

Е.В. ВВЕДЕНСКАЯ

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ, ЗАДАННОЙ НЕТОЧНО

Пусть $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ — числовая последовательность, принадлежащая классу

$$l_2^1 = \left\{ \{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l_2, \sum_{k \in \mathbb{Z}} (x_{k+1} - x_k)^2 \leq 1 \right\}.$$

Предположим, что вместо $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ известна последовательность

$$\{\tilde{x}_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l_2,$$

такая, что

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (x_k - \tilde{x}_k)^2 \leq \delta^2.$$

Рассматривается задача восстановления значения x_0 по информации о $\{\tilde{x}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Под методами восстановления будем понимать всевозможные отображения

$$\varphi : l_2 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Погрешностью метода φ назовем величину

$$e(\delta, \varphi) = \sup_{\substack{\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l_2^1, \\ \{\tilde{x}_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l_2, \\ \sum_{k \in \mathbb{Z}} (x_k - \tilde{x}_k)^2 \leq \delta^2}} |x_0 - \varphi(\{\tilde{x}_k\}_{k \in \mathbb{Z}})|,$$

а погрешностью оптимального восстановления — величину

$$E(\delta) = \inf_{\varphi: l_2^1 \rightarrow \mathbb{R}} e(\delta, \varphi).$$

Метод, на котором достигается нижняя грань, назовем оптимальным методом. Согласно общей теории (см. [1], [2], [3]) вычисление погрешности оптимального восстановления сводится к решению следующей экстремальной задачи

$$E(\delta) = \sup_{\substack{\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l_2^1, \\ \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k^2 \leq \delta^2}} |x_0|.$$

Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид

$$L(\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}, \lambda_1, \lambda_2) = -x_0 + \lambda_1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k^2 + \lambda_2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} (x_{k+1} - x_k)^2.$$

Необходимые условия экстремума функции Лагранжа приводят к уравнениям

$$\frac{\partial L}{\partial x_0} = 0 \Rightarrow 2\lambda_2 x_1 - 2(\lambda_1 + 2\lambda_2)x_0 + 2\lambda_2 x_{-1} = -1 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \Rightarrow x_{j+1} - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + 2 \right) x_j + x_{j-1} = 0 \quad (2)$$

Будем искать решение (1) и (2) в виде

$$x_j = x_0 \mu^{|j|}, j \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

При этом из (1) следует

$$\mu_1 = \mu = \frac{\lambda_1}{2\lambda_2} + 1 - \sqrt{\left(\frac{\lambda_1}{2\lambda_2} + 1 \right)^2 - 1} < 1,$$

$$\mu_2 = \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda_1}{2\lambda_2} + 1 + \sqrt{\left(\frac{\lambda_1}{2\lambda_2} + 1\right)^2 - 1} > 1 \quad (4)$$

Из (4) видно, что $\mu > 0$. Из (3) и из равенства $\sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k^2 = \delta^2$ получим $x_0^2 \left(1 + \frac{2\mu^2}{1-\mu^2}\right) = \delta^2$, откуда

$$x_0^2 = \delta^2 \frac{1 - \mu^2}{1 + \mu^2} \quad (5)$$

Из того, что

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (x_{k+1} - x_k)^2 = 1,$$

вытекает равенство $\sum_{k \in \mathbb{Z}} x_0^2 (\mu^{|k+1|} - \mu^{|k|})^2 = 1$, из которого следует

$$x_0^2 = \frac{1 + \mu}{2(1 - \mu)}. \quad (6)$$

Из (5) и (6) получим

$$\mu = \frac{2\delta^2 - \sqrt{4\delta^2 - 1}}{2\delta^2 - 1}, \quad \delta > \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (7)$$

Из (6) и (7) следует, что

$$\hat{x}_0 = \frac{\sqrt[4]{4\delta^2 - 1}}{\sqrt{2}}. \quad (8)$$

Здесь $\{\hat{x}_k\}, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2$ — это последовательность из l_2 и множители Лагранжа, для которых выполняются необходимые условия (1) и (2). Из равенства (1) учитывая, что $\hat{x}_1 = \hat{x}_0\mu = \hat{x}_{-1}$, получим, используя (4), (7), (8), а также легко проверяемое равенство $\hat{\lambda}_1 = \frac{2\hat{\lambda}_2}{2\delta^2 - 1}$,

