $L^2(T\times\Omega)$.

В докладе будет описан предел последовательности X_n и описаны его некоторые свойства.

Литература

1. Лазакович Н. В. *Стохастические дифференциалы в алгебре обобщенных случайных процессов* // Докл. Акад. наук Беларуси. 1994. Т. 38, № 5. С. 17–22.

2. Yablonski A. L. *The calculus of variations for processes with independent increments* // Rocky Mountain J. of Mathematics. 2008. Vol. 38, no. 2. P. 669–701.

THE ORDER AND TYPE OF GROWTH OF THE RESOLVENT

A. B. Antonevich, Ali A. Shukur

Belarusian State University, Minsk, Belarus
antonevich@bsu.by, shukur.math@gmail.com

One of the classical problems is the discerption of growth of the resolvent $R(B;\lambda)$ of linear bounded operator B [1]. We consider operators the spectrum of which is the unite circle. The upper estimate of the resolvent $R(B;\lambda)$ and the condition under which the resolvent of $R(B;\lambda)$ has exponential growth are obtained. It's shown that for weighted shift operators this estimate is exact.

Discrete weighted shift operator (DWSO) is acting on the space $l_p(\mathbb{Z})$ by the following formula:

$$B(u)(k) = a(k)u(k+1),$$

where $a(k)$ is an given bounded sequence.

Theorem 1 [2]. *Let $\varphi(z) = \sum_0^\infty \varphi_n z^n$ be an arbitrary analytical function on the unite circle. Then there exists discrete weighted shift operator B, the spectrum of which is the unite circle and for $|\lambda| < 1$ the resolvent holds the following lower estimate*:

$$\|R(\lambda, B)\| \geqslant \varphi(|\lambda|).$$

Theorem 2. *Let B be a discrete weighted shift operator such that for $0 < \upsilon < 1$ hold $a(k) \sim 1 + \xi/|k|^\upsilon$, $k \to +\infty$. Then $\|B^n\| \approx C\exp[\omega \cdot n^\beta]$ for $n > 1$, where $\omega = (\omega)/(1-\upsilon)$, $\beta = 1-\upsilon$, and the growth of the resolvent on the space $l_1(\mathbb{Z})$ is $\|(B - \lambda I)^{-1}\| \approx C\exp[\rho(|\lambda|-1)^{-\gamma}]$ for $|\lambda| > 1$, where C is a constant and the orders γ and types ρ are defined by $\gamma = \beta/(1-\beta)$, $\rho = [(\omega)((\omega)\beta)^\gamma]$.*

The proof of Theorem 2 based on a modification of the G. Faber theorems [3] given by authors.

References

1. Nevanlinna O. *On the growth of the resolvent operators for power bounded operators* // Banach center publiction. 1997. Vol. 28. P. 247–264.

2. Antonevich A. B., Shukur Ali *Estimation of resolvent for discrete weighted shift operators* // J. PFMT. 2015. Vol. 22. P. 48–52. (in Russian)

3. Faber G. *Beitrag zur Theorie der ganzen funktionen* // Math. Ann. 1911. Vol. 70. P. 48–68.

EXISTENCE OF SOLUTIONS OF NONLINEAR FREDHOLM INTEGRAL EQUATIONS IN $L_p(\mathbb{R}^n)$ SPACES

A. Georgieva, S. Kostadinov

University "Paisii Hilendarski", Plovdiv, Bulgaria
atanaska@uni-plovdiv.bg

In this work, we obtain sufficient conditions for solving the following equation

$$f + Af = g\,,$$

where $f, g \in B$, B is a real Banach space, and $A : B \to B$ is a continuous operator. For proving the obtained results the Leray — Shauder theorem is used.

The proved theorem is applied for founding sufficient conditions for existence of solutions in $L_p(\mathbb{R}^n)$ spaces of the following nonlinear Fredholm integral equation

$$f(t)+\int\limits_{\mathbb{R}^n} K(t,s,f(s))\,ds=g(t),$$

where $g(\cdot):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},$ and $K(\cdot,\cdot,\cdot):\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}.$

Finally, we give examples in $\mathbb{R}^3$ to demonstrate the basic results.

Aknowledgement. This work is partially supported by project NI15–FMI–004.

HAMILTON — CAYLEY — ARZHANYKH THEOREM FOR MATRICES POLYNOMIALLY DEPENDING ON E. SCHMIDT SPECTRAL PARAMETER WITH APPLICATIONS TO THE THEORY OF ELECTROMAGNETIC OSCILLATIONS

A.N. Kuvshinova, S.A. Grishina, B.V. Loginov

Ulyanovsk state Pedagogical University, Ulyanovsk, Russia
erasya7@rambler.ru, sag9@mail.ru, bvllbv@yandex.ru

At the beginning of XX-th century [1] in the cycle of works on linear and nonlinear integral equations E. Schmidt introduced for integral operators in a Hilbert space H the system of eigenvalues λ_k taking into account with their multiplicities and the relevant eigenelements $\{\varphi_k\}_1^\infty$, $\{\psi_k\}_1^\infty$, satisfying the relations $B\varphi_k=\lambda_k\psi_k$, $B^*\psi_k=\lambda_k\varphi_k$ and allowing to extend Hilbert — Schmidt theory on nonselfadjoint completely continuous operators in separable Hilbert space.

In the work of I. S. Arzhanykh and his collaborative articles with V. I. Gugnina and also in the V. I. Gugnina's thesis the variants of Hamilton — Cayley theorem were proved for matrices polynomially dependent on spectral parameter with identity matrix at it's higher degree for the application in numerical methods of linear algebra (extension of Krylov, Leverrie and Faddeev methods for the eigenvalues computation) and also to stability theory of ODE solutions.

In the article [2] the generalized Hamilton — Cayley theorem was proved for polynomial matrices with identity matrix of parameter zero degree.

In this work for the main vectors E and H of field theory the integral representations are obtained by using the basic formula of I. S. Arzhanykh field theory for the problems related to the Helmholtz operator [3]. Unlike works of Tikhonov and Samarsky the integral representations of main vectors E and H of field theory, where the integral density appears as the tangential component of the vectors E and $H,$ normal component of the vectors E and H or tangential and normal component of the vectors E and $H,$ at the kernel of which the solution to the integral equation will be contained, are obtained.

The work was performed as part of the state task No. 2014/232 of the Russian Ministry of Education and Science and supported by the RFBR grant No. 15-01-08599.

References

1. Schmidt E. *Zur Theorie linearen und nichtlinearen Integralgeichungen.* Teilen 1–3 // Math. Ann. 1905–1908. Vol. 63–65. P. 370–399.

2. Kuvshinova A. N. *On one variant of Hamilton — Cayley theorem for polynomial matrices* // Some actual problems of contemporary mathematics and mathematical education. Herzen's chtenya–2012. Materials of sci. conf. (16–21 April). St.Petersburg, 2012.

3. Arzhanykh I. S. *Transformation of Wave Operators.* Tashkent: Fan, An UzSSR, 1962. 164 p.

MATRIX RING APPROACH FOR SOLVING DYNAMICAL EQUATION OF HIERARCHICAL DIFFUSION

A.Ya. Radyna, Ya.V. Radyno

Mechanical and Mathematical Faculty, Belarusian State University, Minsk, Belarus
ales.radyna@ gmail.com

Let $n_0,\ n_1,\dots$ be a sequence of positive integers, $m_k := \prod_{j=0}^{k-1} n_j,\ m_0 := 1$ be orders of M-adic integers $\mathbb{Z}_M = \{x = \sum_{j=0}^{\infty} x_j m_j,\ \ x_j \in \{0,1,\dots,n_j-1\}\}$ with non-archimedean norm $|x|_M = m_N^{-1}$, if $N = \min\{j \in \mathbb{N}_0 :\ x_j \neq 0\}$. The ring $\mathbb{Z}_M$ is coincide with $\mathbb{Z}_p$ when $n_j = p$ for every $j \in \mathbb{N}_0$. Let $\rho : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ be a positive function such that $\rho(0) = 0$, $\rho(|i-j|_M) = \rho_{ij} \geqslant 0$ be a transition probability of a particle from state i to state j. Denote by Q the matrix of $(\rho_{ij})_{i,j=0}^{m_n-1}$. The matrix has a Parisi form

$$Q = \left(\begin{array}{cc|cc|cccc}
0 & \rho_0 & \rho_1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_2 & \rho_2 \\
\rho_0 & 0 & \rho_1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_2 & \rho_2 \\
\hline
\rho_1 & \rho_1 & 0 & \rho_0 & \rho_2 & \dots & \rho_2 & \rho_2 \\
\rho_1 & \rho_1 & \rho_0 & 0 & \rho_2 & \dots & \rho_2 & \rho_2 \\
\hline
\rho_2 & \rho_2 & \rho_2 & \rho_2 & 0 & \rho_0 & \rho_1 & \rho_1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \rho_0 & 0 & \rho_1 & \rho_1 \\
\rho_2 & \rho_2 & \rho_2 & \rho_2 & \rho_1 & \rho_1 & 0 & \rho_0 \\
\rho_2 & \rho_2 & \rho_2 & \rho_2 & \rho_1 & \rho_1 & \rho_0 & 0
\end{array}\right)$$

see [1] or [2] for details. Let λ is an eigenvalue of Q corresponding to the constant function $P(t,x)$ as a function in x. The hierarchical diffusion equation

$$\frac{\partial P(t,j)}{\partial t} = (Q - \lambda I)P(t,j), \quad j = 0,1,\dots,m_n-1,$$

is considered and explicit solution is obtained with help matrix algebra generated by $I_0,\ I_1,\dots,I_n$. Here I_0 is identical matrix, and for any $k = 1,\dots,n$

$$I_k = \operatorname{diag}\{\underbrace{E_{m_k\times m_k},\dots,E_{m_k\times m_k}}_{m_n/m_k}\}$$

is a $m_n \times m_n$ block-diagonal matrix where $E_{m_k\times m_k}$ is a $m_k \times m_k$ matrix of 1. The matrix algebra method was at first used and described in [3, 4] for some interpolation problem.

References

1. Ogielski A. T., Stein D. L. *Dynamics on Ultrametric Spaces* // Physical Review Letters. 1985. Vol. 55, no. 15. P. 1634–1637.

2. Avetisov V. A., Bikulov A. H., Kozyrev S. V. *Application of p-adic analysis to models of breaking of replica symmetry* // Jour. Phys. A: Math. Gen. 1999. no. 32. P. 8785–8791.

3. Radyna A. *m-Adic Multivariate Linear Splines and their Applications to Approximation Theory* // Proceedings of the International Conference on Functional Analysis and its Applications Dedicated to the 110-th Anniversary of Stefan Banach. May 28–31, 2002, Lviv, Ukraine. North-Holland Mathematics Studies. Functional Analysis and its Applications. Elsevier, 2004. no. 197. P. 257–266.

4. Khrennikov A., Radyna A. *Eigenvalues and Invertibility of Parisi Matrices. Ultramentric Group Point of View* // Advanced Studies in Contemprorary Mathematica. 2004. Vol. 8, no. 2. P. 95–102.

ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ

К ТЕОРИИ УНИВЕРСАЛЬНЫХ G-ПРОСТРАНСТВ ПАЛЕ

С.М. Агеев

Белгосуниверситет, механико-математический факультет, Минск, Беларусь
ageev_sergei@inbox.ru

Многие конструкции геометрии, топологии и анализа приводят к универсальным G-пространствам Пале, представляющим собой обобщенные универсальные расслоения с переменными слоями. К их числу относятся пространство $C(G,\mathbb{R}^1)$ регулярного представления компактной связной группы Ли, экспоненциальное пространство $\exp G$ компактной связной группы Ли, $O(n)$-пространство выпуклых тел евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, а также пространства эндоморфизмов и изоморфизмов гильбертова G-пространства и многие другие. В докладе будет рассказано о полученных в этом направлении результатах и их применениях.

