ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«МЭИ»

На правах рукописи

АБРАМОВА Елена Владимировна

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ПО НЕТОЧНЫМ ДАННЫМ

Специальность: 01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Д и с с е р т а ц и я
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель—
доктор физико-математических наук,
профессор Г. Г. Магарил-Ильяев

Москва—2018

Введение

1. Исторический обзор

На практике часто возникают задачи, связанные с восстановлением какой-либо характеристики объекта по информации (часто не полной и/или не точной) о других характеристиках этого объекта. К примеру, рассматривается задача о восстановлении функции или ее производной в точке, или интеграла от нее по информации о наборе ее значений в других точках, либо по приближенно заданному преобразованию Фурье, или требуется восстановить решение дифференциального уравнения по неточно известным начальным данным и так далее. Применяются различные подходы к решению подобного класса задач. Автор следует подходу, который предполагаей наличие некоторой априорной информации об объекте, характеристики которого подлежат восстановлению. Это дает возможность поставить задачу о нахождении наилучшего метода восстановления данной характеристики среди всех возможных методов восстановления. Такой подход к задаче восстановления базируется на работах А. Н. Колмогорова [15] 30-годов XX века, посвященным нахождению наилучших средств приближения для различных классов функций. Математическая теория, в которой рассматриваются задачи восстановления, основывающиеся на этом подходе, плодотворно развивается, начиная с 60-годов XX века.

Задача Колмогорова–Никольского о наилучших квадратурах послужила, в определенном смысле, отправной точкой для постановки общей проблемы нахождения оптимальных методов восстановления значений линейных функционалов и операторов. Простейший вариант задачи Колмогорова–Никольского формулируется так. Определен некоторый класс W в линейном пространстве непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ и заданы точки $a \leqslant x_1 < \ldots < x_n \leqslant b$. Для любой функции $f(\cdot) \in W$ мы хотим вычислить интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, используя с этой целью приближенную формулу $\sum_{i=1}^n q_i f(x_i)$, при этом коэффициенты q_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, мы хотим определить таким образом, чтобы полученная формула давала наилучшее приближение интеграла сразу для всех функций из W. Точная постановка задачи такова: требуется найти величину

$$\inf_{q_1,\dots,q_n} \sup_{f\cdot\in W} \left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^n q_i f(x_i) \right|,$$

где нижняя грань берется по всем наборам $(q_1,\dots,q_n)$, и определении такого набора, на котором нижняя грань достигается. Полученный набор, очевидно, будет искомым.

Постановки такого типа задач о наилучших квадратурах впервые стали рассматриваться в работах A. Sard [61] и С. М. Никольского [36].

Дальнейшее развитием этой тематики, связанное с общей постановкой задачи о оптимальном восстановлении линейного функционала на классе элементов, получило в работе С. А. Смоляка [47]. Пусть X — линейное пространство, W — непустой класс элементов в X и l_i, $i = 0,1,\dots,n$, — линейные функционалы на пространстве X. Предполагается, что элементы множества W известны приближенно, а именно, о каждом $x \in W$ известен набор чисел $l_i(x)$, $i = 1,\dots,n$ (значения линейных функционалов l_i, $i = 1,\dots,n$, на элементе x). Имея эту информацию, мы будем восстанавливать значения линейного функционала l_0 на элементах W наилучшим образом. Заметим, что любой способ (метод) m восстановления сопоставляет набору $(l_1(x),\dots,l_n(x))$ некоторое число, т. е. m — это функция на $\mathbb{R}^n$. Погрешность метода m определяется величиной

$$e(l_0, W, l_1,\dots,l_n, m) = \sup_{x\in W} |l_0(x) - m(l_1(x),\dots,l_n(x))|.$$

Это «наихудший» результат из всех, которые можно получить, используя данный способ восстанов- ления. Погрешностью оптимального восстановления будет величина

$$E(l_0, W, l_1, \dots, l_n) = \inf_{m\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}} e(l_0, W, l_1, \dots, l_n, m),$$

а те методы, на которых эта нижняя грань достигается будут оптимальными методами восстановления. Понятно, что нас интересуют именно эта погрешность и полученные методы.

С. А. Смоляк доказал, что для центрально-симметричного множества W (то есть $W = -W$), среди оптимальных методов обязательно есть линейный (лемма Смоляка).Задача Колмогорова–Никольского является частным случаем данной постановки. Действительно, пусть X — пространство непрерывных функций на $[a, b]$, l_0 — линейный функционал на X, сопоставляющий функции ее интеграл по отрезку $[a, b]$, l_i — линейные функционалы на X, сопоставляющие функции ее значение соответственно в точках x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$. В качестве методов восстановления рассматриваются только линейные методы.

В дальнейшем математическая теория, связанная с оптимальным восстановлением, развивалась и обобщалась в различных направлениях. Значительное внимание уделялось задачам восстановления, в которых начальная информация об элементах W задана неточно (например, в приведенной постановке числа $l_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, известны приближенно) и, быть может, бесконечномерна. Для таких задач находились условия существования линейного оптимального метода, т. е. справедливость леммы Смоляка для них (см., например, [34], [17], [8]). Окончательный результат — необходимые и достаточные условия существования линейного оптимального метода восстановления для достаточно общей постановки задачи оптимального восстановления линейного функционала — получен в работе [18]. Помимо этого, было решено значительное количество конкретных задач, связанных с нахождением оптимальных методов восстановлени (см. по этому поводу обзоры [57], [58], [63] и монографию [62]). Подход к нахождению оптимальных методов восстановления линейных функционалов по неточным исходным данным с позиций теории экстремальных задач впервые был предложен в работе [31].

В приведенных обзорах была поставлена более общая задача восстановления, а именно, задача об оптимальном восстановлении значений линейного оператора на классе элементов по неточной и неполной информации о самих элементах. Общая ее постановка такова.

Пусть X — линейное пространство, Y и Z — нормированные пространства, $T : X \to Z$ и $I : X \to Y$ — линейные операторы, и W — некоторое непустое множество (класс) элементов из X. Рассматривается задача о восстановлении значения оператора T на множестве W по неточной информации об элементах этого множества. О любом элементе $x \in W$ нам известен элемент $y \in Y$ такой, что $\|Ix - y\|_Y \leqslant \delta$ (если $\delta = 0$, то известен элемент Ix). Под методами восстановления понимаются произвольные отображения $m : Y \to Z$. Следующая диаграмма иллюстрирует действия введенных отображений.

$$\begin{tikzcd} W \subset X \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "I"'] & & Z \\ & Y \arrow[ur, "m"'] & \end{tikzcd}$$

Погрешностью метода m называется величина

$$e(T, W, I, \delta, m) = \sup_{\substack{x \in W,\ y \in Y, \\ \|Ix - y\|_Y \leqslant \delta}} \|Tx - m(y)\|_Z.$$

Нас интересуют те методы $\widehat{m}$, на которых эта величина принимает наименьшее значение, т. е. методы, для которых справедливо равенство

$$e(T, W, I, \delta, \widehat{m}) = \inf_{m : Y \to Z} e(T, W, I, \delta, m).$$

Такие методы будем называть оптимальными.

Величина справа называется погрешностью оптимального восстановления (независимо от того, достигается нижняя грань или нет) и обозначается $E(T, W, I, \delta)$.

3. Краткое содержание работы

В данной работе решается задача об оптимальном восстановлении решения задачи Дирихле в верхней полуплоскости по следующей информации: известны (с некоторой погрешностью) решения на двух или более прямых, либо информация о граничной функции задана не точно и не полностью.

Рассмотрим следующую постановку задачи Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta u\left(x,y\right)=0,\ \left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2,\ y>0 \\ u\left(x,0\right)=f\left(x\right),\ \forall x\in\mathbb{R},\ f\left(\cdot\right)\in L_2\left(\mathbb{R}\right), \end{cases} \qquad (P_1)$$

заключающуюся в нахождении гармонической функции $u(\cdot,\cdot)$ в верхней полуплоскости, удовлетворяющей заданному граничному условию, которое понимается так: $u(\cdot,y)\to f(\cdot)$ при $y\to 0$ в метрике $L_2(\mathbb{R})$ и, кроме того,

$$\sup_{y>0}\|u(\cdot,y)\|_{L_2(\mathbb{R})}<\infty.$$

В этом случае, как следует из [48], решение данной задачи единственно и задается интегралом Пуассона:

$$u\left(x,y\right)=u\left(x,y,f(\cdot)\right)=\int\limits_{\mathbb{R}}P\left(x-t,y\right)\cdot f\left(t\right)dt=P\left(x,y\right)*f\left(x\right), \qquad (1)$$

где $P\left(x,y\right)=\dfrac{1}{\pi}\dfrac{y}{x^2+y^2}$ — ядро Пуассона.

1. В первой главе мы хотим восстановить (по возможности, наилучшим образом) решение задачи (P_1) на прямой $y=Y$ по неточным его измерениям на прямых $y=y_1$ и $y=y_2$, где $0\leqslant y_1<Y<y_2$.

Точная постановка задачи такова. Пусть $u(\cdot,\cdot)$ — решение задачи (P_1) и известны функции $z_i\left(\cdot\right) \in L_2\left(\mathbb{R}\right)$ такие, что

$$\left\|u\left(\cdot, y_i\right) - z_i\left(\cdot\right)\right\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \delta_i, \quad \delta_i > 0,\ i = 1,2; \quad 0 \leqslant y_1 < y_2.$$

По этой информации мы хотим восстановить решение задачи Дирихле на прямой $y = Y$, $y_1 < Y < y_2$ в метрике $L_2\left(\mathbb{R}\right)$.

Мы действуем в соответствии с общей схемой, изложенной во введении. Любое отображение $m : L_2\left(\mathbb{R}\right) \times L_2\left(\mathbb{R}\right) \to L_2\left(\mathbb{R}\right)$ является методом восстановления, при этом величина

$$e\left(m\right) = e\left(Y, y_1, y_2, \delta_1, \delta_2, m\right) = \sup_{\substack{f(\cdot), z_i(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}),\\ \|u(\cdot, y_i) - z_i(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \delta_i,\, i=1,2}} \left\|u\left(\cdot, Y, f(\cdot)\right) - m\left(z_1(\cdot), z_2(\cdot)\right)\right\|_{L_2(\mathbb{R})}$$

есть погрешность метода m.

Тот метод

$$\widehat{m} : L_2\left(\mathbb{R}\right) \times L_2\left(\mathbb{R}\right) \to L_2\left(\mathbb{R}\right),$$

на котором погрешность восстановления минимальна, то есть

$$e\left(Y, y_1, y_2, \delta_1, \delta_2, \widehat{m}\right) = \inf_{m:\ L_2(\mathbb{R}) \times L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})} e\left(Y, y_1, y_2, \delta_1, \delta_2, m\right),$$

называется оптимальным методом восстановления, а величина

$$E\left(Y, y_1, y_2, \delta_1, \delta_2\right) = \inf_{m:\ L_2(\mathbb{R}) \times L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})} e\left(Y, y_1, y_2, \delta_1, \delta_2, m\right)$$

будет погрешностью оптимального восстановления.

Свяжем с числами $0 < y_1 < Y < y_2$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ следующие величины:

$$\lambda_1 = \frac{y_2 - Y}{y_2 - y_1} \cdot \left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{\frac{-2(Y - y_1)}{y_2 - y_1}}, \quad \lambda_2 = \frac{Y - y_1}{y_2 - y_1} \cdot \left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{\frac{2(y_2 - Y)}{y_2 - y_1}}.$$

Теорема 1.

1) Пусть $0 \leqslant y_1 < Y < y_2$, $\delta_1 > \delta_2 > 0$. Тогда погрешность оптимального

восстановления имеет вид:

$$E(Y, y_1, y_2, \delta_1, \delta_2) = \delta_1^{\frac{y_2 - Y}{y_2 - y_1}} \cdot \delta_2^{\frac{Y - y_1}{y_2 - y_1}}.$$

Для любых функций $a_i(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R})$, $i = 1, 2$, таких, что

$$e^{-Y|\xi|} = a_1(\xi)\, e^{-y_1|\xi|} + a_2(\xi)\, e^{-y_2|\xi|}, \quad \text{для п.в.}\, \xi \in \mathbb{R}$$

и

$$\left\| \frac{|a_1(\cdot)|^2}{\lambda_1} + \frac{|a_2(\cdot)|^2}{\lambda_2} \right\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leqslant 1,$$

линейный оператор

$$\widehat{m}_{a_1, a_2} : L_2(\mathbb{R}) \times L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}),$$

действующий в образах Фурье по правилу:

$$F[\widehat{m}\,(z_1(\cdot), z_2(\cdot))](\xi) = a_1(\xi) \cdot F[z_1(\cdot)](\xi) + a_2(\xi) \cdot F[z_2(\cdot)](\xi) \quad \text{для п.в.}\, \xi \in \mathbb{R},$$

является оптимальным методом.

2) Пусть $0 \leqslant y_1 < Y < y_2$, $0 < \delta_1 \leqslant \delta_2$. Тогда погрешность оптимального восстановления имеет вид:

$$E(Y, y_1, y_2, \delta_1, \delta_2) = \delta_1.$$

При этом метод вида

$$m(z_1, z_2)(\xi) = e^{-y_1|\xi|} \cdot F[z_1(\cdot)](\xi)$$

является оптимальным.

Как будет показано далее, множество оптимальных методов не пусто.

2. Во второй главе рассматривается аналогичная задача для случая n ($n > 2$) измерений. Также получено значение погрешности оптимального восстановления для различных случаев расположения прямой. В каждом случае указан оптимальный метод.

Дадим точную постановку задачи.

Пусть $u(\cdot,\cdot)$ — решение задачи (P_1). Нам известны функции $z_i(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ такие, что

$$\|u(\cdot, y_i) - z_i(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \delta_i,\ \delta_i > 0,\ i = 1, \ldots, n; \quad 0 \leqslant y_1 < y_2 < \ldots < y_n.$$

По этой информации мы хотим восстановить наилучшим образом решение задачи Дирихле на прямой $y = Y$, $Y \geqslant 0$ в метрике $L_2(\mathbb{R})$. Обозначим

$$\bar{y} = (y_1(\cdot), \ldots, y_n(\cdot)), \quad \bar{\delta} = (\delta_1(\cdot), \ldots, \delta_n(\cdot)), \quad \bar{z} = (z_1(\cdot), \ldots, z_n(\cdot)).$$

Аналогично предыдущему, любое отображение

$$m : (L_2(\mathbb{R}))^n = L_2(\mathbb{R}) \times \ldots \times L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$$

есть метод восстановления. Погрешность этого метода задается величиной

$$e(m) = e\left(Y, \bar{y}, \bar{\delta}, m\right) = \sup_{\substack{f(\cdot), \bar{z}_i(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}), \\ \|u(\cdot, y_i) - z_i(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \delta_i,\, i = 1,2,\ldots,n}} \|u(\cdot, Y, f(\cdot)) - m(\bar{z}(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Тот метод

$$\widehat{m} : (L_2(\mathbb{R}))^n \to L_2(\mathbb{R}),$$

на котором погрешность восстановления минимальна, будем называть оптимальным методом восстановления, а соответствующую погрешность

$$E\left(Y, \bar{y}, \bar{\delta}\right) = e\left(Y, \bar{y}, \bar{\delta}, \widehat{m}\right) = \inf_{m:\ (L_2(\mathbb{R}))^n \to L_2(\mathbb{R})} e\left(Y, \bar{y}, \bar{\delta}, m\right)$$

назовем погрешностью оптимального восстановления.

Построим на плоскости (y, t) множество

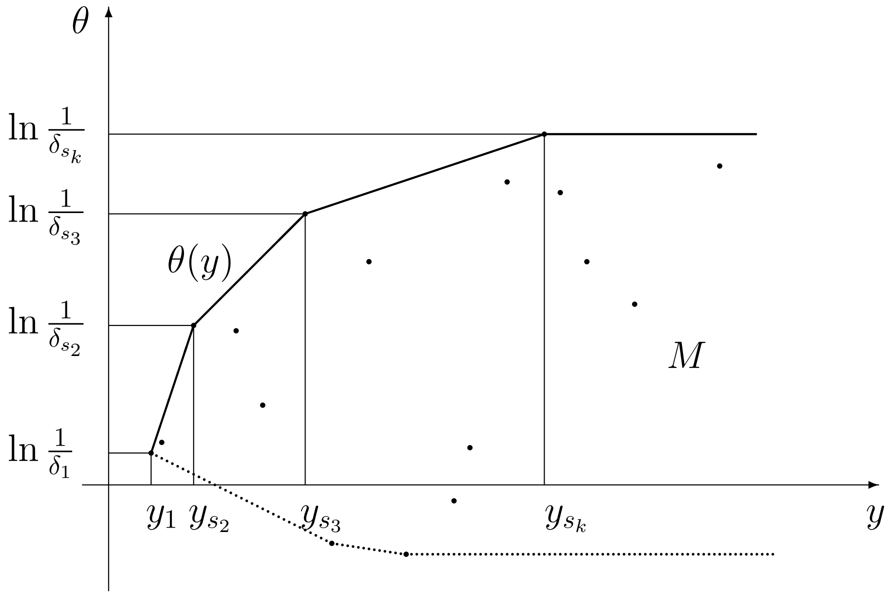
$$M = \operatorname{Co}\left\{\left(y_j, \ln\left(\frac{1}{\delta_j}\right)\right), 1 \leqslant j \leqslant n\right\} + \{(y, 0) \mid y \geqslant 0\},$$

(где $\operatorname{Co} A$ обозначает выпуклую оболочку множества A), которое представляет собой алгебраическую сумму выпуклого многогранника и положительной полупрямой.

Определим функцию $\theta(\cdot)$ на $[0, \infty)$ по формуле:

$$\theta(y) = \begin{cases} \max\{t \mid (y,t) \in M\}, \\ -\infty, \text{ если } (y,t) \notin M. \end{cases}$$

Ясно, что на $[y_1, +\infty)$ график функции $\theta(\cdot)$ — вогнутая ломаная. Обозначим точки ее излома через $y_{s_1} < y_{s_2} < \ldots < y_{s_k}$ (будем считать, что $y_{s_1} = y_1$).



Свяжем с числами $0 < y_{s_j} < Y < y_{s_{j+1}}, \quad \delta_{s_j} > 0,\ \delta_{s_{j+1}} > 0, 1 \leqslant j \leqslant k-1$, следующие величины:

$$\lambda_1 = \frac{y_{s_{j+1}} - Y}{y_{s_{j+1}} - y_{s_j}} \cdot \left(\frac{\delta_{s_j}}{\delta_{s_{j+1}}}\right)^{\frac{-2(Y - y_{s_j})}{y_{s_{j+1}} - y_{s_j}}}, \quad \lambda_2 = \frac{Y - y_{s_j}}{y_{s_{j+1}} - y_{s_j}} \cdot \left(\frac{\delta_{s_j}}{\delta_{s_{j+1}}}\right)^{\frac{2(y_{s_{j+1}} - Y)}{y_{s_{j+1}} - y_{s_j}}}.$$

Теорема 2. Для любого $Y \geqslant 0$ справедливо равенство:

$$E(Y, \bar{y}, \bar{\delta}) = e^{-\theta(Y)}.$$

1) Если $0 \leqslant Y < y_1$, то $E(Y, \bar{z}, \bar{\delta}) = +\infty$ и любой метод является оптимальным;

2) если $Y = y_{s_j},\ 1 \leqslant j \leqslant k$, то метод

$$\widehat{m}\left(\bar{z}(\cdot)\right)(\cdot) = z_{s_j}(\cdot),$$

является оптимальным;

3) если $k \geqslant 2$ и $t_{s_j} < Y < t_{s_{j+1}}$, $1 \leqslant j \leqslant k-1$, то для любых функций $a_i(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R})\,, i = 1, 2$, таких, что

$$e^{-Y|\xi|} = a_1\left(\xi\right) e^{-y_{s_j}|\xi|} + a_2\left(\xi\right) e^{-y_{s_{j+1}}|\xi|}, \quad \text{для п.в.}\, \xi \in \mathbb{R}$$

и

$$\left\| \frac{|a_1(\cdot)|^2}{\lambda_1} + \frac{|a_2(\cdot)|^2}{\lambda_2} \right\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leqslant 1,$$

линейный оператор

$$\widehat{m}_{a_1,a_2} : \left(L_2\left(\mathbb{R}\right)\right)^n \to L_2\left(\mathbb{R}\right),$$

действующий в образах Фурье по правилу:

$$F[\widehat{m}_{a_1,a_2}\left(z_1(\cdot), z_2(\cdot)\right)](\xi) = a_1(\xi)\cdot F[z_1(\cdot)](\xi) + a_2(\xi)\cdot F[z_2(\cdot)](\xi) \quad \text{для п.в.}\, \xi \in \mathbb{R},$$

является оптимальным методом;

4) если $Y > y_{s_k}$, то метод

$$\widehat{m}\left(\bar{z}(\cdot)\right)(\cdot) = P(\cdot, Y - y_{s_k}) * z_{s_k}(\cdot).$$

является оптимальным.

Сделаем некоторые замечания по поводу сформулированной теоремы.

1) Если $0 \leqslant Y < y_1$, то $\theta(Y) = -\infty$. Значит $E(Y, \bar{z}, \bar{\delta}) = +\infty$, то есть невозможно восстановить значение функции до поступления какой-либо информации о ней.

2) Если точка восстановления совпадает с одной из точек излома графика $\theta(\cdot)$, то берем значение $z(\cdot)$ в этой точке.

3) Оптимальный метод линеен, сглаживает наблюдения и использует информацию не более, чем о двух измерениях до и после значения Y.

4) В случае, когда $Y > y_{s_k}$, оптимальный метод — решение задачи Дирихле с начальной функцией $z_{s_k}(\cdot)$.

3. Третья глава посвящена проблеме наилучшего восстановления решения задачи Дирихле в метрике L_2 на прямой в верхней полуплоскости, параллельной оси абсцисс, по следующей информации о граничной функции: граничная функция принадлежит некоторому соболевскому пространству функций, а ее преобразования Фурье известно приближенное (в метрике L_∞) на конечном отрезке, симметричном относительно нуля. Построен оптимальный метод восстановления и найдено точное значение погрешности оптимального восстановления.

