На правах рукописи

Баграмян Тигран Эммануилович

Восстановление функций по неточно заданному преобразованию Радона и неравенства для норм некоторых операторов

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва - 2013

Работа выполнена на кафедре нелинейного анализа и оптимизации факультета физико-математических и естественных наук РУДН

Научные руководители:

Арутюнов Арам Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой нелинейного анализа и оптимизации РУДН

Осипенко Константин Юрьевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики МАТИ РГТУ им. К.Э. Циолковского

Официальные оппоненты:

Сухинин Михаил Федорович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений и математической физики факультета физико-математических и естественных наук РУДН

Фарков Юрий Анатольевич, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математики МГРИ-РГГРУ.

Ведущая организация:

Московский физико-технический институт
государственный университет

Защита состоится 18 июня 2013 года в 16 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.203.27 при Российском университете дружбы народов по адресу: 117198, Москва, ул. Орджоникидзе, 3, ауд. 495а.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке РУДН.

Автореферат разослан "___"_______ 2013 г.

Ученый секретарь диссертационного совета

Россовский Леонид Ефимович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертация посвящена применению теории оптимального восстановления к ряду задач, возникающих в компьютерной томографии, а также изучению неравенств для производных. В многих задачах анализа возникает необходимость восстановления функций, функционалов и операторов по неточной или неполной информации о них. Такого рода задачи решаются с помощью теории оптимального восстановления - современного раздела теории приближений. Задача оптимального восстановления, которая берет свое начало от работ А.Н. Колмогорова, впервые появилась в кандидатской диссертации С.А. Смоляка и получила развитие в работах C.A. Michelli, T.J. Rivlin, К.Ю. Осипенко, М.И. Стесина, Г.Г. Магарил-Ильяева. В общем случае задача оптимального восстановления состоит в наилучшем приближении значения линейного оператора на некотором множестве по информации, являющейся значениями другого линейного оператора (называемого информационным), возможно заданными неточно, с погрешностью в той или иной метрике. В конкретных задачах восстановления в качестве информационного оператора обычно рассматривают линейные функционалы или операторы, сопоставляющие функции ее значения в точках, ее коэффициенты Фурье или просто саму функцию. В данной работе рассматривается преобразование Радона (понимаемое в широком смысле) - оператор, переводящий функцию на многообразии в множество ее интегралов по некоторому семейству подмногообразий. Операторы подобного типа изучаются в интегральной геометрии и компьютерной томографии, которая занимается численным восстановлением функций по их линейным или плоскостным интегралам. В конкретных случаях, когда преобразование Радона известно точно, существуют формулы обращения, позволяющие произвести однозначное восстановление. Во всех рассматриваемых в данной работе задачах преобразование Радона измерено неточно, но с известной погрешностью. В теории оптимального восстановления подобные операторы рассматривались ранее в работе B.F Logan и L.A. Shepp, где для функции, заданной в единичном шаре на плоскости, известно преобразование Радона в некотором конечном числе направлений, а также в диссертации A.J. Degraw, где рассматриваются задачи восстановления гармонической функции в единичном шаре плоскости по неточно заданному преобразованию Радона и значениям оператора радиального интегрирования.

В работах К.Ю. Осипенко и Г.Г. Магарил-Ильяева методами теории оптимального восстановления получены некоторые точные неравенства для производных и показано, что задача нахождения точных констант в таких неравенствах может быть сформулирована и эффективно решена как соответствующая задача оптимального восстановления. Более того, такое решение является более тонким инструментом исследования подобных неравенств. Этот подход развивается в работе на примере одного неравенства для производных функций на отрезке.

Цель исследования. Основными целями диссертации являются:
1) исследование оптимальных методов восстановления функций по неточно заданной томографической информации (множеству интегралов по некоторому семейству многообразий);
2) исследование оптимальных методов восстановления производной функции и связанная с этим задача нахождения точных констант в неравенствах для производных.

Задачи исследования. В диссертации рассматриваются следующие задачи:
1) исследование оптимальных на классе гармонических функций в единичном шаре d-мерного пространства методов восстановления по неточно заданным значениям оператора радиального интегрирования

$$Kf = \int_0^1 f(r\zeta)dr, \quad \zeta \in \mathbb{S}^{d-1};$$

2) исследование оптимальных на классе гармонических функций в единичном шаре d-мерного пространства методов восстановления по неточно заданному преобразованию Радона (интегрирование по пересечениям гиперплоскостей и шара);
3) исследование оптимальных на пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ методов восстановления по неточно заданному преобразованию Радона (в классическом смысле - интегрирование по гиперплоскостям)

$$Rf(\theta, s) = \int_{x\theta=s} f(x)dx, \quad \theta \in \mathbb{S}^{d-1}, \quad s \in \mathbb{R};$$

4) исследование оптимальных на классе функций на сфере $\mathbb{S}^{d-1}$, у которых ограничена L_2-норма степени сферического Лапласиана $(-\Delta_S)^{\alpha/2}$, методов восстановления по неточно заданному преобразованию Минковского-Функа (интегрирование по "большим кругам")

$$Mf(\xi) = \int_{x\xi=0} f(x)dx, \quad x \in \mathbb{S}^{d-1}, \quad \xi \in \mathbb{S}^{d-1};$$

5) нахождение точной константы в одном неравенстве для производных функций на отрезке путем исследования соответствующей задачи восстановления.

Методика исследования. Для решения поставленных задач использовались методы теории экстремальных задач, функционального анализа, теории функций вещественной переменной, теории представлений, интегральной геометрии.

