

Оптимальное восстановление значения производной функции по приближенным значениям в двух точках.

Введение.

В рамках научного направления «Теория приближений и оптимальное восстановление» изучается столь актуальный в настоящее время вопрос о компактных способах компрессии информации о различных объектах. Одним из основателей данного направления является академик А.Н. Колмогоров и его ученик проф. В.М. Тихомиров. В 1936 г. А.Н. Колмогоров опубликовал работу по теории приближений, в которой по сути дела был поставлен вопрос о наилучшем средстве приближения на классе функций, где в качестве аппарата приближения рассматривались всевозможные n -мерные подпространства. В 1965 г. С.А. Смоляк, во многом исходя из идей А.Н. Колмогорова, поставил задачу приближения линейного функционала на некотором множестве, по информации о значениях других функционалов. Первые результаты по оптимальному восстановлению ограниченных аналитических функций были получены в начале семидесятых годов К.Ю. Осипенко. Затем в совместной работе с А.Г. Марчуком была обобщена постановка задачи оптимального восстановления на случай задания информации с погрешностью и был получен основной результат о существовании линейных оптимальных методов восстановления на выпуклых центрально-симметричных множествах.

На основании этого результата, в работе будет рассматриваться задача оптимального восстановления значения производной функции в точке по приближенным значениям функции в двух других различных точках, заданных с погрешностью, и минимизация погрешности метода оптимального восстановления.

Постановка задачи.

Пусть X - линейное пространство, Y - линейное нормированное пространство, X' - линейный функционал, I - линейный оператор

Рассматривается задача восстановления значения линейного функционала X' на некотором множестве $W \subseteq X$ по приближенным значениям линейного оператора $I : X \rightarrow Y$ (I называется информационным оператором). Будем считать, что $\forall x \in W$ известен $y \in Y$, такой что $\|Ix - y\|_Y \leq d$.

В качестве методов восстановления $m(y)$ рассмотрим функционалы $m : Y \rightarrow \mathfrak{R}$. Погрешность метода восстановления определим равенством

$$e(X', W, I, d, m) := \sup_{\substack{x \in W \\ y \in Y \\ \|Ix - y\|_Y \leq d}} |\langle X', x \rangle - m(y)|.$$

Тогда погрешностью оптимального метода восстановления назовем следующую величину

$$E(X', W, I, d) := \inf_{m: Y \rightarrow \mathfrak{R}} |\langle X', x \rangle - m(y)|.$$

Построение оптимального метода в общем виде.

Теорема 1.

Пусть W - центрально симметричное множество, для всех $x \in X$ имеет место следующее равенство:

$$\langle X', x \rangle = \langle \hat{m}, Ix \rangle + \langle r, x \rangle \quad (1),$$

где \hat{m} - линейный непрерывный функционал. Предположим, что существует $\hat{x} \in W$ такой, что выполнены следующие условия:

1. $\langle r, x \rangle = \sup_{x \in W} |\langle r, x \rangle|$.
2. $\langle \hat{m}, I\hat{x} \rangle = d \|\hat{m}\|_Y$.
3. $\|I\hat{x}\|_Y \leq d$.

Тогда \hat{m} - метод оптимального восстановления и $E(X', W, d, I) = \langle X', \hat{x} \rangle$.

Доказательство:

Приведем оценку для $\langle X', x \rangle$ сверху. Пусть $m: Y \rightarrow \mathfrak{R}$ - произвольный метод. Тогда:

$$\begin{aligned} 2|\langle X', \hat{x} \rangle| &= |\langle X', \hat{x} \rangle - m(0) + m(0) - \langle X', -\hat{x} \rangle| \leq \\ &\leq |\langle X', \hat{x} \rangle - m(0)| + |\langle X', -\hat{x} \rangle - m(0)| \end{aligned} \quad (2)$$

Поскольку $\|I\hat{x} - y\|_Y \leq d$ верно для $y = 0$, а пары $(\hat{x}, 0), (-\hat{x}, 0)$ лежат во множестве таких пар (x, y) , для которых $x \in W$, $y \in Y$ и $\|Ix - y\|_Y \leq d$, то (2) можно оценить сверху следующим образом:

$$|\langle X', \hat{x} \rangle - m(0)| + |\langle X', -\hat{x} \rangle - m(0)| \leq e(X', W, I, d, m) + e(X', W, I, d, m).$$

Итак, получили, что для всех $m: Y \rightarrow \mathfrak{R}$ верно $\langle X', \hat{x} \rangle \leq e(X', W, I, d, m)$ из (1) видно, что $\langle X', \hat{x} \rangle \geq 0$ при выполнении условий 1)-3). Беря нижнюю грань от правой части по всем $m: Y \rightarrow \mathfrak{R}$, получаем оценку сверху:

$$\langle X', \hat{x} \rangle \leq E(X', W, d, I).$$

Теперь приведем оценку для $\langle X', x \rangle$ снизу:

$$\begin{aligned} |\langle X', x \rangle - \langle \hat{m}, y \rangle| &= |\langle X', x \rangle - \langle \hat{m}, y \rangle - \langle \hat{m}, Ix \rangle + \langle \hat{m}, Ix \rangle| \leq \\ &\leq |\langle X', x \rangle - \langle \hat{m}, Ix \rangle| + |\langle \hat{m}, Ix - y \rangle| \leq |\langle r, x \rangle| + \|\hat{m}\| \|Ix - y\|_Y \leq \\ &\leq \sup |\langle r, x \rangle| + \|\hat{m}\| d = \langle r, \hat{x} \rangle + \langle \hat{m}, Ix \rangle = \langle X', \hat{x} \rangle - \langle \hat{m}, Ix \rangle + \langle \hat{m}, Ix \rangle = \langle X', \hat{x} \rangle, \end{aligned}$$