О ГЕОМЕТРИИ МНОГООБРАЗИЙ САСАКИ

М.Б. Банару

Смоленский государственный университет, Смоленск, Россия
mihail.banaru@yahoo.com

Напомним [1, 2], что почти контактной метрической структурой на нечетномерном многообразии N называют систему тензорных полей $\{\Phi,\xi,\eta,g\}$, для которой выполняются следующие условия:

$$\eta(\xi)=1,\quad \Phi(\xi)=0,\quad \eta\circ\Phi=0,\quad \Phi^2=-id-\xi\otimes\eta;$$

$$\langle\Phi X,\Phi Y\rangle=\langle X,Y\rangle-\eta(X)\eta(Y);\quad X,Y\in\aleph(N).$$

Здесь Φ — поле тензора типа $(1,1)$, ξ — векторное поле, η — ковекторное поле, $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$ — риманова метрика, $\aleph(N)$ — модуль гладких векторных полей на многообразии N.

Одним из самых интересных и важных примеров почти контактных метрических структур является структура Сасаки, определяемая условием [2]:

$$\nabla_X(\Phi)Y=\langle X,Y\rangle\xi-\eta(Y)X,\quad X,Y\in\aleph(N).$$

Геометрия сасакиевых многообразий имеет очень богатое внутреннее содержание и теснейшие связи со многими разделами математики и теоретической физики.

Отметим, что многообразия Сасаки и их обобщения — одна из самых популярных тематик современной контактной геометрии. В данном направлении успешно работают отечественные геометры (В.Ф. Кириченко, А.Р. Рустанов, Л.В. Степанова), а также многие специалисты из Бельгии, Италии, Китая, Румынии, США, Турции, Южной Кореи, Японии и других стран.

В докладе предполагается провести краткий обзор основных результатов, полученных в последние годы различными математиками в геометрии многообразий Сасаки и их некоторых обобщений, а также представить несколько собственных результатов, связанных с сасакиевыми гиперповерхностями почти эрмитовых многообразий. Часть этих результатов содержится в относительно новом обзоре [3], а также опубликована в более поздних работах (см., например [4]), другая часть — пока не опубликована. Практически все новые результаты связаны с характеризацией сасакиевых гиперповерхностей почти эрмитовых многообразий в терминах типового числа (характеризация Такаджи — Курихары).

Литература

1. Blair D. E. *Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds.* Progress in Math. Boston-Basel-Berlin: Birkhauser, 2002.

2. Кириченко В. Ф. *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях.* Одесса: Печатный дом, 2013.

3. Кириченко В. Ф., Банару М. Б. *Почти контактные метрические структуры на гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий* // Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры. 2014. Т. 127. С. 5–40.

4. Банару М.Б. *Аксиома сасакиевых гиперповерхностей и 6-мерные эрмитовы подмногообразия алгебры октав* // Матем. заметки. 2016. Т. 99, № 1. С. 140–144.

О ГЕОМЕТРИИ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЯТОГО ПОРЯДКА

Г.А. Банару

Смоленский государственный университет, Смоленск, Россия
mihail.banaru@yahoo.com

К 90-летию со дня рождения
Н. В. Степанова (1926–1991)

Дифференциальные уравнения являются одним из самых содержательных и интересных объектов современных геометрических исследований. Основы современной геометрической теории дифференциальных уравнений заложены выдающимся французским математиком Эли Картаном. Существенный вклад в эту теорию внесли такие замечательные отечественные математики как А. М. Васильев, Л. Е. Евтушик, Н. Х. Ибрагимов, Г. Ф. Лаптев, Н. М. Остиану, Н. В. Степанов и многие другие.

Настоящая работа посвящена обыкновенным дифференциальным уравнениям пятого порядка. Она является продолжением предыдущих исследований автора в этом направлении (см., например, [1]), начатых под руководством Николая Васильевича Степанова.

Исследуется общая связность, присоединенная к уравнению

$$y^{(5)} = f(x, y, y', y'', y''', y^{(4)}).$$

В качестве частного случая выделяется особая проективная связность. В явном (координатном) виде устанавливается класс обыкновенных дифференциальных уравнений пятого порядка, допускающих инвариантное присоединение пространства проективной связности. Полученные результаты подтверждают многие построения Н. В. Степанова в области геометрии обыкновенного дифференциального уравнения произвольного порядка (см. [2, 3] и др.).

Исследование проводится с помощью метода внешних дифференциальных форм, разработанного Эли Картаном и усовершенствованного многими советскими математиками.

Литература

1. Банару Г. А. *О проективной связности, допускаемой обыкновенным дифференциальным уравнением пятого порядка* // Изв. везов. Математика. 1996. №2. С. 3–9.

2. Степанов Н. В. *Дифференциально-геометрическая теория уравнения* $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots \ldots, y^{(n-1)})$ // Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии. 1977. Т. 8. С. 47–66.

3. Степанов Н. В. *Геометрия дифференциальных уравнений* // Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии. 1981. Т. 12. С. 127–164.

ОБОБЩЕННЫЕ ПОЧТИ ЭРМИТОВЫ СТРУКТУРЫ ПРОИЗВОЛЬНОГО РАНГА

Д.В. Вылегжанин

Белгосуниверситет, механико-математический факультет, Минск, Беларусь
vylegzhanin@bsu.by

В начале 80-х гг. прошлого века в работах В.Ф. Кириченко (см. например, [1]) был разработан новый подход к изучению многообразий со структурами. Основным понятием стала конструкция обобщенной почти эрмитовой структуры (GAH-структуры) и обобщенной эрмитовой геометрии. В случае ранга 1 GAH-структура явилась естественным обобщением таких широко известных понятий как почти эрмитова структура, почти контактная структура и некоторых других. Так, одним из основных примеров обобщенной почти эрмтовой структуры ранга 1 в работе [1] является метрическая f-структура. Отметим, что понятие GAH-структуры позволяет изучать многообразия снабженные несколькими классическими попарно перестановочными структурами [1]. Однако, способы построения обобщенных почти эрмитовых структур ранга большего 1 не были описаны.

В 90-х гг. в работах В.В. Балащенко и Н.А. Степанова [2] на однородных k-пространствах были описаны канонические структуры классических типов, а также предъявлены алгоритмы их построения. В следствии этого возник обширный класс многообразий с несколькими перестановочными структурами, в том числе и с f-структурами.

В результате исследований удалось разработать методы построения обобщенных почти эрмитовых структур рангов 1 и выше на k-симметрических пространствах, а также обобщить указанные методы на случай произвольных гладких многообразий. Так же, установлена взаимосвязь свойств GAH-структур ранга 1 со структурами больших рангов.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (совместный проект Ф10Р–132 БРФФИ — РФФИ), а также Минобразования РБ в рамках подпрограммы «Математические методы» ГПНИ «Конвергенция».

Литература

1. Кириченко В. Ф. *Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий* // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. ВИНИТИ АН СССР. 1986. Т. 18. С.25–71.

2. Балащенко В. В., Степанов Н. А. *Канонические аффинорные структуры классического типа на регулярных* Φ*-пространствах* // Матем. сб. 1995. Т. 186, №11. С. 3–34.

ЭРМИТОВЫ И ПРИБЛИЖЕННО КЕЛЕРОВЫ f-СТРУКТУРЫ НА СПЕЦИАЛЬНОЙ НИЛЬПОТЕНТНОЙ ГРУППЕ ЛИ

П.А. Дубовик

Белгосуниверситет, механико-математический факультет, Минск, Беларусь
geometryk@gmail.com

В дифференциальной геометрии однородных многообразий групп Ли исследование инвариантных дифференциальных (аффинорных) структур является одним из фундаментальных направлений. Значительное место здесь принадлежит однородным Φ-пространствам, которые называют также обобщёнными симметрическими пространствами. Известно, что однородные Φ-пространства порядка k обладают обширным запасом канонических структур классического типа, в том числе и f-структурами К. Яно $(f^3+f=0)$. При этом, важным примером является тот случай, когда группа Ли сама является однородным Φ-пространством порядка k. Метрические f-структуры на римановых многообразиях, обобщающие классические почти эрмитовых структуры, входят в число основных дифференциально-геометрических структур и являются фундаментальным объектом в обобщённой эрмитовой геометрии [1]. Напомним, что f-структура на (псевдо) римановом многообразии $(M, g=\langle\cdot,\cdot\rangle)$ называется метрической, если

$$\langle fX, Y\rangle + \langle X, fY\rangle = 0,$$

где $X, Y \in \mathfrak{B}(M)$ — модуль гладких векторных полей на M [2]. Перечислим некоторые основные классы метрических f-структур указав для них определяющие свойства [2]: келеровы f-структуры $(\nabla f = 0)$; эрмитовы f-структуры $(T(X,Y)=0$, т.е. присоединённая Q-алгебра является абелевой); приближённо келеровы f-структуры $(\nabla_{fX}(f)fX = 0)$, где ∇ — связность Леви — Чивита (псевдо)риманового многообразия $(M, g=\langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Пусть G — группа Ли, $\mathfrak{h}$ — алгебра Ли группы Ли G с базисом $e_1,\ldots,e_6$ и коммутационными соотношениями [3]:

$$[e_1,e_2]=e_4, \quad [e_1,e_3]=e_5, \quad [e_2,e_3]=e_6$$

(остальные скобки Ли равны нулю). Алгебра Ли $\mathfrak{h}$ нильпотентна, с индексом нильпотентности 2. Также, $\mathfrak{h}$ — единственная 6-мерная алгебра Ли с трехмерным центром и максимальным абелевым идеалом порядка 4 [3]. Используя метод канонических структур на однородных k-симметрических пространствах [2], на группе Ли G построена серия левоинвариантных f-структур и доказана принадлежность классу эрмитовых f-структур. Группа Ли G представлена как однородное 6-симметрическое пространство и вычислены соответствующие канонические f-структуры f_i, $i=1,\ldots,4$. Связность Леви — Чивита вычислена для естественной левоинвариантной римановой метрики на группе Ли G Доказано, что все эти структуры являются эрмитовыми f-структурами.

Литература

1. Кириченко В. Ф. *Квазиоднородные многообразия и обобщённые почти эрмитовы структуры* // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47, № 6. С. 1208–1223.

2. Балащенко В. В., Никоноров Ю. Г., Родионов Е. Д., Славский В. В. *Однородные пространства: теория и приложения.* Ханты-Мансийск: Полиграфист, 2008.

3. Морозов В. В. *Классификация нильпотентных алгебр Ли шестого порядка* // Изв. вузов. Математика. 1958. № 4. С. 161–171.

КОМБИНАТОРИКА И ТОРИЧЕСКАЯ ТОПОЛОГИЯ ФУЛЛЕРЕНОВ

Н.Ю. Ероховец

Мсковский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
erochovetsn@hotmail.com

Фуллерены (Нобелевская премия 1996 г. по химии) представляют собой молекулы углерода, математической моделью которых являются простые выпуклые трёхмерные многогранники (3-*многогранники*), все грани которых являются пятиугольниками или шестиугольниками (см. [1]). Известно, что каждый фуллерен имеет $p_5 = 12$ пятиугольников. Число p_6 шестиугольников может быть любым, кроме 1. Число комбинаторных типов (*изомеров*) фуллеренов растёт как p_6^9. Существует уже около 46 миллионов изомеров фуллерена с 75 шестиугольниками. Таким образом, актуальной является задача комбинаторной классификации фуллеренов и исследования структур на их множестве. Доклад основан на совместных работах с В.М. Бухштабером. Выделим следующие направления исследования и основные результаты.

Построение фуллернов. [3] *Операцией роста* называется операция на комбинаторных выпуклых простых 3-многогранниках, которая заменяет один фрагмент, ограниченный простым рёберным циклом на другой фрагмент с большим числом граней. Известно, что *не существует конечного набора операций роста, переводящих фуллерены в фуллерены и достаточного для получения любого фуллерена из додекаэдра.* Обозначим через $\mathfrak{F}$ класс комбинаторных простых выпуклых 3-многогранников, включающий все фуллерены, а также фуллерены с особенностью — четырёхугольной гранью и фуллерены с особенностью — семиугольной гранью, смежной с пятиугольной, которые либо содержат ребро-пересечение двух пятиугольников, пересекающее также семиугольник и шестиугольник, либо из любых двух смежных пятиугольников ровно один смежен с семиугольником. Назовём $(1, s_1, s_2)$-усечением срезку ребра, пересекающего по вершинам s_1- и s_2-угольники, и $(2, k; s_1, s_2)$-усечением срезку одной плоскостью двух соседних рёбер k-угольной грани, пересекающих s_1- и s_2-угольники по вершинам, отличным от общей.