Точная постановка задачи следующая. Рассмотрим пространство функций:

$$\mathcal{W}_{2\,\infty}^r(\mathbb{R}) = \{f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})\colon\ f^{(r)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}), F[f](\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R})\},$$

где $F[f](\cdot)$ — преобразование Фурье функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$. Обозначим через $W_{2\,\infty}^r(\mathbb{R})$ соболевский класс функций на прямой:

$$W_{2\,\infty}^r(\mathbb{R}) = \{f(\cdot) \in \mathcal{W}_{2\,\infty}^r(\mathbb{R}),\ \left\|f^{(r)}(\cdot)\right\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant 1\}.$$

Ставится задача о наилучшем восстановлении функции $u(\cdot, Y)$ — решении задачи Дирихле на прямой $y = Y$, где $Y > 0$, по следующей информации о граничной функции $f(\cdot) \in W_{2\,\infty}^r(\mathbb{R})$: задано приближенно ее преобразование Фурье $F[f](\cdot)$ на отрезке $[-\sigma, \sigma]$, $\sigma > 0$, в метрике $L_\infty([-\sigma, \sigma])$. То есть известна функция $g(\cdot) \in L_\infty([-\sigma, \sigma])$ такая, что

$$\|F[f](\cdot) - g(\cdot)\|_{L_\infty([-\sigma,\sigma])} \leqslant \delta,$$

где $\delta > 0$.

Задача оптимального восстановления $u(\cdot, Y)$ понимается следующим образом. Как и ранее, любое отображение

$$m\colon L_\infty[-\sigma, \sigma] \to L_2(\mathbb{R})$$

объявляется методом восстановления. Погрешность этого метода определяется величиной

$$e(Y, W^r_{2\infty}(\mathbb{R}), \delta, \sigma, m) = \sup_{\substack{f(\cdot)\in W^r_{2\,\infty}(\mathbb{R}),\ g(\cdot)\in L_\infty[-\sigma,\,\sigma] \\ \|F[f](\cdot)-g(\cdot)\|_{L_\infty[-\sigma,\,\sigma]}\leqslant\delta}} \|u(\cdot, Y) - m(g(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Нас интересует величина

$$E(Y, W^r_{2\,\infty}(\mathbb{R}), \delta, \sigma) = \inf_{m\colon L_\infty[-\sigma,\,\sigma]\to L_2(\mathbb{R})} e(Y, W^r_{2\infty}(\mathbb{R}), \delta, \sigma, m),$$

которая называется погрешностью оптимального восстановления и те методы $\widehat{m}$, на которых нижняя грань достигается:

$$E(Y, W^r_{2\,\infty}(\mathbb{R}), \delta, \sigma) = e(Y, W^r_{2\,\infty}(\mathbb{R}), \delta, \sigma, \widehat{m}).$$

Эти методы мы называем оптимальными методами восстановления.

Теорема 3. Пусть $\delta > 0$, $\sigma > 0$, $\widehat{\sigma} = \left(\dfrac{\pi(2r+1)}{\delta^2}\right)^{1/(2r+1)}$, $\sigma_0 = \min\{\sigma,\, \widehat{\sigma}\}$. Метод $\widehat{m}\colon L_\infty[-\sigma,\, \sigma] \to L_2(\mathbb{R})$, действующий в образах Фурье по правилу:

$$F[\widehat{m}(g(\cdot))](\xi) = \begin{cases} e^{-Y|\xi|}\left(1 - e^{-2Y(\sigma_0-|\xi|)}\,(\xi/\sigma_0)^{2r}\right) g(\xi), & |\xi| \leqslant \sigma_0, \\ 0, & |\xi| > \sigma_0, \end{cases}$$

является оптимальным.

Погрешность оптимального восстановления имеет вид:

$$E(Y, W^r_{2\,\infty}(\mathbb{R}), \delta, \sigma) = \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi Y}\,(1 - e^{-2Y\sigma_0}) + e^{-2Y\sigma_0}\left(\frac{1}{\sigma_0^{2r}} - \frac{\delta^2\,\sigma_0}{\pi(2r+1)}\right)}.$$

Следует отметить, что оптимальный метод использует, вообще говоря, не всю доступную информацию, а ту, которую использует, определенным образом «сглаживает».

4. В четвертой главе рассматривается задача о наилучшем (оптимальном) восстановлении решения задачи Дирихле для верхней полуплоскости по точно или приближенно известному преобразованию Фурье граничной функции в метрике L_2. Построена серия оптимальных методов восстановления и вычислена соответствующая погрешность восстановления.

Пусть r — натуральное число. Аналогично предыдущему, обозначим через $W_2^r(\mathbb{R})$ соболевский класс функций на прямой:

$$W_2^r(\mathbb{R}) = \left\{ f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}) : \left\| f^{(r)}(\cdot) \right\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant 1 \right\}.$$

Пусть $Y > 0$. Ставится задача о наилучшем восстановлении функции $u(\cdot, Y)$ — решении задачи Дирихле на прямой $y = Y$ — по следующей информации: на отрезке $[-\sigma, \sigma]$, $\sigma > 0$ известно преобразование Фурье $F[f](\cdot)$ функции $f(\cdot)$ либо точно, либо приближенно в метрике $L_2([-\sigma, \sigma])$, т. е. известна функция $g(\cdot) \in L_2([-\sigma, \sigma])$ такая, что

$$\|F[f](\cdot) - g(\cdot)\|_{L_2([-\sigma,\sigma])} \leqslant \delta,$$

где $\delta \geqslant 0$ (случай $\delta = 0$ соответствует точному значению $F[f](\cdot)$ на $[-\sigma, \sigma]$).

Задача оптимального восстановления $u(\cdot, Y)$ по указанной информации понимается следующим образом. Любое отображение

$$m\colon L_2\left([-\sigma, \sigma]\right) \to L_2(\mathbb{R})$$

назывется методом восстановления, а величина

$$e(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma, m) = \sup_{\substack{f(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{R}),\ g(\cdot) \in L_2([-\sigma,\sigma]) \\ \|F[f](\cdot) - g(\cdot)\|_{L_2([-\sigma,\sigma])} \leqslant \delta}} \|u(\cdot, Y) - m(g(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}$$

— погрешностью метода m. Нас интересует величина

$$E(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma) = \inf_{m\colon L_2([-\sigma,\sigma]) \to L_2(\mathbb{R})} e(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma, m),$$

которая называется погрешностью оптимального восстановления и те методы $\widehat{m}$, на которых нижняя грань достигается, т. е.

$$E(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma) = e(Y, W_2^r(\mathbb{R}, \delta, \sigma, \widehat{m}).$$

Такие методы мы называем оптимальными методами восстановления.

Теорема 4.

1) Пусть $\delta > 0$. Тогда погрешность оптимального восстановления имеет вид

$$E(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma) = \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi} + \frac{e^{-2Y\sigma}}{\sigma^{2r}}}$$

Для любой измеримой функции $a_1(\cdot)$ на $\mathbb{R}$ такой, что

$$\left| a_1(\xi) - \frac{1}{1 + e^{-2Y\sigma}(\xi/\sigma)^{2r}} \right|^2$$
$$\leqslant \frac{e^{-2Y\sigma}(\xi/\sigma)^{2r}}{(1 + e^{-2Y\sigma}(\xi/\sigma)^{2r})^2}(e^{2Y|\xi|}(1 + e^{-2Y\sigma}(\xi/\sigma)^{2r}) - 1),$$
$$\text{для п.в. } \xi \in [-\sigma, \sigma],$$

линейный непрерывный оператор $\Lambda_{a_1} \colon L_2\left([-\sigma, \sigma]\right) \to L_2(\mathbb{R})$, действующий в образах Фурье по правилу

$$F[\Lambda_{a_1} g(\cdot)](\xi) = a_1(\xi) g(\xi) e^{-Y|\xi|},$$

является оптимальным методом.

2) Если $\delta = 0$, то погрешность оптимального восстановления имеет вид:

$$E\left(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \sigma\right) = \frac{e^{-Y\sigma}}{\sigma^r}.$$

Для любой измеримой функции $a_2(\cdot)$ на $\mathbb{R}$ такой, что

$$|a_2(\xi) - 1| \leqslant (\xi/\sigma)^r \cdot e^{-Y\sigma}, \quad \text{для п.в. } \xi \in [-\sigma, \sigma],$$

линейный непрерывный оператор $\Lambda_{a_2} \colon L_2\left([-\sigma, \sigma]\right) \to L_2(\mathbb{R})$, действующий в образах Фурье по правилу

$$F[\Lambda_{a_2} g(\cdot)](\xi) = a_2(\xi) g(\xi) e^{-Y|\xi|},$$

является оптимальным методом.

4. Доклады и публикации

Содержание диссертации и ее основные результаты достаточно полно отражены в публикациях автора. Всего по теме диссертации Абрамовой Е.В. опубликованы 5 печатных работ, из них три статьи в журналах, входящим в перечень ВАК РФ [1]–[3], одна в трудах конференций [5] и одна в тезисах конференции [4]. Доля авторского участия соискателя в работах составляет 100%.

Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференци и научно-исследовательских семинарах:

— 59-я научно-практическая конференция МИРЭА, Москва, 2010 г.;

— 64-я научно-практическая конференция МИРЭА, Москва, 2015 г.;

— XII Белорусская математическая конференция, Минск, 2016 г.;

— XIII международная конференция «Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование», Владикавказ, 2016 г.;

— семинаре кафедры Общих проблем управления механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова «Вопросы оптимального восстановления линейных операторов» (рук. проф. В. М. Тихомиров);

— научно-исследовательский семинар ФГБОУ ВПО «НИУ «МЭИ» по дифференциальным уравнениям (рук. проф. Ю. А. Дубинский и проф. А. А. Амосов.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Георгию Георгиевичу Магарил-Ильяеву за постановку задачи и постоянное внимание к работе, за многочисленные обсуждения и ценные рекомендации.

Предварительные сведения

1. Задача Дирихле

Рассмотрим задачу Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u\left(x,y\right)=0,\ \left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2,\ y>0 \\ u\left(x,0\right)=f\left(x\right),\ \forall x\in\mathbb{R},\ f\left(\cdot\right)\in L_2\left(\mathbb{R}\right), \end{cases} \qquad (P_1)$$

заключающуюся в нахождении гармонической функции $u(\cdot,\cdot)$ в верхней полуплоскости, удовлетворяющей заданному граничному условию, которое понимается так:

$$u(\cdot,y)\to f(\cdot) \text{ при } y\to 0 \text{ в метрике } L_2(\mathbb{R}).$$

Рассмотрим условия, которые гарантируют существование и единственность решения.

Теорема 0.1. Пусть $f(\cdot)\in L_2(\mathbb{R})$, а функция $u(\cdot,\cdot)$ определена так:

$$u(x,y)=\int\limits_{\mathbb{R}} P(x-t,y)\cdot f(t)\,dt,$$

где $P(x,y)=\dfrac{y}{\pi(x^2+y^2)}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. $u(\cdot,\cdot)$ — гармоническая функция;
2. $\|u(\cdot,y)\|_{L_2(\mathbb{R})}\leqslant\|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}$;
3. $\|u(\cdot,y)-f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\to 0$ при $y\to 0$.

Теорема 0.2. Пусть $u(\cdot,\cdot)$ — гармоническая функция в верхней полуплоскости, $u(\cdot,y)\in L_2(\mathbb{R})$ и $\sup\limits_{y>0}\|u(\cdot,y)\|_{L_2(\mathbb{R})}<\infty$. Тогда найдется такая функция $g(\cdot)\in L_2(\mathbb{R})$, что выполняется равенство:

$$u(x,y)=\int\limits_{\mathbb{R}} P(x-t,y)\cdot g(t)\,dt.$$

Следствие. Среди всех гармонических функций $u(\cdot, \cdot)$ в верхней полуплоскости, для которых

$$\sup_{y>0} \|u(\cdot, y)\|_{L_2(\mathbb{R})} < \infty, \qquad (U_1)$$

интеграл Пуассона является единственным решением задачи Дирихле.

2. Гармонический анализ

Пусть $f(\cdot) \in L_1(\mathbb{R})$. Функция $F[f](\cdot)$ на $\mathbb{R}$, определенная равенством

$$F[f](\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x}\, dx, \quad \xi \in \mathbb{R}, \qquad (2)$$

называется преобразованием Фурье функции $f(\cdot)$.

Теорема 0.3 (Планшереля) Существует единственный линейный непрерывный оператор, отображающий $L_2(\mathbb{R})$ на $L_2(\mathbb{R})$ (также называемый преобразованием Фурье и также обозначаемый через F), который на $L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ совпадает с (**??**) и при этом, справедливо равенство

$$\|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|F[f](\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}. \qquad (3)$$

Глава 1. Оптимальное восстановление решения задачи Дирихле для полуплоскости по неточным данным на двух прямых

В этой главе решается задача об оптимальном восстановлении решения задачи Дирихле для полуплоскости на прямой, параллельной оси абсцисс по неточным его измерениям на двух других прямых.

1.1 Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} \Delta u\left(x,y\right)=0,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y>0 \\ u\left(x,0\right)=f\left(x\right),\ \forall x\in\mathbb{R},\ f\left(\cdot\right)\in L_2\left(\mathbb{R}\right), \end{cases} \tag{P_1}$$

заключающуюся в нахождении гармонической функции $u(\cdot,\cdot)$ в верхней полуплоскости, удовлетворяющей заданному граничному условию, которое понимается так: $u(\cdot,y)\to f(\cdot)$ при $y\to 0$ в метрике $L_2(\mathbb{R})$ и, кроме того,

$$\sup_{y>0}\|u(\cdot,y)\|_{L_2(\mathbb{R})}<\infty.$$

В этом случае, как следует из [48], решение данной задачи единственно и задается интегралом Пуассона

$$u\left(x,y\right)=u\left(x,y,f(\cdot)\right)=\int\limits_{\mathbb{R}}P\left(x-t,y\right)\cdot f\left(t\right)dt=P\left(x,y\right)*f\left(x\right), \tag{4}$$

где $P\left(x,y\right)=\dfrac{1}{\pi}\dfrac{y}{x^2+y^2}$ — ядро Пуассона.

В этой ситуации мы хотим восстановить (по возможности, наилучшим образом) решение задачи (P_1) на прямой $y=Y$ по неточным его измерениям на прямых $y=y_1$ и $y=y_2$, где $0\leqslant y_1<Y<y_2$. Точная постановка задачи такова.

Пусть $u(\cdot,\cdot)$ — решение задачи (P_1) и известны функции $z_i(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ такие, что

$$\left\|u(\cdot, y_i) - z_i(\cdot)\right\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \delta_i, \quad \delta_i > 0,\ i = 1, 2; \quad 0 \leqslant y_1 < y_2.$$

По этой информации мы хотим восстановить решение задачи Дирихле на прямой $y = Y$, $y_1 < Y < y_2$ в метрике $L_2(\mathbb{R})$.

Любое отображение $m : L_2(\mathbb{R}) \times L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ назовем методом восстановления, при этом величину

$$e(m) = e(Y, y_1, y_2, \delta_1, \delta_2, m) = \sup_{\substack{f(\cdot), z_i(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}), \\ \|u(\cdot, y_i) - z_i(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \delta_i,\, i=1,2}} \left\|u(\cdot, Y, f(\cdot)) - m(z_1(\cdot), z_2(\cdot))\right\|_{L_2(\mathbb{R})}$$

назовем погрешностью восстановления (погрешностью метода m).
Тот метод $\widehat{m} : L_2(\mathbb{R}) \times L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, на котором погрешность восстановления минимальна, то есть

$$e(Y, y_1, y_2, \delta_1, \delta_2, \widehat{m}) = \inf_{m:\ L_2(\mathbb{R}) \times L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})} e(Y, y_1, y_2, \delta_1, \delta_2, m),$$

будем называть оптимальным методом восстановления, а величину

$$E(Y, y_1, y_2, \delta_1, \delta_2) = \inf_{m:\ L_2(\mathbb{R}) \times L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})} e(Y, y_1, y_2, \delta_1, \delta_2, m)$$

назовем погрешностью оптимального восстановления.

1.2 Формулировка основного результата

Свяжем с числами $0 < y_1 < Y < y_2$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ следующие величины:

$$\lambda_1 = \frac{y_2 - Y}{y_2 - y_1} \cdot \left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{\frac{-2(Y - y_1)}{y_2 - y_1}}, \quad \lambda_2 = \frac{Y - y_1}{y_2 - y_1} \cdot \left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{\frac{2(y_2 - Y)}{y_2 - y_1}}.$$

Теорема 1.

1. Пусть $0 \leqslant y_1 < Y < y_2$, $\delta_1 > \delta_2 > 0$. Тогда погрешность оптимального восстановления имеет вид:

$$E(Y, y_1, y_2, \delta_1, \delta_2) = \delta_1^{\frac{y_2 - Y}{y_2 - y_1}} \cdot \delta_2^{\frac{Y - y_1}{y_2 - y_1}}.$$

Для любых функций $a_i(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R})\,, i = 1, 2$, таких, что

$$e^{-Y|\xi|} = a_1(\xi)\, e^{-y_1|\xi|} + a_2(\xi)\, e^{-y_2|\xi|}, \quad \text{для} \ \ \text{п.в.}\, \xi \in \mathbb{R}$$

и

$$\left\| \frac{|a_1(\cdot)|^2}{\lambda_1} + \frac{|a_2(\cdot)|^2}{\lambda_2} \right\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leqslant 1,$$

линейный оператор

$$\widehat{m}_{a_1, a_2} : L_2(\mathbb{R}) \times L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})\,,$$

действующий в образах Фурье по правилу:

$$F[\widehat{m}\,(z_1(\cdot), z_2(\cdot))](\xi) = a_1(\xi) \cdot F[z_1(\cdot)](\xi) + a_2(\xi) \cdot F[z_2(\cdot)](\xi) \quad \text{для} \ \ \text{п.в.}\, \xi \in \mathbb{R},$$

является оптимальным методом.

2. Пусть $0 \leqslant y_1 < Y < y_2,\ \ 0 < \delta_1 \leqslant \delta_2$. Тогда погрешность оптимального восстановления имеет вид:

$$E(Y, y_1, y_2, \delta_1, \delta_2) = \delta_1.$$

При этом метод вида

$$m(z_1, z_2)(\xi) = e^{-y_1|\xi|} \cdot F[z_1(\cdot)](\xi)$$

является оптимальным.

Доказательство этой теоремы проведем в несколько этапов.

1.3 Оценка снизу погрешности оптимального восстановления

Покажем, что погрешность оптимального восстановления не меньше значения следующей задачи:

$$\|u(\cdot, Y, f(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R})} \to \max,$$

$$\|u(\cdot, y_i, f(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \delta_i,\ i = 1, 2, \quad f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})\,, \quad (5)$$

то есть

$$E\left(Y, y_1, y_2, \delta_1, \delta_2\right) \geqslant \sup_{\substack{f(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}),\\ \|u(\cdot,y_i,f(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R})}\leqslant\delta_i, i=1,2}} \|u(\cdot, Y, f(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R})}. \tag{6}$$

Действительно, пусть m — произвольный метод восстановления и функция $f_0(\cdot)$ допустима в задаче (3). Тогда функция $-f_0(\cdot)$ — тоже допустима, поскольку $u(\cdot, y, -f_0(\cdot)) = -u(\cdot, y, f_0(\cdot))$, и мы имеем:

$$\begin{gathered}
2\|u(\cdot, Y, f_0(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R})} = \\
\|u(\cdot, Y, f_0(\cdot)) - m(0,0) - (-u(\cdot, Y, f_0(\cdot)) - m(0,0))\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \\
\|u(\cdot, Y, f_0(\cdot)) - m(0,0)\|_{L_2(\mathbb{R})} + \| - u(\cdot, Y, f_0(\cdot)) - m(0,0)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \\
2 \sup_{\substack{f(\cdot)\in L_2(\mathbb{R})\\ \|u(\cdot,y_i,f(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R})}\leqslant\delta_i, i=1,2}} \|u(\cdot, Y, f(\cdot)) - m(0,0)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \\
2 \sup_{\substack{f(\cdot), z_i(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}),\\ \|u(\cdot,y_i,f(\cdot))-z_i(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\leqslant\delta_i, i=1,2}} \|u(\cdot, Y, f(\cdot)) - m(z_1, z_2)\|_{L_2(\mathbb{R})} = \\
2 \cdot e\left(Y, y_1, y_2, \delta_1, \delta_2, m\right).
\end{gathered}$$

Таким образом,

$$\|u(\cdot, Y, f_0(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant e\left(Y, y_1, y_2, \delta_1, \delta_2, m\right).$$

Переходя слева к верхней грани по всем допустимым функциям в (3), а затем справа к нижней грани по всем методам m, получим:

$$\sup_{\substack{f(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}),\\ \|u(\cdot,y_i,f(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R})}\leqslant\delta_i, i=1,2}} \|u(\cdot, Y, f(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant E(Y, y_1, y_2, \delta_1, \delta_2).$$

Найдем значение задачи (3). Перейдем к образам Фурье. Так как

$$\begin{gathered}
F[u(\cdot, y, f(\cdot))](\xi) = F[P(\cdot, y) * f(\cdot)](\xi) = \\
F[P(\cdot, y)](\xi) \cdot F[f(\cdot)](\xi) = e^{-y|\xi|} \cdot F[f(\cdot)](\xi),
\end{gathered}$$

то по теореме Планшереля квадрат значения задачи (3) равен значению следующей задачи:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|}\cdot|F[f(\cdot)](\xi)|^2\,d\xi \to \max,$$
$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2y_i|\xi|}\cdot|F[f(\cdot)](\xi)|^2\,d\xi \leqslant \delta_i^2,\quad i=1,2,\quad f(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}). \quad (7)$$

1. Пусть $\delta_1 > \delta_2$. Оценим сверху максимизируемый функционал в (5). Представим Y в виде:

$$Y = y_1\frac{y_2-Y}{y_2-y_1} + y_2\frac{Y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Тогда, очевидно, справедливо равенство:

$$e^{-2Y|\xi|}\cdot|F[f(\cdot)](\xi)|^2 = e^{-2y_1|\xi|\frac{y_2-Y}{y_2-y_1}}\,|F[f(\cdot)](\xi)|^{2\frac{y_2-Y}{y_2-y_1}}\cdot e^{-2y_2|\xi|\frac{Y-y_1}{y_2-y_1}}\,|F[f(\cdot)](\xi)|^{2\frac{Y-y_1}{y_2-y_1}}.$$