Научная новизна. Все полученные результаты являются новыми. Среди них можно выделить следующие наиболее важные:

1) Для пространства Харди h_2 гармонических функций в единичном шаре d-мерного пространства найдено семейство оптимальных методов восстановления и соответствующая им погрешность восстановления по неточно заданным значениям оператора радиального интегрирования;

2) Для пространства Харди h_2 гармонических функций в единичном шаре d-мерного пространства найдено семейство оптимальных методов восстановления и соответствующая им погрешность восстановления по неточно заданному преобразованию Радона;

3) Для класса функций из пространства $L_2(\mathbb{R}^d)$, имеющих ограниченную L_2-норму степени оператора Лапласа $(-\Delta)^{\alpha/2}$ найдено семейство оптимальных методов восстановления и соответствующая им погрешность восстановления по неточно заданному преобразованию Радона. В качестве следствия приведено одно неравенство для норм преобразования Радона и степени оператора Лапласа;

4) Найдено семейство оптимальных методов и погрешность оптимального восстановления на классе функций на сфере $\mathbb{S}^{d-1}$, у которых ограничена L_2-норма степени оператора Лапласа-Бельтрами $(-\Delta_S)^{\alpha/2}$, по неточно заданному преобразованию Минковского-Функа;

5) Для рассматриваемого неравенства для функций на отрезке найдена точная константа. Более того, для некоторых подмножеств рассматриваемого класса функций показано, что константа может быть уменьшена. Приведены явные описания этих подмножеств и точные константы на них.

Теоретическая и практическая значимость. В диссертации показано, что конкретные задачи компьютерной томографии, а также задача нахождения точных констант в неравенствах для производных, могут быть эффективно исследованы в рамках теории оптимального восстановления. Указаны соответствующие методы исследования подобных задач. Приведен пример численного восстановления функции в задаче восстановления по неточно заданным значения оператора радиального интегрирования. Аналогично, другие полученные результаты могут представлять интерес для решения прикладных задач компьютерной томографии.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих семинарах и конференциях:
1) Всероссийская научная конференция "Математическое моделирование развивающейся экономики и экологии. ЭКОМОД"2009;
2) Международная конференция, посвященная памяти Г.В. Дорофеева "Традиции гуманизации и гуманитаризации математического образования"2010;
3) Научный семинар "Вопросы оптимального восстановления линейных операторов"(рук. проф. Г.Г. Магарил-Ильяев, проф. К.Ю. Осипенко, проф. В.М. Тихомиров), 2011;
4) Научный семинар "Квазилинейные уравнения и обратные задачи"МФТИ, Ecole Polytechnique, Paris VI (рук. проф. А.А. Шананин, проф. Р.Г. Новиков, проф. Г.М. Хенкин), 2012;
5) Научная конференция МГУ "Ломоносовские чтения"2012;
6) Научный семинар "Дифференциальные и функционально-дифференциальные уравнения"РУДН (рук. проф. Скубачевский А.Л.), 2013

Публикации. По теме диссертации опубликовано 6 печатных работ.

Структура и объем диссертации. Диссертация, изложенная на 84 страницах, состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, и списка литературы, содержащего 44 наименования.

Краткое содержание работы

Во введении дается литературный обзор, обосновывается актуальность темы диссертационного исследования, описывается структура и дается краткое содержание работы, излагаются основные научные результаты, выносимые на защиту. В отдельном параграфе приводятся необходимые предварительные сведения.

Первая глава посвящена исследованию задачи оптимального восстановления функций в единичном шаре d-мерного пространства по неточно заданным значениям оператора радиального интегрирования. Приводятся определения рассматриваемого класса функций, оператора радиального интегрирования, погрешности оптимального восстановления и оптимальных методов. Формулируется и доказывается теорема, в которой в явном виде указана зависимость погрешности оптимального восстановления, измеряемая в метрике $L_2(\mathbb{B}^d)$ от погрешности информации, измерямой в метрике $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, а также семейство оптимальных методов восстановления. В качестве следствия к теореме приводится утверждение о достаточном для восстановления количестве информации. Приведены аналогичные теоремы для задач, в которых в качестве информации рассматривается конечное число коэффициентов Фурье разложения оператора радиального интегрирования по базису сферических гармоник в $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, измеренных с погрешностью в метриках l_2 и l_∞. Приведен пример численного восстановления функции одним из оптимальных методов.

Пространство Харди h_2 состоит из гармонических в единичном шаре d-мерного пространства ($d \geq 2$) функций, для которых конечна норма

$$\|f\|_{h_2} = \sup_{0 \leq r < 1} \|f(r\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}.$$

Известно представление функций из h_2 в виде разложения в ряд по ортонормированной системе сферических гармоник:

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} f_{kl} |x|^l Y_k^l \left(\frac{x}{|x|} \right),$$

где

$$N(l,d) = \frac{(2l+d-2)(d+l-3)!}{l!(d-2)!}, \quad l \geq 1,$$
$$N(0,d) = 1.$$

Рассмотрим оператор радиального интегрирования K, определенный равенством

$$Kf(\zeta) = \int_0^1 f(r\zeta)dr, \quad \zeta \in \mathbb{S}^{d-1}.$$

Предположим, что для любой функции $f \in Bh_2 = \{f \in h_2 : \|f\|_{h_2} \leq 1\}$ значение Kf известно с некоторой погрешностью. Т.е. дана функция $g \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, такая что $\|Kf - g\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta$. Зная функцию g, мы хотим наилучшим образом восстановить функцию f. Воспользуемся тем, что h_2 непрерывно вложено в $L_2(\mathbb{B}^d)$ и будем искать приближение в этом пространстве. Рассмотрим всевозможные методы восстановления — произвольные отображения $m\colon L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \to L_2(\mathbb{B}^d)$. Для каждого m определим величину, называемую погрешностью метода

$$e(Bh_2, K, \delta, m) = \sup_{\substack{f \in Bh_2, \\ \|Kf-g\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta}} \|m(g) - f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}.$$