Теорема. *Каждый многогранник из $\mathfrak{F}$ получается из додекаэдра при помощи последовательности $(1; 4, 5)$-, $(1; 5, 5)$-, $(2, 6; 4, 5)$-, $(2, 6; 5, 5)$-, $(2, 6; 5, 6)$-, $(2, 7; 5, 5)$-, и $(2, 7; 5, 6)$-усечений, оставаясь в классе $\mathfrak{F}$. Эти операции соответствуют 9 операциям роста.*

Фрагменты на фуллеренах [2]. k-*поясом* простого 3-многогранника называется циклическая последовательность гиперграней $(F_{i_1}, \dots, F_{i_k})$, такая что $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k} = \varnothing$ и $F_{i_p} \cap F_{i_q} \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $\{p, q\} = \{j, j+1 \mod k\}$ для некоторого j.

Теорема. *Для каждого $k \geqslant 5$ существует конечный набор фрагментов $\mathcal{Q}_k$, ограниченных простыми рёберными циклами длины $2k$ и содержащих по 6 пятиугольников, такие что для серий фуллеренов $\mathcal{S}_k$, поверхность которых получается заклеиванием цепочки из $r \geqslant 0$ k-поясов из шестиугольников двумя фрагментами из $\mathcal{Q}_k$, выполнено следующее: 1) фуллерен принадлежит $\mathcal{S}_k$ тогда и только тогда, когда он содержит фрагмент из $\mathcal{Q}_k$; 2) каждый фуллерен принадлежит хотя бы одному семейству $\mathcal{S}_k$.*

Торическая топология фуллеренов. В торической топологии каждому комбинаторному простому n-многограннику с m гипергранями сопоставляется $(m + n)$-мерное *момент — угол многообразие* $\mathcal{Z}_P$ с действием m-мерного тора T^m. Из результатов работы [3] следует, что *фуллерены не имеют 3- и 4-поясов.* Для таких

3-многогранников P в [4] доказано, что P *комбинаторно эквивалентен простому 3-многограннику* Q *тогда и только тогда, когда градуированные кольца когомологий* $H^*(\mathcal{Z}_P)$ *и* $H^*(\mathcal{Z}_Q)$ *изоморфны.* Это открывает новые возможности для изучения комбинаторики фуллеренов методами торической топологии.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта победителям конкурса «Молодая математика России» и гранта РФФИ 14–01–00537-а.

Литература

1. Деза М., Дютур Сикирич М., Штогрин М. И. *Фуллерены и диск-фуллерены* // УМН. 2013. Т. 68, № 4. С. 69–128.

2. Ероховец Н. Ю. *k-пояса и простые рёберные циклы простых многогранников с не более, чем шестиугольными гранями* // Дальневосточный математический журнал. 2015. Т. 15, № 2. С. 197–213.

3. Buchstaber V. M., Erokhovets N. Yu. *Construction of fullerenes* // ArXiv 1510.02948v1, 2015.

4. Fan F., Ma J., Wang X. *B-Rigidity of flag 2-spheres without 4-belt* // ArXiv:1511.03624.

О ВЫЧИСЛЕНИИ ИНДЕКСА БЕСКОНЕЧНО УДАЛЕННОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ ПОЛИМИАЛЬНОГО ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

П.П. Забрейко, А.В. Кривко-Красько

Белгосуниверситет, механико-математический факультет, Минск, Беларусь
zabreiko@mail.ru, sbmt@mail.ru

В различных задачах теории функций, дифференциальных уравнений и функционального анализа часто встречается вопрос об изолированности бесконечно удаленной особой точки полиномиального векторного поля

$$\Phi(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) \tag{1}$$

и вычисления ее индекса.

Вопрос об изолированности полиномиального поля полностью решается следующим утверждением:

Теорема 1. *Бесконечно удаленная особая точка векторного поля* $\Phi(x,y)$ *изолирована в том и только в том случае, когда наибольший общий делитель* $d(x,y)$ *компонент векторного поля* $\Phi(x,y)$ *в окрестности бесконечно удаленной особой точки не имеет вещественных ветвей.*

Для вычисления индекса бесконечно удаленной особой точки полиномиального векторного поля (1) могут применяться различные методы. Авторы предлагают новый способ вычисления индекса бесконечно удаленной особой точки для полиномиального векторного поля. Этот способ сводит вычисление индекса такого поля (1) к вычислению индексов Коши четырех пар полиномов с полиномиальными коэффициентами изолированности (индексы Коши, в свою очередь, вычисляются методом Штурма или методом результантов.).

Обозначим через $I^+(P_v, Q_v)$ $(I^-(P_v, Q_v))$ предел при $a \to \infty$ $(a \to -\infty)$ индекса Коши компонент векторного поля (1), вычисленного на правой (левой) стороне квадрата

$$\max\{|x|, |y|\} = a, \tag{2}$$

где a — достаточно большое положительное число. Аналогично, через $I^+(P_h, Q_h)$ $(I^-(P_h, Q_h))$ обозначим предел при $a \to \infty$ $(a \to -\infty)$ индекса Коши, вычисленного на верхней (нижней) стороне квадрата (2).

Теорема 2. *Индекс* $\operatorname{ind}(\infty, \Phi)$ *изолированной бесконечно удаленной особой точки векторного поля* $\Phi(x_1, x_2)$ *определяется равенством*

$$\operatorname{ind}(\infty, \Phi) = I^+(P_v, Q_v) - I^-(P_v, Q_v) - I^+(P_h, Q_h) - I^-(P_h, Q_h). \tag{3}$$

В равенстве (3) знак «минус» соответствует тому факту, что вычисление вращения векторного поля $\Phi(x, y)$ выполняется при положительном направлении обхода квадрата (2).

Вычисление индекса изолированной нулевой особой точки векторного поля $\Phi(x, y)$ можно свести к вычислению индекса изолированной бесконечно удаленной особой точки, но уже нового поля $\Psi(\xi, \eta)$, с помощью, например, следующей заменой переменных: $x = -\eta/(\xi^2 + \eta^2)$, $y = \xi/(\xi^2 + \eta^2)$. При этом индекс изолированной бесконечно удаленной особой точки нового векторного поля $\Psi(\xi, \eta)$ будет совпадать с индексом изолировнной нулевой особой точки векторного поля $\Phi(x, y)$ (в силу гомотопности этих полей и теоремы о произведении вращений).

ВОПРОСЫ УНИВЕРСАЛЬНОСТИ В РЕШЕТКАХ

С. Илиадис

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
s.d.iliadis@gmail.com

Вопросы размерности и универсальности в теории решеток, в отличие от теории топологических пространств, еще недостаточно изучены. Пусть **Fr**-некоторый класс (полных дистрибутивных) решеток. Элемент T $\in$ **Fr** называется *универсальным* в классе **Fr**, если для любого $X \in$ **Fr** существует гомоморфизм T на X. Мы укажем некоторые классы полных дистрибутивных решеток решеток, для которых существуют универсальные элементы. Для изучения этих классов рассматривается понятие *насыщенного класса решеток*. Ниже приводятся некоторые работы связанные с рассматриваемой тематикой.

Литература

1. Dube T., Iliadis S., Jan van Mill, Naidoo I., *Universal frames* // Topology and its Applications. 2013. Vol. 160. P. 2454–2464.

2. Iliadis S., *Universal regular and completely regular frames* // Topology and its Applications. 2015. Vol. 179. P. 99–110.

3. Iliadis S. D., *Dimension and Universality on Frames* // Topology and its Applications. 2016. Vol. 201. P. 92–109.

ЛЕВОИНВАРИАНТНЫЕ ПСЕВДОРИМАНОВЫ МЕТРИКИ НА ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ ГРУППАХ ЛИ С НУЛЕВОЙ ДИВЕРГЕНЦИЕЙ ТЕНЗОРА ВЕЙЛЯ

П.Н. Клепиков, Е.Д. Родионов, О.П. Хромова

Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия
askingnetbarnaul@gmail.com, edr2002@mail.ru, khromova.olesya@gmail.com

Пусть (M, g) — (псевдо)риманово многообразие размерности $n \geqslant 4$, R — тензор кривизны Римана, r — тензор Риччи метрики g. Тензор Вейля W определим как бесследовую часть тензора Римана R. Дивергенцию тензора Вейля в локальных координатах определим следующим равенством:

$$\operatorname{div} W_{jkt} = g^{ip} W_{ijkt,p},$$

где $W_{ijkt,p}$ — ковариантные производные тензора Вейля.

Ряд примеров многообразий с $\operatorname{div} W = 0$ и необходимые сведения о них приведены в [1]. Четырехмерные группы Ли с левоинвариантной римановой метрикой и $\operatorname{div} W = 0$ изучались в работах [2, 3]. Настоящая работа продолжает данные исследования, в случае четырехмерных групп Ли с левоинвариантной псевдоримановой метрикой.

Отметим, что в данный класс метрик попадают: левоинвариантные псевдоримановы метрики Эйнштейна $(r = \lambda g)$, метрики с параллельным тензором Риччи $(\nabla r = 0)$ и конформно плоские метрики $(W = 0)$ на четырехмерных группах Ли, которые были ранее классифицированы в работах [4–6].

В данной работе получена классификация четырехменых групп Ли с левоинвариантной псевдоримановой метрикой и нулевой дивергенцией тензора Вейля. Например, была доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть G — четырехмерная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой g, оператор Риччи имеет два различных действительных и два комплексно-сопряженных собственных значения, $W \neq 0$ и $\nabla r \neq 0$. Тогда*

$$\operatorname{div} W = 0$$

в том и только в том случае, когда в алгебре Ли группы G существует базис в котором структурные уравнения и метрический тензор имеют следующий вид:

$$[e_1, e_3] = -\varepsilon a e_3 + \frac{\sqrt{3}}{3} a e_4, \quad [e_1, e_4] = \frac{\sqrt{3}}{3} a e_3 + \varepsilon a e_4, \quad [e_3, e_4] = \frac{2\sqrt{3}}{3} a e_1,$$

$$g = \operatorname{diag}(1, 1, 1, -1), \quad \text{где } \ \varepsilon = \pm 1, \quad a \neq 0.$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты: № 16–01–00336А, № 16–31–00048 мол_а), Минобрнауки РФ в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный университет» (код проекта: 1148).

Литература

1. Бессе А. *Многообразия Эйнштейна*: в 2 т. Пер. с англ. М.: Мир, 1990.

2. Гладунова О. П., Славский В. В. *Левоинвариантные римановы метрики на четырехмерных унимодулярных группах Ли с нулевой дивергенцией тензора Вейля* // ДАН. 2010. Т. 431, № 6. С. 736–738.

3. Воронов Д. С., Родионов Е. Д. *Левоинвариантные римановы метрики на четырехмерных неунимодулярных группах Ли с нулевой дивергенцией тензора Вейля* // ДАН. 2010. Т. 432, № 3. С. 301–303.

4. Calvaruso G., Zaeim A. *Conformally flat homogeneous pseudo-riemannian four-manifolds* // Tohoku Math. J. 2014. Vol. 66. P. 31–54.

5. Calvaruso G., Zaeim A. *Four-dimensional Lorentzian Lie groups* // Differential Geometry and its Applications. 2013. Vol. 31. P. 496–509.

6. Calvaruso G., Zaeim A. *Neutral Metrics on Four-Dimensional Lie Groups* // Journal of Lie Theory. 2015. Vol. 25. P. 1023–1044.

