На правах рукописи

АБРАМОВА ЕЛЕНА ВЛАДИМИРОВНА

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ПО НЕТОЧНЫМ ДАННЫМ

Специальность 01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Москва — 2018

Работа выполнена на кафедре «Высшая математика»

Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский университет «МЭИ»

Научный руководитель:

Магарил-Ильяев Георгий Георгиевич

доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры Общих проблем управления механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова

Официальные оппоненты:

Гольдман Михаил Львович

доктор физико-математических наук, профессор, профессор Института математики им. С. М. Никольского Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Российский университет дружбы народов»

Тюленев Александр Иванович

кандидат физико-математических наук, научный сотрудник отдела теории функций ФГБУН Математического института им. В. А. Стеклова РАН

Ведущая организация: Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН»

Защита диссертации состоится 23 мая 2018 г. в 17 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 999.160.02 при ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ» по адресу: 111250, Россия, г. Москва, Красноказарменная улица, дом 13, корп. М, ауд. М-710.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ» и на сайте *www.mpei.ru*.

Автореферат разослан 20 марта 2018г.

Учёный секретарь диссертационного совета Д 999.160.02

А. Пер к.ф.-м.н. Перескоков Александр Вадимович

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования

На практике часто возникают задачи, связанные с восстановлением какой-либо характеристики объекта по информации (часто не полной и/или не точной) о других характеристиках этого объекта. К примеру, рассматривается задача о восстановлении функции или ее производной в точке, или интеграла от нее по информации о наборе ее значений в других точках, либо по приближенно заданному преобразованию Фурье, или требуется восстановить решение дифференциального уравнения по неточно известным начальным данным и так далее.Применяются различные подходы к решению подобного класса задач. Автор следует подходу,который предполагает наличие некоторой априорной информации об объекте, характеристики которого подлежат восстановлению. Это дает возможность поставить задачу о нахождении наилучшего метода восстановления данных характеристик среди всех возможных методов восстановления. Такой подход базируется на работах А. Н. Колмогорова 30-х годов XX века, посвященных нахождению наилучших средств приближения для различных классов функций. Математическая теория, в которой рассматриваются задачи восстановления, решаемые на основе этого подхода, плодотворно развивается, начиная с 60-х годов XX века.

Цели диссертационной работы

Основной целью диссертационной работы является получение значений погрешности оптимального восстановления и построение оптимальных методов восстановления решения задачи Дирихле в верхней полуплоскости на прямой, параллельной оси абсцисс, по следующей информации: известны (с некоторой погрешностью) решения этой задачи на двух или более прямых, параллельных оси абсцисс или известна приближенная информация о граничной функции.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Для задачи Дирихле в верхней полуплоскости найдено значение погрешности наилучшего восстановления решения на прямой по неточным его измерениям на двух других прямых. Приведены оптимальные методы.

2. Рассмотрена аналогичная задача для случая n $(n > 2)$ измерений. Также получено значение погрешности оптимального восстановления для различных случаев расположения прямой. В каждом случае указан оптимальный метод.

3. Рассмотрена задача восстановления решения задачи Дирихле в метрике L_2 на прямой в верхней полуплоскости, параллельной оси абсцисс, по следующей информации: граничная функция принадлежит некоторому соболевскому классу функций на прямой, а ее преобразование Фурье известно приближенно (в метрике L_∞) на конечном отрезке, симметричном относительно нуля. Построен оптимальный метод восстановления и найдено точное значение погрешности оптимального восстановления.

4. Для аналогичной задачи в случае задания преобразования Фурье граничной функции в метрике L_2 построена серия оптимальных методов восстановления и вычислена соответствующая погрешность восстановления.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми. Они обобщают и развивают ранее известные результаты, связанные с задачами оптимального восстановления решений дифференциальных уравнений в частных производных. Впервые получены значения погрешности оптимального восстановления и построены оптимальные методы восстановления решения задачи Дирихле в верхней полуплоскости на прямой, параллельной оси абсцисс, по известным (с некоторой погрешностью) решениям этой задачи на двух или более прямых, параллельных оси абсцисс или приближенно известной информации о граничной функции.