Оптимальным назовем метод, который имеет наименьшую погрешность, т.е. тот, на котором достигается погрешность оптимального восстановления

$$E(Bh_2, K, \delta) = \inf_{m: L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \to L_2(\mathbb{B}^d)} e(Bh_2, K, \delta, m).$$

Теорема 1 *Положим*

$$(x_0, y_0) = (0, 0),$$

$$(x_i, y_i) = \left(i^2, \frac{i^2}{2i + d - 2} \right), \quad i = 1, 2 \ldots \; ,$$

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{y_{s+1} - y_s}{x_{s+1} - x_s}, \quad \widehat{\lambda}_2 = \frac{y_s x_{s+1} - y_{s+1} x_s}{x_{s+1} - x_s},$$

где число $s \geq 0$ *таково, что* $x_s < \delta^{-2} \leq x_{s+1}$. *Тогда погрешность оптимального восстановления равна*

$$E(Bh_2, K, \delta) = \sqrt{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 \delta^2}.$$

Методы

$$m_a(g)(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} a_{kl}(l+1) g_{kl} |x|^l Y_k^l \left(\frac{x}{|x|} \right), \tag{1}$$

где $g_{kl} = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} g(\zeta) Y_k^l(\zeta) d\zeta$ *— коэффициенты разложения функции* g *в ряд Фурье по ортонормированной системе* Y_k^l,

$$a_{kl} = \frac{\widehat{\lambda}_2}{\widehat{\lambda}_1 (l+1)^2 + \widehat{\lambda}_2} + \epsilon_{kl} \frac{\sqrt{\widehat{\lambda}_1 \widehat{\lambda}_2}(l+1)}{\widehat{\lambda}_1 (l+1)^2 + \widehat{\lambda}_2} \sqrt{\widehat{\lambda}_1 (2l + d) + \widehat{\lambda}_2 \frac{2l+d}{(l+1)^2} - 1},$$

ϵ_{kl} *— произвольные числа из отрезка* $[-1; 1]$, *являются оптимальными.*

Следствие 1 *Пусть выполнены условия теоремы 1, тогда можно положить* $a_{kl} = 0$ *при* $\frac{1}{2l+d} \leq \widehat{\lambda}_1$ *и* $a_{kl} = 1$ *при* $\frac{(l+1)^2}{2l+d} \leq \widehat{\lambda}_2$.

Пусть для каждой функции $f \in Bh_2$ нам известен набор $g \in \mathbb{R}^q$, $q = \sum_{l=0}^{N-1} N(l, d)$, такой что

$$\sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{N(l,d)} |K f_{kl} - g_{kl}|^2 \leq \delta^2,$$

где $Kf_{kl} = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} Kf(\zeta)Y_k^l(\zeta)d\zeta$. В качестве методов восстановления рассмотрим отображения $m : \mathbb{R}^q \to L_2(\mathbb{B}^d)$. Определим погрешность метода

$$e(Bh_2, K, \delta, m) = \sup_{\substack{f\in Bh_2,\\ \sum_{l=0}^{N-1}\sum_{k=1}^{N(l,d)}|Kf_{lk}-g_{lk}|^2\le\delta^2}} \|m(g) - f\|_{L_2(B^d)}$$

и погрешность оптимального восстановления

$$E(Bh_2, K, \delta) = \inf_{m:\mathbb{R}^q\to L_2(B^d)} e(Bh_2, K, \delta, m).$$

Теорема 2 *Положим*

$$(x_0, y_0) = (0, 0),$$

$$(x_i, y_i) = \left(i^2, \frac{i^2}{2i + d - 2}\right), \quad i = 1, 2, \dots,$$

$$s_N = \min\left\{s \ge 0 : \frac{y_{N+1}}{x_{N+1}} \ge \frac{y_{s+1} - y_s}{x_{s+1} - x_s}\right\},$$

$\widehat{\lambda}_1 = \frac{y_{s+1}-y_s}{x_{s+1}-x_s}$, $\widehat{\lambda}_2 = \frac{y_s x_{s+1}-y_{s+1}x_s}{x_{s+1}-x_s}$, *при* $x_s < \delta^{-2} < x_{s+1}$, $0 \le s < s_N$ *и* $\widehat{\lambda}_1 = \frac{y_{N+1}}{x_{N+1}}$, $\widehat{\lambda}_2 = y_{s_N} - x_{s_N}\widehat{\lambda}_1$ *при* $\delta^{-2} \ge x_{s_N}$.