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt[4]{(4\delta^2 - 1)^3}}, \quad \hat{\lambda}_2 = \frac{2\delta^2 - 1}{2\sqrt{2} \sqrt[4]{(4\delta^2 - 1)^3}}.$$

Итак, справедлива следующая

Теорема 1. Для любой последовательности $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l_2^1$ при $\delta > \frac{1}{\sqrt{2}}$ имеет место тождество

$$x_0 = 2\hat{\lambda}_1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \hat{x}_k + 2\hat{\lambda}_2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} (x_{k+1} - x_k)(\hat{x}_{k+1} - \hat{x}_k), \quad (9)$$

где

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt[4]{(4\delta^2 - 1)^3}}, \quad \hat{\lambda}_2 = \frac{2\delta^2 - 1}{2\sqrt{2} \sqrt[4]{(4\delta^2 - 1)^3}},$$

а $\hat{x}_k = \hat{x}_0 \mu^{|k|}$, где $\hat{x}_0 = \frac{\sqrt[4]{4\delta^2 - 1}}{\sqrt{2}}$, а $\mu = \frac{2\delta^2 - \sqrt{4\delta^2 - 1}}{2\delta^2 - 1}$.

В справедливости теоремы 1 можно убедиться непосредственной проверкой. Из теоремы 1 следует

Теорема 2. При $\delta > \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$E(\delta) = 2\hat{\lambda}_1 \delta^2 + 2\hat{\lambda}_2$$

а метод

$$\hat{\varphi}(\{\tilde{x}_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l_2) = 2\hat{\lambda}_1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{x}_k \tilde{x}_k \quad (10)$$

является оптимальным.

Из тождества (9) и того, что

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{x}_k^2 = \delta^2$$

и

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (\hat{x}_{k+1} - \hat{x}_k)^2 = 1,$$

следует оценка снизу для погрешности оптимального восстановления:

$$E(\delta) \geq \hat{x}_0 = 2\hat{\lambda}_1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{x}_k^2 + 2\hat{\lambda}_2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\hat{x}_{k+1} - \hat{x}_k)^2 = 2\hat{\lambda}_1 \delta^2 + 2\hat{\lambda}_2.$$

Оценим теперь погрешность метода $\hat{\varphi}(\{\tilde{x}_k\}_{k \in \mathbb{Z}})$ сверху, используя тождество (9):

$$\begin{aligned} |x_0 - \hat{\varphi}(\{\tilde{x}_k\}_{k \in \mathbb{Z}})| &= \\ &= |x_0 - 2\hat{\lambda}_1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{x}_k (\tilde{x}_k - x_k + x_k)| \leq \\ &= |x_0 - 2\hat{\lambda}_1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{x}_k x_k| + 2\hat{\lambda}_1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{x}_k |\tilde{x}_k - x_k| \leq \\ &= 2\hat{\lambda}_2 \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} (x_{k+1} - x_k) (\hat{x}_{k+1} - \hat{x}_k) \right| + 2\hat{\lambda}_1 \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{x}_k \right)^{\frac{1}{2}} \delta \leq \\ &= 2\hat{\lambda}_2 + 2\hat{\lambda}_1 \delta^2, \end{aligned}$$

так как, в силу неравенства Коши-Буняковского,

$$\left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{x}_k (\tilde{x}_k - x_k) \right| \leq \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{x}_k^2 \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\tilde{x}_k - x_k|^2}$$

и $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\tilde{x}_k - x_k|^2 \leq \delta^2$, а $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{x}_k^2 = \delta^2$, а также

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (|x_{k+1} - x_k|)^2 \leq 1, \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\hat{x}_{k+1} - \hat{x}_k)^2 = 1.$$

Итак,

$$E(\delta) = 2\hat{\lambda}_1 \delta^2 + 2\hat{\lambda}_2,$$

а метод(10) является оптимальным. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью // Матем. сб. 2002. Т. 193. №3. с. 79-100.
- [2] C.A.Micchelli and T.J.Rivlin Lectures of Optimal Recovery // Numerical analysis (Sammer School, Lancaster, 1984) pp 21-93, Lecture Notes in Math., V.1129, Springer-Vorlag, Berlin, 1985.
- [3] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функ. анализ и его прил. 2003. Т. 37. с. 51-64.