Теоретическая и практическая значимость работы

Результаты диссертации носят теоретический характер и могут иметь применение в дифференциальных уравнениях и теории приближений. Кроме того, полученные явные выражения для оптимальных методов восстановления решения задачи Дирихле могут служить основой для разработки эффективных численных алгоритмов восстановления решения задачи по неточно заданному преобразованию Фурье граничной функции.

Доклады и публикации

Содержание диссертации и ее основные результаты достаточно полно отражены в публикациях автора. Всего по теме диссертации Абрамовой Е.В. опубликованы 5 печатных работ, из них три статьи в журналах, входящих в перечень ВАК РФ [1]–[3], одна в трудах конференций [5] и одна в тезисах конференции [4]. Доля авторского участия соискателя в работах составляет 100%.

Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и научно-исследовательских семинарах:
— 59-я научно-практическая конференция МИРЭА, Москва, 2010 г.;
— 64-я научно-практическая конференция МИРЭА, Москва, 2015 г.;
— XII Белорусская математическая конференция, Минск, 2016 г.;
— XIII международная конференция «Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование», Владикавказ, 2016 г.;
— семинаре кафедры Общих проблем управления механико-математического

факультета МГУ имени М. В. Ломоносова «Вопросы оптимального восстановления линейных операторов» (рук. проф. Г. Г. Магарил-Ильяев, проф. К. Ю. Осипенко, проф. В. М. Тихомиров);
— научно-исследовательский семинар ФГБОУ ВПО «НИУ «МЭИ» по дифференциальным уравнениям (рук. проф. А. А. Амосов, проф. Ю. А. Дубинский).

Объем и структура работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Работа представлена на 87 страницах. Список литературы содержит 63 наименования.

Содержание работы

Рассмотрим следующую постановку задачи Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta u\left(x,y\right)=0,\ \left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2,\ y>0 \\ u\left(x,0\right)=f\left(x\right),\ \forall x\in\mathbb{R},\ f\left(\cdot\right)\in L_2\left(\mathbb{R}\right), \end{cases} \tag{P_1}$$

заключающуюся в нахождении гармонической функции $u(\cdot,\cdot)$ в верхней полуплоскости, удовлетворяющей заданному граничному условию, которое понимается так: $u(\cdot,y)\to f(\cdot)$ при $y\to 0$ в метрике $L_2(\mathbb{R})$ и, кроме того,

$$\sup_{y>0}\|u(\cdot,y)\|_{L_2(\mathbb{R})}<\infty.$$

В этом случае, как известно, решение данной задачи единственно и задается интегралом Пуассона:

$$u\left(x,y\right)=u\left(x,y,f(\cdot)\right)=\int\limits_{\mathbb{R}}P\left(x-t,y\right)\cdot f\left(t\right)dt=P\left(x,y\right)*f\left(x\right), \tag{1}$$

где $P\left(x,y\right)=\dfrac{1}{\pi}\dfrac{y}{x^2+y^2}$ — ядро Пуассона.

1. В первой главе рассматривается задача наилучшего восстановления решения задачи (P_1) на прямой $y = Y$ по неточным его измерениям на прямых $y = y_1$ и $y = y_2$, где $0 \leqslant y_1 < Y < y_2$.

Точная постановка задачи такова. Пусть $u(\cdot,\cdot)$ — решение задачи (P_1) и известны функции $z_i(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ такие, что

$$\|u(\cdot, y_i) - z_i(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \delta_i, \quad \delta_i > 0,\ i = 1,2; \quad 0 \leqslant y_1 < y_2.$$

По этой информации мы хотим восстановить решение задачи Дирихле на прямой $y = Y$, $y_1 < Y < y_2$ в метрике $L_2(\mathbb{R})$.