Тогда погрешность оптимального восстановления равна

$$E(Bh_2, K, \delta) = \sqrt{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2\delta^2}.$$

Методы

$$m_a(g)(x) = \sum_{l=0}^{N-1}\sum_{k=1}^{N(l,d)} a_{kl}(l+1)g_{kl}|x|^l Y_k^l\left(\frac{x}{|x|}\right),$$

где a_{kl} *определены равенствами* (1)*, являются оптимальными.*

Пусть для каждой функции $f \in Bh_2$ нам известен набор $g \in \mathbb{R}^q$, $q = \sum_{l=0}^{N-1} N(l,d)$, такой что

$$|Kf_{kl} - g_{kl}| \le \delta_{kl}, \quad l = 0, \dots, N-1, \quad k = 1, \dots, N(l,d).$$

В качестве методов восстановления рассмотрим отображения $m : \mathbb{R}^q \to L_2(\mathbb{B}^d)$. Определим погрешность метода

$$e(Bh_2, K, \delta, m) = \sup_{\substack{f\in Bh_2\\ |Kf_{kl}-g_{kl}|\le\delta_{kl}}} \|m(g) - f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}$$

и погрешность оптимального восстановления

$$E(Bh_2, K, \delta) = \inf_{m:\mathbb{R}^q\to L_2(\mathbb{B}^d)} e(Bh_2, K, \delta, m).$$

Теорема 3 *Положим*

$$p = \max\left\{0 \le p \le N-1 : \sum_{l=0}^{p}\sum_{k=1}^{N(l,d)} \delta_{kl}^2 (l+1)^2 \le 1\right\},$$

$\widehat{\lambda} = \frac{1}{2(p+1)+d}$, $\quad \widehat{\lambda}_{kl} = \frac{(l+1)^2}{2l+d} - \widehat{\lambda}(l+1)^2$, $\quad l = 0, \dots, p$, $\quad k = 1, \dots, N(l,d)$, *при* $\delta_{10} \le 1$, *или* $\widehat{\lambda} = \frac{1}{d}$, $\quad \widehat{\lambda}_{kl} = 0$, $\quad l = 0, \dots, p$, $\quad k = 1, \dots, N(l,d)$, *при* $\delta_{10} > 1$.

Тогда погрешность оптимального восстановления равна

$$E(Bh_2, K, \delta) = \sqrt{\widehat{\lambda} + \sum_{l=0}^{p}\sum_{k=1}^{N(l,d)} \widehat{\lambda}_{kl}\delta_{kl}^2}.$$

Метод

$$m_a(g)(x) = \sum_{l=0}^{p}\sum_{k=1}^{N(l,d)} a_{kl}(l+1)g_{kl}|x|^l Y_k^l\left(\frac{x}{|x|}\right),$$

где $a_{kl} = \frac{\widehat{\lambda}_{kl}}{\widehat{\lambda}(l+1)^2 + \widehat{\lambda}_{kl}}$, *является оптимальным.*

Во второй главе рассматриваются задачи оптимального восстановления функций по их неточно заданному преобразованию Радона. Глава состоит из трех разделов. В первом разделе рассматривается задача оптимального восстановления функций из пространства Харди h_2 по их преобразованию Радона, измеренному с погрешностью в среднеквадратичной метрике. Формулируется и доказывается теорема, в которой устанавливается погрешность оптимального восстановления и семейство оптимальных методов, на которых эта погрешность достигается. Приводится следствие о достаточном для восстановления количестве информации.

Продолжим функции $f \in Bh_2$ на $\mathbb{R}^d$, положив $f(x) = 0$, $|x| \ge 1$. Определим преобразование Радона

$$Rf(\theta, s) = \int_{x\theta = s} f(x)dx, \quad \theta \in \mathbb{S}^{d-1}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Функция Rf определена на единичном цилиндре $Z = \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}$. Гильбертово пространство $L_2(Z)$ задается скалярным произведением $(g,h)_{L_2(Z)} = \int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{R}} g(\theta,s)\overline{h}(\theta,s)dsd\theta$. Предположим, что функция Rf известна с некоторой погрешностью. Будем считать, что нам известна функция $g \in L_2(Z)$, такая что $||Rf - g||_{L_2(Z)} \le \delta$, $\quad \delta > 0$. Задача состоит в нахождении оптимального метода восстановления функции f по информации g. Под методом восстановления понимается произвольное отображение $m : L_2(Z) \to L_2(\mathbb{B}^d)$, а погрешностью метода называется величина

$$e(\delta, m) = \sup_{\substack{f \in Bh_2, g \in L_2(Z) \\ \|Rf - g\|_{L_2(Z)} \leq \delta}} ||f - m(g)||_{L_2(\mathbb{B}^d)}.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется наименьшая из погрешностей всех возможных методов

$$E(\delta) = \inf_{m: L_2(Z) \to L_2(\mathbb{B}^d)} e(\delta, m).$$

Метод, на котором достигается погрешность оптимального восстановления, называется оптимальным методом восстановления.

Рассмотрим множество точек $\{(x_l, y_l)\}_{l=0}^{\infty}$, заданное формулами

$$x_l = \frac{\Gamma^2(\frac{d+1}{2})\Gamma(d + l + \frac{1}{2})}{\pi^{d-1}\Gamma(d)\Gamma(l + \frac{1}{2})}, \quad y_l = \frac{x_l}{2l + d}.$$

Пусть $x_s < \delta^{-2} \leq x_{s+1}$, $s \geq 0$, тогда положим $\widehat{\lambda}_1 = \frac{y_{s+1} - y_s}{x_{s+1} - x_s}$, $\widehat{\lambda}_2 = \frac{y_s x_{s+1} - y_{s+1} x_s}{x_{s+1} - x_s}$. Если $\delta^{-2} \leq x_0$, положим $\widehat{\lambda}_1 = \frac{y_0}{x_0}$, $\widehat{\lambda}_2 = 0$.

