ВЫПУКЛАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ И ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Г. Г. МАГАРИЛ-ИЛЬЯЕВ, Е. О. СИВКОВА

Общая задача оптимального восстановления линейного оператора на классе элементов по неточной и/или неполной информации об этих элементах ставится следующим образом. Пусть X — векторное пространство, Y и Z — нормированные пространства, $I\colon X\to Y$ — линейный оператор, $\delta\ge 0$ и W — подмножество (класс элементов) в X. О каждом элементе $x\in W$ мы располагаем информацией: известен элемент $y\in Y$ такой, что $\|Ix-y\|_Y\le\delta$. Другими словами, если обозначить через $I^\delta\colon X\to Y$ многозначное отображение, сопоставляющее $x\in W$ множество $I^\delta x=\{\,y\in Y\mid \|Ix-y\|_Y\le\delta\,\}$, то информация y об $x\in W$ заключается в том, что $y\in I^\delta x$. Под задачей оптимального восстановления значений линейного оператор $\Lambda\colon X\to Z$ на классе W по описанной информации об элементах W понимается нахождение величины

$$E(\Lambda,W,I^\delta,m)=\inf_m \sup_{x\in W,\ y\in I^\delta x}\|\Lambda x-m(y)\|_Z \tag{1}$$

(где нижняя грань берется по всем отображениям (методам) $m\colon Y\to Z$) называемой *погрешностью оптимального восстановления* и метода $\widehat{m}$, на котором нижняя грань достигается, называемого *оптимальным методом восстановления*.

Если в (1) считать, что $Z=\mathbb{R}$ и в качестве m рассматривать только линейные функционалы, то (1) представляет собой задачу минимизации выпуклой функции на пространстве Y' — сопряженном к Y. В этом случае множители Лагранжа для двойственной задачи к (1) однозначно определяют оптимальный метод в исходной задаче (см.[1]). В общем случае, когда $Z\ne\mathbb{R}$, можно формально (по аналогии) выписать “двойственную” задачу к (1). Она имеет вид

$$\|\Lambda x\|_Z\to\max,\quad \|Ix\|_Y\le\delta,\quad x\in W. \tag{2}$$

В многих задачах оптимального восстановления функций и их производных по приближенно заданному спектру (см.[2]), оптимального восстановления решений дифференциальных уравнений по неточным начальным данным (см.[3]) задача (2) сводится (в конечном счете) к следующей задаче (бесконечномерного) линейного программирования

$$\int_{\mathbb{R}} a(\xi)\,d\mu(\xi)\to\max,\quad \int_{\mathbb{R}} d\mu(\xi)\le\delta^2,\quad \int_{\mathbb{R}} b(\xi)\,d\mu(\xi)\le 1,$$

где $d\mu(\cdot)$ — неотрицательная мера на $\mathbb{R}$, а $a(\cdot)$ и $b(\cdot)$ — неотрицательные функции. Формально двойственная к ней задача такова

$$\lambda_1\delta^2 + \lambda_2 \to \min, \quad -a(\xi) + \lambda_1 + \lambda_2 b(\xi) \geq 0, \quad \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0,$$

где первое неравенство должно выполняться для всех $\xi \in \mathbb{R}$.

Оказывается, что найденные отсюда λ_1, λ_2, определяют оптимальные методы в исходной (невыпуклой) задаче. В докладе будут приведены некоторые следствия этого интересного эффекта.

Список литературы

[1] Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Выпуклый анализ и его приложения, М.: Эдиториал УРСС, 2003.

[2] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. “Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью”, *Матем. сб.*, **193**:3 (2002), 79–100.

[3] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. “Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных”, *Функц. анализ и его прилож.*, **37** (2003), 51–64.