Любое отображение $m : L_2(\mathbb{R}) \times L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, является методом восстановления, при этом величина

$$e(m) = e(Y, y_1, y_2, \delta_1, \delta_2, m) = \sup_{\substack{f(\cdot), z_i(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}),\\ \|u(\cdot,y_i) - z_i(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \delta_i,\, i=1,2}} \|u(\cdot, Y, f(\cdot)) - m(z_1(\cdot), z_2(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R})}$$

называется погрешностью метода m.

Тот метод

$$\widehat{m} : L_2(\mathbb{R}) \times L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}),$$

на котором погрешность восстановления минимальна, то есть

$$e(Y, y_1, y_2, \delta_1, \delta_2, \widehat{m}) = \inf_{m:\ L_2(\mathbb{R}) \times L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})} e(Y, y_1, y_2, \delta_1, \delta_2, m),$$

называется оптимальным методом восстановления. Величину

$$E(Y, y_1, y_2, \delta_1, \delta_2) = \inf_{m:\ L_2(\mathbb{R}) \times L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})} e(Y, y_1, y_2, \delta_1, \delta_2, m)$$

назовем погрешностью оптимального восстановления.

Свяжем с числами $0 < y_1 < Y < y_2$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ следующие величины:

$$\lambda_1 = \frac{y_2 - Y}{y_2 - y_1} \cdot \left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{\frac{-2(Y - y_1)}{y_2 - y_1}}, \quad \lambda_2 = \frac{Y - y_1}{y_2 - y_1} \cdot \left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{\frac{2(y_2 - Y)}{y_2 - y_1}}.$$

Теорема 1. 1) Пусть $0 \leqslant y_1 < Y < y_2$, $\delta_1 > \delta_2 > 0$. Тогда погрешность оптимального восстановления имеет вид:

$$E(Y, y_1, y_2, \delta_1, \delta_2) = \delta_1^{\frac{y_2 - Y}{y_2 - y_1}} \cdot \delta_2^{\frac{Y - y_1}{y_2 - y_1}}.$$

Для любых функций $a_i(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}), i = 1, 2$, таких, что

$$e^{-Y|\xi|} = a_1(\xi) e^{-y_1|\xi|} + a_2(\xi) e^{-y_2|\xi|}, \quad \text{для п.в.} \, \xi \in \mathbb{R}$$

и

$$\left\| \frac{|a_1(\cdot)|^2}{\lambda_1} + \frac{|a_2(\cdot)|^2}{\lambda_2} \right\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leqslant 1,$$

линейный оператор

$$\widehat{m}_{a_1, a_2} : L_2(\mathbb{R}) \times L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}),$$

действующий в образах Фурье по правилу:

$$F[\widehat{m}(z_1(\cdot), z_2(\cdot))](\xi) = a_1(\xi) \cdot F[z_1(\cdot)](\xi) + a_2(\xi) \cdot F[z_2(\cdot)](\xi) \quad \text{для п.в.} \, \xi \in \mathbb{R},$$

является оптимальным методом.

2) Пусть $0 \leqslant y_1 < Y < y_2$, $0 < \delta_1 \leqslant \delta_2$. Тогда погрешность оптимального восстановления имеет вид:

$$E(Y, y_1, y_2, \delta_1, \delta_2) = \delta_1.$$

При этом метод вида

$$m(z_1, z_2)(\xi) = e^{-y_1|\xi|} \cdot F[z_1(\cdot)](\xi)$$

является оптимальным.

Как будет показано далее, множество оптимальных методов не пусто.

2. Во второй главе рассматривается аналогичная задача для случая n $(n > 2)$ измерений. Также получено значение погрешности оптимального восстановления для различных случаев расположения прямой. В каждом случае указан оптимальный метод.