ОБ ОПЕРАТОРАХ КРИВИЗНЫ НА ТРЕХМЕРНЫХ ГРУППАХ ЛИ С ЛЕВОИНВАРИАНТНОЙ ЛОРЕНЦЕВОЙ МЕТРИКОЙ

С.В. Клепикова, И.В. Пономарев, О.П. Хромова

Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия
pastukhova.svetlana.1992@gmail.com, igorpon@mail.ru, khromova.olesya@gmail.com

Задача об установлении связей между топологией и кривизной риманова многообразия является одной из важных проблем римановой геометрии. Работа О. Ковальского и С. Никшевич [1] посвящена решению задачи о предписанных значениях спектра оператора Риччи на трехмерных римановых локально однородных пространствах. В дальнейшем аналогичные результаты для оператора одномерной кривизны, а также для оператора секционной кривизны получены Д. Н. Оскорбиным, Е. Д. Родионовым, О. П. Хромовой [2, 3].

В псевдоримановом случае известна работа Дж. Кальварузо, О. Ковальского, в которой исследуется задача о существовании трехмерной группы Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой и заданным оператором Риччи [4].

При исследовании (псевдо)римановых многообразий важную роль играет оператор одномерной кривизны, определяемый формулой

$$\mathcal{A} = \frac{1}{n-2}\left(\rho - \frac{s}{2(n-1)}\mathrm{Id}\right),$$

где ρ — оператор Риччи, s — скалярная кривизна, n — размерность (псевдо)риманова многообразия M.

Тензору кривизны Римана R в любой точке многообразия M можно поставить в соответствие оператор секционной кривизны $\mathcal{R} : \Lambda^2_x M \to \Lambda^2_x M$, определяемый равенством

$$\langle X \wedge Y, \mathcal{R}(T \wedge V)\rangle_x = R_x(X, Y, T, V),$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — индуцированное скалярное произведение в слоях $\Lambda^2_x M$ пространства расслоения $\Lambda^2 M$, определяемое правилом $\langle X_1 \wedge X_2, Y_1 \wedge Y_2\rangle_x = \det\left(g_x(X_i, Y_j)\right)$.

Данные исследования являются продолжением работы Дж. Кальварузо, О. Ковальского [4]. В работе доказаны аналогичные теоремы для оператора одномерной кривизны и оператора секционной кривизны на трехмерных группах Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой. Так, например, была доказана следующая теорема.

Теорема. *Трехмерная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой и заданным оператором секционной кривизны $\mathcal{R}$, который имеет одно действительное собственное значение кратности 3 и соответствующее ему одномерное собственное подпространство, существует в том и только в том случае, если данное собственное значение отрицательно.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты: № 16–01–00336А, № 16–31–00048 мол_а), Минобрнауки РФ в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный университет» (код проекта: 1148).

Литература

1. Kowalski O., Nikcevic S. *On Ricci eigenvalues of locally homogeneous Riemann 3-manifolds* // Geom. Dedicata. 1996. No. 1. P. 65–72.

2. Оскорбин Д. Н., Родионов Е. Д. *О спектре оператора кривизны трехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой* // ДАН. 2013. Т. 450, № 3. С. 271–273.

3. Гладунова О. П., Оскорбин Д. Н. *Применение пакетов символьных вычислений к исследованию спектра оператора кривизны на метрических группах Ли* // Изв. Алтйского госю ун-та. 2013. № 1/1. С. 19–23.

4. Calvaruso G., Kowalski O. *On the Ricci operator of locally homogeneous Lorentzian 3-manifolds* // Cent. Eur. J. Math. 2009. V. 7(1). P. 124–139.

О ПРОСТРАНСТВАХ ИНВАРИАНТНЫХ БИЛИНЕЙНЫХ ФОРМ ПРОСТЫХ МОДУЛЕЙ ВЕЩЕСТВЕННЫХ АЛГЕБР ЛИ

С.Г. Кононов

Белгосуниверситет, механико-математический факультет, Минск, Беларусь
sergkon@mail.ru

В дифференциальной геометрии при изучении инвариантных тензорных структур валентности 2 на однородных пространствах вещественных групп Ли (см., например, [1]) возникает алгебраическая задача об описании для полупростого модуля вещественной алгебры Ли строения ассоциативной алгебры инвариантных эндоморфизмов и связанного с этой алгеброй векторного пространства инвариантных билинейных форм. В докладе рассматривается наиболее важный частный вариант этой задачи в случае, когда модуль является простым.

Далее используются следующие обозначения: $\mathfrak{g}$ — вещественная алгебра Ли; $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ — $\mathfrak{g}$-модули; $\mathfrak{m}^*$ — $\mathfrak{g}$-модуль, дуальный к $\mathfrak{m}$; $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ — множество морфизмов $\mathfrak{g}$-модуля $\mathfrak{m}$; $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{m})$ — множество эндоморфизмов $\mathfrak{g}$-модуля $\mathfrak{m}$; $\mathrm{B}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ и $\mathrm{B}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{m})$ — множества инвариантных билинейных форм на $\mathfrak{m} \times \mathfrak{n}$ и на $\mathfrak{m} \times \mathfrak{m}$ соответственно. Из леммы Шура следует, что для простого $\mathfrak{g}$-модуля $\mathfrak{m}$ множество $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{m})$ является телом над $\mathbf{R}$, т. е. изоморфно $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ или $\mathbf{H}$. В силу канонического изоморфизма $\mathrm{B}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{m},\mathfrak{n}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{n},\mathfrak{m}^*)$ вновь из леммы Шура следует, что в случае простых $\mathfrak{g}$-модулей $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$ либо $\mathrm{B}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{m},\mathfrak{n}) = \{0\}$, либо каждому элементу $0 \neq b \in \mathrm{B}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ соответствует изоморфизм $\mathfrak{n}$ на $\mathfrak{m}^*$. В частности, для простого $\mathfrak{g}$-модуля пространство $\mathrm{B}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{m})$ ненулевое тогда и только тогда, когда $\mathfrak{m} \cong \mathfrak{m}^*$, т. е. $\mathfrak{g}$-модуль *автодуален*. Любая ненулевая инвариантная билинейная форма простого автодуального $\mathfrak{g}$-модуля невырожденна. Если b — невырожденная билинейная форма на $\mathfrak{g}$-модуле $\mathfrak{m}$, то отображение

$$u \longmapsto b_u, b_u(x,y) = b(x,u)y)), \quad \forall x,y \in \mathfrak{m},$$

устанавливает изоморфизм между векторными пространствами $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{m})$ и $\mathrm{B}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{m})$.

Для простого автодуального $\mathfrak{g}$-модуля каждого из типов $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ или $\mathbf{H}$ указано строение пространства $\mathrm{B}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{m})$, в частности, разложение этого пространства на подпространства симметрических и кососимметрических форм. Предложены наиболее простые базисы пространства $\mathrm{B}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{m})$.

Литература

1. Кононов С. Г. *Алгебры инвариантных аффиноров однородных пространств вещественных групп Ли типа A_l с регулярными подгруппами изотропии* // Изв. вузов. Математика. 1999. № 5. С. 40–50.

ТОПОЛОГИИ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМЛСТИ. СУПРЕМАЛЬНАЯ И ИНФИМАЛЬНАЯ ТОПОЛОГИИ. СОБСТВЕННОСТЬ И ДОПУСТИМОСТЬ В СМЫСЛЕ АРЕНСА — ДУГУНЖИ

Г.О. Кукрак, В.Л. Тимохович, Д.С. Фролова

Белгосуниверситет, механико-математический факультет, Минск, Беларусь
geometry@bsu.by

В серии работ авторов, завершившейся обзорными статьями [1, 2], исследованы топологии, возникающие на множестве непрерывных отображений $C(X,Y)$, где X и Y — топологические T_1-пространства. Основные рассмотрения относятся к ситуации, когда Y метризуемо, и следовательно на $C(X,Y)$ определены топологии равномерной сходимости τ_μ, заданные метриками $\mu = \mu(\rho)$, $\mu(f,g) = \sup\{\rho(f(x),g(x)) \mid x \in \in X\}$, где ρ — допустимая метрика на Y.

Семейство T_U всех топологий вида τ_μ рассмотрено с позиции расположения T_U в частично упорядоченном ($\tau_1 \leqslant \tau_2$, если $\tau_1 \subset \tau_2$) семействе T всех топологий на $C(X,Y)$. Исследуются топологии инфимальная $\tau_{\inf} = \inf T_U$, супремальная $\tau_{\sup} = = \sup T_U$, в частности случаи $\tau_{\inf} \in T_U$, $\tau_{\sup} \in T_U$ и совпадения $\tau_{\sup}$ с топологией графика τ_Γ, а также расположения $\tau_{\inf}$ относительно семейств T_P всех собственных (proper) и T_A всех допустимых (admissible) в смысле Аренса — Дугунджи ([3,4], см.также [5, с. 177]) топологий на $C(X,Y)$. В частности, отправляясь от известных соотношений $T_U \subset T_A$ и $\inf T_A = \max T_P$, и очевидного следствия $\tau_{\inf} \geqslant \max T_P$, исследуются случаи $\tau_{\inf} \in T_A$ и $\tau_{\inf} \in T_P$.

Опуская некоторые дополнительные ограничения на пространства X и Y (см. [1, 2]), основные результаты в указанных направлениях можно кратко сформулировать следующим образом.

1. Случай $\boldsymbol{\tau_{\sup} \in T_U}$). Эквивалентны следующие условия: (a) $\tau_{\sup} \in T_U$; (b) все топологии вида τ_μ совпадают (т. е. $T_U = \{\tau_{\sup}\}$); (c) замыкание множества $f(X)$ компактно для любого $f \in C(X,Y)$; (d) $\tau_{\sup}$ имеет счетную тесноту; (e) $C(X,Y)$ с топологией $\tau_{\sup}$ — k-пространство.

2. Случай $\boldsymbol{\tau_{\sup} = \tau_\Gamma}$). Эквивалентны следующие условия: (a) $\tau_{\sup} = \tau_\Gamma$; (b) $\tau_\Gamma \in \in T_U$; (c) все топологии вида τ_μ совпадают с τ_Γ; (d) X счетно компактно.

3. Случай $\boldsymbol{\tau_{\inf} \in T_U}$). Соотношение $\tau_{\inf} \in T_U$ справедливо тогда и только тогда, когда Y локально компактно и выполняется хотя бы одно из условий: (a) Y имеет счетную базу; (b) при любом представлении X в виде дизъюнктного объединения непустых открытых множеств, семейство этих множеств конечно.

4. Случай $\boldsymbol{\tau_{\inf} \in T_A}$). Соотношение $\tau_{\inf} \in T_A$ справедливо тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из условий: (a) X локально псевдокомпактно; (b) Y локально компактно.

5. Случай $\boldsymbol{\tau_{\inf} \in T_P}$). Необходимым и достаточным условием соотношения $\tau_{\inf} \in \in T_P$ (т. е. совпадения $\tau_{\inf} = max\ T_P$) является компактность пространства X.

Литература

1. Тимохович В. Л., Фролова Д. С. // Изв. вузов. Математика. 2013. № 9. С. 45–58.
2. Тимохович В. Л., Фролова Д. С. // Изв. вузов. Математика. 2014. № 4.
3. Arens R. // Ann. Math. 1946. Vol. 47, no. 2. P. 480–495.
4. Arens R., Dugundji J. // Pacific. J. Math. 1951. Vol. 1. P. 5–31.
5. Энгелькинг Р. *Общая топология.* М.:Мир, 1986.

СОПРИКАСАЮЩАЯСЯ КВАДРИКА ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРИВОЙ

В.В. Лысенко, В.Л. Тимохович

Белгосуниверситет, механико-математический факультет, Минск, Беларусь
valery.sholomitskaya@gmail.com

Пусть γ — кривая в 3-мерном евклидовом пространстве, заданная натуральной параметризацией $\bar{\rho}(s)$, с ненулевыми кривизной и кручением, и L — некоторая поверхность, содержащая точку $\rho(0)$. Скажем, что L имеет с γ в точке $\rho(0)$ соприкосновение (прилегание) порядка не ниже k-го, если $\delta(s)/s^{k+1}$ ограничено при $s \to 0$, где $\delta(s)$ — расстояние от точки $\rho(s)$ до поверхности L. Соприкасающаяся плоскость и сфера имеют порядок соприкосновения не ниже 2-го и, соответственно, 3-го (см., например, [1, 2]). Доказана следующая

Теорема. *Существует поверхность второго порядка (квадрика), имеющая с кривой γ в точке $\rho(0)$ соприкосновение порядка не ниже шестого.*

Указанную квадрику назовем соприкасающейся. Относительно репера Френе в точке $\rho(0)$ она задается уравнением вида

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Iz = 0,$$

где $G = 0$, а остальные коэффициенты определяются системой пяти линейных уравнений, что влечет вариативность соприкасающейся квадрики. Уже для винтовой линии, задавая три из искомых коэффициентов, и выражая через них остальные, можно получить эллипсоид, эллиптический и гиперболический параболоиды, однополостный и двуполостный гиперболоиды, а также конус.