Теорема 4 *Погрешность оптимального восстановления равна*

$$E(\delta) = \sqrt{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 \delta^2}.$$

Методы

$$m_a(g)(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l)} a_{kl} \frac{(\widehat{g}_{kl}, \psi_l)}{(\psi_l, \psi_l)} |x|^l Y_k^l \left(\frac{x}{|x|} \right),$$

где $g_{kl}(s) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} g(\theta, s) Y_k^l(\theta) d\theta$, $\psi_l(\sigma) = (2\pi)^{(d-1)/2} i^{-l} \sigma^{-d/2} J_{l+d/2}(\sigma)$, J_l - *функция Бесселя 1-го рода l-го порядка,*

$$a_{kl} = \frac{\widehat{\lambda}_2}{\widehat{\lambda}_1 x_l + \widehat{\lambda}_2} + \epsilon_{kl} \frac{\sqrt{\widehat{\lambda}_1 \widehat{\lambda}_2 (2l + d)}}{\widehat{\lambda}_1 x_l + \widehat{\lambda}_2} \sqrt{\widehat{\lambda}_1 x_l + \widehat{\lambda}_2 - \frac{x_l}{2l + d}},$$

ϵ_{kl} — *произвольные числа из отрезка* $[-1; 1]$, *являются оптимальными.*

Следствие 2 *В условиях теоремы 4 методы*

$$m_a(g)(x) = \sum_{l<l'} \sum_{k=1}^{N(l)} \frac{(\widehat{g}_{kl}, \psi_l)}{(\psi_l, \psi_l)} |x|^l Y_k^l \left(\frac{x}{|x|}\right) + \sum_{l'<l<l''} \sum_{k=1}^{N(l)} a_{kl} \frac{(\widehat{g}_{kl}, \psi_l)}{(\psi_l, \psi_l)} |x|^l Y_k^l \left(\frac{x}{|x|}\right),$$

где $l' = \max\{l | y_l \le \widehat{\lambda}_2\}$, $l'' = \min\left\{l | l \ge \frac{1-\widehat{\lambda}_1 d}{2\widehat{\lambda}_1}\right\}$, *являются оптимальными.*

Во втором разделе второй главы диссертации исследуется задача оптимального восстановления функций из пространства $L_2(\mathbb{R}^d)$ по их неточно заданному преобразованию Радона. Определяется класс функций, для которых степень Лапласиана $(-\Delta)^{\alpha/2}$ ограничена в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Формулируется и доказывается теорема, в которой устанавливается погрешность оптимального восстановления и семейство оптимальных методов. В качестве следствия приводится одно неравенство для норм преобразования Радона и степени оператора Лапласа.

Рассмотрим множество функций $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$, для которых $|\xi|^\alpha \widehat{f}(\xi) \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Определим на нем отображение $(-\Delta)^{\alpha/2}$, $\alpha \geqslant 0$ по формуле

$$\widehat{(-\Delta)^{\alpha/2}} f(\xi) = |\xi|^\alpha \widehat{f}(\xi).$$

Определим класс $W = \{f \in L_2(\mathbb{R}^d) : \|(-\Delta)^{\alpha/2} f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 1; \quad Rf \in L_2(Z)\}$.

Предположим, что функция Rf известна с некоторой погрешностью. Будем считать, что нам известна функция $g \in L_2(Z)$, такая что $||Rf - g||_{L_2(Z)} \le \delta$, $\delta > 0$. Задача состоит в нахождении оптимального метода восстановления функции $f \in W$ по информации g. Под методом восстановления понимается произвольное отображение $m : L_2(Z) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, а погрешностью метода называется величина

$$e(\delta, m) = \sup_{\substack{f \in W, g \in L_2(Z) \\ \|Rf - g\|_{L_2(Z)} \leqslant \delta}} ||f - m(g)||_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется наименьшая из погрешностей всех возможных методов

$$E(\delta) = \inf_{m: L_2(Z) \to L_2(\mathbb{R}^d)} e(\delta, m).$$

Метод, на котором достигается погрешность оптимального восстановления, называется оптимальным методом восстановления.

Рассмотрим функции

$$x(\sigma)=(2\pi)^{1-d}\sigma^{d-1+2\alpha}\chi_{[0,\infty)}(\sigma),\quad y(\sigma)=(2\pi)^{1-d}\sigma^{d-1}\chi_{[0,\infty)}(\sigma),\quad \sigma\in\mathbb{R}.$$

Положим $\widehat{\lambda}_1=(2\pi)^{\frac{(d-1)(d-2)}{d-1+2\alpha}}\frac{(d-1)}{d-1+2\alpha}\delta^{\frac{4\alpha}{d-1+2\alpha}},\quad \widehat{\lambda}_2=(2\pi)^{\frac{(d-1)(d-2)}{d-1+2\alpha}}\frac{2\alpha}{d-1+2\alpha}\delta^{\frac{2(1-d)}{d-1+2\alpha}}.$

Теорема 5 *Погрешность оптимального восстановления равна*

$$E(\delta)=\sqrt{\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2\delta^2}=(2\pi)^{\frac{(d-1)(d-2)}{2(d-1+2\alpha)}}\delta^{\frac{2\alpha}{d-1+2\alpha}}.$$

Методы

$$\widehat{m_a(g)}(\sigma\vartheta)=(2\pi)^{(1-d)/2}a(\sigma)\widehat{g}_\vartheta(\sigma),\quad \sigma\in[0,\infty),\quad \vartheta\in\mathbb{S}^{d-1},$$