Дадим точную постановку задачи. Пусть $u(\cdot,\cdot)$ — решение задачи (P_1). Нам известны функции $z_i\,(\cdot) \in L_2\,(\mathbb{R})$ такие, что

$$\|u\,(\cdot, y_i) - z_i\,(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \delta_i,\ \delta_i > 0,\ i = 1, \ldots, n; \quad 0 \leqslant y_1 < y_2 < \ldots < y_n.$$

По этой информации мы хотим восстановить наилучшим образом решение задачи Дирихле на прямой $y = Y$, $Y \geqslant 0$ в метрике $L_2\,(\mathbb{R})$. Обозначим

$$\bar{y} = (y_1(\cdot), \ldots, y_n(\cdot))\,, \quad \bar{\delta} = (\delta_1(\cdot), \ldots, \delta_n(\cdot))\,, \quad \bar{z} = (z_1(\cdot), \ldots, z_n(\cdot)).$$

Аналогично предыдущему, любое отображение

$$m : (L_2(\mathbb{R}))^n = L_2\,(\mathbb{R}) \times \ldots \times L_2\,(\mathbb{R}) \to L_2\,(\mathbb{R})$$

есть метод восстановления. Погрешность этого метода задается величиной

$$e\,(m) = e\left(Y, \bar{y}, \bar{\delta}, m\right) = \sup_{\substack{f(\cdot), z_i(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}),\\ \|u(\cdot, y_i) - z_i(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \delta_i,\, i = 1,2,\ldots,n}} \|u\,(\cdot, Y, f(\cdot)) - m\,(\bar{z}(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R})}\,.$$

Тот метод

$$\widehat{m} : (L_2\,(\mathbb{R}))^n \to L_2\,(\mathbb{R})\,,$$

на котором погрешность восстановления минимальна, будем называть оптимальным методом восстановления, а соответствующую погрешность

$$E\left(Y, \bar{y}, \bar{\delta}\right) = e\left(Y, \bar{y}, \bar{\delta}, \widehat{m}\right) = \inf_{m:\ (L_2(\mathbb{R}))^n \to L_2(\mathbb{R})} e\left(Y, \bar{y}, \bar{\delta}, m\right)$$

назовем погрешностью оптимального восстановления.

Построим на плоскости (y, t) множество

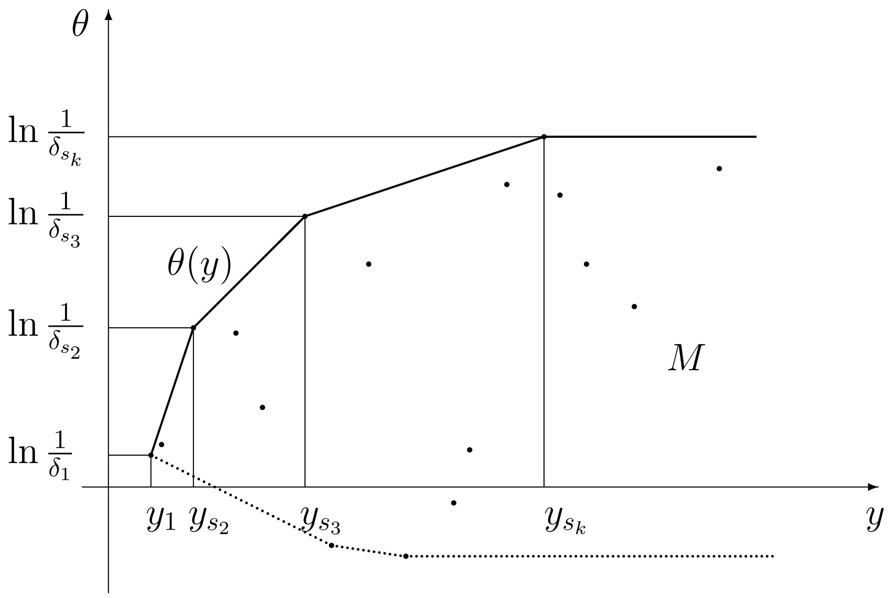
$$M = \operatorname{Co}\left\{\left(y_j, \ln\left(\frac{1}{\delta_j}\right)\right), 1 \leqslant j \leqslant n\right\} + \{(y, 0)\,|\, y \geqslant 0\}\,,$$

(где $\operatorname{Co} A$ обозначает выпуклую оболочку множества A), которое представляет собой алгебраическую сумму выпуклого многогранника и положительной полупрямой.