Литература

1. Выгодский В. Н. *Дифференциальная геометрия.* М.: Наука, 1949.
2. Фиников С. П. *Дифференциальная геометрия.* М.: Наука, 1952.

НОРМАЛЬНЫЕ СВЯЗНОСТИ НА ТРЕХМЕРНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Н.П. Можей

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь
mozheynatalya@mail.ru

Понятие нормальной связности для риманова многообразия ввел Э. Картан. Многообразия с нулевым кручением (т. е. плоской нормальной связностью) исследовали почти одновременно Д. И. Перепелкин и Ф. Фабрициус-Бьерре. Итоги этих исследований подведены в монографии Чена [1]. Ряд исследований посвящен общим вопросам нормальных связностей, их интересную характеристику дал К. Номидзу [2].

Пусть M — дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $G = \bar{G}_x$ — стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств $(M, \bar{G})$ равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли $(\bar{G}, G)$, где $G \subset \bar{G}$, так как многообразие M может быть отождествлено с многообразием левых смежных классов $\bar{G}/G$. Пусть

$\bar{\mathfrak{g}}$ — алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ — подалгебра, соответствующая подгруппе G. Поскольку однородное пространство допускает аффинную связность, $\mathfrak{g}$-модуль $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ точен. Все такие пары $\mathrm{codim}_{\bar{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g} = 3$ найдены в [3], дальнейшая нумерация пар соответствует приведенной там. Ограничимся случаем с ненулевым стабилизатором, так как все остальные однородные пространства — трехмерные группы Ли.

Аффинной связностью на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным. Инвариантные аффинные связности на однородном пространстве $(M, \bar{G})$ находятся во взаимно однозначном соответствии с аффинными связностями на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ (см., например, [4]). Поскольку тензоры кривизны и кручения инвариантны относительно действия группы Ли G, то они однозначно определяются тензорами на касательном пространстве к многообразию, причем эти тензоры инвариантны относительно изотропного действия. Тензор кручения $T \in \mathrm{Inv}\, {T_2}^1(\mathfrak{m})$ имеет вид

$$T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}}$$

для всех $x, y \in \bar{g}$; тензор кривизны $R \in \mathrm{Inv}\, {T_3}^1(\mathfrak{m})$ имеет вид:

$$R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \bar{g}.$$

Переформулируем теорему Вана об алгебре группы голономии инвариантной связности: алгебра Ли группы голономии инвариантной связности $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}l(3, \mathbb{R})$ на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ — это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}l(3, \mathbb{R})$ вида

$$V + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V]] + \ldots,$$

где V — подпространство, порожденное множеством

$$\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}.$$

Положим $\mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}$ равной подалгебре в $\mathfrak{g}l(3, \mathbb{R})$, порожденной множеством

$$\{\Lambda(x); \; x \in \bar{\mathfrak{g}}\}.$$

Первоначально $\mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}$ была введена в римановом случае Б. Костантом и использовалась А. Лихнеровичем [5] и Г. Ваном в более общей ситуации. Говорят, что инвариантная связность *нормальна*, если $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}$.

Найдены все пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ коразмерности 3, допускающие нормальную связность, все аффинные связности, их тензоры кривизны и кручения, алгебры голономии и определено, при каких условиях связность является нормальной.

Литература

1. Chen Bang-Yen *Geometry of submanifoids* // Pure and Appl. Math. Vol. X, no. 22. New York: Marcel Dekker, 1973. 308 p.

2. Nomizu K. *Uniqueness of the normal connections and congruence of isometric immersions* // Tohoku Math. J. 1976. Vol. 28, no. 1. P. 613–617.

3. Komrakov B., Tchourioumov A., Mozhey N. et al. *Three-dimensional isotropically-faithful homogeneous spaces.* Preprints Univ. Oslo, 1993. Vol. I–III, no. 35–37.

4. Nomizu K. *Invariant affine connections on homogeneous spaces* // Amer. Journ. Math. 1954. Vol. 76., no. 1. P. 33–65.

5. Lichnerowicz A. *Geometrie des Groupes de Transformations.* Paris: Dunod, 1958.

СОЛИТОНЫ РИЧЧИ НА ЛОРЕНЦЕВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ УОКЕРА РАЗМЕРНОСТИ 3 И 4

Д.Н. Оскорбин, Е.Д. Родионов, И.В. Эрнст

Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия
{edr2002}@mail.ru

Важным обобщением метрик Эйнштейна на (псевдо)римановых многообразиях являются солитоны Риччи.

Полное (псевдо)риманово многообразие (M, g) называется солитоном Риччи, если метрика g удовлетворяет уравнению: $r = C \cdot g - L_X g$, где r — тензор Риччи, $C \in \mathbb{R}$ — константа, $L_X g$ — производная Ли метрики g по направлению полного дифференцируемого векторного поля X.

Исследованию солитонов Риччи на (псевдо)римановых многообразиях посвящены работы многих математиков (см., например, обзор [1]). В данной работе изучаются солитоны Риччи на многообразиях Уокера — псевдоримановых многообразиях, обладающих параллельным распределением изотропных плоскостей.

Уравнение солитона Риччи на лоренцевых многообразиях Уокера изучалось в работе ([2]). В данной работе найдены новые солитоны Риччи на трехмерных лоренцевых многообразиях Уокера, а также исследовано уравнение солитона Риччи на четырехмерных конформно плоских лоренцевых многообразиях Уокера, найдены нетривиальные решения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты: № 16–01–00336А, № 16–31–00048 мол_а), Минобрнауки РФ в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный университет» (код проекта: 1148).

Литература

1. Cao H.-D. *Recent progress on Ricci solitons* // Advanced Lectures in Mathematics. 2010. № 11. P. 1–38.

2. Brozos-Vázquez M., García-Río E., Gavino Fernandez S. *Locally conformally flat Lorentzian gradient Ricci solitons* // Journal of Geometric Analysis. 2013. Vol. 23, no. 3. P. 1196–1212.

О ТРАПЕЦИИ ТИПА Hee (II) НА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

С.О. Пирогов

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия
finalspectrum@yandex.ru

Постановка задачи. На идеальной области плоскости Лобачевского реализуется геометрия гиперболической плоскости $\widehat{H}$ положительной кривизны [1–3]. Все прямые плоскости $\widehat{H}$ относятся к трем топологическим типам. Все углы образуют пятнадцать типов, инвариантных относительно фундаментальной группы G данной плоскости. Углы шести типов измеримы с помощью абсолюта. В работе [4] дано определение трапеции плоскости $\widehat{H}$ и исследована трапеция типа Hee (I). Настоящее исследование посвящено трапеции типа $\mathrm{Hee}\,(II)$, содержащей две эллиптические стороны и точку их пересечения внутри полосы между параллельными гиперболическими сторонами.

Методы исследования. Исследование объектов плоскости $\widehat{H}$ проводим в проективной модели Кэли — Клейна.

Результаты исследования. Получены следующие метрические соотношения между длинами $|AD|$ и $|BC|$ гиперболических ребер и мерами углов трапеции типа $\mathrm{Hee}\,(II)$:

$$|AD| = \rho \ln \frac{\operatorname{sh} C \sin(|CD|/\rho)}{\operatorname{sh} B \sin(|AB|/\rho)}, \quad |BC| = \rho \ln \frac{\operatorname{sh} A \sin(|AB|/\rho)}{\operatorname{sh} D \sin(|CD|/\rho)},$$

где A, C — меры внутренних углов трапеции при вершинах купола, B, D — меры внутренних углов при вершинах основания трапеции $ACBD$ типа $\mathrm{Hee}\,(I)$, сопряженной с исследуемой трапецией $ABCD$ типа $\mathrm{Hee}\,(II)$.

Литература

1. Розенфельд Б. А. *Неевклидовы пространства.* М.: Наука, 1969.

2. Ромакина Л. Н., *Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны. Ч. 1: Тригонометрия.* Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 2013.

3. Ромакина Л. Н., *Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны. Ч.2: Преобразования и простые разбиения.* Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 2013.

4. Romakina L. N. *About a Trapeze of the Type* $\mathrm{Hee}\,(I)$ *on a Hyperbolic Plane of Positive Curvature* // Journal of Basic and Applied Research International. IKP. 2014. Vol. 1, no. 1. P. 13–23.

ЛЕНТЫ СВЕТЛАНЫ НА РАСШИРЕННОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

Л.Н. Ромакина

Саратовский национальный исследователький государственный универстет им. Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия
romakinaln@mail.ru

Как известно, на евклидовой плоскости середина отрезка постоянной длины, концы которого скользят по двум ортогональным прямым, описывает окружность. В неевклидовых плоскостях линии, обладающие аналогичным метрическим свойством, названные *лентами Светланы*, могут иметь порядок выше второго. Исследуем ленты Светланы на расширенной гиперболической плоскости H^2 в ее проективной интерпретации Кэли — Клейна [1]. Плоскость H^2 состоит из двух связных компонент, плоскости Лобачевского Λ^2 и гиперболической плоскости $\widehat{H}$ положительной кривизны [2], разделенных на проективной плоскости овальной линией γ, называемой *абсолютом* плоскостей H^2, Λ^2 и $\widehat{H}$. Проективные автоморфизмы линии γ образуют фундаментальную группу G преобразований указанных плоскостей.

В зависимости от типа данного отрезка (эллиптический (e), гиперболический (h), или параболический (p)) и типа пучка фиксированных ортогональных прямых (эллиптический (E), гиперболический (H), или параболический (P)) ленты Светланы образуют девять инвариантных относительно группы G типов. Сформулируем некоторые результаты исследования.

Теорема 1. *На плоскости* H^2 *лента Светланы типа* $\mathrm{Sr}\,(Hp)$ *— алгебраическая линия четвертого порядка, состоящая из двух пересекающихся ветвей в плоскости*

$\widehat{H}$, *дважды касающаяся абсолюта. Лемниската Бернулли евклидовой плоскости* E_2 *может служить изображением ленты Светланы типа* $\mathrm{Sr}\,(Hp)$.

Теорема 2. *На плоскости* H^2 *лента Светланы типа* $\mathrm{Sr}\,(He)$ *— алгебраическая линия четвертого порядка, состоящая из двух не пересекающихся ветвей в плоскости* $\widehat{H}$, *дважды касающаяся абсолюта. В зависимости от длины* ς *базового отрезка лента Светланы типа* $\mathrm{Sr}\,(He)$ *с гиперболической (эллиптической) осью* l (m) *обладает следующими свойствами.*

Если $\varsigma < \pi\rho/2$ $(\varsigma > \pi\rho/2)$, *то изображением данной ленты Светланы на плоскости* E_2 *может быть связный овал Кассини с фокальной осью* l (m). *Если* $\varsigma = \pi\rho/2$, *то лента Светланы вырождается в пару кривых второго порядка. Одна из этих кривых — нулевая линия, а другая — эллиптический цикл плоскости* $\widehat{H}$ *с базой* l *и радиусом* $\pi\rho/4$.