По неравенству Гёльдера для любого $f(\cdot)\in L_2(\mathbb{R})$ получим:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|}\cdot|F[f(\cdot)](\xi)|^2\,d\xi \leqslant$$
$$\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2y_1|\xi|}\cdot|F[f(\cdot)](\xi)|^2\,d\xi\right)^{\frac{y_2-Y}{y_2-y_1}}\cdot\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2y_2|\xi|}\cdot|F[f(\cdot)](\xi)|^2\,d\xi\right)^{\frac{Y-y_1}{y_2-y_1}} \leqslant$$
$$\delta_1^{\frac{2(y_2-Y)}{y_2-y_1}}\cdot\delta_2^{\frac{2(Y-y_1)}{y_2-y_1}}.$$

Покажем, что эта оценка точна. Построим для этого последовательность допустимых в задаче (5) функций φ_n, таких, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|}\cdot|F[\varphi_n(\cdot)](\xi)|^2 d\xi = \delta_1^{\frac{2(y_2-Y)}{y_2-y_1}}\cdot\delta_2^{\frac{2(Y-y_1)}{y_2-y_1}}.$$

Положим

$$\xi_0 = \frac{\ln(\delta_1/\delta_2)}{y_2-y_1} > 0,\quad K_n = \sqrt{2\pi n}\cdot\delta_1^{\overline{\dfrac{y_2}{y_2-y_1}}}\cdot\delta_2^{\overline{\dfrac{-y_1}{y_2-y_1}}}.$$

Пусть функции $\varphi_n(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ таковы, что

$$F[\varphi_n(\cdot)](\xi) = \begin{cases} K_n, & \text{если } \xi \in [\xi_0; \xi_0 + \frac{1}{n}]; \\ 0, & \text{если } \xi \notin [\xi_0; \xi_0 + \frac{1}{n}]. \end{cases} \tag{8}$$

Покажем, что эти функции допустимы в задаче (5), то есть

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2y_i|\xi|} \cdot |F[\varphi_n(\cdot)](\xi)|^2 \, d\xi \leqslant \delta_i^2, \quad i = 1, 2.$$

Действительно,

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2y_i|\xi|} \cdot |F[\varphi_n(\cdot)](\xi)|^2 \, d\xi = \frac{K_n^2}{2\pi} \int\limits_{\xi_0}^{\xi_0+\frac{1}{n}} e^{-2y_i\xi} d\xi \leqslant \frac{K_n^2}{2\pi n} e^{-2y_i\xi_0} =$$
$$\delta_1^{\dfrac{2y_2}{y_2 - y_1}} \delta_2^{\dfrac{-2y_1}{y_2 - y_1}} e^{-2y_i\xi_0} = \delta_1^{\dfrac{2y_2}{y_2 - y_1}} \delta_2^{\dfrac{-2y_1}{y_2 - y_1}} e^{\dfrac{-2y_i \ln(\delta_1/\delta_2)}{y_2 - y_1}} =$$
$$\delta_1^{\dfrac{2y_2}{y_2 - y_1}} \delta_2^{\dfrac{-2y_1}{y_2 - y_1}} \left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{\dfrac{-2y_i}{y_2 - y_1}} = \delta_1^{\dfrac{2(y_2 - y_i)}{y_2 - y_1}} \delta_2^{\dfrac{-2(y_1 - y_i)}{y_2 - y_1}} = \delta_i^2, \quad i = 1, 2. \tag{9}$$

Вычислим значение максимизируемого функционала в (5):

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|} \cdot |F[\varphi_n(\cdot)]|^2(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\xi_0}^{\xi_0+\frac{1}{n}} e^{-2Y\xi} \cdot K_n^2 d\xi =$$
$$= \frac{K_n^2}{2\pi} \int\limits_{\xi_0}^{\xi_0+\frac{1}{n}} e^{-2Y\xi} d\xi = -\frac{K_n^2}{4\pi Y} \cdot e^{-2Y\xi_0} \left(e^{\frac{-2Y}{n}} - 1\right) =$$
$$= -\frac{2\pi n}{4\pi Y} \cdot \delta_1^{\frac{2y_2}{y_2-y_1}} \cdot \delta_2^{\frac{-2y_1}{y_2-y_1}} \cdot e^{-2Y\xi_0} \cdot \left(e^{-\frac{2Y}{n}} - 1\right) =$$
$$= -\frac{n}{2Y} \cdot \delta_1^{\frac{2y_2}{y_2-y_1}} \cdot \delta_2^{\frac{-2y_1}{y_2-y_1}} \cdot e^{-2Y\frac{\ln(\delta_1/\delta_2)}{y_2-y_1}} \cdot \left(e^{-\frac{2Y}{n}} - 1\right) =$$
$$= -\frac{n}{2Y} \cdot \delta_1^{\frac{2(y_2-Y)}{y_2-y_1}} \cdot \delta_2^{\frac{2(Y-y_1)}{y_2-y_1}} \cdot \left(e^{-\frac{2Y}{n}} - 1\right).$$

Выражение справа при $n \to \infty$ стремится к величине $\delta_1^{\frac{2(y_2-Y)}{y_2-y_1}} \cdot \delta_2^{\frac{2(Y-y_1)}{y_2-y_1}}$.

Таком образом, значение задачи (5) равно

$$\sup_{\substack{f(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}),\\ \|u(\cdot,y_i,f(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R})}\leqslant\delta_i,\ i=1,2}} \|u(\cdot,y_i,f(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R})} = \delta_1^{\frac{2(y_2-Y)}{y_2-y_1}}\cdot\delta_2^{\frac{2(Y-y_1)}{y_2-y_1}}.$$

Тогда, согласно (4), справедлива следующая оценка снизу для погрешности оптимального восстановления:

$$E(Y,y_1,y_2,\delta_1,\delta_2)\geqslant\delta_1^{\frac{y_2-Y}{y_2-y_1}}\cdot\delta_2^{\frac{Y-y_1}{y_2-y_1}}.$$

2. Пусть $\delta_1\leqslant\delta_2$. Поскольку $Y>y_1$, то

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|}\cdot|F[f(\cdot)](\xi)|^2\,d\xi\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2y_1|\xi|}\cdot|F[f(\cdot)](\xi)|^2\,d\xi\leqslant\delta_1^2.$$

Покажем, что эта оценка точна. Построим для этого последовательность допустимых в задаче (5) функций φ_n, таких, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|}\cdot\left|F[\varphi_n(\cdot)](\xi)\right|^2 d\xi=\delta_1^2.$$

Положим

$$K_n=\sqrt{2\pi n}\cdot\delta_1.$$

Пусть функции $\varphi_n(\cdot)\in L_2\left(\mathbb{R}\right)$ таковы, что

$$F[\varphi_n(\cdot)](\xi)=\begin{cases}K_n, & \text{если } \xi\in[0;\frac{1}{n}];\\ 0, & \text{если } \xi\notin[0;\frac{1}{n}].\end{cases}\tag{10}$$

Покажем, что эти функции допустимы в задаче (5), то есть

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2y_i|\xi|}\cdot\left|F[\varphi_n(\cdot)](\xi)\right|^2 d\xi\leqslant\delta_i^2,\quad i=1,2.$$

Действительно,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2y_i|\xi|}\cdot|F[\varphi_n(\cdot)](\xi)|^2\,d\xi=\frac{K_n^2}{2\pi}\int\limits_0^{1/n} e^{-2y_i\xi}\,d\xi\leqslant\frac{K_n^2}{2\pi n}=\delta_1^2\leqslant\delta_2^2.$$

Вычислим значение максимизируемого функционала в (5):

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|}\cdot|F[\varphi_n(\cdot)]|^2(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{1/n} e^{-2Y\xi}\cdot K_n^2\,d\xi =$$

$$= \frac{K_n^2}{2\pi}\int\limits_0^{1/n} e^{-2Y\xi}d\xi = -\frac{K_n^2}{4\pi Y}\left(e^{\frac{-2Y}{n}}-1\right) = -\frac{n}{2Y}\cdot\delta_1^2\left(e^{-\frac{2Y}{n}}-1\right).$$

Выражение справа при $n\to\infty$ стремится к величине δ_1^2.

Таким образом, в этом случае значение задачи (5) равно

$$\sup_{\substack{f(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}),\\ \|u(\cdot,y_i,f(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R})}\leqslant\delta_i,\ i=1,2}} \|u(\cdot,y_i,f(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R})} = \delta_1^2.$$

Тогда, согласно (4), справедлива следующая оценка снизу для погрешности оптимального восстановления:

$$E(Y,y_1,y_2,\delta_1,\delta_2)\geqslant\delta_1.$$

1.4 Оценка сверху погрешности оптимального восстановления и оптимальные методы

1. Пусть $\delta_1>\delta_2$. Построим методы m, для которых погрешность имеет вид:

$$e\left(Y,y_1,y_2,\delta_1,\delta_2,\widehat{m}\right) = \delta_1^{\frac{y_2-Y}{y_2-y_1}}\cdot\delta_2^{\frac{Y-y_1}{y_2-y_1}}.$$

Такие методы, очевидно, будут являться оптимальными.

Будем рассматривать методы вида:

$$m_{a_1,a_2}\left(z_1(\cdot),z_2(\cdot)\right) = \Lambda_1 z_1(\cdot)+\Lambda_2 z_2(\cdot), \tag{11}$$

где $\Lambda_i\,:\,L_2\left(\mathbb{R}\right)\to L_2\left(\mathbb{R}\right), i=1,2$ — линейные непрерывные операторы, действия которых в образах Фурье имеют вид:

$$F[\Lambda_i z_i(\cdot)](\xi) = a_i(\xi)\cdot F[z_i(\cdot)](\xi),\quad a_i(\cdot)\in L_\infty\left(\mathbb{R}\right),\ i=1,2.$$

Оценим погрешность такого метода. По определению, она равна значению следующей задачи:

$$\begin{cases} \left\| u\left(\cdot ,Y\right) - \left(\Lambda_1 z_1(\cdot) + \Lambda_2 z_2(\cdot)\right) \right\|_{L_2(\mathbb{R})} \to \max \\ \left\| u\left(\cdot ,y_i\right) - z_i(\cdot) \right\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \delta_i, \\ \delta_i > 0,\ \ z_i(\cdot) \in L_2\left(\mathbb{R}\right), i = 1, 2,\ \ f(\cdot) \in L_2\left(\mathbb{R}\right) \\ u\left(\cdot ,\cdot\right) - \text{решение задачи } (P_1). \end{cases} \tag{12}$$

Запишем эту задачу в образах Фурье. Используя теорему Планшереля, получим, что квадрат значения задачи (10) будет равен значению следующей задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int\limits_R \left| e^{-Y|\xi|} F[f(\cdot)](\xi) - \left(a_1(\xi) \cdot F[z_1(\cdot)](\xi) + a_2(\xi) \cdot F[z_2(\cdot)](\xi)\right) \right|^2 d\xi \to \max, \\ \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int\limits_R \left| e^{-y_i|\xi|} F[f(\cdot)](\xi) - F[z_i(\cdot)](\xi) \right|^2 d\xi \leqslant \delta_i^2, \\ a_i(\cdot) \in L_\infty\left(\mathbb{R}\right),\ \ \delta_i > 0,\ \ z_i(\cdot) \in L_2\left(\mathbb{R}\right),\ \ i = 1, 2,\ \ f(\cdot) \in L_2\left(\mathbb{R}\right). \end{cases} \tag{13}$$

Положим

$$r_i(\xi) = F[u(\cdot, y_i) - z_i(\cdot)](\xi) = e^{-y_i|\xi|} F[f(\cdot)](\xi) - F[z_i(\cdot)](\xi), i = 1, 2.$$

Тогда задача (11) примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int\limits_R \Big| e^{-Y|\xi|} F[f(\cdot)](\xi) - a_1(\xi) \cdot \left(e^{-y_1|\xi|} \cdot F[f(\cdot)](\xi) - r_1\left(\xi\right)\right) - \\ \qquad\qquad - a_2(\xi) \cdot \left(e^{-y_2|\xi|} \cdot F[f(\cdot)](\xi) - r_2\left(\xi\right)\right) \Big|^2 d\xi \to \max, \\ \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int\limits_R \left| r_i(\xi) \right|^2 d\xi \leqslant \delta_i^2, \\ a_i(\cdot) \in L_\infty\left(\mathbb{R}\right),\ \ \delta_i > 0,\ \ z_i(\cdot) \in L_2\left(\mathbb{R}\right),\ \ i = 1, 2,\quad f(\cdot) \in L_2\left(\mathbb{R}\right). \end{cases} \tag{14}$$

Преобразуем максимизируемый функционал:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_R \Big|e^{-Y|\xi|}F[f](\xi) - a_1(\xi)\cdot\Big(e^{-y_1|\xi|}\cdot F[f](\xi) - r_1\left(\xi\right)\Big) -$$

$$- a_2(\xi)\cdot\Big(e^{-y_2|\xi|}\cdot F[f](\xi) - r_2\left(\xi\right)\Big)\Big|^2 d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_R \Big|F[f](\xi)\cdot\Big(e^{-Y|\xi|} - a_1(\xi)e^{-y_1|\xi|} - a_2(\xi)e^{-y_2|\xi|}\Big) +$$

$$a_1(\xi)r_1(\xi) + a_2(\xi)r_2(\xi)\Big|^2 d\xi.$$

Если функция

$$h(\xi) = e^{-Y|\xi|} - a_1(\xi)e^{-y_1|\xi|} - a_2(\xi)e^{-y_2|\xi|}.$$

отлична от нуля на множестве положительной меры, то, полагая $r_i(\xi) = 0$, и подбирая функцию $f(\cdot)$ так, чтобы интеграл был сколь угодно большим, мы получим, что значение задачи (12) равно бесконечности. Поскольку нас интересуют оптимальные методы, то этот случай мы исключаем. Итак, считаем, что $h(\cdot) = 0$ и задача (12) примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_R \left|a_1(\xi)r_1(\xi) + a_2(\xi)\cdot r_2(\xi)\right|^2 d\xi \to \max \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_R \left|r_i(\xi)\right|^2 d\xi \leqslant \delta_i,\ \ \delta_i \geqslant 0,\ \ \ a_i(\cdot) \in L_\infty\left(\mathbb{R}\right), i = 1, 2,\ \ f(\cdot) \in L_2\left(\mathbb{R}\right). \end{cases} \tag{15}$$

Оценим сверху максимизируемый функционал. Для произвольных $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, применяя неравенство Коши-Буняковского, получим:

$$\left|a_1(\xi)\cdot r_1(\xi) + a_2(\xi)\cdot r_2(\xi)\right|^2 = \left|\frac{a_1(\xi)}{\sqrt{\lambda_1}}\cdot\sqrt{\lambda_1}r_1(\xi) + \frac{a_2(\xi)}{\sqrt{\lambda_2}}\cdot\sqrt{\lambda_2}r_2(\xi)\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\left|a_1(\xi)\right|^2}{\lambda_1} + \frac{\left|a_2(\xi)\right|^2}{\lambda_2}\right)\cdot\left(\lambda_1\cdot\left|r_1(\xi)\right|^2 + \lambda_2\cdot\left|r_2(\xi)\right|^2\right).$$

Обозначим

$$S(\xi) = \frac{\left|a_1(\xi)\right|^2}{\lambda_1} + \frac{\left|a_2(\xi)\right|^2}{\lambda_2}.$$

Тогда, учитывая, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_R |r_i(\xi)|^2 d\xi \leqslant \delta_i^2, \quad i = 1, 2,$$

будем иметь:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_R \left|a_1(\xi)\cdot r_1(\xi) + a_2(\xi)\cdot r_2(\xi)\right|^2 d\xi \leqslant$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_R S(\xi)\cdot\left(\lambda_1\cdot|r_1(\xi)|^2 + \lambda_2\cdot|r_2(\xi)|^2\right) d\xi \leqslant$$

$$\max_{\xi\in R}|S(\xi)|\cdot\left(\lambda_1\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_R |r_1(\xi)|^2 d\xi + \lambda_2\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_R |r_2(\xi)|^2 d\xi\right) \leqslant$$

$$\|S(\cdot)\|_\infty\cdot\left(\lambda_1\delta_1^2 + \lambda_2\delta_2^2\right). \quad (16)$$

Пусть теперь коэффициенты λ_1, λ_2 из формулировки теоремы:

$$\lambda_1 = \frac{y_2 - Y}{y_2 - y_1}\cdot\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{2\frac{y_1 - Y}{y_2 - y_1}}, \quad \lambda_2 = \frac{Y - y_1}{y_2 - y_1}\cdot\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{2\frac{y_2 - Y}{y_2 - y_1}}.$$

Легко проверить, что

$$\lambda_1\delta_1^2 + \lambda_2\delta_2^2 = \delta_1^{2\frac{y_2 - Y}{y_2 - y_1}}\cdot\delta_2^{2\frac{Y - y_1}{y_2 - y_1}}.$$

В этом случае неравенство (14) примет вид:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_R |a_1(\xi)\varphi_1(\xi) + a_2(\xi)\varphi_2(\xi)|^2 d\xi \leqslant \|S(\cdot)\|_\infty\cdot\delta_1^{2\frac{y_2 - Y}{y_2 - y_1}}\cdot\delta_2^{2\frac{Y - y_1}{y_2 - y_1}}.$$

Потребуем, чтобы $\|S(\cdot)\|_\infty \leqslant 1$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_R \left|a_1(\xi)\cdot r_1(\xi) + a_2(\xi)\cdot r_2(\xi)\right|^2 d\xi \leqslant \delta_1^{2\frac{y_2 - Y}{y_2 - y_1}}\cdot\delta_2^{2\frac{Y - y_1}{y_2 - y_1}},$$

и, следовательно, значение задачи (10) удовлетворяет неравенству:

$$\|u(\cdot, Y) - m(z_1, z_2)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \delta_1^{\frac{y_2 - Y}{y_2 - y_1}}\cdot\delta_2^{\frac{Y - y_1}{y_2 - y_1}}.$$

Переходя к верхней грани по всем допустимым функциям $z_1(\cdot),\ z_2(\cdot),\ f(\cdot)$, мы получим оценку погрешности метода m:

$$e(m) = e\left(Y, y_1, y_2, \delta_1, \delta_2, m\right) = \sup_{\substack{z_i(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}), f(\cdot)\in L_2(\mathbb{R})\\ \|u(\cdot,y_i)-z_i(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\leqslant\delta_i, i=1,2,}} \left\|u\left(\cdot, Y\right) - m\left(z_1(\cdot), z_2(\cdot)\right)\right\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \delta_1^{\frac{y_2-Y}{y_2-y_1}} \cdot \delta_2^{\frac{Y-y_1}{y_2-y_1}}.$$

В пункте 1 было показано, что для погрешности оптимального восстановления справедлива оценка снизу:

$$E(Y, y_1, y_2, \delta_1, \delta_2) \geqslant \delta_1^{\frac{y_2-Y}{y_2-y_1}} \cdot \delta_2^{\frac{Y-y_1}{y_2-y_1}}.$$

Таким образом, если функции $a_1(\cdot),\ a_2(\cdot)$ таковы, что $\left\|S(\cdot)\right\|_\infty \leqslant 1$, то соответствующий метод m_{a_1,a_2} является оптимальным:

$$\delta_1^{\frac{y_2-Y}{y_2-y_1}} \cdot \delta_2^{\frac{Y-y_1}{y_2-y_1}} \leqslant E(Y, y_1, y_2, \delta_1, \delta_2) \leqslant e(Y, y_1, y_2, \delta_1, \delta_2, m_{a_1,a_2}) \leqslant \delta_1^{\frac{y_2-Y}{y_2-y_1}} \cdot \delta_2^{\frac{Y-y_1}{y_2-y_1}},$$

то есть

$$E(Y, y_1, y_2, \delta_1, \delta_2) = e(Y, y_1, y_2, \delta_1, \delta_2, \widehat{m}_{a_1,a_2}).$$

2. Пусть $\delta_1 \leqslant \delta_2$. Построим метод $\widehat{m}$, для которого погрешность имеет вид:

$$e\left(Y, y_1, y_2, \delta_1, \delta_2, \widehat{m}\right) = \delta_1.$$

Такой метод, очевидно, будет являться оптимальным.

Будем рассматривать методы вида:

$$m\left(z_1(\cdot), z_2(\cdot)\right) = \Lambda z_1(\cdot), \tag{17}$$

где $\Lambda : L_2\left(\mathbb{R}\right) \to L_2\left(\mathbb{R}\right)$ — линейный непрерывный оператор, действие которого в образах Фурье имеет вид:

$$F[\Lambda z_1(\cdot)](\xi) = a(\xi) \cdot F[z_1(\cdot)](\xi), \quad a(\cdot) \in L_\infty\left(\mathbb{R}\right).$$

Оценим погрешность такого метода. По определению, она равна значению следующей задачи:

$$\begin{cases} \left\| u\left(\cdot, Y\right) - \left(\Lambda z_1(\cdot)\right) \right\|_{L_2(\mathbb{R})} \to \max \\ \left\| u\left(\cdot, y_i\right) - z_i(\cdot) \right\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \delta_i, \\ \delta_i > 0,\ z_i(\cdot) \in L_2\left(\mathbb{R}\right), i = 1, 2, f(\cdot) \in L_2\left(\mathbb{R}\right) \\ u\left(\cdot, \cdot\right) - \text{решение задачи } (P_1). \end{cases} \tag{18}$$

Запишем эту задачу в образах Фурье. Используя теорему Планшереля, получим, что квадрат значения задачи (16) будет равен значению такой задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int\limits_R \left| e^{-Y|\xi|} F[f(\cdot)](\xi) - \left(a(\xi) \cdot F[z_1(\cdot)](\xi)\right) \right|^2 d\xi \to \max, \\ \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int\limits_R \left| e^{-y_i|\xi|} F[f(\cdot)](\xi) - F[z_i(\cdot)](\xi) \right|^2 d\xi \leqslant \delta_i^2, \\ a(\cdot) \in L_\infty\left(\mathbb{R}\right),\ \delta_i > 0,\ z_i(\cdot) \in L_2\left(\mathbb{R}\right),\ i = 1, 2,\ f(\cdot) \in L_2\left(\mathbb{R}\right). \end{cases} \tag{19}$$

Пусть $a(\xi) = e^{-(Y - y_1)|\xi|}$. Оценим при этом значение задачи (17).