Определим функцию $\theta(\cdot)$ на $[0, \infty)$ по формуле:

$$\theta(y) = \begin{cases} \max\{t \,|\, (y,t) \in M\}, \\ -\infty, \text{ если } (y,t) \notin M. \end{cases}$$

Ясно, что на $[y_1, +\infty)$ график функции $\theta(\cdot)$ — вогнутая ломаная. Обозначим точки ее излома через $y_{s_1} < y_{s_2} < \ldots < y_{s_k}$ (будем считать, что $y_{s_1} = y_1$).



Свяжем с числами $0 < y_{s_j} < Y < y_{s_{j+1}}, \quad \delta_{s_j} > 0,\ \delta_{s_{j+1}} > 0, 1 \leqslant j \leqslant k-1$, следующие величины:

$$\lambda_1 = \frac{y_{s_{j+1}} - Y}{y_{s_{j+1}} - y_{s_j}} \cdot \left(\frac{\delta_{s_j}}{\delta_{s_{j+1}}}\right)^{\dfrac{-2(Y - y_{s_j})}{y_{s_{j+1}} - y_{s_j}}}, \quad \lambda_2 = \frac{Y - y_{s_j}}{y_{s_{j+1}} - y_{s_j}} \cdot \left(\frac{\delta_{s_j}}{\delta_{s_{j+1}}}\right)^{\dfrac{2(y_{s_{j+1}} - Y)}{y_{s_{j+1}} - y_{s_j}}}.$$

Теорема 2. Для любого $Y \geqslant 0$ справедливо равенство:

$$E(Y, \bar{y}, \bar{\delta}) = e^{-\theta(Y)}.$$

1) Если $0 \leqslant Y < y_1$, то $E(Y, \bar{z}, \bar{\delta}) = +\infty$ и любой метод является оптимальным;

2) если $Y = y_{s_j},\ 1 \leqslant j \leqslant k$, то метод

$$\widehat{m}\left(\bar{z}(\cdot)\right)(\cdot) = z_{s_j}(\cdot)$$

является оптимальным;

3) если $k \geqslant 2$ и $t_{s_j} < Y < t_{s_{j+1}}$, $1 \leqslant j \leqslant k-1$, то для любых функций $a_i(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R})$, $i = 1, 2$, таких, что

$$e^{-Y|\xi|} = a_1(\xi)\, e^{-y_{s_j}|\xi|} + a_2(\xi)\, e^{-y_{s_{j+1}}|\xi|}, \quad \text{для п.в.}\, \xi \in \mathbb{R}$$

и

$$\left\| \frac{|a_1(\cdot)|^2}{\lambda_1} + \frac{|a_2(\cdot)|^2}{\lambda_2} \right\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leqslant 1,$$

линейный оператор

$$\widehat{m}_{a_1,a_2} : (L_2(\mathbb{R}))^n \to L_2(\mathbb{R}),$$

действующий в образах Фурье по правилу:

$$F[\widehat{m}_{a_1,a_2}(z_1(\cdot), z_2(\cdot))](\xi) = a_1(\xi)\cdot F[z_1(\cdot)](\xi) + a_2(\xi)\cdot F[z_2(\cdot)](\xi) \quad \text{для п.в.}\, \xi \in \mathbb{R},$$

является оптимальным методом;

4) если $Y > y_{s_k}$, то метод

$$\widehat{m}(\bar{z}(\cdot))(\cdot) = P(\cdot, Y - y_{s_k}) * z_{s_k}(\cdot)$$

является оптимальным.

Сделаем некоторые замечания по поводу сформулированной теоремы.

1) Если $0 \leqslant Y < y_1$, то $\theta(Y) = -\infty$. Значит $E(Y, \bar{z}, \bar{\delta}) = +\infty$, то есть невозможно восстановить значение функции до поступления какой-либо информации о ней.

2) Если точка восстановления совпадает с одной из точек излома графика $\theta(\cdot)$, то берем значение $z(\cdot)$ в этой точке.

3) Оптимальный метод линеен, сглаживает наблюдения и использует информацию не более чем о двух измерениях до и после значения Y.