где $g_\vartheta(s)=g(\vartheta,s)$,

$$a(\sigma)=\left(\frac{\widehat{\lambda}_2}{\widehat{\lambda}_1x(\sigma)+\widehat{\lambda}_2}+\varepsilon(\sigma)\frac{\sigma^\alpha\sqrt{\widehat{\lambda}_1\widehat{\lambda}_2}}{\widehat{\lambda}_1x(\sigma)+\widehat{\lambda}_2}\sqrt{x(\sigma)\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2-y(\sigma)}\right)\chi_{[0,\infty)}(\sigma),$$

$\|\varepsilon(\sigma)\|_{L_\infty(\mathbb{R})}\le 1$, *являются оптимальными.*

Следствие 3 *Для функции* $f\in L_2(\mathbb{R}^d)$ *имеет место точное неравенство*

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant(2\pi)^{\frac{(d-1)(d-2)}{2(d-1+2\alpha)}}\|Rf\|_{L_2(Z)}^{\frac{2\alpha}{d-1+2\alpha}}\|(-\Delta)^{\alpha/2}f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{\frac{d-1}{d-1+2\alpha}},\quad \alpha>0.$$

В третьем разделе второй главы диссертации исследуется задача оптимального восстановления функции на сфере $\mathbb{S}^{d-1}$ по ее неточно заданному (в среднеквадратичной метрике) преобразованию Минковского-Функа (сферическое преобразование Радона). Определяется класс функций, имеющих ограниченную L_2-норму степени сферического Лапласиана $(-\Delta)^{\alpha/2}$. Формулируется и доказывается теорема, в которой устанавливается погрешность оптимального восстановления и семейство оптимальных методов.

Преобразованием Минковского-Функа называется интегральное преобразование, переводящее функцию f во множество ее интегралов по всевозможным большим кругам на сфере.

$$Mf(\xi)=\int_{x\xi=0}f(x)dx,\quad x\in\mathbb{S}^{d-1},\quad \xi\in\mathbb{S}^{d-1}.$$

Для функции $f \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ верно представление $f(x) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{N(l)} f_{kl}Y_k^l(x)$. Рассмотрим оператор $(-\Delta_S)^{\alpha/2}$ (сферический Лапласиан), задаваемый формулой

$$(-\Delta_S)^{\alpha/2}f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} d_l^{\alpha/2}\sum_{k=1}^{N(l)} f_{kl}Y_k^l(x), \quad d_l = l(l+d-2), \quad \alpha\ > 0.$$

Обозначим через W следующий класс функций $W = \{f \in L_2^+(\mathbb{S}^{d-1}) : \|(-\Delta_S)^{\alpha/2}f\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq 1\}$, где $L_2^+(\mathbb{S}^{d-1})$ - подпространство четных функций в $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ (показано, что при рассмотрении всего пространства $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ задача вырождается). Пусть для каждой функции $f \in W$ мы знаем ее преобразование Минковского-Функа, заданное с погрешностью. А именно, известна функция $g \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, такая что $\|Mf - g\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta$. По этой информации требуется восстановить функцию f. Назовем методом восстановления произвольное отображение $m : L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \to L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Погрешностью метода называется величина

$$e(\delta, m) = \sup_{\substack{x\in W, \quad g\in L_2(\mathbb{S}^{d-1})\\ \|Mf-g\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}\leq\delta}} \|f - m(g)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}.$$

Из всего множества методов нас будут интересовать те, на которых достигается погрешность оптимального восстановления

$$E(\delta) = \inf_{m:L_2(\mathbb{S}^{d-1})\to L_2(\mathbb{S}^{d-1})} e(\delta, m).$$

Рассмотрим множество точек плоскости, задаваемых формулами $x_l = \frac{d_{2l}^{\alpha}}{m_{2l}^2}$, $y_l = \frac{1}{m_{2l}^2}$, где $m_{2l} = 2\pi^{(d-2)/2}\frac{\Gamma(l+1/2)}{\Gamma(l+(d-1)/2)}$ - собственные числа оператора Минковского-Функа, соответствующие сферическим гармоникам степени $2l$. Пусть $x_s < \delta^{-2} \leq x_{s+1}$, $s \geq 0$, тогда положим $\widehat{\lambda}_1 = \frac{y_{s+1}-y_s}{x_{s+1}-x_s}$, $\widehat{\lambda}_2 = \frac{y_s x_{s+1} - y_{s+1}x_s}{x_{s+1}-x_s}$.

Теорема 6 *Погрешность оптимального восстановления равна*

$$E(\delta) = \sqrt{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2\delta^2}.$$

Методы

$$m(g)(x) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{N(l)} a_l\frac{g_{k2l}}{m_{2l}}Y_k^{2l}(x),$$

где $g_{k,l} =< g, Y_k^l >_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}$, *а числа* a_l *удовлетворяют условиям*

$$a_l = \frac{\widehat{\lambda}_2}{\widehat{\lambda}_1 x_l + \widehat{\lambda}_2} + \epsilon_l \frac{\sqrt{\widehat{\lambda}_1 \widehat{\lambda}_2}}{\widehat{\lambda}_1 x_l + \widehat{\lambda}_2} \sqrt{\frac{x_l}{y_l}} \sqrt{x_l \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 - y_l},$$

ϵ_l *— произвольные числа из отрезка* $[-1;1]$, *являются оптимальными.*

Третья глава диссертации посвящена применению теории оптимального восстановления к задаче поиска точных констант в неравенствах для производных. Формулируется и решается одна задача оптимального восстановления, в качестве следствия которой выводится соответствующее неравенство для производных. Указываются подмножества рассматриваемого класса функций, на которых константа в неравенстве может быть уменьшена и приводится ее явное выражение.