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_R \left| e^{-Y|\xi|} F[f(\cdot)](\xi) - \left(a(\xi) \cdot F[z_1(\cdot)](\xi)\right) \right|^2 d\xi =$$
$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_R \left| e^{-Y|\xi|} F[f(\cdot)](\xi) - \left(e^{-(Y-y_1)|\xi|} \cdot F[z_1(\cdot)](\xi)\right) \right|^2 d\xi =$$
$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_R \left| e^{-(Y-y_1)|\xi|} \left(e^{-y_i|\xi|} F[f(\cdot)](\xi) - F[z_i(\cdot)](\xi)\right) \right|^2 d\xi \leqslant$$
$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_R \left| e^{-y_1|\xi|} F[f(\cdot)](\xi) - F[z_1(\cdot)](\xi) \right|^2 d\xi \leqslant \delta_1^2.$$

Мы показали, что

$$\delta_1 \leqslant E(Y, y_1, y_2, \delta_1, \delta_2) \leqslant e(Y, y_1, y_2, \delta_1, \delta_2, \widehat{m}) \leqslant \delta_1,$$

то есть

$$E(Y, y_1, y_2, \delta_1, \delta_2) = e(Y, y_1, y_2, \delta_1, \delta_2, \widehat{m}) = \delta_1..$$

Следовательно, метод вида

$$m(z_1, z_2)(\xi) = e^{-y_1|\xi|} \cdot F[z_1(\cdot)](\xi)$$

является оптимальным.

1.5 Оптимальный метод

Построим семейство оптимальных методов для случая $\delta_1 > \delta_2 > 0$. Пусть коэффициенты λ_1, λ_2 из формулировки теоремы:

$$\lambda_1 = \frac{y_2 - Y}{y_2 - y_1} \cdot \left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{-2\frac{Y-y_1}{y_2-y_1}} > 0, \quad \lambda_2 = \frac{Y - y_1}{y_2 - y_1} \cdot \left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{2\frac{y_2-Y}{y_2-y_1}} > 0.$$

Будем искать функции $a_1(\cdot), a_2(\cdot)$, удовлетворяющие условию:

$$\|S(\cdot)\|_\infty = \left\|\frac{|a_1(\cdot)|^2}{\lambda_1} + \frac{|a_2(\cdot)|^2}{\lambda_2}\right\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leqslant 1.$$

Из предыдущего ясно, что необходимо должно выполняться равенство:

$$e^{-Y|\xi|} = a_1(\xi)\, e^{-y_1|\xi|} + a_2(\xi)\, e^{-y_2|\xi|}.$$

Тогда

$$a_2(\xi) = \frac{e^{-Y|\xi|} - a_1(\xi)e^{-y_1|\xi|}}{e^{-y_2|\xi|}} = e^{(y_2-Y)|\xi|} - a_1(\xi)e^{(y_2-y_1)|\xi|}.$$

При этом функция $S(\cdot)$ примет вид:

$$S(\xi) = \frac{|a_1(\xi)|^2}{\lambda_1} + \frac{|a_2(\xi)|^2}{\lambda_2} = \frac{|a_1(\xi)|^2}{\lambda_1} + \frac{|e^{(y_2-Y)|\xi|} - a_1(\xi)e^{(y_2-y_1)|\xi|}|^2}{\lambda_2}.$$

Преобразуем это выражение:

$$S(\xi) = \frac{\operatorname{Re}^2 a_1(\xi) + \operatorname{Im}^2 a_1(\xi)}{\lambda_1} + \frac{\left(e^{(y_2-Y)|\xi|} - \operatorname{Re} a_1(\xi) \cdot e^{(y_2-y_1)|\xi|}\right)^2 + e^{2(y_2-y_1)} \cdot \operatorname{Im}^2 a_1(\xi)}{\lambda_2} =$$

$$\frac{\lambda_2 + \lambda_1 e^{2(y_2-y_1)|\xi|}}{\lambda_1\lambda_2}\left(\operatorname{Re}^2 a_1(\xi) - \frac{2\lambda_1 e^{(y_2-Y)|\xi|} e^{(y_2-y_1)|\xi|}}{\lambda_2 + \lambda_1 e^{2(y_2-y_1)|\xi|}} \cdot \operatorname{Re} a_1(\xi) + \operatorname{Im}^2 a_1(\xi)\right) + \frac{e^{2(y_2-Y)|\xi|}}{\lambda_2} =$$

$$\frac{\lambda_2 + \lambda_1 e^{2(y_2-y_1)|\xi|}}{\lambda_1\lambda_2}\left(\left(\operatorname{Re} a_1(\xi) - \frac{\lambda_1 e^{(y_2-Y)|\xi|} e^{(y_2-y_1)|\xi|}}{\lambda_2 + \lambda_1 e^{2(y_2-y_1)|\xi|}}\right)^2 + \operatorname{Im}^2 a_1(\xi)\right) + \frac{e^{2(y_2-Y)|\xi|}}{\lambda_2 + \lambda_1 e^{2(y_2-y_1)|\xi|}} =$$

$$\frac{\lambda_2 + \lambda_1 e^{2(y_2-y_1)|\xi|}}{\lambda_1\lambda_2} \cdot \left|a_1(\xi) - \frac{\lambda_1 e^{(y_2-Y)|\xi|} e^{(y_2-y_1)|\xi|}}{\lambda_2 + \lambda_1 e^{2(y_2-y_1)|\xi|}}\right|^2 + \frac{e^{2(y_2-Y)|\xi|}}{\lambda_2 + \lambda_1 e^{2(y_2-y_1)|\xi|}}.$$

Условие $\|S(\cdot)\|_\infty \leqslant 1$ означает, что

$$\left|a_1(\xi) - \frac{\lambda_1 e^{(y_2-Y)|\xi|} e^{(y_2-y_1)|\xi|}}{\lambda_2 + \lambda_1 e^{2(y_2-y_1)|\xi|}}\right| \leqslant \frac{\sqrt{\lambda_1\lambda_2} \cdot e^{y_2|\xi|}}{\lambda_2 + \lambda_1 e^{2(y_2-y_1)|\xi|}} \sqrt{\lambda_1 e^{-2y_1|\xi|} + \lambda_2 e^{-2y_2|\xi|} - e^{-2Y|\xi|}}. \quad (20)$$

Покажем, что выражение, стоящее справа, имеет смысл. Рассмотрим функцию

$$\varphi(\xi) = \lambda_1 e^{2(Y-y_1)|\xi|} + \lambda_2 e^{-2(y_2-Y)|\xi|} - 1.$$

Поскольку $\varphi(\cdot)$ — четна, рассмотрим $\xi > 0$. Найдем точку экстремума функции. Ее производная

$$\varphi'(\xi) = -2\frac{(Y-y_1)(y_2-Y)}{y_2-y_1}\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{-2\frac{Y-y_1}{y_2-y_1}} e^{2(Y-y_1)\xi}\sigma \times \left(\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^2 e^{-2(y_2-y_1)\xi} - 1\right)$$

обращается в ноль при

$$\xi = \xi_0 = \frac{\ln(\delta_1/\delta_2)}{y_2-y_1} > 0.$$

Заметим, что при $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ функция $\varphi(\xi)$ выпукла. Значит

$$\varphi(\xi) \geqslant \varphi(\xi_0) = 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Тогда

$$\lambda_1 e^{-2y_1|\xi|} + \lambda_2 e^{-2y_2|\xi|} - e^{-2Y|\xi|} = e^{-2Y|\xi|}\varphi(\xi) \geqslant 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Из формулы (18) видно, что функции $a_1(\cdot)$ (а тем самым и $a_2(\cdot)$), удовлетворяющие приведенным условиям, существуют. Например:

$$a_1(\xi) = \frac{\lambda_1 e^{(y_2-Y)|\xi|} e^{(y_2-y_1)|\xi|}}{\lambda_2 + \lambda_1 e^{2(y_2-y_1)|\xi|}} = \frac{\lambda_1 e^{(y_2-Y)|\xi|}}{\lambda_2 e^{-(y_2-y_1)|\xi|} + \lambda_1 e^{(y_2-y_1)|\xi|}},$$

$$a_2(\xi) = \frac{\lambda_2 e^{(-Y-y_1)|\xi|}}{\lambda_2 e^{-(y_2-y_1)|\xi|} + \lambda_1 e^{(y_2-y_1)|\xi|}}.$$

Заметим, что поскольку

$$0 \leqslant a_1(\xi) \leqslant e^{-(Y-y_1)|\xi|}$$

и

$$0 \leqslant a_2(\xi) \leqslant \frac{\lambda_2}{\lambda_1} e^{2y_1-y_2-Y}|\xi|,$$

то $a_1(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, $a_2(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ и оптимальный метод может быть записан так:

$$\widehat{m}\left(z_1(\cdot), z_2(\cdot)\right)(\cdot) = F^{-1}[a_1(\cdot)](\cdot) * z_1(\cdot) + F^{-1}[a_2(\cdot)](\cdot) * z_2(\cdot).$$

1.6 Случай точно заданных измерений

Если хотя бы одно из измерений известно с нулевой погрешностью (то есть $\delta_1 \cdot \delta_2 = 0$), то решение может быть восстановлено точно. Покажем это. Пусть, например, значение на прямой $y = y_1$ известно точно. Так как

$$u(x,y) = u(x,y,f(\cdot)) = \int\limits_{\mathbb{R}} P(x-t,y) \cdot f(t)\,dt = P(x,y) * f(x),$$

то в образах Фурье

$$F[u(\cdot,\cdot,f(\cdot))](\xi) = e^{-y|\xi|}\cdot F[f(\cdot)](\xi).$$

Тогда значение на прямой $y = Y$ может быть найдено точно по формуле:

$$F[u(\cdot,Y,f(\cdot))](\xi) = e^{-(Y-y_1)|\xi|}\cdot F[u(\cdot,y_1,f(\cdot))](\xi).$$

Для случая $y = y_2$ получаем аналогичное выражение.

1.7 Линейная интерполяция

В численных методах для восстановления значения функции в той или иной метрике часто используют линейную интерполяцию. Рассмотрим аналогичный метод восстановления для решения задачи (P_1).

Пусть $z_i(\cdot)$, $i = 1,2$ — неточные измерения решения $u(\cdot,\cdot)$ задачи Дирихле при $y = y_i$, $i = 1, 2$, то есть

$$\|u(\cdot,y_i) - z_i(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \delta_i, \quad \delta_i > 0,\ i = 1,2; \quad 0 \leqslant y_1 < y_2.$$

Рассмотрим в качестве метода восстановления решения $u(\cdot,Y)$, $y_1 < Y < y_2$ следующий метод:

$$m(z_1(\cdot),z_2(\cdot))(\cdot) = \frac{Y-y_2}{y_1-y_2}z_1(\cdot) + \frac{Y-y_1}{y_2-y_1}z_2(\cdot).$$

Оценим его погрешность. По определению она является значением следующей экстремальной задачи:

$$\begin{cases} \left\|u(\cdot,Y) - \left(\dfrac{Y-y_2}{y_1-y_2}z_1(\cdot) + \dfrac{Y-y_1}{y_2-y_1}z_2(\cdot)\right)\right\|_{L_2(\mathbb{R})} \to \max \\ \|u(\cdot,y_i) - z_i(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \delta_i,\ \delta_i > 0, \\ z_i(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}), i = 1,2,\ f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}). \end{cases} \tag{21}$$

Очевидно, что квадрат значения данной задачи не меньше следующей величины:

$$\left\|u(\cdot,Y) - \left(\frac{Y-y_2}{y_1-y_2}u(\cdot,y_1) + \frac{Y-y_1}{y_2-y_1}u(\cdot,y_2)\right)\right\|^2_{L_2(\mathbb{R})}.$$

По теореме Планшереля данная величина равна

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{R}\left|\left(e^{-Y|\xi|}-\frac{Y-y_2}{y_1-y_2}e^{-y_1|\xi|}-\frac{Y-y_1}{y_2-y_1}e^{-y_2|\xi|}\right)F[f(\cdot)](\xi)\right|^2 d\xi.$$

Легко проверить, что функция

$$g(\xi)=e^{-Y|\xi|}-\frac{Y-y_2}{y_1-y_2}e^{-y_1|\xi|}-\frac{Y-y_1}{y_2-y_1}e^{-y_2|\xi|}$$

обращается в ноль только при $\xi=0$. Поэтому с помощью выбора $f(\cdot)$ можно сделать интеграл сколь угодно большим. Это означает, что погрешность метода линейной интерполяции равна бесконечности.

Глава 2. Оптимальное восстановление решения задачи Дирихле для полуплоскости по n $(n > 2)$ измерениям

В этой главе рассматривается задача об оптимальном восстановлении решения задачи Дирихле для полуплоскости на прямой, параллельной оси абсцисс по неточным его измерениям на n $(n > 2)$ прямых, также параллельных оси абсцисс.

2.1 Постановка задачи

Рассмотрим задачу Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta u\,(x, y) = 0,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y > 0 \\ u\,(x, 0) = f\,(x)\,,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f\,(\cdot) \in L_2\,(\mathbb{R})\,, \end{cases} \tag{P_1}$$

заключающуюся в нахождении гармонической функции $u(\cdot, \cdot)$ в верхней полуплоскости, удовлетворяющей заданному граничному условию, которое понимается так: $u(\cdot, y) \to f(\cdot)$ при $y \to 0$ в метрике $L_2(\mathbb{R})$ и, кроме того,

$$\sup_{y>0} \|u(\cdot, y)\|_{L_2(\mathbb{R})} < \infty.$$

В этом случае, как следует из [48], решение данной задачи единственно и задается интегралом Пуассона

$$u\,(x, y) = u\,(x, y, f(\cdot)) = \int_{\mathbb{R}} P\,(x - t, y) \cdot f\,(t)\,dt = P\,(x, y) * f\,(x)\,, \tag{22}$$

где $P\,(x, y) = \dfrac{1}{\pi} \dfrac{y}{x^2 + y^2}$ — ядро Пуассона.

Пусть приближенно известны значения гармонической функции на $n\,(n > 2)$ прямых $y_1, y_2, \ldots, y_n$ $(0 \leqslant y_1 < y_2 < \ldots < y_n)$. Требуется восстановить ее значение на прямой $y = Y$ $(Y \geqslant 0)$ наилучшим образом. Дадим точную постановку задачи.

Пусть $u(\cdot,\cdot)$ — решение задачи (P_1). Нам известны функции $z_i(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ такие, что

$$\|u(\cdot, y_i) - z_i(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \delta_i,\ \delta_i > 0,\ i = 1, \dots, n; \quad 0 \leqslant y_1 < y_2 < \dots < y_n.$$

По этой информации мы хотим восстановить наилучшим образом решение задачи Дирихле на прямой $y = Y$, $Y \geqslant 0$, в метрике $L_2(\mathbb{R})$. Обозначим

$$\bar{y} = (y_1(\cdot), \dots, y_n(\cdot)), \quad \bar{\delta} = (\delta_1(\cdot), \dots, \delta_n(\cdot)), \quad \bar{z} = (z_1(\cdot), \dots, z_n(\cdot)).$$

Аналогично случаю двух переменных, назовем методом восстановления любое отображение

$$m : (L_2(\mathbb{R}))^n = L_2(\mathbb{R}) \times \dots \times L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}),$$

при этом величину

$$e(m) = e\left(Y, \bar{y}, \bar{\delta}, m\right) = \sup_{\substack{f(\cdot), z_i(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}), \\ \|u(\cdot, y_i) - z_i(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \delta_i,\, i = 1, 2, \dots, n}} \|u(\cdot, Y, f(\cdot)) - m(\bar{z}(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R})}$$

назовем погрешностью восстановления метода m. Тот метод

$$\widehat{m} : (L_2(\mathbb{R}))^n \to L_2(\mathbb{R}),$$

на котором погрешность восстановления минимальна, будем называть оптимальным методом восстановления, а соответствующую погрешность

$$E\left(Y, \bar{y}, \bar{\delta}\right) = e\left(Y, \bar{y}, \bar{\delta}, \widehat{m}\right) = \inf_{m:\ (L_2(\mathbb{R}))^n \to L_2(\mathbb{R})} e\left(Y, \bar{y}, \bar{\delta}, m\right)$$

назовем погрешностью оптимального восстановления.

2.2 Формулировка основного результата

Построим на плоскости (y, t) множество

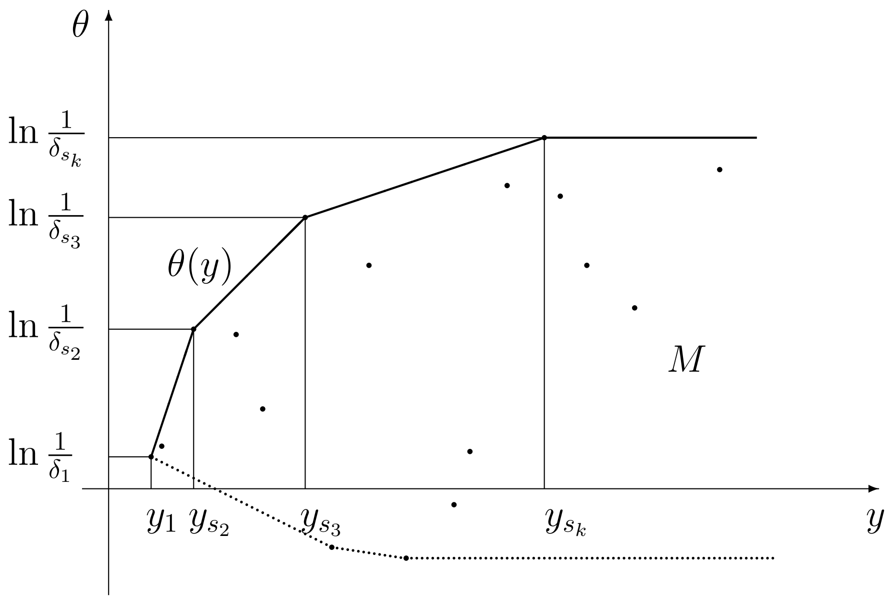
$$M = \mathrm{Co}\left\{\left(y_j, \ln\left(\frac{1}{\delta_j}\right)\right), 1 \leqslant j \leqslant n\right\} + \{(y, 0) \,|\, y \geqslant 0\},$$

(где Co A обозначает выпуклую оболочку множества A), которое представляет собой алгебраическую сумму выпуклого многогранника и положительной полупрямой.

Определим функцию $\theta(\cdot)$ на $[0, \infty)$ по формуле:

$$\theta(y) = \begin{cases} \max\{t \mid (y,t) \in M\}, \\ -\infty, \text{ если } (y,t) \notin M. \end{cases}$$

Ясно, что на $[y_1, +\infty)$ график функции $\theta(\cdot)$ — вогнутая ломаная. Обозначим точки ее излома через $y_{s_1} < y_{s_2} < \ldots < y_{s_k}$ (будем считать, что $y_{s_1} = y_1$).



Свяжем с числами $0 < y_{s_j} < Y < y_{s_{j+1}}, \quad \delta_{s_j} > 0,\ \delta_{s_{j+1}} > 0, 1 \leqslant j \leqslant k-1$, следующие величины:

$$\lambda_1 = \frac{y_{s_{j+1}} - Y}{y_{s_{j+1}} - y_{s_j}} \cdot \left(\frac{\delta_{s_j}}{\delta_{s_{j+1}}}\right)^{\dfrac{-2(Y - y_{s_j})}{y_{s_{j+1}} - y_{s_j}}}, \quad \lambda_2 = \frac{Y - y_{s_j}}{y_{s_{j+1}} - y_{s_j}} \cdot \left(\frac{\delta_{s_j}}{\delta_{s_{j+1}}}\right)^{\dfrac{2(y_{s_{j+1}} - Y)}{y_{s_{j+1}} - y_{s_j}}}.$$

Теорема 2. Для любого $Y \geqslant 0$ справедливо равенство:

$$E(Y, \bar{y}, \bar{\delta}) = e^{-\theta(Y)}.$$

1) Если $0 \leqslant Y < y_1$, то $E(Y, \bar{z}, \bar{\delta}) = +\infty$ и любой метод является оптимальным;

2) если $Y = y_{s_j},\ 1 \leqslant j \leqslant k$, то метод

$$\widehat{m}\left(\bar{z}(\cdot)\right)(\cdot) = z_{s_j}(\cdot),$$

является оптимальным;

3) если $k \geqslant 2$ и $t_{s_j} < Y < t_{s_{j+1}},\ 1 \leqslant j \leqslant k-1$, то для любых функций $a_i(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R})\,, i = 1, 2$, таких, что

$$e^{-Y|\xi|} = a_1(\xi)\, e^{-y_{s_j}|\xi|} + a_2(\xi)\, e^{-y_{s_{j+1}}|\xi|}, \quad \text{для п.в.}\, \xi \in \mathbb{R}$$

и

$$\left\| \frac{|a_1(\cdot)|^2}{\lambda_1} + \frac{|a_2(\cdot)|^2}{\lambda_2} \right\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leqslant 1,$$

линейный оператор

$$\widehat{m}_{a_1,a_2} : \left(L_2(\mathbb{R})\right)^n \to L_2(\mathbb{R})\,,$$

действующий в образах Фурье по правилу:

$$F[\widehat{m}_{a_1,a_2}\left(z_1(\cdot), z_2(\cdot)\right)](\xi) = a_1(\xi)\cdot F[z_1(\cdot)](\xi) + a_2(\xi)\cdot F[z_2(\cdot)](\xi) \quad \text{для п.в.}\, \xi \in \mathbb{R},$$

является оптимальным методом;

4) если $Y > y_{s_k}$, то метод

$$\widehat{m}\left(\bar{z}(\cdot)\right)(\cdot) = P(\cdot, Y - y_{s_k}) * z_{s_k}(\cdot).$$

является оптимальным.

Сделаем некоторые замечания по поводу сформулированной теоремы.

1) Если $0 \leqslant Y < y_1$, то $\theta(Y) = -\infty$. Значит $E(Y, \bar{z}, \bar{\delta}) = +\infty$, то есть невозможно восстановить значение функции до поступления какой-либо информации о ней.

2) Если точка восстановления совпадает с одной из точек излома графика $\theta(\cdot)$, то берем значение $z(\cdot)$ в этой точке.

3) Оптимальный метод линеен, сглаживает наблюдения и использует информацию не более, чем о двух измерениях до и после значения Y.

4) В случае, когда $Y > y_{s_k}$, оптимальный метод — решение задачи Дирихле с начальной функцией $z_{s_k}(\cdot)$.