4) В случае, когда $Y > y_{s_k}$, оптимальный метод — решение задачи Дирихле с начальной функцией $z_{s_k}(\cdot)$.

3. Третья глава посвящена проблеме наилучшего восстановления решения задачи Дирихле в метрике L_2 на прямой в верхней полуплоскости, параллельной оси абсцисс, по следующей информации о граничной функции: граничная функция принадлежит некоторому соболевскому классу функций на прямой, а ее преобразование Фурье известно приближенно (в метрике L_∞) на конечном отрезке, симметричном относительно нуля. Построен оптимальный метод восстановления и найдено точное значение погрешности оптимального восстановления.

Точная постановка задачи следующая. Рассмотрим пространство функций:

$$\mathcal{W}^r_{2\,\infty}(\mathbb{R}) = \{f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})\colon f^{(r)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}), F[f](\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R})\},$$

где производные функции $f(\cdot)$ и ее преобразование Фурье $F[f](\cdot)$ понимаются в обобщенном смысле.

Обозначим через $W^r_{2\,\infty}(\mathbb{R})$ соболевский класс функций на прямой:

$$W^r_{2\,\infty}(\mathbb{R}) = \{f(\cdot) \in \mathcal{W}^r_{2\,\infty}(\mathbb{R}),\ \left\|f^{(r)}(\cdot)\right\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant 1\}.$$

Ставится задача о наилучшем восстановлении функции $u(\cdot, Y)$ — решения задачи Дирихле на прямой $y = Y$, где $Y > 0$, по следующей информации о граничной функции $f(\cdot) \in W^r_{2\,\infty}(\mathbb{R})$: задано приближенно ее преобразование Фурье $F[f](\cdot)$ на отрезке $[-\sigma, \sigma]$, $\sigma > 0$, в метрике $L_\infty([-\sigma, \sigma])$. То есть известна функция $g(\cdot) \in L_\infty([-\sigma, \sigma])$ такая, что

$$\|F[f](\cdot) - g(\cdot)\|_{L_\infty([-\sigma,\sigma])} \leqslant \delta,$$

где $\delta > 0$.

Задача оптимального восстановления $u(\cdot, Y)$ понимается следующим образом. Как и ранее, любое отображение

$$m\colon L_\infty[-\sigma, \sigma] \to L_2(\mathbb{R})$$

объявляется методом восстановления. Погрешность этого метода определяется величиной

$$e(Y, W^r_{2\infty}(\mathbb{R}), \delta, \sigma, m) = \sup_{\substack{f(\cdot)\in W^r_{2\,\infty}(\mathbb{R}),\ g(\cdot)\in L_\infty[-\sigma,\,\sigma]\\ \|F[f](\cdot)-g(\cdot)\|_{L_\infty[-\sigma,\,\sigma]}\leqslant\delta}} \|u(\cdot, Y) - m(g(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Нас интересует величина

$$E(Y, W^r_{2\,\infty}(\mathbb{R}), \delta, \sigma) = \inf_{m\colon L_\infty[-\sigma,\sigma]\to L_2(\mathbb{R})} e(Y, W^r_{2\infty}(\mathbb{R}), \delta, \sigma, m),$$

которая называется погрешностью оптимального восстановления и, конечно, те методы $\widehat{m}$, на которых нижняя грань достигается:

$$E(Y, W^r_{2\,\infty}(\mathbb{R}), \delta, \sigma) = e(Y, W^r_{2\,\infty}(\mathbb{R}), \delta, \sigma, \widehat{m}).$$

Эти методы мы называем оптимальными методами восстановления.

Теорема 3. Пусть $\delta > 0$, $\sigma > 0$, $\widehat{\sigma} = \left(\dfrac{\pi(2r+1)}{\delta^2}\right)^{1/(2r+1)}$, $\sigma_0 = \min\{\sigma, \widehat{\sigma}\}$. Метод $\widehat{m}\colon L_\infty[-\sigma,\,\sigma] \to L_2(\mathbb{R})$, действующий в образах Фурье по правилу

$$F[\widehat{m}(g(\cdot))](\xi) = \begin{cases} e^{-Y|\xi|}\left(1 - e^{-2Y(\sigma_0-|\xi|)}\,(\xi/\sigma_0)^{2r}\right) g(\xi), & |\xi| \leqslant \sigma_0,\\ 0, & |\xi| > \sigma_0,\end{cases}$$

является оптимальным.