Если $\varsigma < \pi\rho/3$, *то существуют прямые, ортогональные прямой* m, *имеющие с лентой Светланы четыре общие вещественные точки.*

Если $\pi\rho/3 \leqslant \varsigma \leqslant 2\pi\rho/3$, *то каждая прямая пересекает ленту Светланы не более чем в двух вещественных точках. Если* $\varsigma > 2\pi\rho/3$, *то существует прямая, ортогональная прямой* l *и пересекающая ленту Светланы в четырех вещественных точках.*

Теорема 3. *На плоскости* H^2 *ленты Светланы типа* $\mathrm{Sr}\,(Hh)$ *— алгебраические линии четвертого порядка, состоящие из двух не пересекающихся ветвей в плоскости* $\widehat{H}$, *дважды касающиеся абсолюта. Несвязные овалы Кассини с фокальной осью* l *в плоскости* E_2 *могут служить изображением лент Светланы типа* $\mathrm{Sr}\,(Hh)$. *Ленты Светланы типа* $\mathrm{Sr}\,(Eh)$ *с базовым отрезком в* Λ^2 *— алгебраические линии четвертого порядка, изображением которых могут служить овалы Кассини псевдоевклидовой плоскости.*

Литература

1. Розенфельд Б. А. *Неевклидовы пространства.* М.: Наука, 1969.

2. Ромакина Л. Н. *Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны : в 4 ч. Ч. 1: Тригонометрия.* Саратов: Изд-во Саратвского ун-та, 2013.

ЛАГРАНЖИАНЫ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ФИЗИЧЕСКИМ СКАЛЯРНЫМ ПОЛЯМ, И АССОЦИИРОВАННЫЕ С НИМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

А.К. Рыбников

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
parybnikov@mail.ru

Доклад посвящен исследованию методом Картана — Лаптева дифференциально-геометрической структуры, ассоциированной с лагранжианом L, зависящим от функции z переменных $t, x^1, \dots, x^n$ и её частных производных. Такие лагранжианы рассматриваются в теоретической физике в разделе Теория поля, где t интерпретируется как время, а $x^1, \dots, x^n$ как пространственные переменные. Состояние поля характеризуется функцией $z(t, x^1, \dots, x^n)$ (функция поля), удовлетворяющей уравнению Эйлера, которое соответствует вариационной задаче для интеграла действия.

В настоящей работе переменные $t, x^1, \ldots, x^n$ рассматриваются как адаптированные локальные координаты расслоения общего типа M с n-мерными слоями и 1-мерной базой (при этом переменная t одновременно является локальной координатой на базе). Можно при желании условиться называть t *временем*, а $x^1, \ldots, x^n$ *пространственными переменными*. В этом случае M можно назвать *пространственно-временным расслоенным многообразием*. Переменные t, $x^1, \ldots, x^n, z$ (переменные t, $x^1, \ldots, x^n$ с добавленной переменной z) рассматриваются нами как адаптированные локальные координаты в расслоенном многообразии H над расслоенной базой M. Лагранжиан L, будучи коэффициентом в интегранде интеграла действия, является относительным инвариантом, заданным на J^1H (многообразие 1-струй сечений расслоения H).

Работа посвящена изучению геометрических объектов, возникающих в процессе продолжения дифференциального уравнения геометрического объекта L (лагранжиана). Построен охваченный фундаментальным объектом структуры, ассоциированной с лагранжианом, тензор с компонентами $\Lambda^{00}, \Lambda^{0i}, \Lambda^{jk}$, который можно рассматривать как инвариантный (относительно допустимых преобразований переменных $t, x^1, \ldots, x^n, z$) аналог тензора энергии-импульса из классической теории физических полей.

Построен также относительный инвариант E (в работе он назван *эйлеровым относительным инвариантом*) такой, что равенство $E = 0$ является инвариантной записью уравнения Эйлера для вариационного интеграла действия. Вследствие этого возможна невариационная интерпретация уравнения Эйлера. Уравнение Эйлера можно не связывать с задачей исследования вариационного интеграла на экстремум, но с самого начала рассматривать его как уравнение, возникающее при приравнивании к нулю эйлерова относительного инварианта. Подобная интерпретация уравнения Эйлера возможна и в случае, когда лагранжиан определён в расслоении H над нерасслоенной базой M (эйлеров относительный инвариант для такого лагранжиана рассматривался нами в [1, 2]) .

Построен, кроме того, порождённый лагранжианом L двухвалентный тензор G^{jk} (и обратный ему тензор G_{jk}). Лагранжиан L порождает также связность в главном расслоении над базой J^2H (многообразие 2-струй сечений расслоения H) со структурной группой $Gl(n)$ (и одновременно связность аффинной структуры над базой J^2H).

Литература

1. Рыбников А.К., *Невариационная интерпретация уравнений Эйлера и теорема Нётер* // ДАН. 2013. Т. 453, № 6. С. 613–616.

2. Rybnikov A.K., *Differential-Geometric Structures Associated with the Lagrangian and a Nonvariational Interpretation of the Euler Equations and N ö ther's Theorem* // Russian Journal of Mathematical Physics. 2013. Vol. 20, no. 3. P. 336–344.

КИЛЛИНГОВЫ f-СТРУКТУРЫ НА ОДНОРОДНЫХ Ф-ПРОСТРАНСТВАХ ПОРЯДКА k

А.С. Самсонов

Могилевский государственнный университет, Могилев, Беларусь
Andrey.S.Samsonov@gmail.com

Введение. Будем рассматривать класс **Kill f** (Killing f-structures), введенный в [1], который является одним из классов *обобщенной эрмитовой геометрии* (см., например, [2]). Определяющее свойство для Киллинговых f-структур: $\nabla_X(f)X = 0$, где f — *метрическая* f*-структура* на (псевдо)римановом многообразии (M, g), ∇ — связность Леви — Чивита метрики g на M, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Киллинговы f-структуры являются подклассом **NKf** $(\nabla_{fX}(f)fX = 0)$. Уже известно [3], что любая каноническая базовая f-структура на однородном Φ-пространстве любого произвольного порядка k в случае естественно редуктивной метрики и более общего множества «диагональных» метрик принадлежит классу **NKf**, а для суммы и разности канонических базовых f-структур получены критерии принадлежности этому классу. Перечисленные факты являются мотивацией к исследованию этих f-структур на указанных пространствах относительно класса **Kill f**. Более того, некоторые результаты касательно такого исследования уже известны (см. [4], где указаны некоторые результаты для класса **Kill f** и $k = 4, 5$).

Новые результаты. Для канонических базовых f-структур получена (информацию об обозначениях в теореме и серии «диагональных» метрик см., например, в [3]).

Теорема. *Пусть* $M = G/H$ *— однородное* Φ*-пространство порядка* k *с одной из «диагональных» метрик,* f_i *— произвольная каноническая базовая* f*-структура на* M*. Структура* f_i *принадлежит классу* **Kill f** *тогда и только тогда, когда одновременно выполняются все следующие условия:*

1) k *— нечетное или* $k = 4i$ *или* $\lambda_{u+i} - \lambda_i - \lambda_u = 0$ *или* $[\mathfrak{m}_u, \mathfrak{m}_i] = 0$;

2) k *— нечетное или* $k = 4i$ *или* $\lambda_{u-i} = \lambda_u$ *или* $[\mathfrak{m}_u, \mathfrak{m}_{u-i}] = 0$;

3) $\forall j = \overline{1, s}$, $j \neq i$, $j \neq 2i$, $j \neq k - 2i$: $(i - 2j \neq k$ *и* $\lambda_{i-j} - \lambda_i - \lambda_j = 0)$ *или* $[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_j] \subset \mathfrak{m}_{|i-j|}$;

4) $\forall j = \overline{1, s}$, $j \neq i$, $j \neq 2i$, $j \neq k - 2i$: $(i \neq 2j$ *и* $\lambda_{|i-j|} - \lambda_i - \lambda_j = 0)$ *или* $[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_j] \subset \mathfrak{m}_{i-j}$;

5) $2i > u$ *или* $k = 4i$ *или* $\lambda_i/\lambda_{2i} = 3/4$ *или* $[\mathfrak{m}_{2i}, \mathfrak{m}_i] \subset \mathfrak{m}_{3i}$;

6) $2i > u$ *или* $k = 4i$ *или* $(k \neq 5i$ *и* $\lambda_{3i} - \lambda_i - \lambda_{2i} = 0)$ *или* $[\mathfrak{m}_{2i}, \mathfrak{m}_i] \subset \mathfrak{m}_i$;

7) $2i > u$ *или* $k \neq 4i$ *или* $\lambda_i/\lambda_{2i} = 3/4$ *или* $[\mathfrak{m}_{2i}, \mathfrak{m}_i] = 0$;

8) $2i \leqslant u$ *или* $3i = k$ *или* $\lambda_i/\lambda_{k-2i} = 3/4$ *или* $[\mathfrak{m}_{k-2i}, \mathfrak{m}_i] \subset \mathfrak{m}_{|k-3i|}$;

9) $2i \leqslant u$ *или* $3i = k$ *или* $(2k \neq 5i$ *и* $\lambda_{|k-3i|} - \lambda_i - \lambda_{k-2i} = 0)$ *или* $[\mathfrak{m}_{k-2i}, \mathfrak{m}_i] \subset \mathfrak{m}_i$;

10) $\forall p, q = \overline{1, s}$, $p > q$, $p \neq i$, $q \neq i$, $(p - q = i$ *или* $p - q = i$ *или* $p - q - i = k)$: $\lambda_q = \lambda_p$ *или* $(p - q = i$ *и* $[\mathfrak{m}_p, \mathfrak{m}_q] \subset \mathfrak{m}_{p-q})$ *или* $(p - q \neq i$ *и* $[\mathfrak{m}_p, \mathfrak{m}_q] \subset \mathfrak{m}_{p-q})$.

Также были проанализированы суммы и разности структур f_i и получены критерии принадлежности классу **Kill f**, аналогичные тем, что указаны в теореме для самих структур f_i.

Автор благодарен В. В. Балащенко за полезные обсуждения данной работы.

Литература

1. Грицанс А. С. *О геометрии киллинговых f-многообразий* // Успехи матем. наук. 1990. Т. 45. № 4. С. 149–150.

2. Кириченко В. Ф. *Квазиоднородные многообразия и обобщенные почти эрмитовы структуры* // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1983. Т. 47, № 6. С. 1208–1223.

3. Самсонов А. С. *Приближенно келеровы и эрмитовы f-структуры на однородных* Φ*-пространствах порядка* k *в случае специальных метрик* // Сиб. матем. ж. 2011. Т. 52, № 6. С. 1373–1388.

4. Балащенко В. В. *Естественно редуктивные киллинговы* f*-многообразия* // Успехи матем. наук. 1999. Т. 54. № 3. С. 151–152.

ТИПЫ КАНОНИЧЕСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ НА СПЕЦИАЛЬНЫХ ОДНОРОДНЫХ Φ-ПРОСТРАНСТВАХ ПОРЯДКА 6 ОРТОГОНАЛЬНОЙ ГРУППЫ $SO(n)$

Ю.В. Сергеева

Барановичский государственный университет, Барановичи, Беларусь
sergeevauv@yandex.ru

Важную роль в современной геометрии и её приложениях играют так называемые аффинорные структуры на гладких многообразиях. Наиболее известными из них являются структуры почти произведения P $(P^2 = Id)$, почти комплексные J $(J^2 = -Id)$, f-структуры $(f^3 + f = 0)$, которые стали естественным обобщением почти комплексных структур и были введены К. Яно в 1960-х гг. Инвариантные структуры таких типов имеются на широких классах однородных многообразий групп Ли. В частности, полное описание канонических структур указанных типов на однородных регулярных Φ-пространствах было получено в [1], при этом для однородных Φ-пространств порядка k $(\Phi^k = Id)$ (однородных k-симметрических пространств) предъявлены точные формулы для этих структур.

Классификация римановых структур почти произведения на римановых многообразиях по типам распределений (вертикального и горизонтального) содержит 36 классов [2]. Оказалось, что для инвариантных структур почти произведения на естественно редуктивных однородных пространствах классификация сводится к 3 классам, причем все они реализуются посредством канонических структур P на однородных k-симметрических пространствах [3].