Доказательство теоремы проведем в несколько этапов.

2.3 Оценка снизу погрешности оптимального восстановления

1. Рассмотрим задачу:

$$\|u(\cdot, Y, f(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R})} \to \max,$$
$$\|u(\cdot, y_i, f(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \delta_i,\ i = 1, \ldots, n, \quad f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}). \quad (23)$$

Покажем, что погрешность оптимального восстановления не меньше значения этой задачи, то есть

$$E\left(Y, \bar{y}, \bar{\delta}\right) \geqslant \sup_{\substack{f(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}),\\ \|u(\cdot,y_i,f(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R})}\leqslant\delta_i, i=1,\ldots,n}} \|u(\cdot, Y, f(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Пусть функция $f(\cdot)$ допустима в задаче (21). Тогда функция $-f(\cdot)$ — тоже допустима. Учитывая, что $u(\cdot, y, -f(\cdot)) = -u(\cdot, y, f(\cdot))$, для любого метода

$$m : (L_2(\mathbb{R}))^n \to L_2(\mathbb{R}),$$

будем иметь:

$$2\|u(\cdot, Y, f(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R})} = \|u(\cdot, Y, f(\cdot)) - m(\bar{0}) - (-u(\cdot, Y, f(\cdot)) - m(\bar{0}))\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant$$
$$\|u(\cdot, Y, f(\cdot)) - m(\bar{0})\|_{L_2(\mathbb{R})} + \|u(\cdot, Y, -f(\cdot)) - m(\bar{0})\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant$$
$$2 \sup_{f(\cdot)\in L_2(\mathbb{R})} \|u(\cdot, Y, f(\cdot)) - m(\bar{0})\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant$$
$$2 \sup_{\substack{f(\cdot), z_i(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}),\\ \|u(\cdot,y_i,f(\cdot))-z_i(\cdot)\|_{L_2}\leqslant\delta_i, i=1,\ldots,n}} \|u(\cdot, Y, f(\cdot)) - m(\bar{z}(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R})} =$$
$$2 \cdot e\left(Y, \bar{y}, \bar{\delta}, m\right).$$

Таким образом,

$$\|u(\cdot, Y, f(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant e\left(Y, \bar{y}, \bar{\delta}, m\right).$$

Переходя в этом неравенстве слева к верхней грани по всем допустимым функциям $f(\cdot)$ в задаче (21), а затем справа к нижней грани по всем методам m, получим:

$$\sup_{\substack{f(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}),\\ \|u(\cdot,y_i,f(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R})}\leqslant\delta_i, i=1,\ldots,n}} \|u(\cdot,Y,f(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R})}\leqslant E(Y,\bar{y},\bar{\delta}).$$

2. Найдем значение задачи (21). Перейдем к образам Фурье. Так как

$$F[u(\cdot)](\xi)=F[P(\cdot,\cdot)*f(\cdot)](\xi)=F[P(\cdot,\cdot)](\xi)\cdot F[f(\cdot)](\xi)=e^{-y|\xi|}\cdot F[f(\cdot)](\xi),$$

то по теореме Планшереля квадрат значения задачи (21) равен значению следующей задачи:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|}\cdot|F[f(\cdot)](\xi)|^2\,d\xi\to\max,$$
$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2y_i|\xi|}\cdot|F[f(\cdot)](\xi)|^2\,d\xi\leqslant\delta_i^2,\quad i=1,\ldots,n,\quad f(\cdot)\in L_2\left(\mathbb{R}\right). \quad (24)$$

Рассмотрим более общую задачу, а именно, задачу, где переменными являются положительные борелевские меры на прямой:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|}d\mu\left(\xi\right)\to\max,$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2y_i|\xi|}d\mu\left(\xi\right)\leqslant\delta_i^2,\quad i=1,\ldots,n,\quad d\mu\left(\cdot\right)\geqslant 0. \quad (25)$$

Это выпуклая задача. Сопоставим ей функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L}\left(d\mu(\cdot),\lambda\right)=-\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|}d\mu\left(\xi\right)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\cdot\left(\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2y_1|\xi|}d\mu\left(\xi\right)-\delta_i^2\right),$$

где $\lambda=(\lambda_1,\ \lambda_2,\ldots,\lambda_n)$ — набор множителей Лагранжа.

По теореме Каруша–Куна–Таккера, если существует допустимая мера $d\widehat{\mu}(\cdot)\geqslant 0$ и набор множителей Лагранжа $\widehat{\lambda}=(\widehat{\lambda}_1,\ \widehat{\lambda}_2,\ldots,\widehat{\lambda}_n)$ такие, что выполняются

1. $\widehat{\lambda}_i \geqslant 0,\ 1 \leqslant i \leqslant n$ (условие неотрицательности);

2. $\widehat{\lambda}_i \cdot \left(\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2y_i|\xi|} d\widehat{\mu}\,(\xi) - \delta_i^2 \right) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n$ (условия дополняющей нежесткости);

3. $\min\limits_{d\mu(\cdot)\geqslant 0} \mathcal{L}\left(d\mu(\cdot), \widehat{\lambda}\right) = \mathcal{L}\left(d\widehat{\mu}(\cdot), \widehat{\lambda}\right)$ (принцип минимума),

то $d\widehat{\mu}(\cdot)$ — решение задачи (23).

Перепишем функцию Лагранжа в виде:

$$\mathcal{L}\left(d\mu(\cdot), \lambda\right) = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(-e^{-2Y|\xi|} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^{-2y_i|\xi|} \right) d\mu\,(\xi) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_i^2 =$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|} \left(-1 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^{-2(y_i - Y)|\xi|} \right) d\mu\,(\xi) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_i^2 =$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|} h(\xi, \lambda)\, d\mu\,(\xi) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_i^2,$$

где

$$h(\xi, \lambda) = -1 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^{-2(y_i - Y)|\xi|}.$$

а) Пусть $Y \in [y_{s_j}, y_{s_{j+1}})$. Положим

$$d\widehat{\mu}(\xi) = C\delta(\xi - \xi_0),$$

где $\delta(\xi - \xi_0)$— дельта-функция в точке ξ_0, а величины C и ξ_0 выберем из условий:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2y_k|\xi|}\, d\widehat{\mu}(\xi) = \delta_k^2,\ k = s_j, s_{j+1}.$$

Получим следующую систему:

$$\begin{cases} Ce^{-2y_{s_j}|\xi_0|} = \delta_{s_j}^2 \\ Ce^{-2y_{s_{j+1}}|\xi_0|} = \delta_{s_{j+1}}^2. \end{cases}$$

Откуда находим, что:

$$\xi_0 = \frac{\ln \frac{1}{\delta_{s_{j+1}}} - \ln \frac{1}{\delta_{s_j}}}{y_{s_{j+1}} - y_{s_j}} > 0, \quad C = \delta_{s_j}^{\dfrac{2y_{s_{j+1}}}{y_{s_{j+1}} - y_{s_j}}} \cdot \delta_{s_{j+1}}^{-\dfrac{2y_{s_j}}{y_{s_{j+1}} - y_{s_j}}}.$$

Покажем, что мера $d\widehat{\mu}(\cdot)$ допустима в задаче (23). По определению ломаной $\theta(\cdot)$ все точки $\left(y_i,\ \ln\dfrac{1}{\delta_i}\right)$, $i=1,2,\ldots,n$, лежат не выше ее графика, а так как эта ломаная вогнута, то ее график лежит не выше прямой

$$p(t)=\ln\frac{1}{\delta_{s_j}}\cdot\frac{y_{sj+1}-y}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}+\ln\frac{1}{\delta_{s_{j+1}}}\cdot\frac{y-y_{sj}}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}},$$

соединяющей точки $\left(y_{s_j},\ \ln\dfrac{1}{\delta_{s_j}}\right)$ и $\left(y_{s_{j+1}},\ \ln\dfrac{1}{\delta_{s_{j+1}}}\right)$. Используя это свойство, получим:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2y_i|\xi|}\,d\widehat{\mu}(\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2y_i|\xi|}C\cdot\delta(\xi-\xi_0)=C\cdot e^{-2y_i\xi_0}=$$

$$\delta_{s_j}^{2\frac{y_{s_{j+1}}-y_i}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}}\cdot\delta_{s_{j+1}}^{2\frac{y_i-y_{s_j}}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}}=e^{-2p(y_i)}\leqslant e^{-2\ln\frac{1}{\delta_i}}=\delta_i^2,\ i=1,2,\ldots,n.$$

То есть мера

$$d\widehat{\mu}(\cdot)=\delta_{s_j}^{\frac{2y_{s_{j+1}}}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}}\cdot\delta_{s_{j+1}}^{-\frac{2y_{s_j}}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}}\cdot\delta(\xi-\xi_0)$$

допустима в задаче (23).

Положим $\widehat{\lambda}_k=0,\ k\neq s_j,s_{j+1}$, а коэффициенты $\widehat{\lambda}_{s_j}$ и $\widehat{\lambda}_{s_{j+1}}$ выберем так, чтобы

$$h(\xi_0,\widehat{\lambda})=0;\quad h'(\xi_0,\widehat{\lambda})=0.$$

Эти уравнения равносильны следующей системе

$$\begin{cases}\widehat{\lambda}_{s_j}e^{-2(y_{s_j}-Y)\xi_0}+\widehat{\lambda}_{s_{j+1}}e^{-2(y_{s_{j+1}}-Y)\xi_0}=1\\ \widehat{\lambda}_{s_j}(y_{s_j}-Y)e^{-2(y_{s_j}-Y)\xi_0}+\widehat{\lambda}_{s_{j+1}}(y_{s_{j+1}}-Y)e^{-2(y_{s_{j+1}}-Y)\xi_0}=0,\end{cases}$$

решением которой являются

$$\widehat{\lambda}_{s_j}=\frac{y_{s_{j+1}}-Y}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}e^{-2(Y-y_{s_j})\xi_0},\quad \widehat{\lambda}_{s_{j+1}}=\frac{Y-y_{s_j}}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}e^{2(y_{s_{j+1}}-Y)\xi_0}.$$

Проверим, что с так определенной мерой $d\widehat{\mu}(\cdot)$ и набором $\widehat{\lambda}$, условия теоремы Каруша–Куна–Таккера выполнены.

По построению $\widehat{\lambda}_i\geqslant 0,\ 1\leqslant i\leqslant n$. Условия дополняющей нежесткости также выполняются. Действительно, $\widehat{\lambda}_k=0,\ k\neq s_j,s_{j+1}$, а при $k=s_j,s_{j+1}$,

справедливы равенства
$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2y_k|\xi|}\, d\widehat{\mu}(\xi) = \delta_k^2.$$

Поскольку функция $h(\xi, \widehat{\lambda})$ выпукла, в точке ξ_0 обращается в ноль вместе со своей производной, то она всюду неотрицательна. Следовательно, величина
$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|} h(\xi, \widehat{\lambda})\, d\mu\,(\xi)$$
в определении функции Лагранжа неотрицательна для любых положительных мер, и обращается в ноль на мере $d\widehat{\mu}(\cdot)$ в силу ее определения. Следовательно, выполнено условие минимума для функции Лагранжа, и, значит, $d\widehat{\mu}(\cdot)$ (согласно теореме Каруша–Куна–Таккера) — решение задачи (23).

Подставляя эту меру в максимизируемый функционал в задаче (23), найдем ее значение:
$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|} d\widehat{\mu}\,(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|} C \cdot \delta(\xi - \xi_0) = C \cdot e^{-2Y\xi_0} =$$
$$= \delta_{s_j}^{\frac{2y_{s_{j+1}}}{y_{s_{j+1}} - y_{s_j}}} \cdot \delta_{s_{j+1}}^{-\frac{2y_{s_j}}{y_{s_{j+1}} - y_{s_j}}} \cdot e^{-2Y \frac{\ln\left(\delta_{s_j}/\delta_{s_{j+1}}\right)}{y_{s_{j+1}} - y_{s_j}}} =$$
$$\delta_{s_j}^{2\frac{y_{s_{j+1}} - Y}{y_{s_{j+1}} - y_{s_j}}} \cdot \delta_{s_{j+1}}^{2\frac{Y - y_{s_j}}{y_{s_{j+1}} - y_{s_j}}} = e^{-2p(Y)} = e^{-2\theta(Y)}.$$

Покажем теперь, что значение задачи (22), которое, очевидно, не больше значения задачи (23), на самом деле, совпадает с ее значением. Для этого построим последовательность допустимых в задаче (22) функций $\varphi_n(\cdot)$, на которых максимизируемый функционал сходится к значению (23):
$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|} \cdot |F[\varphi_n(\cdot)](\xi)|^2\, d\xi = e^{-2\theta(Y)}.$$
Для каждого натурального n рассмотрим функцию $\varphi_n(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, определенную условием:
$$F[\varphi_n(\cdot)](\xi) = \begin{cases} \sqrt{2\pi n}\, \delta_{s_j}^{\frac{y_{s_{j+1}}}{y_{s_{j+1}} - y_{s_j}}} \delta_{s_{j+1}}^{\frac{-y_{s_j}}{y_{s_{j+1}} - y_{s_j}}}, & \xi \in [\xi_0;\ \xi_0 + \frac{1}{n}]; \\ 0, & \xi \notin [\xi_0;\ \xi_0 + \frac{1}{n}]. \end{cases}$$

Эти функции допустимы в задаче (22), поскольку

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2y_i|\xi|}\cdot|F[\varphi_n(\cdot)](\xi)|^2\,d\xi = n\int\limits_{\xi_0}^{\xi_0+\frac{1}{n}} e^{-2y_i\xi}\delta_{s_j}^{\frac{y_{s_{j+1}}}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}}\delta_{s_{j+1}}^{\frac{-y_{s_j}}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}}\,d\xi \leqslant$$

$$e^{-2y_i\xi_0}\delta_{s_j}^{\frac{y_{s_{j+1}}}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}}\delta_{s_{j+1}}^{\frac{-y_{s_j}}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}} = \delta_{s_j}^{2\frac{y_{s_{j+1}}-y_i}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}}\cdot\delta_{s_{j+1}}^{2\frac{y_i-y_{s_j}}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}} =$$

$$e^{-2p(y_i)} \leqslant e^{-2\ln\frac{1}{\delta_i}} = \delta_i^2,\ i=1,2,\dots,n.$$

Значение максимизируемого функционала на этих функциях имеет вид

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|}|F[\varphi_n]|^2\,d\xi =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\xi_0}^{\xi_o+\frac{1}{n}} 2\pi n\, e^{-2Y\xi}\,\delta_{s_j}^{\frac{2y_{s_{j+1}}}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}}\delta_{s_{j+1}}^{\frac{-2y_{s_j}}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}}\,d\xi = n\,\delta_{s_j}^{\frac{2y_{s_{j+1}}}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}}\delta_{s_{j+1}}^{\frac{-2y_{s_j}}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}}\int\limits_{\xi_0}^{\xi_o+\frac{1}{n}} e^{-2Y\xi}\,d\xi =$$

$$-\frac{n}{2Y}\delta_{s_j}^{\frac{2y_{s_{j+1}}}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}}\delta_{s_{j+1}}^{\frac{-2y_{s_j}}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}}\,e^{-2Y\xi_0}\left(e^{-\frac{2Y}{n}}-1\right).$$

При n к бесконечности это выражение стремится к величине

$$\delta_{s_j}^{\frac{2y_{s_{j+1}}}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}}\delta_{s_{j+1}}^{\frac{-2y_{s_j}}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}}\,e^{-2Y\xi_0} = \delta_{s_j}^{2\frac{y_{s_{j+1}}-Y}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}}\cdot\delta_{s_{j+1}}^{2\frac{Y-y_{s_j}}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}} = e^{-2p(Y)} = e^{-2\theta(Y)}.$$

Тем самым доказано, что в рассматриваемом случае

$$E(Y,\bar{y},\bar{\delta}) \geqslant e^{-2\theta(Y)}.$$

b) Пусть $Y \geqslant y_{s_k}$. Пусть $d\widehat{\mu}(\cdot) = \delta_{s_k}^2\delta(\cdot)$, где $\delta(\cdot)$ есть дельта-функция в нуле. Проверим допустимость этой меры в задаче (23). На участке $[y_{s_k},\ +\infty)$ функция $\theta(\cdot)$ тождественно равна $\ln(1/\delta_{s_k})$. Поскольку $\ln(1/\delta_i) \leqslant \ln(1/\delta_{s_k}),\ 1\leqslant i\leqslant n$, то

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2y_i|\xi|}d\widehat{\mu}\,(\xi) = \delta_{s_k}^2 = e^{-2\ln(1/\delta_{s_k})} \leqslant e^{-2\ln(1/\delta_i)} = \delta_i^2,\ i=1,\dots,n,$$

и, значит, мера $d\widehat{\mu}(\cdot)$ допустима в задаче (23).

Положим $\widehat{\lambda}_{s_j} = 0$, $j \neq k$, а $\widehat{\lambda}_{s_k} = 1$. Очевидно, что условия (1) и (2) теоремы Каруша–Куна–Таккера выполняются. В данном случае функция Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L}\left(d\mu(\cdot), \widehat{\lambda}\right) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|} h(\xi)\, d\mu\,(\xi) - \delta_{s_k}^2,$$

где

$$h(\xi) = e^{-2(y_{s_k} - Y)|\xi|} - 1.$$

Поскольку $Y \geqslant y_{s_k}$, то $h(\cdot) \geqslant 0$, причем $h(0) = 0$. Мера $d\widehat{\mu}(\cdot)$ сосредоточена в точке $\xi = 0$, поэтому выполнятся условие (3) теоремы Каруша–Куна–Таккера.

Таким образом, мера $d\widehat{\mu}(\cdot)$ является решением задачи (23), и ее значение таково:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|} d\widehat{\mu}\,(\xi) = e^{-2\theta(Y)}.$$

Как и ранее, построим последовательность допустимых в задаче (22) функций $\varphi_n(\cdot)$, на которых значение максимизируемого функционала сходится к значению задачи (23). Рассмотрим функции $\varphi_n(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, определенные формулой

$$F[\varphi_n(\cdot)](\xi) = \begin{cases} \sqrt{2\pi n}\,\delta_{s_k}^2, & \xi \in [0;\ \frac{1}{n}]; \\ 0, & \xi \notin [0;\ \frac{1}{n}]. \end{cases}$$

Эти функции допустимы в задаче (22), поскольку

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2y_i|\xi|} \cdot |F[\varphi_n(\cdot)](\xi)|^2\, d\xi = n\int\limits_0^{1/n} e^{-2y_i\xi}\delta_{s_k}^2\, d\xi \leqslant$$

$$\delta_{s_k}^2 e^{-2\ln(1/\delta_{s_k})} \leqslant e^{-2\ln(1/\delta_i)} = \delta_i^2,\ i = 1, \ldots, n.$$

Значение максимизируемого функционала на данных функциях имеет вид

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|}|F[\varphi_n]|^2\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{1/n} 2\pi n\, e^{-2Y\xi}\,\delta_{s_k}^2\,d\xi =$$

$$n\,\delta_{s_k}^2\int\limits_0^{1/n} e^{-2Y\xi}\,d\xi = -\frac{n}{2Y}\delta_{s_k}^2\left(e^{-\frac{2Y}{n}}-1\right).$$

Устремляя n к бесконечности, получаем требуемый результат.

c) Пусть $Y < y_1$. Покажем, что в этом случае значение задачи (22) равно бесконечности. Пусть t_0 — некоторое положительное число. Найдется прямая $t = ay+b$, $a>0$, которая разделяет точку $(Y,-t_0)$ и множество M. Тогда $aY+b\leqslant -t_0$, а $ay_i+b\geqslant \ln(1/\delta_i)$, i=1,. . . ,n. Положим

$$d\widehat{\mu}(\xi) = C\delta(\xi-\xi_0),$$

где числа C ξ_0 выберем следующим образом: $C=e^{-2b}$, а $\xi_0 = a$. Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2y_i|\xi|}\,d\widehat{\mu}\,(\xi) = C\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2y_i|\xi|}\delta(\xi-\xi_0) =$$

$$Ce^{-2y_i|\xi_0|} = e^{-2(ay_i+b)} \leqslant e^{-2\ln(1/\delta_i)} = \delta_i^2,\quad i=1,\dots,n,$$

то есть мера $d\widehat{\mu}(\xi)$ допустима в задаче (23).

Так как

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|}d\widehat{\mu}\,(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|}C\delta(\xi-\xi_0) = Ce^{-2Y|\xi_0|} = e^{-2(aY+b)} \geqslant e^{2t_0},$$

и t_0 — произвольное положительное число, то значение задачи (23) равно $+\infty$. Тем самым, и значение задачи (22) равно $+\infty$.