Погрешность оптимального восстановления имеет вид:

$$E(Y, W^r_{2\,\infty}(\mathbb{R}), \delta, \sigma) = \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi Y}\,(1 - e^{-2Y\sigma_0}) + e^{-2Y\sigma_0}\left(\frac{1}{\sigma_0^{2r}} - \frac{\delta^2\,\sigma_0}{\pi(2r+1)}\right)}.$$

Следует отметить, что оптимальный метод использует, вообще говоря, не всю доступную информацию, а ту, которую использует, определенным образом «сглаживает».

4. В четвертой главе рассматривается задача о наилучшем (оптимальном) восстановлении решения задачи Дирихле для верхней полуплоскости по точно или приближенно известному преобразованию Фурье граничной функции в метрике L_2. Построена серия оптимальных методов восстановления и вычислена соответствующая погрешность восстановления.

Пусть r — натуральное число. Аналогично предыдущему, обозначим через $W_2^r(\mathbb{R})$ соболевский класс функций на прямой (напомним, что производные, как и раньше, понимаются в обобщенном смысле):

$$W_2^r(\mathbb{R}) = \left\{ f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}) : \left\| f^{(r)}(\cdot) \right\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant 1 \right\}.$$

Пусть $Y > 0$. Ставится задача о наилучшем восстановлении функции $u(\cdot, Y)$ — решения задачи Дирихле на прямой $y = Y$ — по следующей информации: на отрезке $[-\sigma, \sigma]$, $\sigma > 0$ известно преобразование Фурье $F[f](\cdot)$ функции $f(\cdot)$ либо точно, либо приближенно в метрике $L_2([-\sigma, \sigma])$, т. е. известна функция $g(\cdot) \in L_2([-\sigma, \sigma])$ такая, что

$$\|F[f](\cdot) - g(\cdot)\|_{L_2([-\sigma,\sigma])} \leqslant \delta,$$

где $\delta \geqslant 0$ (случай $\delta = 0$ соответствует точному значению $F[f](\cdot)$ на $[-\sigma, \sigma]$).

Задача оптимального восстановления $u(\cdot, Y)$ по указанной информации понимается, как и выше, следующим образом. Любое отображение

$$m\colon L_2\left([-\sigma, \sigma]\right) \to L_2(\mathbb{R})$$

назывется методом восстановления, а величина

$$e(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma, m) = \sup_{\substack{f(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{R}),\ g(\cdot) \in L_2([-\sigma,\sigma]) \\ \|F[f](\cdot) - g(\cdot)\|_{L_2([-\sigma,\sigma])} \leqslant \delta}} \|u(\cdot, Y) - m(g(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}$$

— погрешностью метода m. Нас интересует величина

$$E(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma) = \inf_{m\colon L_2([-\sigma,\sigma]) \to L_2(\mathbb{R})} e(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma, m),$$

которая называется погрешностью оптимального восстановления, и те методы $\widehat{m}$, на которых нижняя грань достигается, т. е.

$$E(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma) = e(Y, W_2^r(\mathbb{R}, \delta, \sigma, \widehat{m}).$$

Такие методы мы называем оптимальными методами восстановления.