Рассмотрим пространство $L_2(\omega_\alpha, [-1,1])$, состоящее из функций, измеримых на отрезке $[-1,1]$, для которых

$$\|x\|_{L_2(\omega_\alpha,[-1,1])} = \left(\int_{-1}^{1} w_\alpha(t) |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} < \infty, \quad \omega_\alpha(t) = (1-t^2)^\alpha.$$

Обозначим через W класс, состоящий из функций $x \in L_2([-1,1])$, таких что $x^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна на отрезке $[-1,1]$ и $\|x^{(r)}\|_{L_2(w_r,[-1,1])} \le 1$, $r \in \mathbb{N}$. Пусть для каждой функции $x \in W$ известна функция $g \in L_2([-1,1])$, такая что $\|x-g\|_{L_2([-1,1])} \le \delta$, $\delta > 0$. По этой информации требуется восстановить $k-$ую производную x, как элемент пространства $L_2(\omega_k, [-1,1])$, где $0 \le k < r$. Методом восстановления будем называть произвольное отображение $m : L_2([-1,1]) \to L_2(w_k, [-1,1])$. Определим погрешность метода

$$e(\delta, m) = \sup_{\substack{x \in W, \quad g \in L_2([-1,1]) \\ \|x-g\|_{L_2([-1,1])} \le \delta}} \|x^{(k)} - m(g)\|_{L_2(w_k,[-1,1])}.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(\delta) = \inf_{m: L_2([-1,1]) \to L_2(w_k,[-1,1])} e(\delta, m).$$

Оптимальными методами называются те, на которых достигается погрешность оптимального восстановления.

Рассмотрим систему полиномов Якоби $\{P_l^\alpha\}_{l=0}^\infty$, $\alpha > -1$, ортогональных на отрезке [-1,1] с весом $(1-t^2)^\alpha$. Для них

$$\int_{-1}^{1} (1-t^2)^\alpha P_l^\alpha(t) P_k^\alpha(t) dt = \begin{cases} 0, & k \ne l \\ \frac{2^{2\alpha+1}}{2l+2\alpha+1} \frac{(l+\alpha)!^2}{(l+2\alpha)! l!}, & k = l. \end{cases}$$

Положив $Y_l^\alpha(t) = \sqrt{\frac{2l+2\alpha+1}{2^{2\alpha+1}}\frac{(l+2\alpha)!l!}{(l+\alpha)!^2}}P_l^\alpha(t)$, получим ортонормированный базис $\{Y_l^\alpha\}_{l=0}^\infty$ в пространстве $L_2(w_\alpha,[-1,1])$, $\alpha>-1$.

Рассмотрим множество точек $\{(x_l,y_l)\}_{l=k}^\infty$, заданное формулами

$$x_l=\begin{cases}0, & k\le l<r,\\ \frac{(l+r)!}{(l-r)!}, & l\ge r,\end{cases}\qquad y_l=\frac{(l+k)!}{(l-k)!}.$$

Пусть $x_s<\delta^{-2}\le x_{s+1}$, $s\ge r-1$, тогда положим

$$\widehat{\lambda}_1=\frac{y_{s+1}-y_s}{x_{s+1}-x_s},\quad \widehat{\lambda}_2=\frac{y_sx_{s+1}-y_{s+1}x_s}{x_{s+1}-x_s}. \tag{2}$$

Теорема 7 *Погрешность оптимального восстановления равна*

$$E(\delta)=\sqrt{\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2\delta^2}.$$

Методы

$$m_a(g)(x)=\sum_{l=k}^{r-1}g_l\sqrt{\frac{(l+k)!}{(l-k)!}}Y_{l-k}^k(t)+\sum_{l=r}^{\infty}a_lg_l\sqrt{\frac{(l+k)!}{(l-k)!}}Y_{l-k}^k(t),$$

где

$$g_l=\int_{-1}^1 g(t)Y_l^0(t)dt, \tag{3}$$

$$a_l=\frac{\widehat{\lambda}_2}{\widehat{\lambda}_1x_l+\widehat{\lambda}_2}+\epsilon_l\frac{\sqrt{\widehat{\lambda}_1\widehat{\lambda}_2}}{\widehat{\lambda}_1x_l+\widehat{\lambda}_2}\sqrt{\frac{x_l}{y_l}}\sqrt{x_l\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2-y_l}, \tag{4}$$

ϵ_l *— произвольные числа из отрезка* $[-1;1]$*, являются оптимальными.*

Рассмотрим множества

$$K_s=\left\{x\in W:\|x\|_{L_2([-1,1])}<\sqrt{\frac{(s-r)!}{(s+r)!}}\|x^{(r)}\|_{L_2(w_r,[-1,1])}\right\},\quad s\ge r.$$

Лемма 1 *Пусть* $x\in K_s$*, тогда*

$$\|x^{(k)}\|_{L_2(w_k,[-1,1])}\le\sqrt{\frac{(s+k)!}{(s-k)!}}\left(\frac{(s-r)!}{(s+r)!}\right)^{k/2r}\|x\|_{L_2[-1,1]}^{1-k/r}\|x^{(r)}\|_{L_2(w_r,[-1,1])}^{k/r}, \tag{5}$$

$0\le k<r\le s$.

Заметим, что $K_r \supset K_{r+1} \supset \dots$ и, соответствующие этим множествам константы в (5), являются точными и убывают к единице. На множестве $W \backslash K_r$ неравенство типа (5) неверно. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть функцию Y_k^0.