Итак, показано, что во всех случаях справедлива следующая оценка снизу для погрешности оптимального восстановления:

$$E(Y,\bar{y},\bar{\delta}) \geqslant e^{-2\theta(Y)}.$$

2.4 Оценка сверху погрешности оптимального восстановления и оптимальные методы

Построим методы $\widehat{m}$, для которых погрешность восстановления совпадает с полученным значением нижней оценки погрешности оптимального восстановления, то есть

$$e\left(Y, \bar{y}, \bar{\delta}, \widehat{m}\right) = e^{-2\theta(Y)}.$$

Очевидно, что такие методы будут оптимальными.

a) Пусть $k \geqslant 2$ и $t_{s_j} < Y < t_{s_{j+1}},\ 1 \leqslant j \leqslant k-1$. Проводя выкладки, аналогичные случаю двух измерений (Глава 1), получим, что для любых функций $a_i(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}), i = 1, 2$, таких, что

$$e^{-Y|\xi|} = a_1(\xi) e^{-y_{s_j}|\xi|} + a_2(\xi) e^{-y_{s_{j+1}}|\xi|}, \quad \text{для п.в.}\, \xi \in \mathbb{R}$$

и

$$\left\| \frac{|a_1(\cdot)|^2}{\lambda_1} + \frac{|a_2(\cdot)|^2}{\lambda_2} \right\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leqslant 1,$$

линейный оператор

$$\widehat{m}_{a_1,a_2} : (L_2(\mathbb{R}))^n \to L_2(\mathbb{R}),$$

действующий в образах Фурье по правилу:

$$F[\widehat{m}_{a_1,a_2}(z_1(\cdot), z_2(\cdot))](\xi) = a_1(\xi) \cdot F[z_1(\cdot)](\xi) + a_2(\xi) \cdot F[z_2(\cdot)](\xi) \quad \text{для п.в.}\, \xi \in \mathbb{R},$$

является оптимальным методом.

b) Пусть $Y = y_{s_j},\ 1 \leqslant j \leqslant k$. Рассмотрим метод

$$\widehat{m}\left(\bar{z}(\cdot)\right)(\cdot) = z_{s_j}(\cdot).$$

Оценим его погрешность:

$$e\left(Y, \bar{y}, \bar{\delta}, \widehat{m}\right) = \sup_{\substack{f(\cdot), z_i(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}), \\ \|u(\cdot, y_i, f(\cdot)) - z_i(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \delta_i,\, i=1,2,\ldots,n}} \|u(\cdot, Y, f(\cdot)) - \widehat{m}\left(\bar{z}(\cdot)\right)\|_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$\sup_{\substack{f(\cdot), z_{s_j}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}), \\ \|u(\cdot, y_{s_j}, f(\cdot)) - z_{s_j}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \delta_{s_j}}} \left\|u(\cdot, y_{s_j}, f(\cdot)) - z_{s_j}(\cdot)\right\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \delta_{s_j} = e^{-\ln(1/\delta_{s_j})} = e^{-\theta(y_{s_j})}.$$

Следовательно, данный метод является оптимальным.

c) Пусть $Y > y_{s_k}$. Рассмотрим метод

$$\widehat{m}\left(\bar{z}(\cdot)\right)(\cdot) = P(\cdot, Y - y_{s_k}) * z_{s_k}(\cdot).$$

Его погрешность по определению равна

$$e\left(Y, \bar{y}, \bar{\delta}, \widehat{m}\right) = \sup_{\substack{f(\cdot), z_{s_k}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}), \\ \|u(\cdot, y_{s_k}, f(\cdot)) - z_{s_k}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \delta_{s_k}}} \|u(\cdot, Y, f(\cdot)) - \widehat{m}\left(\bar{z}(\cdot)\right)\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Оценим квадрат выражения под знаком супремума, переходя к образам Фурье. По теореме Планшереля имеем

$$\begin{gathered}
\|u(\cdot, Y, f(\cdot)) - \widehat{m}\left(\bar{z}(\cdot)\right)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \\
\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \left| e^{-Y|\xi|} \cdot F[f(\cdot)](\xi) - e^{-(Y - y_{s_k})|\xi|} \cdot F[z_{s_k}(\cdot)](\xi) \right|^2 d\xi = \\
\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2(Y - y_{s_k})|\xi|} \cdot \left| e^{-y_{s_k}|\xi|} \cdot F[f(\cdot)](\xi) - F[z_{s_k}(\cdot)](\xi) \right|^2 d\xi \leqslant \\
\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \left| e^{-y_{s_k}|\xi|} \cdot F[f(\cdot)](\xi) - F[z_{s_k}(\cdot)](\xi) \right|^2 d\xi = \\
\|u(\cdot, y_{s_k}, f(\cdot)) - z_{s_k}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \delta^2_{s_k} = e^{-2\theta(y_{s_k})}.
\end{gathered}$$

Отсюда следует нужная оценка для погрешности данного метода, и, следовательно, он является оптимальным.

Глава 3. Оптимальное восстановление решения задачи Дирихле для полуплоскости по неточно заданному преобразованию Фурье граничной функции в метрике L_∞

Эта глава посвящена проблеме наилучшего восстановления решения задачи Дирихле в метрике L_2 на прямой в верхней полуплоскости, параллельной оси абсцисс, по следующей информации о граничной функции: граничная функция принадлежит некоторому соболевскому пространству функций, а ее преобразования Фурье известно приближенное (в метрике L_∞) на конечном отрезке, симметричном относительно нуля. Построен оптимальный метод восстановления и найдено точное значение погрешности оптимального восстановления. Следует отметить, что оптимальный метод использует, вообще говоря, не всю доступную информацию, а ту, которую использует, определенным образом «сглаживает».

3.1 Постановка задачи

Рассмотрим задачу Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad y > 0, \\ u(\cdot, 0) = f(\cdot), \end{cases} \tag{P_1}$$

заключающуюся в нахождении гармонической функции $u(\cdot,\cdot)$ в верхней полуплоскости, для которой $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ является граничной функцией. Равенство $u(\cdot,0) = f(\cdot)$ понимается так: $u(\cdot,y) \to f(\cdot)$ при $y \to 0$ в метрике $L_2(\mathbb{R})$. Рассмотрим пространство функций

$$\mathcal{W}^r_{2\,\infty}(\mathbb{R}) = \{f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})\colon f^{(r)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}), F[f](\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R})\},$$

где $F[f](\cdot)$ — преобразование Фурье функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$. Обозначим через $W^r_{2\,\infty}(\mathbb{R})$ соболевский класс функций на прямой:

$$W^r_{2\,\infty}(\mathbb{R}) = \{f(\cdot) \in \mathcal{W}^r_{2\,\infty}(\mathbb{R}),\ \left\| f^{(r)}(\cdot) \right\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant 1\}.$$

Решением задачи Дирихле, как хорошо известно (см., например [48]), является интеграл Пуассона

$$u(x, y) = \int\limits_{\mathbb{R}} P(x - t, y)\, f(t)\, dt,$$

где $P(x, y) = \dfrac{y}{\pi(x^2 + y^2)}$. Ставится задача о наилучшем восстановлении функции $u(\cdot, Y)$ — решении задачи Дирихле на прямой $y = Y$, где $Y > 0$, по следующей информации о граничной функции $f(\cdot) \in W^r_{2\,\infty}(\mathbb{R})$: задано приближенно ее преобразование Фурье $F[f](\cdot)$ на отрезке $[-\sigma,\, \sigma]$, $\sigma > 0$, в метрике $L_\infty([-\sigma,\, \sigma])$. То есть известна функция $g(\cdot) \in L_\infty([-\sigma,\, \sigma])$ такая, что

$$\|F[f](\cdot) - g(\cdot)\|_{L_\infty([-\sigma, \sigma])} \leqslant \delta,$$

где $\delta > 0$.

Задача оптимального восстановления $u(\cdot, Y)$ понимается аналогично предыдущим случаям. Любое отображение

$$m\colon L_\infty[-\sigma,\, \sigma] \to L_2(\mathbb{R})$$

объявляется методом восстановления. Погрешность этого метода определяется величиной

$$e(Y, W^r_{2\infty}(\mathbb{R}), \delta, \sigma, m) = \sup_{\substack{f(\cdot) \in W^r_{2\,\infty}(\mathbb{R}),\ g(\cdot) \in L_\infty[-\sigma,\, \sigma] \\ \|F[f](\cdot) - g(\cdot)\|_{L_\infty[-\sigma,\, \sigma]} \leqslant \delta}} \|u(\cdot, Y) - m(g(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Нас интересует величина

$$E(Y, W^r_{2\,\infty}(\mathbb{R}), \delta, \sigma) = \inf_{m\colon L_\infty[-\sigma,\, \sigma] \to L_2(\mathbb{R})} e(Y, W^r_{2\infty}(\mathbb{R}), \delta, \sigma, m),$$

которая называется погрешностью оптимального восстановления и те методы $\widehat{m}$, на которых нижняя грань достигается:

$$E(Y, W^r_{2\,\infty}(\mathbb{R}), \delta, \sigma) = e(Y, W^r_{2\,\infty}(\mathbb{R}), \delta, \sigma, \widehat{m}).$$

Эти методы мы называем оптимальными методами восстановления.

Нашей целью является построение оптимального метода и нахождение соответствующей погрешности оптимального восстановления в поставленной задаче.

3.2 Формулировка основного результата

Теорема 3.
Пусть $\delta > 0$, $\sigma > 0$, $\widehat{\sigma} = \left(\dfrac{\pi(2r+1)}{\delta^2}\right)^{1/(2r+1)}$, $\sigma_0 = \min\{\sigma, \widehat{\sigma}\}$.
Метод $\widehat{m}\colon L_\infty[-\sigma, \sigma] \to L_2(\mathbb{R})$, действующий в образах Фурье по правилу:

$$F[\widehat{m}(g(\cdot))](\xi) = \begin{cases} e^{-Y|\xi|}\left(1 - e^{-2Y(\sigma_0 - |\xi|)}\,(\xi/\sigma_0)^{2r}\right) g(\xi), & |\xi| \leqslant \sigma_0, \\ 0, & |\xi| > \sigma_0, \end{cases}$$

является оптимальным.
Погрешность оптимального восстановления имеет вид:

$$E(Y, W^r_{2\,\infty}(\mathbb{R}), \delta, \sigma) = \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi Y}\,(1 - e^{-2Y\sigma_0}) + e^{-2Y\sigma_0}\left(\frac{1}{\sigma_0^{2r}} - \frac{\delta^2\,\sigma_0}{\pi(2r+1)}\right)}.$$

Доказательство проведем в несколько этапов.

3.3 Оценка снизу погрешности оптимального восстановления

Покажем, что погрешность оптимального восстановления $E(Y, W^r_{2\,\infty}(\mathbb{R}), \delta, \sigma)$ не меньше значения следующей экстремальной задачи:

$$\|u(\cdot, Y)\|_{L_2(\mathbb{R})} \to \max, \quad f(\cdot) \in W^r_{2\,\infty}(\mathbb{R}), \quad \|F[f](\cdot)\|_{L_\infty([-\sigma,\sigma])} \leqslant \delta, \qquad (26)$$

то есть верхней грани максимизируемого функционала при данных ограничениях.

Пусть $f(\cdot)$—допустимая функция в задаче (24). Заметим, что если $f(\cdot)$ допустима, то функция $-f(\cdot)$ тоже допустима и ей соответствует решение $-u(\cdot, Y)$. Тогда для любого метода m имеем:

$$\begin{aligned}
2\ \|u(\cdot,Y)\|_{L_2(\mathbb{R})} &= \|u(\cdot,Y)-m(0)-(-u(\cdot,Y)-m(0))\|_{L_2(\mathbb{R})} \\
&\leqslant \|u(\cdot,Y)-m(0)\|_{L_2(\mathbb{R})} + \|-u(\cdot,Y)-m(0)\|_{L_2(\mathbb{R})} \\
&\leqslant 2 \sup_{\substack{f(\cdot)\in W^r_{2\infty}(\mathbb{R}) \\ \|F[f](\cdot)\|_{L_\infty([-\sigma,\sigma])}\leqslant\delta}} \|u(\cdot,Y)-m(0)\|_{L_2(\mathbb{R})} \\
&\leqslant 2 \sup_{\substack{f(\cdot)\in W^r_{2\infty}(\mathbb{R}) \\ g(\cdot)\in L_\infty([-\sigma,\sigma]) \\ \|F[f](\cdot)-g(\cdot)\|_{L_\infty([-\sigma,\sigma])}\leqslant\delta}} \|u(\cdot,Y)-m(g(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R})} \\
&= 2\ e\left(Y, W^r_{2\infty}(\mathbb{R}), \delta, \sigma, m\right).
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|u(\cdot,Y)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant e(Y, W^r_{2\infty}(\mathbb{R}), \delta, \sigma, m).$$

Переходя слева к верхней грани по всем допустимым функциям $f(\cdot)$, а справа к нижней грани по всем методам $m\colon L_\infty([-\sigma,\sigma]) \to L_2(\mathbb{R})$, получим:

$$E\left(Y, W^r_{2\infty}(\mathbb{R}), \delta, \sigma\right) \geqslant \sup_{\substack{f(\cdot)\in W^r_{2\infty}(\mathbb{R}) \\ \|F[f](\cdot)\|_{L_\infty([-\sigma,\sigma])}\leqslant\delta}} \|u(\cdot,Y)\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

то есть

$$E(Y, W^r_{2\infty}(\mathbb{R}), \delta, \sigma) \geqslant S, \tag{27}$$

где S — значение задачи (24).

Определим величину S, найдя решение задачи (24). Так как $F[u(\cdot,Y)](\xi) = e^{-Y|\xi|} \cdot F[f](\xi)$ для всех $\xi \in \mathbb{R}$ (см., например, [48]), то, согласно теореме Планшереля, квадрат значения задачи (24) равен значению следующей задачи:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|}\left|F[f](\xi)\right|^2 d\xi \to \max,$$

$$\left|F[f](\xi)\right|^2 \leqslant \delta^2 \quad \text{для п. в. } \xi\in[-\sigma,\sigma], \qquad \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2r}\left|F[f](\xi)\right|^2 d\xi \leqslant 1. \tag{28}$$

Сопоставим данной задаче функцию Лагранжа:

$$L\left(f(\cdot),\lambda_1(\cdot),\lambda_2\right)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|}\cdot\left|F[f](\xi)\right|^2 d\xi$$

$$+\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\lambda_1(\xi)\left(\left|F[f](\xi)\right|^2-\delta^2\right)d\xi+\lambda_2\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\xi^{2r}\left|F[f](\xi)\right|^2 d\xi-1\right). \quad (29)$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1.

Если найдутся такие функция:

$$\widehat{\lambda}_1(\cdot)\in L_\infty([-\sigma,\sigma]),\ \widehat{\lambda}_1(\cdot)\geqslant\ 0,$$

число $\widehat{\lambda}_2\geqslant\ 0$ и допустимая в задаче (26) функция $\widehat{f}(\cdot)$, что

$$(a)\quad L\left(\widehat{f}(\cdot),\widehat{\lambda}_1(\cdot),\widehat{\lambda}_2\right)=\min_{f(\cdot)\in L_2(\mathbb{R})}L\left(f(\cdot),\widehat{\lambda}_1(\cdot),\widehat{\lambda}_2\right),$$

$$(b)\quad \int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\widehat{\lambda}_1(\xi)\left(\left|F[\widehat{f}](\xi)\right|^2-\delta^2\right)d\xi=0,$$

$$(c)\quad \widehat{\lambda}_2\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\xi^{2r}\left|F[\widehat{f}](\xi)\right|^2 d\xi-1\right)=0,$$

то $\widehat{f}(\cdot)$ — решение задачи (26).

Доказательство. Пусть $f(\cdot)$ — допустимая функция в (26). Тогда, учитывая это обстоятельство, а также неотрицательность $\lambda_1(\cdot)$ и λ_2 и условия $(a),(b),(c)$, получим:

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|}\cdot\left|F[f](\xi)\right|^2 d\xi\geqslant-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|}\cdot\left|F[f](\xi)\right|^2 d\xi+$$

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} \widehat{\lambda}_1(\xi) \left(|F[f](\xi)|^2 - \delta^2 \right) d\xi + \widehat{\lambda}_2 \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2r} \, |F[f](\,\xi)|^2 \, d\xi - 1 \right) =$$

$$L\left(f(\cdot), \widehat{\lambda}_1(\cdot), \widehat{\lambda}_2\right) \overset{\text{(a)}}{\geqslant} L\left(\widehat{f}(\cdot), \widehat{\lambda}_1(\cdot), \widehat{\lambda}_2\right) =$$

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|} \cdot \left|F[\widehat{f}](\xi)\right|^2 d\xi + \int_{-\sigma}^{\sigma} \widehat{\lambda}_1(\xi) \left(\left|F[\widehat{f}](\xi)\right|^2 - \delta^2 \right) d\xi$$

$$+ \widehat{\lambda}_2 \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2r} \left|F[\widehat{f}]\Big(\xi)\right|^2 d\xi - 1 \right) \overset{\text{(b),(c)}}{=} -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|} \cdot \left|F[\widehat{f}](\xi)\right|^2 d\xi,$$

т. е. $\widehat{f}(\cdot)$ — решение задачи (26).

Лемма 1 доказана.

Воспользуемся теперь этой леммой, чтобы найти решение задачи (26). Рассмотрим два случая.

1. Пусть $\sigma \geqslant \widehat{\sigma}$. Положим

$$\widehat{\lambda}_1(\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \left(e^{-2Y|\xi|} - e^{-2Y\widehat{\sigma}} \left(\dfrac{\xi}{\widehat{\sigma}} \right)^{2r} \right), & |\xi| \leqslant \widehat{\sigma}; \\ 0, & |\xi| \geqslant \widehat{\sigma}, \end{cases}$$

$$\widehat{\lambda}_2 = \frac{e^{-2Y\widehat{\sigma}}}{\widehat{\sigma}^{2r}},$$

функция $\widehat{f}(\cdot)$ такова, что ее преобразование Фурье имеет вид:

$$\left|F[\widehat{f}](\xi)\right| = \begin{cases} \delta, & |\xi| \leqslant \widehat{\sigma}, \\ 0, & |\xi| > \widehat{\sigma}. \end{cases}$$

Проверим выполнение условий Леммы 1. Очевидно, что $\widehat{\lambda}_1(\cdot) \geqslant 0$, $\widehat{\lambda}_2 > 0$. Простая проверка показывает, что функция $\widehat{f}(\cdot)$ допустима в задаче(26) и выполнены условия (b) и (c) Леммы 1. Проверим выполнение условия

(a). Для этого запишем функцию Лагранжа (27) в виде:

$$L\left(f(\cdot),\lambda_1(\cdot),\lambda_2\right)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}e^{-2Y|\xi|}\big|F[f](\xi)\big|^2\,d\xi+$$

$$\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\lambda_1(\xi)\left(\big|F[f](\xi)\big|^2-\delta^2\right)\,d\xi+\lambda_2\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\xi^{2r}\big|F[f](\xi)\big|^2\,d\xi-1\right)=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\left(-e^{-2Y|\xi|}+2\pi\lambda_1(\xi)\cdot\chi[-\sigma,\sigma](\xi)+\lambda_2\cdot\xi^{2r}\right)\big|F[f](\xi)\big|^2\,d\xi-$$

$$\left(\delta^2\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\lambda_1(\xi)\,d\xi+\lambda_2\right),$$

где $\chi[-\sigma,\sigma](\cdot)$ — характеристическая функция отрезка $[-\sigma,\sigma]$.

Оценим первое слагаемое полученного выражения с $\lambda_1(\cdot)=\widehat{\lambda}_1(\cdot)$ и $\lambda_2=\widehat{\lambda}_2$:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\left(-e^{-2Y|\xi|}+2\pi\widehat{\lambda}_1(\xi)\cdot\chi[-\sigma,\sigma](\xi)+\widehat{\lambda}_2\cdot\xi^{2r}\right)\big|F[f](\xi)\big|^2\,d\xi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}}\left(-e^{-2Y|\xi|}+2\pi\widehat{\lambda}_1(\xi)+\widehat{\lambda}_2\cdot\xi^{2r}\right)\big|F[f](\xi)\big|^2\,d\xi$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}\backslash[-\widehat{\sigma};\ \widehat{\sigma}]}\left(-e^{-2Y|\xi|}+\widehat{\lambda}_2\xi^{2r}\right)\big|F[f](\xi)\big|^2\,d\xi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}}\left(-e^{-2Y|\xi|}+2\pi\cdot\frac{1}{2\pi}\left(e^{-2Y|\xi|}-\widehat{\lambda}_2\cdot\xi^{2r}\right)+\widehat{\lambda}_2\cdot\xi^{2r}\right)\big|F[f](\xi)\big|^2\,d\xi$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}\backslash[-\widehat{\sigma};\ \widehat{\sigma}]}\left(-e^{-2Y|\xi|}+\widehat{\lambda}_2\xi^{2r}\right)\big|F[f](\xi)\big|^2\,d\xi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}\backslash[-\widehat{\sigma};\ \widehat{\sigma}]}e^{-2Y\widehat{\sigma}}\left(\left(\frac{\xi}{\widehat{\sigma}}\right)^{2r}-e^{-2Y(|\xi|-\widehat{\sigma})}\right)\big|F[f](\xi)\big|^2\,d\xi\geqslant 0.$$

Но, если $f(\cdot) = \widehat{f}(\cdot)$, то

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \left(-e^{-2Y|\xi|} + 2\pi\widehat{\lambda}_1(\xi)\cdot\chi[-\sigma,\sigma](\xi) + \widehat{\lambda}_2\cdot\xi^{2r}\right)\left|F[\widehat{f}\,](\xi)\right|^2 d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} \left(-e^{-2Y|\xi|} + 2\pi\cdot\frac{1}{2\pi}\left(e^{-2Y|\xi|} - \widehat{\lambda}_2\cdot\xi^{2r}\right) + \widehat{\lambda}_2\cdot\xi^{2r}\right)\delta^2\,d\xi = 0.$$

Следовательно, выполнено и условие (a) Леммы 1 и тем самым $\widehat{f}(\cdot)$ — решение задачи (26). Таким образом,

$$S^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|}\left|F[\widehat{f}\,](\xi)\right|^2 d\xi = -L(\widehat{f}(\cdot),\widehat{\lambda}_1(\cdot),\widehat{\lambda}_2) = \delta^2\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\widehat{\lambda}_1(\xi)\,d\xi + \widehat{\lambda}_2$$
$$= \frac{\delta^2}{2\pi Y}\left(1 - e^{-2Y\widehat{\sigma}}\right).$$

Вместе с формулой (25) это означает, что в рассматриваемом случае

$$E(Y, W^r_{2\infty}(\mathbb{R}), \delta, \sigma) \geqslant \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi Y}\left(1 - e^{-2Y\widehat{\sigma}}\right)}. \tag{30}$$

2. Пусть $\sigma < \widehat{\sigma}$. Положим

$$\widehat{\lambda}_1(\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\left(e^{-2Y|\xi|} - e^{-2Y\sigma}\left(\dfrac{\xi}{\sigma}\right)^{2r}\right), & |\xi| \leqslant \sigma; \\ 0, & |\xi| \geqslant \sigma, \end{cases}$$

$$\widehat{\lambda}_2 = \frac{e^{-2Y\sigma}}{\sigma^{2r}},$$

$$\left|F[\widehat{f}\,](\xi)]\right| = \begin{cases} \delta, & |\xi| < \sigma, \\ C\cdot\delta(\xi\pm\sigma), & |\xi| = \sigma, \\ 0, & |\xi| > \sigma, \end{cases}$$

где $C^2 = \dfrac{\pi}{\sigma^{2r}} - \dfrac{\delta^2\,\sigma}{2r+1}$, а $\delta(\cdot - \xi_0)$ — дельта-функция в точке ξ_0.
Как и в первом случае, проверим выполнение условий Леммы 1.