Теорема 4. 1) Пусть $\delta > 0$. Тогда погрешность оптимального восстановления имеет вид

$$E(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma) = \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi} + \frac{e^{-2Y\sigma}}{\sigma^{2r}}}.$$

Для любой функции $a_1(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R})$ такой, что

$$\left| a_1(\xi) - \frac{1}{1 + e^{-2Y\sigma}(\xi/\sigma)^{2r}} \right|^2$$
$$\leqslant \frac{e^{-2Y\sigma}(\xi/\sigma)^{2r}}{(1 + e^{-2Y\sigma}(\xi/\sigma)^{2r})^2} (e^{2Y|\xi|}(1 + e^{-2Y\sigma}(\xi/\sigma)^{2r}) - 1), \quad \text{для п.в. } \xi \in [-\sigma, \sigma],$$

линейный непрерывный оператор $\Lambda_{a_1} \colon L_2\left([-\sigma, \sigma]\right) \to L_2(\mathbb{R})$, действующий в образах Фурье по правилу (считая, что функция $g(\cdot)$ продолжена нулем за пределы отрезка $[-\sigma, \sigma]$)

$$F[\Lambda_{a_1} g(\cdot)](\xi) = a_1(\xi) g(\xi) e^{-Y|\xi|},$$

является оптимальным методом.

2) Если $\delta = 0$, то погрешность оптимального восстановления имеет вид:

$$E\left(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \sigma\right) = \frac{e^{-Y\sigma}}{\sigma^r}.$$

Для любой измеримой функции $a_2(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R})$ такой, что

$$|a_2(\xi) - 1| \leqslant (\xi/\sigma)^r \cdot e^{-Y\sigma}, \quad \text{для п.в. } \xi \in [-\sigma, \sigma],$$

линейный непрерывный оператор $\Lambda_{a_2} \colon L_2\left([-\sigma, \sigma]\right) \to L_2(\mathbb{R})$, действующий в образах Фурье по правилу

$$F[\Lambda_{a_2} g(\cdot)](\xi) = a_2(\xi) g(\xi) e^{-Y|\xi|},$$

является оптимальным методом.

Заключение

В диссертационной работе рассмотрены вопросы восстановления решения задачи Дирихле в верхней полуплоскости. Во всех случаях построены оптимальные методы восстановления и найдены точные значения соответствующих погрешностей оптимального восстановления. Важно отметить, что оптимальные методы, вообще говоря, используют не всю доступную для измерения информацию, а та полезная информация, которая участвует в построении метода, подвергается определенному «сглаживанию».

Все полученные в диссертации результаты являются новыми. Личный вклад автора заключается в получении всех результатов, приведенных в работе. Достоверность этих результатов обеспечивается приведением их полных доказательств.

Во многих областях науки и прикладных задачах возникает необходимость восстанавливать функции или какие-либо функционалы и операторы от них по частотным характеристикам этих функций, которые, как правило, заданы неполно, а возможно, и не точно (например, в геофизике, астрономии, дистанционном зондировании Земли, спектральном анализе и т.п.). Полученные в диссертации явные выражения для оптимальных методов восстановления решения задачи Дирихле могут служить основой для разработки эффективных численных алгоритмов.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Георгию Георгиевичу Магарил-Ильяеву за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения.

Список литературы

[1] **Абрамова Е. В.** Об оптимальном восстановлении решения задачи Дирихле по неточным начальным данным // Вестник Тамбовского Университета, Серия: естественные и технические науки. — 2009. — Т. 14, вып. 4 — С. 654-655.

[2] **Абрамова Е. В.** Восстановление решения задачи Дирихле по неточным граничным данным. //Владикавк. матем. журн. — 2015. — Т. 17, вып. 1. — С. 3-13.

[3] **Абрамова Е. В.** Наилучшее восстановление решения задачи Дирихле по неточно заданному спектру граничной функции. // Владикавк. матем. журн. — 2017. — Т. 19, вып. 4. — С. 3-11.

[4] **Абрамова Е. В.** О наилучшем восстановлении решения задачи Дирихле в полуплоскости // Тезисы докладов XIII междунар. конф. «Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование» / ЮМИ ВНЦ РАН. — Владикавказ, 2016. — С. 45-46.

[5] **Абрамова Е. В.** Оптимальное восстановление решения задачи Дирихле в полуплоскости // Материалы XII Белорусской математической конфе- ренции / Институт математики НАН Беларуси. — Минск, 2016. — Часть 1. — С. 3-4.