Рассмотрим класс функций $W_0 = \{x \in W : c_l = 0, l = k, k+1, ..., r-1\}$ и сформулируем для него утверждение, аналогичное теореме 7.

Положим

$$x_l = \begin{cases} 0, & l = r-1, \\ \frac{(l+r)!}{(l-r)!}, & l \geq r, \end{cases} \qquad y_l = \begin{cases} 0, & l = r-1, \\ \frac{(l+k)!}{(l-k)!}, & l \geq r. \end{cases}$$

Если $x_s < \delta^{-2} \leq x_{s+1}$, $s \geq r-1$, то определим $\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2$ по формулам (2).

Теорема 8 *Пусть $x \in W_0$, тогда погрешность оптимального восстановления равна*

$$E(\delta) = \sqrt{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 \delta^2}.$$

Методы

$$m_a(g)(x) = \sum_{l=r}^{\infty} a_l g_l \sqrt{\frac{(l+k)!}{(l-k)!}} Y_{l-k}^k(t),$$

где g_l и a_l определены в (3),(4), являются оптимальными.

Лемма 2 *Пусть $x \in W_0$, тогда*

$$\|x^{(k)}\|_{L_2(w_k,[-1,1])} \leq \sqrt{\frac{(r+k)!}{(r-k)!}} \left(\frac{1}{(2r)!}\right)^{k/2r} \|x\|_{L_2[-1,1]}^{1-k/r} \|x^{(r)}\|_{L_2(w_r,[-1,1]}^{k/r}, \quad (6)$$

$0 \leq k < r$.

Таким образом, мы показали, что неравенство (6) может быть получено из решения задачи оптимального восстановления в теореме 8. Несмотря на то, что на более широком классе функций W неравенста типа (6) не существует, мы доказали (5) на его подмножествах K_s, $s \geq r$. Теперь мы можем уточнить неравенство (6) и показать, что константа в нем может быть уменьшена на множествах $W_0 \cap K_s$, $s \geq r$. Из того, что погрешности оптимального восстановления в теоремах 7 и 8 совпадают для всех δ, за исключением $\delta^{-2} < (2r)!$, следует, что на множествах $W_0 \cap K_s$, $s \geq r$ сохраняются неравенства (5) и константы в них являются точными. Эти константы меньше константы в (6) и монотонно убывают к 1 с ростом s.

Публикации автора по теме диссертации

[1] *Баграмян Т.Э.* Кольцевые артефакты в томографии // Сборник трудов IV Всероссийской научной конференции "Математическое моделирование развивающейся экономики и экологии". ЭКОМОД-2009. Киров: ВятГУ, 2009, с. 87

[2] *Баграмян Т.Э.* Аналог теоремы Кормака для экспоненциального преобразования Радона // Тезисы докладов Международной конференции, посвященной памяти Г.В. Дорофеева "Традиции гуманизации и гуманитаризации математического образования ГОУ Педагогическая академия, Москва, 2010, с. 15-16

[3] *Баграмян Т.Э.* Оптимальное восстановление гармонической функции по неточно заданным значениям оператора радиального интегрирования // Владикавказский математический журнал, 14:1, Владикавказ, 2012, с. 22-36

[4] *Баграмян Т.Э.* Применение теории оптимального восстановления к некоторым задачам компьютерной томографии // Материалы Международного молодежного научного форума "ЛОМОНОСОВ-2012 МАКС Пресс, Москва, 2012

[5] *Баграмян Т.Э.* Оптимальное восстановление функций по неточно заданному преобразованию Радона на классах, задаваемых степенью оператора Лапласа // Вестник РУДН. Серия Математика. Информатика. Физика. №1, Москва, 2013, с. 19-25

[6] *Баграмян Т.Э.* Оптимальное восстановление функций по их неточно заданному преобразованию Радона // Вестник Тамбовского Университета. Том 18, вып. 1, 2013. с. 15-17

Баграмян Т.Э. Восстановление функций по неточно заданному преобразованию Радона и неравенства для норм некоторых операторов

Диссертация посвящена применению теории оптимального восстановления к ряду задач, возникающих в компьютерной томографии, а также изучению неравенств для производных. В работе рассматриваются задачи оптимального восстановления функций по неточно заданным значениям оператора радиального интегрирования, преобразования Радона, преобразования Минковского-Функа. Как следствие получено одно неравенство для нормы преобразования Радона. Также исследована задача оптимального восстановления производных функции на отрезке и связанное с этой задачей неравенство для производных. На этом примере показано, что задача нахождения точных констант в таких неравенствах может быть сформулирована и эффективно решена как соответствующая задача оптимального восстановления. Более того, такой подход позволяет уточнить константу на некоторых подмножествах рассматриваемого класса функций.

T.E. Bagramyan. Recovery of functions from inaccurate data on the Radon transform and inequalities for the norms of certain operators

Dissertation is devoted to application of optimal recovery theory to a number of problems that arise in computerized tomography, as well as the study of inequalities for derivatives. We consider a problem of optimal recovery of functions from inaccurate information on values of radial integration operator, Radon transform, Minkowski-Funk transform. As a consequence we present one inequality for the norm of the Radon transform. We also study the problem of optimal recovery of derivatives of functions in the interval and inequality for derivatives associated with this problem. This example shows that the problem of finding the exact constants in such inequalities can be formulated and solved efficiently as the corresponding problem of optimal recovery. Moreover, this approach allows to specify the constant on certain subsets of the considered class.