В данной работе рассмотрены серии однородных 6-симметрических пространств G/H группы Ли $SO(n)$, $n \geqslant 5$, и установлены типы всех распределений, порождаемых каноническими структурами почти произведения на этих пространствах. С этой целью вычислено каноническое редуктивное разложение алгебры Ли $\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, а затем с помощью канонических структур почти произведения получено разложение $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{m}_3$, где подпространства $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3$ задают канонические базовые распределения на G/H. Используя затем известные критерии [4] для естественно редуктивных Φ-пространств порядка 6, установлено, что все базовые распределения порождают вполне геодезические слоения, а их прямые суммы $\mathfrak{m}_i \oplus \mathfrak{m}_j$, $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$ порождают анти-слоения. Сформулируем основные полученные результаты.

Теорема. *Пусть G/H — однородное Φ-пространство порядка 6 группы Ли $G = SO(n)$, порождаемое автоморфизмом Φ вида $\Phi(x) = BxB^{-1}$, где*

$$B = \begin{pmatrix} E_m & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & -E_l \end{pmatrix}, \quad m \geqslant 1, \quad l \geqslant 1, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad n = m + l + 3.$$

Пусть g — естественно редуктивная риманова метрика на G/H. Рассмотрим каноническое редуктивное разложение алгебры Ли $\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{m}_3$, соответствующее Φ-пространству G/H. Тогда имеют место следующие утверждения.

1. *Все канонические распределения на G/H, определяемые подпространствами $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3$, имеют тип* **TGF**, *т. е. порождают вполне геодезические слоения на G/H.*

2. *Все канонические распределения на G/H, определяемые подпространствами $\mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_3$, $\mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{m}_3$, имеют тип* **AF** *(анти-слоение), т. е. ни одно из них не порождает слоение на G/H.*

Следует отметить, что характеризация канонических распределений на однородных k-симметрических пространствах относительно семейства диагональных римановых метрик получена недавно в [5].

Литература

1. Балащенко В. В., Степанов Н. А. *Канонические аффинорные структуры классического типа на регулярных Φ-пространствах* // Мат. сб. 1995. Т. 186, № 11. С. 3–34.

2. Naveira A. M. *A classification of Riemannian almost-product manifolds* // Rend. Mat. 1983. Vol. 73, no. 3. P. 577–592.

3. Balashchenko V. V. *Naturally reductive almost product manifolds* // Diff. Geom. and Appl. Proc. of the 7th Intern. Conf., Satellite Conf. of ICM in Berlin. Brno: Masaryk University, 1999. P. 13–21.

4. Балащенко В. В., Самсонов А. С. *Канонические f-структуры на естественно редуктивных Φ-пространствах порядка 6* // Докл. НАН Беларуси. 2010. Т. 54, № 3. С. 26–31.

5. Balashchenko V. V. *Canonical distributions on Riemannian homogeneous k-symmetric spaces* // Journal of Geometry and Physics. 2015. Vol. 87. P. 30–38.

ПРИМЕРЫ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА НА ОДНОРОДНЫХ Ф-ПРОСТРАНСТВАХ ПОРЯДКА 5 ПОЛУПРОСТЫХ ГРУПП ЛИ

Ю.Д. Чурбанов

Белгосуниверситет, механико-математический факультет, Минск, Беларусь
churbanovi@mail.ru

Пусть Φ — аналитический автоморфизм порядка n связной полупростой группы Ли G, H — замкнутая подгруппа Ли в G, G/H — однородное Φ–пространство порядка n [1], $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ — алгебры Ли групп Ли G и H соответственно, $\varphi = (d\Phi)_e$ — автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$, $A = \varphi - id$, $\mathfrak{m} = A\mathfrak{g}$, $\varphi_{|\mathfrak{m}} = \theta$. $\mathfrak{m}$ естественным образом отождествляется с касательным пространством к G/H в точке $o = H$ [1], и для G/H справедливо редуктивное разложение

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}.$$

Пусть C — секционный оператор [2, стр. 261] на касательном пространстве $\mathfrak{m}$ пространства G/H.

Уравнение

$$\dot{X} = [X, C(X)]_{\mathfrak{m}}. \tag{1}$$

называется уравнением Эйлера на G/H [2].

На однородных Φ-пространствах порядка n существуют секционные операторы, порождаемые автоморфизмом φ, которые назовем каноническими.

Одним из таких операторов является $C(X) = [X, \theta(X)]_{\mathfrak{h}}$, и уравнение (1) принимает вид

$$\dot{X} = [X, [X, \theta(X)]_{\mathfrak{h}}]. \tag{2}$$

В докладе обсуждается интегрируемость уравнения (2) на однородных Φ-пространствах порядка 5 полупростой группы Ли G как в общем случае, так и на конкретных примерах.

Литература

1. Степанов Н. А. *Основные факты теории φ–пространств* // Изв. вузов. Математика. 1967. № 3. С. 89–95.

2. Трофимов В. В., Фоменко А. Т. *Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений.* М.: Факториал, 1995.

GENERALIZED SYMMETRIC SPACES: CONTEMPORARY TRENDS

V.V. Balashchenko

Belarusian State University, Minsk Belarus
balashchenko@bsu.by

The main goal of the talk is to recall basic facts in the theory of canonical structures on generalized symmetric spaces as well as to present some their applications, in particular, to the generalized Hermitian geometry and to homogeneous Riemannian geometry. We dwell on the following items:

Canonical structures on regular Φ-spaces: commutative subalgebra of canonical structures, canonical classical structures such as almost complex $(J^2 = -id)$, almost product $(P^2 = id)$, f-structures of K.Yano $(f^3 + f = 0)$ and some others, formulae for homogeneous k-symmetric spaces, the cases $k = 3, 4, 5, 6$ [1].

The generalized Hermitian geometry of V.F.Kirichenko (invariant structures): canonical nearly Kähler, Hermitian, Killing and some other metric f-structures on Riemannian homogeneous k-symmetric spaces [1, 2], the particular cases $k = 4, 5, 6$, the first remarkable case $k = 3$ (N. A. Stepanov, J. A. Wolf, A. Gray, V. F. Kirichenko and others).

Elliptic integrable systems: homogeneous k-symmetric spaces and associated elliptic integrable systems, canonical almost complex and f-structures, new approach to generalization of almost Hermitian geometry, new contribution to nonlinear sigma models [3].

Homogeneous Riemannian geometry: canonical distributions on Riemannian homogeneous k-symmetric spaces of the types $\boldsymbol{AF}$ (anti-foliation), $\boldsymbol{F}$ (foliation), $\boldsymbol{TGF}$ (totally geodesic foliation), the Naveira classification, the Reinhart foliations [4].

Left-invariant structures on nilpotent Lie groups: nearly Kähler and Hermitian f-structures on 2-step nilpotent Lie groups, generalized Heisenberg groups of dimension 5 and 6, other generalizations of Heisenberg groups, filiform Lie groups, almost Hermitian G_1–structures, heterotic strings.

Canonical structures of “metallic family”: so-called “golden” and, more generally, “metallic” structures [5], canonical structures of these types on homogeneous k-symmetric spaces.

Nearly Kähler f-structures on Riemannian regular Φ-spaces: canonical reductive decomposition, commutator relations, base canonical f-structures.

Aknowledgements. The work was partially supported by the Belarus Republic Foundation for Basic Research (project F10R–132) in the framework of the joint BRFBR — RFBR project “Spaces with symmetries” and the Belarus State Research Program “Convergence”, sub-Program “Mathematical Methods”.

References

1. Balashchenko V. V., Nikonorov Yu. G., Rodionov E. D., Slavsky V. V. *Homogeneous spaces: theory and applications.* Hanty-Mansijsk: Polygrafist, 2008 (in Russian).

2. Balashchenko V. V., Samsonov A. S. *Nearly Kähler and Hermitian f-structures on homogeneous k-symmetric spaces* // Doklady Mathematics. 2010. Vol. 81, no. 3. P. 386–389.

3. Khemar I. *Elliptic integrable systems: a comprehensive geometric interpretation* // Memoirs of the AMS. 2012. Vol. 219, no. 1031. 217 p.

4. Balashchenko V. V. *Canonical distributions on Riemannian homogeneous k-symmetric spaces* // Journal of Geometry and Physics. 2015. Vol. 87. P. 30–38.

5. Hretcanu C.-E., Crasmareanu M. *Metallic structures on Riemannian manifolds* // Revista de la Union Matematica Argentina. 2013. Vol. 54, no. 2. P. 15–27.

THE COMPUTER MODELING OF GLUING FLAT IMAGES ALGORITHMS

A. Chekunov

Department of Mathematics and Mechanics, Moscow State University, Moscow, Russia
alexey.chekunov@mail.ru

In treatise one of the important tasks of modern computer geometry is being considered. The main idea of this task is to create gluing flat images algorithms of the same object in space. We can get image data with the help of central projection from different points of space. We construct a numerical simulation for each of the algorithms-a simple linear, normalized linear and direct. The stability of projective transformation to a perturbation of the initial data is being estimated. The accuracy and speed of the algorithms are being calculated.

The results confirm the hypothesis of G. V. Nosovskiy and E. S. Skripka that their proposed direct algorithm is the most stable to perturbation coordinates of conjugate points, as well as to changes in their configuration.

References

1. Castleman K. R. *Digital Image Processing.* New Jersey: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1979.
2. Green W. B. *Digital Image Processing: A Systems Approach.* New York: Van Nostrand Reinhold Co., 1983.
3. Rosenfeld A., Kak A. C. *Digital Picture Processing.* Vols. 1, 2. Second Edition. New York: Academic Press, 1982.
4. Pratt. W. *Digital Image Processing.* New York: John Wiley & Sons, 1978.
5. Golovanov N. N., Ilyutko D. P., Nosovskiy G. V., Fomenko A. T. *Computer geometry.* Publish. center "Academy", 2006. P. 273–324.
6. Nosovskiy G. V., Skripka E. S.. *Error Estimation for the Direct Algorithm of Projective Mapping Calculation in Multiple View Geometry* // Proceedings of the Conference "Contemporary Geometry and Related Topics", Belgrade, Serbia & Montenegro, June 26 — July 2, 2005. Faculty of Mathematics, Universty of Belgrade, 2006. P. 399–408.
7. Bogachev K. *Methods for solving linear systems and eigenvalue.* 1998.

ON INVARIANT EINSTEIN METRICS ON LEDGER – OBATA SPACES

Z. Chen [1], Yu.G. Nikonorov [2], Yu.V. Nikonorova [3]

[1] School of Mathematical Sciences and LPMC, Nankai University, Tianjin, China
chenzhiqi@nankai.edu.cn
[2] Southern Mathematical Institute of Vladikavkaz Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Russia
nikonorov2006@mail.ru
[3] VITI MEPhI, Volgodonsk, Russia
nikonorova2009@mail.ru

This talk is based on the recent paper [1] that is devoted to the study of invariant Einstein metrics on Ledger — Obata spaces. The spaces $F^m/\mathrm{diag}\,(F)$ are called Ledger — Obata spaces, where F is a connected compact simple Lie group, $F^m = F \times F \times \cdots \times F$ (m factors and $m \geqslant 2$), and $\mathrm{diag}\,(F) = \{(X, X, \ldots, X) \mid X \in F\}$. These spaces were first introduced in [2] as a natural generalization of symmetric spaces, since $F^2/\mathrm{diag}\,(F)$ is an irreducible symmetric space.

Clearly the irreducible symmetric space $F^2/\mathrm{diag}\,(F)$ admits exactly one invariant Einstein metric up to isometry and homothety and the Ledger — Obata space $F^3/\mathrm{diag}\,(F)$ admits exactly two invariant Einstein metrics [3]. It should be noted also that the paper [3] contains some general approach for Ledger — Obata spaces. In particular, it is proved that the number of invariant Einstein metrics on $F^m/\mathrm{diag}\,(F)$ does not depend on particular simple Lie group F, i. e. this number is one and the same for all such groups, see details in [3].

Recently, we developed a new approach that allowed us to get further results [1].

Theorem 1. *The Ledger — Obata space $F^4/\mathrm{diag}\,(F)$ admits exactly three invariant Einstein metrics up to isometry and homothety.*

It is proved in [3] that there are at least two invariant Einstein metrics on every space $F^{n+1}/\mathrm{diag}\,(F)$ for $n \geqslant 3$. We got the following strengthen of this result.