Очевидно, что $\widehat{\lambda}_1(\cdot) \geqslant 0$ и $\widehat{\lambda}_2 > 0$. Функция $f(\cdot)$ допустима в (26). Действительно, $\left|F[\widehat{f}\,](\xi)\right|^2 \leqslant \delta^2$ для п.в. $\xi \in [-\sigma, \sigma]$. Далее,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2r}\left|F[\widehat{f}\,](\xi)\right|^2 d\xi = \frac{1}{2\pi}\left(2\delta^2 \cdot \frac{\sigma^{2r+1}}{2r+1} + 2C^2 \cdot \sigma^{2r}\right)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left(2\delta^2 \cdot \frac{\sigma^{2r+1}}{2r+1} + 2\left(\frac{\pi}{\sigma^{2r}} - \frac{\delta^2\,\sigma}{2r+1}\right)\cdot \sigma^{2r}\right) = 1.$$

Очевидно, что условия (b) и (c) Леммы 1 выполняются. Проверим выполнение условия (a).

Как и раньше, преобразуем функцию Лагранжа к виду:

$$L\left(f(\cdot), \lambda_1(\cdot), \lambda_2\right)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\left(-e^{-2Y|\xi|} + 2\pi\lambda_1(\xi)\cdot\chi[-\sigma,\sigma](\xi) + \lambda_2\cdot\xi^{2r}\right)\left|F[f](\xi)\right|^2 d\xi -$$
$$\left(\delta^2\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\lambda_1(\xi)\,d\xi + \lambda_2\right).$$

Оценивая первое слагаемое полученного выражения с $\lambda_1(\cdot) = \widehat{\lambda}_1(\cdot)$ и $\lambda_2 = \widehat{\lambda}_2$, получим:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\left(-e^{-2Y|\xi|} + 2\pi\widehat{\lambda}_1(\xi)\cdot\chi[-\sigma,\sigma] + \widehat{\lambda}_2\cdot\xi^{2r}\right)\left|F[f](\xi)\right|^2 d\xi$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\xi|\geqslant\sigma} e^{-2Y\sigma}\left(\left(\frac{\xi}{\sigma}\right)^{2r} - e^{-2Y(|\xi|-\sigma)}\right)\left|F[f](\xi)\right|^2 d\xi \geqslant 0.$$

При этом значение этого слагаемого на функции $\widehat{f}(\cdot)$, как нетрудно проверить, равно нулю. Следовательно, $\widehat{f}(\cdot)$ — решение задачи (26) и значит,

$$S^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|}\left|F[f](\xi)\right|^2 d\xi = -L(\widehat{f}(\cdot), \widehat{\lambda}_1(\cdot), \widehat{\lambda}_2) = \delta^2\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\widehat{\lambda}_1(\xi)\,d\xi + \widehat{\lambda}_2$$
$$= \frac{\delta^2}{2\pi Y}\left(1 - e^{-2Y\sigma}\right) + e^{-2Y\sigma}\left(\frac{1}{\sigma^{2r}} - \frac{\sigma}{\widehat{\sigma}^{2r+1}}\right).$$

Отсюда и формулы (25) следует, что в рассматриваемом случае

$$E(Y, W^r_{2\infty}(\mathbb{R}), \delta, \sigma) \geqslant \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi Y}\left(1 - e^{-2Y\sigma}\right) + e^{-2Y\sigma}\left(\frac{1}{\sigma^{2r}} - \frac{\sigma}{\widehat{\sigma}^{2r+1}}\right)}. \qquad (31)$$

3.4 Оценка сверху погрешности оптимального восстановления и оптимальный метод

Покажем, что метод $\widehat{m}$ из формулировки теоремы является оптимальным. Снова рассмотрим два случая.

1. Пусть $\sigma \geqslant \widehat{\sigma}$. Выше для данного случая были определены функция $\widehat{\lambda}_1(\cdot)$ и число $\widehat{\lambda}_2$. Обозначим

$$a_1(\xi) = \begin{cases} 1 - e^{-2Y(\widehat{\sigma}-|\xi|)}\left(\dfrac{\xi}{\widehat{\sigma}}\right)^{2r}, & |\xi| \leqslant \widehat{\sigma}; \\ 0, & |\xi| \geqslant \widehat{\sigma}. \end{cases}$$

Погрешность метода $\widehat{m}$ равна, по определению, значению следующей экстремальной задачи:

$$\|u(\cdot, Y) - \widehat{m}(g)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \to \max,$$
$$\|F[f](\cdot) - g(\cdot)\|_{L_\infty([-\sigma,\sigma])} \leqslant \delta, \quad \left\|f^{(r)}(\cdot)\right\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant 1.$$

Применяя теорему Планшереля, получим, что квадрат значения этой задачи равен значению такой задачи:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} |e^{-Y|\xi|}\left(F\left[f\right](\xi) - a_1(\xi)g(\xi)\right)|^2\, d\xi \to \max,$$
$$\left|F\left[f\right](\xi) - g(\xi)\right|^2 \leqslant \delta^2 \quad \text{при п.в. } |\xi| \leqslant \sigma, \qquad \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2r}\left|F\left[f\right](\xi)\right|^2 d\xi \leqslant 1. \qquad (32)$$

Максимизируемый функционал в (30) представим в виде суммы двух интегралов:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|}\big|F[f](\xi)-a_1(\xi)g(\xi))\big|^2\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} e^{-2Y|\xi|}\big|F[f](\xi)-a_1(\xi)g(\xi)\big|^2\,d\xi$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\xi|>\widehat{\sigma}} e^{-2Y|\xi|}\big|F[f](\xi)\big|^2\,d\xi. \quad (33)$$

Оценим подынтегральное выражение в первом слагаемом, используя неравенство Коши-Буняковского:

$$e^{-2Y|\xi|}\,|(F[f](\xi)-a_1(\xi)g(\xi))|^2$$
$$= e^{-2Y|\xi|}\,|(1-a_1(\xi))\,F[f](\xi)+a_1(\xi)\,(F[f](\xi)-g(\xi))|^2$$
$$= e^{-2Y|\xi|}\left|\frac{1-a_1(\xi)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_2}\xi^r}\sqrt{\widehat{\lambda}_2}\xi^r F[f](\xi)+\frac{a_1(\xi)}{\sqrt{2\pi\,\widehat{\lambda}_1(\xi)}}\sqrt{2\pi\,\widehat{\lambda}_1(\xi)}(F[f](\xi)-g(\xi))\right|^2$$
$$\leqslant e^{-2Y|\xi|}\left(\frac{|1-a_1(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_2\xi^{2r}}+\frac{|a_1(\xi)|^2}{2\pi\,\widehat{\lambda}_1(\xi)}\right)$$
$$\left(\widehat{\lambda}_2\xi^{2r}\,|F[f](\xi)|^2+2\pi\,\widehat{\lambda}_1(\xi)\,|F[f](\xi)-g(\xi)|^2\right).$$

Непосредственный подсчет показывает, что

$$e^{-2Y|\xi|}\left(\frac{|1-a_1(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_2\xi^{2r}}+\frac{|a_1(\xi)|^2}{2\pi\,\widehat{\lambda}_1(\xi)}\right)=1.$$

Интегрируя полученное неравенство с учетом этого обстоятельства и учитывая ограничения в задаче (30), приходим к следующей оценке для интеграла слева в (31):

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|}\big|F[f](\xi)-a_1(\xi)g(\xi))\big|^2\,d\xi \leqslant \frac{\widehat{\lambda}_2}{2\pi}\int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} \xi^{2r}\big|F[f](\xi)\big|^2\,d\xi$$

$$+\int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} \widehat{\lambda}_1(\xi)\big|F[f](\xi)-g(\xi)\big|^2\,d\xi+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\xi|>\widehat{\sigma}} \frac{e^{-2Y|\xi|}}{\xi^{2r}}\,\xi^{2r}\big|F[f](\xi)\big|^2\,d\xi$$

$$\leqslant \frac{\widehat{\lambda}_2}{2\pi}\int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} \xi^{2r}\big|F[f](\xi)\big|^2\,d\xi+\delta^2\int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}}\widehat{\lambda}_1(\xi)\,d\xi+\frac{1}{2\pi}\frac{e^{-2Y\widehat{\sigma}}}{\widehat{\sigma}^{2r}}\int\limits_{|\xi|>\widehat{\sigma}} \xi^{2r}\big|F[f](\xi)\big|^2\,d\xi$$

$$=\frac{\widehat{\lambda}_2}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2r}\big|F[f](\xi)\big|^2\,d\xi+\delta^2\int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}}\widehat{\lambda}_1(\xi)\,d\xi$$

$$\leqslant \frac{e^{-2Y\widehat{\sigma}}}{\widehat{\sigma}^{2r}}+\frac{\delta^2}{2\pi}\int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}}\left(e^{-2Y|\xi|}-e^{-2Y\widehat{\sigma}}\left(\frac{\xi}{\widehat{\sigma}}\right)^{2r}\right)d\xi=\frac{\delta^2}{2\pi Y}\left(1-e^{-2Y\widehat{\sigma}}\right).$$

Следовательно,

$$e(Y,W^r_{2\infty}(\mathbb{R}),\delta,\sigma,\widehat{m})\leqslant\sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi Y}\left(1-e^{-2Y\widehat{\sigma}}\right)}.$$

Вместе с оценкой (25) это означает, что при $\sigma\geqslant\widehat{\sigma}$ метод $\widehat{m}$ из формулировки теоремы является оптимальным и справедливо нужное выражение для погрешности оптимального восстановления.

2. Пусть $\sigma<\widehat{\sigma}$. Обозначим

$$a_2(\xi)=\begin{cases}1-e^{-2Y(\sigma-|\xi|)}\left(\dfrac{\xi}{\sigma}\right)^{2r}, & |\xi|\leqslant\sigma;\\ 0, & |\xi|\geqslant\sigma.\end{cases}$$

Рассуждения совершенно аналогично предыдущему случаю, получаем, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|}\left|\left(F\left[f\right](\xi)-a_2(\xi)g(\xi)\right)\right|^2\,d\xi$$
$$\leqslant\frac{\delta^2}{2\pi Y}\left(1-e^{-2Y\sigma}\right)+e^{-2Y\sigma}\left(\frac{1}{\sigma^{2r}}-\frac{\sigma}{\widehat{\sigma}^{2r+1}}\right)$$

и поэтому

$$e(Y,W^r_{2\infty}(\mathbb{R}),\delta,\sigma,\widehat{m})\leqslant\sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi Y}\left(1-e^{-2Y\sigma}\right)+e^{-2Y\sigma}\left(\frac{1}{\sigma^{2r}}-\frac{\sigma}{\widehat{\sigma}^{2r+1}}\right)}.$$

Отсюда и (29) следует, что при $\sigma < \widehat{\sigma}$ метод $\widehat{m}$ из формулировки теоремы оптимален и справедлива нужное выражение для погрешности оптимального восстановления. Теорема доказана.

Глава 4. Оптимальное восстановление решения задачи Дирихле для полуплоскости по неточно заданному преобразованию Фурье граничной функции в метрике L_2

В этой главе рассматривается задача о наилучшем (оптимальном) восстановлении решения задачи Дирихле для верхней полуплоскости по точно или приближенно известному преобразованию Фурье граничной функции в метрике L_2. Построена серия оптимальных методов восстановления и вычислена соответствующая погрешность восстановления.

4.1 Постановка задачи

Пусть r — натуральное число. Обозначим через $W_2^r(\mathbb{R})$ соболевский класс функций на прямой:

$$W_2^r(\mathbb{R}) = \left\{ f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}) : f^{(r-1)}(\cdot) \in LAC(\mathbb{R}), \;\; \left\| f^{(r)}(\cdot) \right\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant 1 \right\},$$

где $LAC(\mathbb{R})$ обозначает множество функций на $\mathbb{R}$, абсолютно непрерывных на каждом конечном отрезке.

Пусть Δ — оператор Лапласа на плоскости $\mathbb{R}^2$ и $f(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{R})$. Рассмотрим задачу Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, \;\; (x,y) \in \mathbb{R}^2, \;\; y > 0, \\ u(\cdot, 0) = f(\cdot), \end{cases} \tag{P_1}$$

заключающуюся в нахождении гармонической функции $u(\cdot,\cdot)$ в верхней полуплоскости, для которой $f(\cdot)$ является граничной функцией. Последнее понимается так: $u(\cdot, y) \to f(\cdot)$ при $y \to 0$ в метрике $L_2(\mathbb{R})$.

Решением этой задачи, как хорошо известно (см., например [48]), является интеграл Пуассона

$$u(x,y) = \int_{\mathbb{R}} P(x-t, y) f(t)\, dt, \tag{34}$$

где $P(x,y)=\dfrac{y}{\pi(x^2+y^2)}$.

Пусть $Y>0$. Ставится задача о наилучшем восстановлении функции $u(\cdot,Y)$ — решении задачи Дирихле на прямой $y=Y$ — по следующей информации: на отрезке $[-\sigma,\sigma]$, $\sigma>0$ известно преобразование Фурье $F[f](\cdot)$ функции $f(\cdot)$ либо точно, либо приближенно в метрике $L_2([-\sigma,\sigma])$, т. е. известна функция $g(\cdot)\in L_2([-\sigma,\sigma])$ такая, что

$$\|F[f](\cdot)-g(\cdot)\|_{L_2([-\sigma,\sigma])}\leqslant\delta,$$

где $\delta\geqslant 0$ (случай $\delta=0$ соответствует точному значению $F[f](\cdot)$ на $[-\sigma,\sigma]$).

Задача оптимального восстановления $u(\cdot,Y)$ по указанной информации понимается следующим образом. Любое отображение

$$m\colon L_2\left([-\sigma,\sigma]\right)\to L_2(\mathbb{R})$$

называется методом восстановления, а величина

$$e(Y,W_2^r(\mathbb{R}),\delta,\sigma,m)=\sup_{\substack{f(\cdot)\in W_2^r(\mathbb{R}),\ g(\cdot)\in L_2([-\sigma,\sigma])\\ \|F[f](\cdot)-g(\cdot)\|_{L_2([-\sigma,\sigma])}\leqslant\delta}}\|u(\cdot,Y)-m(g(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}$$

— погрешностью метода m. Если $\delta=0$, то это записывается так:

$$e(Y,W_2^r(\mathbb{R}),0,\sigma,m)=\sup_{f(\cdot)\in W_2^r(\mathbb{R})}\|u(\cdot,Y)-m(F[f](\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Нас интересует метод, на котором погрешность принимает минимальное значение. Точнее говоря, нас интересует величина

$$E(Y,W_2^r(\mathbb{R}),\delta,\sigma)=\inf_{m\colon L_2([-\sigma,\sigma])\to L_2(\mathbb{R})}e(Y,W_2^r(\mathbb{R}),\delta,\sigma,m),$$

которая называется погрешностью оптимального восстановления и те методы $\widehat{m}$, на которых нижняя грань достигается, т. е.

$$E(Y,W_2^r(\mathbb{R}),\delta,\sigma)=e(Y,W_2^r(\mathbb{R},\delta,\sigma,\widehat{m}).$$

Такие методы мы называем оптимальными методами восстановления. Нашей целью является построение оптимальных методов и нахождение соответствующей погрешности оптимального восстановления.

4.2 Формулировка основного результата

Теорема 4.

1. Пусть $\delta > 0$. Тогда погрешность оптимального восстановления имеет вид

$$E(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma) = \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi} + \frac{e^{-2Y\sigma}}{\sigma^{2r}}}.$$

Для любой измеримой функции $a_1(\cdot)$ на $\mathbb{R}$ такой, что

$$\left| a_1(\xi) - \frac{1}{1 + e^{-2Y\sigma}(\xi/\sigma)^{2r}} \right|^2 \leqslant \frac{e^{-2Y\sigma}(\xi/\sigma)^{2r}}{(1 + e^{-2Y\sigma}(\xi/\sigma)^{2r})^2} (e^{2Y|\xi|}(1 + e^{-2Y\sigma}(\xi/\sigma)^{2r}) - 1),$$

$$\text{для п.в. } \xi \in [-\sigma, \sigma],$$

линейный непрерывный оператор $\Lambda_{a_1} \colon L_2([-\sigma, \sigma]) \to L_2(\mathbb{R})$, действующий в образах Фурье по правилу

$$F[\Lambda_{a_1} g(\cdot)](\xi) = a_1(\xi) g(\xi) e^{-Y|\xi|},$$

является оптимальным методом.

2. Если $\delta = 0$, то погрешность оптимального восстановления имеет вид:

$$E\left(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \sigma\right) = \frac{e^{-Y\sigma}}{\sigma^r}.$$

Для любой измеримой функции $a_2(\cdot)$ на $\mathbb{R}$ такой, что

$$|a_2(\xi) - 1| \leqslant (\xi/\sigma)^r \cdot e^{-Y\sigma}, \quad \text{для п.в. } \xi \in [-\sigma, \sigma],$$

линейный непрерывный оператор $\Lambda_{a_2} \colon L_2([-\sigma, \sigma]) \to L_2(\mathbb{R})$, действующий в образах Фурье по правилу

$$F[\Lambda_{a_2} g(\cdot)](\xi) = a_2(\xi) g(\xi) e^{-Y|\xi|},$$

является оптимальным методом.

Доказательство проведем в несколько этапов.

4.3 Оценка снизу погрешности оптимального восстановления

1. Пусть $u(\cdot,Y)$ — решение задачи Дирихле (P_1) и m — произвольный метод восстановления. Рассмотрим экстремальную задачу:

$$\|u(\cdot,Y)\|_{L_2(\mathbb{R})} \to \max, \quad f(\cdot)\in W_2^r(\mathbb{R}), \quad \|F[f](\cdot)\|_{L_2([-\sigma,\sigma])} \leqslant \delta. \tag{35}$$

Обозначим ее значение через S, то есть

$$S = \sup_{\substack{f(\cdot)\in W_2^r(\mathbb{R}) \\ \|F[f](\cdot)\|_{L_2([-\sigma,\sigma])}\leqslant\delta}} \|u(\cdot,Y)\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Покажем, что погрешность оптимального восстановления не меньше значения этой задачи: $E(Y,W_2^r(\mathbb{R}),\delta,\sigma) \geqslant S$.

Оценим сверху максимизируемый функционал в (33). Пусть $m(\cdot)$ — произвольный метод восстановления, а функция $f(\cdot)\in W_2^r(\mathbb{R})$ такова, что $\|F[f](\cdot)\|_{L_2([-\sigma,\sigma])} \leqslant \delta$. Тогда

$$\begin{aligned}
2\,\|u(\cdot,Y)\|_{L_2(\mathbb{R})} &= \|u(\cdot,Y)-m(0)-(-u(\cdot,Y)-m(0))\|_{L_2(\mathbb{R})} \\
&\leqslant \|u(\cdot,Y)-m(0)\|_{L_2(\mathbb{R})} + \|-u(\cdot,Y)-m(0)\|_{L_2(\mathbb{R})} \\
&\leqslant 2 \sup_{\substack{f(\cdot)\in W_2^r(\mathbb{R}) \\ \|F[f](\cdot)\|_{L_2([-\sigma,\sigma])}\leqslant\delta}} \|u(\cdot,Y)-m(0)\|_{L_2(\mathbb{R})} \\
&\leqslant 2 \sup_{\substack{f(\cdot)\in W_2^r(\mathbb{R}) \\ g(\cdot)\in L_2([-\sigma,\sigma]) \\ \|F[f](\cdot)-g(\cdot)\|_{L_2([-\sigma,\sigma])}\leqslant\delta}} \|u(\cdot,Y)-m(g(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R})} \\
&= 2\, e(Y,W_2^r(\mathbb{R}),\delta,\sigma,m).
\end{aligned}$$

Таким образом, $\|u(\cdot,Y)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant e(Y,W_2^r(\mathbb{R}),\delta,\sigma,m)$. Переходя слева к верхней грани по всем функциям $f(\cdot)\in W_2^r(\mathbb{R})$ таким, что $\|F[f](\cdot)\|_{L_2([-\sigma,\sigma])} \leqslant \delta$, а справа к нижней грани по всем методам $m\colon L_2([-\sigma,\sigma]) \to L_2(\mathbb{R})$, получим:

$$E(Y,W_2^r(\mathbb{R}),\delta,\sigma) \geqslant \sup_{\substack{f(\cdot)\in W_2^r(\mathbb{R}) \\ \|F[f](\cdot)\|_{L_2([-\sigma,\sigma])}\leqslant\delta}} \|u(\cdot,Y)\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

то есть

$$E(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma) \geqslant S.$$

2. Найдем значение величины S. Так как $F[u(\cdot, Y)](\cdot) = e^{-Y|\xi|} \cdot F[f](\cdot)$ (см., например, [48]), то, согласно теореме Планшереля, квадрат значения задачи (33) равен значению следующей задачи:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|} \cdot |F[f](\xi)|^2 d\xi \to \max,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{(-\sigma,\sigma)}(\xi)|F[f](\xi)|^2 d\xi \leqslant \frac{\delta^2}{2\pi}, \qquad \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2r}|F[f](\xi)|^2 d\xi \leqslant 1, \quad (36)$$

где $\chi_{(-\sigma,\sigma)}(\cdot)$ — характеристическая функция интервала $(-\sigma, \sigma)$. Нетрудно показать, что в этой задаче нет решения. Поэтому, заменяя формально $d\mu(\xi) = \frac{1}{2\pi}|F[f](\xi)|^2 d\xi$, рассмотрим более общую задачу на произвольных борелевских положительных мерах на прямой («расширение» задачи (34)):

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|} d\mu(\xi) \to \max, \quad \int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{(-\sigma,\sigma)}(\xi) d\mu(\xi) \leqslant \delta_1^2, \quad \int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2r} d\mu(\xi) \leqslant 1, \ \delta_1^2 = \frac{\delta^2}{2\pi}. \quad (37)$$

Рассмотрим вначале случай, когда информация задана неточно ($\delta > 0$). Найдем значение «расширенной» задачи (35). Будем решать равносильную задачу на минимум:

$$-\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|} d\mu(\xi) \to \min, \quad \int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{(-\sigma,\sigma)}(\xi) d\mu(\xi) \leqslant \delta_1^2, \quad \int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2r} d\mu(\xi) \leqslant 1. \quad (38)$$

Это выпуклая задача. Составим ее функцию Лагранжа:

$$L\left(d\mu(\xi), \lambda_1, \lambda_2\right) =$$

$$-\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|} d\mu(\xi) + \lambda_1 \cdot \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{(-\sigma,\sigma)}(\xi) d\mu(\xi) - \delta_1^2\right) + \lambda_2 \cdot \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2r} d\mu(\xi) - 1\right)$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \left(-e^{-2Y|\xi|} + \lambda_1 \chi_{(-\sigma;\sigma)}(\xi) + \lambda_2 \xi^{2r}\right) d\mu(\xi) - \left(\lambda_1 \delta_1^2 + \lambda_2\right).$$

По теореме Каруша-Куна-Такера (см., например, [33]), если существует допустимая мера $d\widehat{\mu}(\cdot)$ в (36) и коэффициенты $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2$ такие, что выполняются условия:

a) $\hat{\lambda}_1 \geqslant 0; \quad \hat{\lambda}_2 \geqslant 0;$

b) $\hat{\lambda}_1\left(\int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{(-\sigma,\sigma)}(\xi)\, d\mu(\xi) - \delta_1^2\right) = 0, \quad \hat{\lambda}_2\left(\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2r} d\mu(\xi) - 1\right) = 0;$

c) $\min\limits_{d\mu(\cdot)\geqslant 0} L\left(d\mu(\cdot), \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2\right) = L\left(d\widehat{\mu}(\cdot), \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2\right);$

то $d\widehat{\mu}(\cdot)$ — решение задачи (36).