Theorem 2. *The Ledger — Obata space $F^{n+1}/\mathrm{diag}\,(F)$ admits at least $p(n)$ invariant Einstein metrics up to isometry and homothety, where $p(n)$ is the number of integer partitions of n. In particular, there are more than $(13n)^{-1}\exp(2.5\sqrt{n})$ invariant Einstein metrics for all n up to isometry and homothety.*

The basis of our new approach is the observation that the classification of invariant Einstein metrics on $F^{n+1}/\mathrm{diag}\,(F)$ is equivalent to the classification of $\mathrm{Ad}\,(\mathrm{diag}\,(F))$-invariant Einstein metrics on the Lie group F^n. In order to classify invariant Einstein metrics, we used the well known variational principle: all these metrics are precisely the critical points of the scalar curvature functional restricted to the set of invariant metrics with fixed volume. It should be noted that different critical points could produce isometric Einstein metrics. We found that there are more than $(1+\sqrt{2})^{n-1}$ critical points of the scalar curvature functional for $F^{n+1}/\mathrm{diag}\,(F)$. This estimate shows the technical difficulties in the problem of classifying invariant Einstein invariants on Ledger — Obata spaces $F^{n+1}/\mathrm{diag}\,(F)$ for big values of n.

Acknowledgement. The work is partially supported by Grant 1452/GF4 of Ministry of Education and Sciences of the Republic of Kazakhstan for 2015–2017 and NSF of China (No. 11571182).

References

1. Chen Z., Nikonorov Yu. G., Nikonorova Yu. V. *Invariant Einstein metrics on Ledger – Obata spaces* (to appear).

2. Ledger A. J., Obata M. *Affine and Riemannian s-manifolds* // J. Differential Geom. 1968. Vol. 2. P. 451–459.

3. Nikonorov Yu. G. *Invariant Einstein metrics on the Ledger – Obata spaces* // Algebra i analiz. 2002. Vol. 14, no. 3. P. 169–185 (in Russian); English translation in: St. Petersburg Math. J. 2003. Vol. 14, no. 3. P. 487–497.

SOME PROPERTIES OF HOMOGENEOUS MANIFOLDS WITH NONINTEGRABLE ALMOST COMPLEX STRUCTURE

G. Kostadinov, H. Melemov

Faculty of Mathematics and Informatics, University “Paisii Hilendarski”, Plovdiv, Bulgaria
geokostbg@yahoo.com

Given an almost complex mainfold (M,J), $J^2=-id$, in general case the integrability condition $N(X,Y)=0$ is not satisfied, where N is Nijenhuis tensor. The function $f: M\to\mathbb{C}$ is said to be holomorphic if the condition

$$df_p\circ J_p = i\cdot df_p,\quad p\in M,$$

holds.

S. Dimiev [1] and O. Muškarov [2] give sufficient conditions for the local existence of independent holomorphic functions. The holomorphic functions on generalised symmetric spaces was considered in [3]. For example every isotropy irreducible homogeneous almost complex space is either integrable or it does not admit nonconstant holomorphic functions.

If $N \neq 0$ we define the linear subspace

$$LN(p) = \mathrm{Span}\,\{N_p(X,Y) : \;\; X_p, \quad Y_p \in T_p(M)\}.$$

One arise a subbundle LN of TM. Note that $LN(p)$ is J-invariant subspace at any point $p \in M$ and by using this subbundle one can to determine the number of the independent holomorphic functions.

Let $M = G/K$ is homogeneous space with decomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ and invariant almost complex structure J

$$J(\mathrm{Ad}\,(a)X)_{\mathfrak{m}} = (\mathrm{Ad}\,(a)JX)_{\mathfrak{m}}, \quad a \in K, \quad X \in \mathfrak{m}.$$

Denote $LN(o) = \mathfrak{f} \subset \mathfrak{m}$, $o = K \in G/K$. By a result of Muškarov [2] we can formulate the following

Theorem. *Let the subspace* $\mathfrak{h}$ *of* $\mathfrak{m}$ *satisfy the following conditions:*

(i) $\mathfrak{h}$ *is both* $\mathrm{Ad}\,(K)$*-invariant and* J*-invariant;*

(ii) $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{h}$;

(iii) $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]_{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{h}$;

(iv) $[X, Y]_{\mathfrak{m}} - J[X, JY]_{\mathfrak{m}} \in \mathfrak{h}$ *for all* $X \in \mathfrak{h}$, $Y \in \mathfrak{m}$.

Then the subalgebra $\mathfrak{g}' = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{k}$ *generates a subgroup* $G' \subset G$. *On the homogeneous space* G/G' *arises almost complex structure which is integrable. There exist the following associated fibre bundle* $G/K \to G/G'$, *where the leaves are* $F \approx G'/K$.

Some examples are discussed.

Aknowledgement. This work is partially supported by project NI15–FMI–004.

References

1. Dimiev S. *Propriétés locales des fonctions presque-holomorphes* // Analytic functions (Blazejewko 1982), Lecture Notes in Math. Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1983. Vol. 1039. P. 102–117.

2. Muškarov O. *Existence of holomorphic functions on almost complex manifolds* // Math. Z. 1986. Vol. 192. P. 283–295.

3. Костадинов Г. *Почти голоморфные функции на обобщенных симметрических пространствах* // Докл. Акад. наук БССР. 1988. Т. 32. С. 677–680.

GEOMETRIC STRUCTURES ON MANIFOLDS WITH TORUS ACTIONS

T. Panov

Department of Mathematics and Mechanics, Moscow State University, Moscow, Russia
tpanov@mech.math.msu.su

Toric topology is a new area of mathematics that emerged at the end of the 1990s on the border of equivariant topology, algebraic and symplectic geometry, combinatorics, and commutative algebra.

The key players in toric topology are moment-angle manifolds, a class of manifolds with torus actions defined in combinatorial terms. Construction of moment-angle manifolds relates to combinatorial geometry and algebraic geometry of toric varieties via the notion of a quasitoric manifold. Discovery of remarkable geometric structures on moment-angle manifolds led to important connections with classical and modern areas of symplectic, Lagrangian, and non-Kaehler complex geometry. A related categorical construction of moment-angle complexes and polyhedral products provides for a universal framework for many fundamental constructions of homotopical topology. The study of polyhedral products is now evolving into a separate subject of homotopy theory. A new perspective on torus actions has also contributed to the development of classical areas of algebraic topology, such as complex cobordism.

After an introductory part describing the construction and the topology of moment-angle complexes, we shall concentrate on several interesting geometric properties of moment-angle manifolds, emphasising complex-analytic, symplectic and Lagrangian aspects.

Moment-angle manifolds provide a wide class of examples of non-Kaehler compact complex manifolds. A complex moment-angle manifold Z is constructed via a certain combinatorial data, called a complete simplicial fan. In the case of rational fans, the manifold Z is the total space of a holomorphic bundle over a toric variety with fibres compact complex tori. By studying the Borel spectral sequence of this holomorphic bundle, we calculate the Dolbeault cohomology and Hodge numbers of Z. In general, a complex moment-angle manifold Z is equipped with a canonical holomorphic foliation $\mathcal{F}$ which is equivariant with respect to the algebraic torus action. Examples of moment-angle manifolds include the Hopf manifolds, Calabi — Eckmann manifolds, and their deformations.

We construct transversely Kaehler metrics on moment-angle manifolds, under some restriction on the combinatorial data. We prove that all Kaehler submanifolds in such a moment-angle manifold lie in a compact complex torus contained in a fibre of the foliation $\mathcal{F}$. For a generic moment-angle manifold Z in its combinatorial class, we prove that all its subvarieties are moment-angle manifolds of smaller dimension. This implies, in particular, that Z does not have non-constant meromorphic functions, i. e. its algebraic dimension is zero.

The talk is based on joint works with V. Buchstaber, A. Mironov, Yu. Ustinovsky and M. Verbitsky.

Aknowledgement. This work is supported by the Russian Science Foundation under grant 14–11–00414.

References

1. Buchstaber V. M., Panov T. E. *Toric Topology* // Mathematical Surveys and Monographs. Vol. 204. Providence, RI: American Mathematical Society, 2015. 518 p.

2. Panov T. *Geometric structures on moment-angle manifolds* // Uspekhi Mat. Nauk. 2013. Vol. 68, no. 3. P. 111–186 (Russian); Russian Math. Surveys. 2013 Vol. 68, no. 3. P. 503–568 (English translation).

3. Panov T., Ustinovsky Yu., Verbitsky M. *Complex geometry of moment-angle manifolds* // Math. Zeitschrift. Published online: 05 April 2016.

ON THE CONCEPT OF INTEGRAL

E.V. Shchepin

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
scepin@mi.ras.ru

One exposes the hystory of concept of integral from Leibniz to Henstock. A new implementation Leibniz idea of integral as the sum of infinitely many infinitesimally small summands is given. The proposed construction is close to known as Kolmogorov integral.

But in contrast with Kolmogorov integral where one integrates a set functions and there are no infinitesimally smalls, in the presented construction infinitesimally small values appears explicitely. And the infinitesimally small values are interpreted in the sense of Cauchy as a number sequences tending to zero.

PONTRYAGIN ALGEBRAS OF SOME MOMENT-ANGLE COMPLEXES

Ya. Veryovkin

Department of Mathematics and Mechanics, Moscow State University, Moscow, Russia
verevkin_j.a@mail.ru

We consider the problem of describing the Pontryagin algebra (loop homology) of moment-angle complexes and manifolds. The moment-angle complex $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ is a cell complex built of products of polydiscs and tori parametrised by simplices in a finite simplicial complex $\mathcal{K}$. It has a natural torus action and plays an important role in toric topology. In the case when $\mathcal{K}$ is a triangulation of a sphere, $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ is a topological manifold, which has interesting geometric structures.

Generators of the Pontryagin algebra $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ when $\mathcal{K}$ is a flag complex were described in the work of Grbic, Panov, Theriault and Wu. Describing relations is often a difficult problem, even when $\mathcal{K}$ has a few vertices. Here we describe these relations in the case when $\mathcal{K}$ is the boundary of pentagon or hexagon. In this case, it is known that $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ is a connected sum of products of spheres with two spheres in each product. Therefore $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ is a one-relator algebra and we describe this one relation explicitly, therefore giving a new homotopy — theoretical proof of McGavran's result. An interesting feature of our relation is that it includes iterated Whitehead products, which vanish under the Hurewicz homomorphism. Therefore, the form of this relation cannot be deduced solely from the result of McGavran.

Aknowledgement. This work is supported by the Russian Science Foundation under grant 14–11–00414.

References

1. Bosio F., Meersseman L. *Real quadrics in* $\mathbb{C}^n$, *complex manifolds and convex polytopes* // Acta Math. 2006. Vol. 197, no. 1. P. 53–127.
2. Buchstaber V. M., Panov T. E. *Toric Topology* // Math. Surv. and Monogr. Vol. 204. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.
3. Gitler S., López de Medrano S. *Intersections of quadrics, moment-angle manifolds and connected sums.* Preprint. 2009; arXiv: 0901.2580.
4. Grbic J., Panov T., Theriault S., Wu J. *Homotopy types of moment-angle complexes for flag complexes* // Trans. Amer. Math. Soc. 2015. (to appear); arXiv: 1211.0873.
5. McGavran D. *Adjacent connected sums and torus actions* // Trans. Amer. Math. Soc. 1979. Vol. 251. P. 235–254.

СОДЕРЖАНИЕ

Вещественный и комплексный анализ

Функциональный анализ и операторные уравнения

Геометрия и топология

Научное издание

XII Белорусская математическая конференция

Материалы конференции

Часть 1

Редактор *С. Г. Красовский*
Компьютерная верстка *С. Г. Красовский*

Подписано в печать 04.07.2016 г.
Формат $60 \times 84\,{}^1/_8$. Усл. печ. л. 10,47. Уч.-изд. л. 9,42. Тираж 90 экз. Зак. 8.

Отпечатано на ризографе Института математики НАН Беларуси.
Издатель и полиграфическое исполнение:
Институт математики НАН Беларуси.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/257 от 2 апреля 2014 г.
200072, Минск, ул. Сурганова, 11.