Условие c) равносильно следующему неравенству:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left(-e^{-2Y|\xi|} + \hat{\lambda}_1 \chi_{(-\sigma;\sigma)}(\xi) + \hat{\lambda}_2 \xi^{2r}\right) d\mu(\xi) \geqslant \int\limits_{\mathbb{R}} \left(-e^{-2Y|\xi|} + \hat{\lambda}_1 \chi_{(-\sigma;\sigma)}(\xi) + \hat{\lambda}_2 \xi^{2r}\right) d\widehat{\mu}(\xi),$$

справедливому для любой меры $d\mu(\cdot) \geqslant 0$.

Рассмотрим подынтегральную функцию

$$q(\xi) = -e^{-2Y|\xi|} + \hat{\lambda}_1 \chi_{(-\sigma;\sigma)}(\xi) + \hat{\lambda}_2 \xi^{2r}.$$

Положим $\hat{\lambda}_1 = 1$ и $\hat{\lambda}_2 = \dfrac{e^{-2Y\sigma}}{\sigma^{2r}}$. При этом функция $q(\xi)$ примет вид:

$$q(\xi) = \begin{cases} 1 - e^{-2Y|\xi|} + e^{-2Y\sigma}\left(\dfrac{\xi}{\sigma}\right)^{2r}, & \text{если} \xi \in (-\sigma;\sigma); \\ e^{-2Y\sigma}\left(\left(\dfrac{\xi}{\sigma}\right)^{2r} - e^{-2Y(|\xi|-\sigma)}\right), & \text{если} \xi \notin (-\sigma;\sigma). \end{cases}$$

Легко проверить, что функция $q(\cdot)$ всюду неотрицательна и обращается в ноль в точках $\xi = 0$ и $\xi = \sigma$ (то есть $q(0) = 0$ и $q(\sigma) = 0$).

Пусть, далее, $d\widehat{\mu}(\xi) = A\delta(\xi) + B\delta(\xi - \sigma)$, где $\delta(\xi - \xi_0)$ — дельта функция в точке ξ_0. Из условий

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{(-\sigma,\sigma)}(\xi)\, d\hat{\mu}(\xi) = \delta_1^2, \quad \int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2r} d\hat{\mu}(\xi) = 1,$$

находим коэффициенты:

$$A = \delta_1^2 \text{ и } B = \frac{1}{\sigma^{2r}}.$$

Таким образом, с данными $\hat{\lambda}_1$, $\hat{\lambda}_2$ и $d\hat{\mu}(\cdot)$ условия $a), b)$ и $c)$ выполнены. Значит, $d\hat{\mu}(\xi) = \delta_1^2 \cdot \delta(\xi) + \dfrac{\delta(\xi - \sigma)}{\sigma^{2r}}$ — решение задач $(35), (36)$.
Подставляя найденное выражение для меры в максимизируемый функционал задачи (35), получим, что ее значение таково:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|} d\widehat{\mu}(\xi) = \delta_1^2 + \frac{e^{-2Y\sigma}}{\sigma^{2r}}. \tag{39}$$

Понятно, что значение задачи (34) не больше значения ее «расширения». Покажем, что на самом деле они совпадают. Рассмотрим семейство функций $f_n(\cdot)$, преобразование Фурье которых имеет вид:

$$F[f_n](\xi) = \begin{cases} K_1(n), & \text{если } \xi \in (0; 1/n); \\ K_2(n), & \text{если } \xi \in (\sigma; \sigma + 1/n)\,; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Положим

$$K_1^2(n) = 2\pi n \delta_1^2, \quad K_2^2(n) = 2\pi n \frac{1 - \delta_1^2/n^{2r}}{(\sigma + 1/n)^{2r}}.$$

Легко проверить, что функции $f_n(\cdot)$ допустимы в задаче (34).
Значение максимизируемого функционала в (34) на этих функциях таково:

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|} |F[f_n](\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{2\pi} \left(K_1^2(n) \int\limits_0^{1/n} e^{-2Y\xi} d\xi + K_2^2(n) \int\limits_{\sigma}^{\sigma+1/n} e^{-2Y\xi} d\xi \right)$$
$$\geqslant \frac{e^{-2Y/n}}{2\pi n} \left(K_1^2(n) + K_2^2(n) e^{-2Y\sigma} \right) = e^{-2Y/n} \left(\delta_1^2 + \frac{1 - \delta_1^2/n^{2r}}{(\sigma + 1/n)^{2r}}\, e^{-2Y\sigma} \right).$$

Ясно, что величина справа стремится к $\delta_1^2 + \dfrac{e^{-2Y\sigma}}{\sigma^{2r}}$ и, тем самым, значения задач (34) и (35) совпадают. Откуда следует, что в случае неточно заданной информации ($\delta > 0$), значение нижней границы погрешности оптимального восстановления таково

$$S = \sqrt{\delta_1^2 + \frac{e^{-2Y\sigma}}{\sigma^{2r}}}.$$

Таким образом, показано, что в случае $\delta > 0$ для погрешности оптимального восстановления справедлива следующая оценка снизу:

$$E(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma) \geqslant \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi} + \frac{e^{-2Y\sigma}}{\sigma^{2r}}}. \tag{40}$$

В случае, когда информация задана точно ($\delta = 0$), аналогичные выкладки приводят к следующему результату

$$S = \frac{e^{-Y\sigma}}{\sigma^r}$$

и тем самым,

$$E\left(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \sigma\right) \geqslant \frac{e^{-Y\sigma}}{\sigma^r}. \tag{41}$$

4.4 Оценка сверху погрешности оптимального восстановления и оптимальные методы

Будем искать оптимальные методы среди методов вида:

$$m\left(g(\cdot)\right) = \Lambda g(\cdot), \tag{42}$$

где $\Lambda : L_2\left([-\sigma, \sigma]\right) \to L_2\left(\mathbb{R}\right)$ — линейный непрерывный оператор, действие которого в образах Фурье имеет вид:

$$F[\Lambda g(\cdot)](\xi) = a(\xi) g(\xi) e^{-Y|\xi|}, \quad \text{где } a(\cdot) \in L_\infty([-\sigma, \sigma]). \tag{43}$$

1. Вначале исследуем случай неточно заданной информации ($\delta > 0$).

   Рассмотрим экстремальную задачу:

$$\|u(\cdot, Y) - m(g)\,(\cdot, Y)\|_{L_2(\mathbb{R})} \to \max,$$
$$\|F[f](\cdot) - g(\cdot)\|_{L_2([-\sigma,\sigma])} \leqslant \delta, \quad \left\|f^{(r)}(\cdot)\right\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant 1.$$

Применяя теорему Планшереля, получим, что квадрат значения этой задачи равен значению следующей задачи:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} |e^{-Y|\xi|}\left(F\left[f\right](\xi)-a(\xi)g(\xi)\right)|^2 d\xi \to \max,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} |F\left[f\right](\xi)-g(\xi)|^2 d\xi \leqslant \delta_1^2, \qquad \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2r}|F\left[f\right](\xi)|^2 d\xi \leqslant 1.$$

Пусть $\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0$ — некоторые положительные числа. Оценим сверху подынтегральное выражение в максимизируемом функционале, используя неравенство Коши-Буняковского:

$$\begin{aligned}
&\left|e^{-Y|\xi|}\left(F\left[f\right](\xi)-a(\xi)g(\xi)\right)\right|^2 \\
&= \left|e^{-Y|\xi|}\left(F\left[f\right](\xi)-a(\xi)F[f](\xi)+a(\xi)F[f](\xi)-a(\xi)g(\xi)\right)\right|^2 \\
&= e^{-2Y|\xi|}\left|\left(1-a(\xi)\right)F\left[f\right](\xi)+a(\xi)\left(F\left[f\right](\xi)-g(\xi)\right)\right|^2 \\
&= e^{-2Y|\xi|}\left|\frac{1-a(\xi)}{\sqrt{\lambda_2}\xi^r}\sqrt{\lambda_2}\xi^r F\left[f\right](\xi)+\frac{a(\xi)}{\sqrt{\lambda_1}}\sqrt{\lambda_1}\left(F\left[f\right](\xi)-g(\xi)\right)\right|^2 \\
&\leqslant e^{-2Y|\xi|}\left(\frac{|1-a(\xi)|^2}{\lambda_2\xi^{2r}}+\frac{|a(\xi)|^2}{\lambda_1}\right)\left(\lambda_2\xi^{2r}\left|F\left[f\right](\xi)\right|^2+\lambda_1\left|F\left[f\right](\xi)-g(\xi)\right|^2\right).
\end{aligned}$$

Обозначим

$$S(\xi) = e^{-2Y|\xi|}\left(\frac{|1-a(\xi)|^2}{\lambda_2\xi^{2r}}+\frac{|a(\xi)|^2}{\lambda_1}\right), \quad \xi\in[-\sigma,\sigma].$$

Пусть $A = \operatorname{ess\,sup}_{\xi\in[-\sigma,\sigma]} S(\xi)$. Тогда на отрезке $[-\sigma,\sigma]$ справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\left|e^{-Y|\xi|}\left(F\left[f\right](\xi)-a(\xi)g(\xi)\right)\right|^2 d\xi \\
&\leqslant \frac{A}{2\pi}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\left(\lambda_2\xi^{2r}|F\left[f\right](\xi)|^2+\lambda_1\left|F\left[f\right](\xi)-g(\xi)\right|^2\right)d\xi \\
&\leqslant \frac{\lambda_2 A}{2\pi}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\xi^{2r}\left|F\left[f\right](\xi)\right|^2 d\xi+\lambda_1 A\delta_1^2.
\end{aligned}$$

Если $\xi \in \mathbb{R}\setminus[-\sigma,\sigma]$, то $g(\xi)=0$, поэтому, учитывая, что $|\xi/\sigma|>1$, можем записать:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-\sigma,\sigma]}\left|e^{-Y|\xi|}\left(F\left[f\right](\xi)-a(\xi)g(\xi)\right)\right|^2 d\xi$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-\sigma,\sigma]}\left|e^{-Y|\xi|}F\left[f\right](\xi)\right|^2 d\xi \leqslant \frac{e^{-2Y\sigma}}{2\pi\sigma^{2r}}\int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-\sigma,\sigma]}\xi^{2r}\left|F\left[f\right](\xi)\right|^2 d\xi.$$

Складывая эти неравенства, получим оценку на всей оси:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\left|e^{-Y|\xi|}\left(F\left[f\right](\xi)-a(\xi)g(\xi)\right)\right|^2 d\xi$$
$$\leqslant \frac{\lambda_2 A}{2\pi}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\xi^{2r}\left|F\left[f\right](\xi)\right|^2 d\xi+\frac{e^{-2Y\sigma}}{2\pi\cdot\sigma^{2r}}\int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-\sigma,\sigma]}\xi^{2r}\left|F\left[f\right](\xi)\right|^2 d\xi+\lambda_1 A\delta_1^2.$$

Все вышесказанное справедливо для произвольных положительных чисел λ_1 и λ_2. Пусть теперь $\hat{\lambda}_1=1$, $\hat{\lambda}_2=\dfrac{e^{-2Y\sigma}}{\sigma^{2r}}$. Дополнительно потребуем, чтобы

$A=\operatorname{ess\,sup}_{\xi\in[-\sigma,\sigma]}S(\xi)\leqslant 1$. Тогда, учитывая что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\xi^{2r}|F\left[f\right](\xi)|^2 d\xi\leqslant 1,$$

получим:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\left|e^{-Y|\xi|}\left(F\left[f\right](\xi)-a(\xi)g(\xi)\right)\right|^2 d\xi$$
$$\leqslant \frac{\lambda_2}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\xi^{2r}\left|F\left[f\right](\xi)\right|^2 d\xi+\delta_1^2\leqslant\frac{e^{-2Y\sigma}}{\sigma^{2r}}+\delta_1^2. \quad (44)$$

Таким образом, если метод восстановления m удовлетворяет условиям (40) – (41), причем $A=\operatorname{ess\,sup}_{\xi\in[-\sigma,\sigma]}S(\xi)\leqslant 1$, то для его погрешности справедлива оценка

$$e(Y,W_2^r(\mathbb{R}),\delta,\sigma,m)\leqslant\sqrt{\delta_1^2+\frac{e^{-2Y\sigma}}{\sigma^{2r}}}. \quad (45)$$

Эта оценка совпадает со значением нижней границы погрешности оптимального восстановления (38).

2. Проанализируем, какое условие на функцию $a(\xi)$ накладывает требование $S(\xi) \leqslant 1, \quad \xi \in [-\sigma, \sigma]$. Имеем, выделяя полный квадрат,

$$S(\xi) = e^{-2Y|\xi|}\left(\frac{|1-a(\xi)|^2}{\lambda_2 \xi^{2r}} + \frac{|a(\xi)|^2}{\lambda_1}\right)$$
$$= e^{-2Y|\xi|}\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2 \xi^{2r}}{\lambda_1 \lambda_2 \xi^{2r}}\left|a(\xi) - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 \xi^{2r}}\right|^2 + \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 \xi^{2r}}\right) \leqslant 1.$$

Откуда

$$\left|a(\xi) - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2\, \xi^{2r}}\right|^2 \leqslant \frac{\lambda_1 \lambda_2 \xi^{2r}\left(\left(\lambda_1 + \lambda_2 \xi^{2r}\right) e^{2Y|\xi|} - 1\right)}{(\lambda_1 + \lambda_2 \xi^{2r})^2}.$$

Подставим выбранные нами ранее значения $\hat{\lambda}_1 = 1,\ \hat{\lambda}_2 = \dfrac{e^{-2Y\sigma}}{\sigma^{2r}}$:

$$\left|a(\xi) - \frac{1}{1 + (\xi/\sigma)^{2r} e^{-2Y\sigma}}\right|^2 \leqslant \frac{e^{-2Y\sigma}(\xi/\sigma)^{2r}\left(\left(1 + e^{-2Y\sigma}(\xi/\sigma)^{2r}\right) e^{2Y|\xi|} - 1\right)}{(1 + e^{-2Y\sigma}(\xi/\sigma)^{2r})^2}.$$

Следовательно, если функция $a(\cdot)$ удовлетворяет данному соотношению, то для его погрешности соответствующего метода восстановления справедлива оценка (43).

3. Теперь перейдем к случаю точно заданной информации ($\delta = 0$). Аналогично предыдущему случаю рассмотрим экстремальную задачу:

$$\|u(\cdot, Y) - m(g)(\cdot, Y)\|_{L_2(\mathbb{R})} \to \max,$$
$$\left\|f^{(r)}(\cdot)\right\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant 1, \quad F[f](\cdot) = g(\cdot) \text{ для п.в. } \xi \in [-\sigma, \sigma]\,.$$

Применяя теорему Планшереля, получим, что квадрат значения этой задачи равен значению следующей задачи:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} |e^{-Y|\xi|}\left(F\left[f\right](\xi) - a(\xi) g(\xi)\right)|^2 d\xi \to \max,$$
$$F[f](\cdot) = 0 \ \text{ для п.в. } \xi \in [-\sigma, \sigma]\,, \quad \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2r}\left|F\left[f\right](\xi)\right|^2 d\xi \leqslant 1. \quad (46)$$

Оценим максимизируемый функционал. Так как $g(\cdot) = 0,\ \xi \in \mathbb{R} \backslash [-\sigma, \sigma]$ и $Y > 0$, то:

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|} \left| F\left[f\right](\xi) - a(\xi) g(\xi) \right|^2$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} e^{-2Y|\xi|} \cdot |a(\xi) - 1|^2 \cdot \left| F\left[f\right](\xi) \right|^2 d\xi + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R} \backslash [-\sigma, \sigma]} e^{-2Y|\xi|} \cdot \left| F\left[f\right](\xi) \right|^2 d\xi$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} |a(\xi) - 1|^2 \cdot \left| F\left[f\right](\xi) \right|^2 d\xi + \frac{e^{-2Y\sigma}}{2\pi\sigma^{2r}} \int\limits_{\mathbb{R} \backslash [-\sigma, \sigma]} \xi^{2r} \cdot \left| F\left[f\right](\xi) \right|^2 d\xi.$$

Потребуем, чтобы функция $a(\cdot)$ удовлетворяла следующему условию:

$$|a(\xi) - 1|^2 \leqslant e^{-2Y\sigma} (\xi/\sigma)^{2r}, \quad \xi \in [-\sigma, \sigma].$$

Тогда неравенство примет вид:

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|} \left| F\left[f\right](\xi) - a(\xi) g(\xi) \right|^2 \leqslant \frac{e^{-2Y\sigma}}{2\pi\sigma^{2r}} \int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2r} \left| F\left[f\right](\xi) \right|^2 \leqslant \frac{e^{-2Y\sigma}}{\sigma^{2r}.}$$

Значит, если метод восстановления m удовлетворяет условиям $(40)-(41)$, причем $|a(\xi) - 1|^2 \leqslant e^{-2Y\sigma} (\xi/\sigma)^{2r}, \quad \xi \in [-\sigma, \sigma]$, то

$$e(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \sigma, m) \leqslant \frac{e^{-2Y\sigma}}{\sigma^{2r}}.$$

Полученная оценка снова совпадает со значением нижней границы погрешности оптимального восстановления (38).

В п.4.3 доказано, что для погрешности оптимального восстановления справедливы следующие оценки снизу:

$$E\left(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma\right) \geqslant \sqrt{\delta_1^2 + \frac{e^{-2Y\sigma}}{\sigma^{2r}}}, \text{ если } \delta > 0,$$
$$E\left(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \sigma\right) \geqslant \frac{e^{-Y\sigma}}{\sigma^r}, \text{ если } \delta = 0.$$

В п. 4.4 показано, что если метод имеет вид

$$m\left(g(\cdot)\right) = \Lambda g(\cdot),$$

где $\Lambda : L_2([-\sigma,\sigma]) \to L_2(\mathbb{R})$ — линейный непрерывный оператор, действие которого в образах Фурье имеет вид:

$$F[\Lambda g(\cdot)](\xi) = a(\xi)g(\xi)e^{-Y|\xi|},$$

и функция $a(\xi)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$a(\cdot) \in L_\infty([-\sigma,\sigma]),$$
$$\left|a(\xi) - \frac{1}{1+(\xi/\sigma)^{2r}\cdot e^{-2Y\sigma}}\right|^2 \leqslant \frac{e^{-2Y\sigma}(\xi/\sigma)^{2r}\left(\left(1+e^{-2Y\sigma}(\xi/\sigma)^{2r}\right)e^{2Y|\xi|}-1\right)}{(1+e^{-2Y\sigma}(\xi/\sigma)^{2r})^2}, \quad \text{если } \delta > 0;$$

$$|a(\xi)-1| \leqslant e^{-Y\sigma}(\xi/\sigma)^r, \quad \text{если } \delta = 0,$$

то погрешность соответствующего метода не превышает таких же величин и тем самым он оптимален.

4.5 Пример оптимального метода

1. Случай неточно заданной информации ($\delta > 0$).

   Можно показать, что метод вида (40) – (41),
   где $a(\xi) = \dfrac{1}{1+(\xi/\sigma)^{2r}\cdot e^{-2Y\sigma}}$, $\xi \in [-\sigma,\sigma]$ удовлетворяет всем требуемым условиям. Тогда

$$F[m(g)](\xi) = \begin{cases} \dfrac{e^{-Y|\xi|}\cdot g(\xi)}{1+(\xi/\sigma)\cdot e^{-2Y\sigma}}, & \text{если } \xi \in [-\sigma,\sigma]; \\ 0 & \text{если } \xi \notin [-\sigma,\sigma]. \end{cases}$$

   В этом случае восстановленное решение имеет вид:

$$u(x,Y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{e^{-Y|\xi|}\cdot g(\xi)}{1+(\xi/\sigma)^{2r}\cdot e^{-2Y\sigma}} e^{i\xi x}d\xi,$$

   где $C = \dfrac{1}{1+(\xi/\sigma)^{2r}\cdot e^{-2Y\sigma}}$ — сглаживающий множитель.

2. Случай точно заданной информации ($\delta = 0$).

Функция $a(\cdot) = 1,\ \xi \in [-\sigma, \sigma]$, очевидно, удовлетворяет всем требованиям теоремы. Тогда восстановленное решение имеет вид

$$u(x, Y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} e^{-Y|\xi|} g(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

Теорема полностью доказана.

Заключение

В диссертационной работе рассмотрены вопросы восстановления решения задачи Дирихле в верхней полуплоскости. Во всех случаях получены значения погрешностей оптимального восстановления. В каждом случае указан оптимальный метод. Все полученные в диссертации результаты являются новыми. Личный вклад автора заключается в доказательстве всех теорем, приведенных в работе. Достоверность результатов работы обеспечивается приведением полных математических доказательств.

В различных областях науки и прикладных задачах возникает необходимость восстанавливать функции или какие-либо функционалы и операторы от них по частотным характеристикам этих функций (например, в геофизике, астрономии, дистанционном зондировании Земли, спектральном анализе и т. п.). Как правило, это делается с помощью различных численных процедур. Полученные явные выражения для оптимальных методов восстановления решения задачи Дирихле могут служить основой для разработки эффективных численных алгоритмов.