где $\langle X', \hat{x} \rangle$ - погрешность, а \hat{m} - оптимальный метод восстановления, т.к.

$$\langle X', \hat{x} \rangle \leq E(X', W, d, I) \leq e(X', W, I, d, \hat{m}) \leq \langle X', \hat{x} \rangle, \text{ что и требовалось доказать.}$$

Восстановление значения производной функции в нуле по значениям функции в других точках.

Рассмотрим соболевский класс функций $W^2_\infty([-1;1]) := \{x(\cdot) : \partial x'(\cdot) \in AC([-1,1]), \|x''(\cdot)\|_{L_\infty[-1,1]} \leq 1\}$, где $AC([-1,1])$ - пространство абсолютно непрерывных функций на отрезке $[-1,1]$.

Рассматривается задача восстановления значения $x'(0)$, где $x(\cdot) \in W^2_\infty([-1;1])$, по значениям функции $x(\cdot)$ в двух различных точках t_1, t_2 , заданных с погрешностями d_1, d_2 соответственно. Считаем, что для функции $x(\cdot) \in W^2_\infty([-1;1])$ известны точки y_1, y_2 , такие, что $|x(t_i) - y_i| \leq d_i$, $i = 1, 2$.

В принятых нами обозначениях задача приобретает вид:

$W = W^2_\infty([-1;1])$ - класс функций, $Y = \mathfrak{R}^2$ - линейное нормированное пространство с нормой

$$\|y\|_Y = \max \left\{ \frac{|y_1|}{d_1}, \frac{|y_2|}{d_2} \right\} \text{ и } d = 1, \|Ix - y\|_Y \leq 1, \text{ то это означает, что } \max \left\{ \frac{|x(t_1) - y_1|}{d_1}, \frac{|x(t_2) - y_2|}{d_2} \right\} \leq 1,$$

т.е. $|x(t_i) - y_i| \leq d_i$, $i = 1, 2$. Информационный оператор $I: W \rightarrow \mathfrak{R}^2$ и имеет вид $Ix(\cdot) = (x(t_1), x(t_2))$, где $t_1, t_2 \in [-1;1]$ и при этом $|x(t_i) - y_i| \leq d_i$, $i = 1, 2$.

Тогда
$$e(x'(0), W^2_\infty([-1,1]), d_1, d_2, t_1, t_2, m) := \sup_{\substack{x(\cdot) \in W^2_\infty([-1,1]) \\ y=(y_1, y_2) \\ \|x(t_i) - y_i\|_Y \leq d_i, i=1,2}} |x'(0) - m(y)|.$$

$$E(x', W^2_\infty([-1,1]), d_1, d_2, t_1, t_2, m) := \inf_{m: Y \rightarrow \mathbb{R}} e(x', \partial W^2_\infty([-1,1]), d_1, d_2, t_1, t_2, m).$$

Получим тождество (1) и найдем \hat{x} и \hat{m} , удовлетворяющие условиям 1) - 3) теоремы 1. Для этого запишем формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме:

$$x(t) = x(0) + x'(0)t + \int_0^t (t-t)x''(t)dt. \quad (3)$$

Подставим в формулу (3) значения t_1, t_2 :

$$x(t_1) = x(0) + x'(0)t_1 + \int_0^{t_1} (t_1-t)x''(t)dt,$$

$$x(t_2) = x(0) + x'(0)t_2 + \int_0^{t_2} (t_2-t)x''(t)dt.$$

Умножаем первое равенство на I_1 , а второе на I_2 и складываем полученные выражения, где I_1, I_2 некоторые числа.

После преобразований получаем:

$$I_1x(t_1) + I_2x(t_2) = x(0)(I_1 + I_2) + x'(0)(I_1t_1 + I_2t_2) + \int_0^{t_1} (t_1-t)I_1x''(t)dt + \int_0^{t_2} (t_2-t)I_2x''(t)dt. \quad (4)$$

Сравнивая полученное равенство с тождеством (1) из теоремы 1, получаем ограничения на скаляры I_1, I_2 :

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = 0, \\ I_1t_1 + I_2t_2 = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему относительно I_1, I_2 , получаем следующие значения:

$$\begin{cases} I_1 = -\frac{1}{t_2 - t_1}, \\ I_2 = \frac{1}{t_2 - t_1}. \end{cases}$$

Итак, равенство (4) с учетом значений для I_1, I_2 преобразуется к виду:

$$x'(0) = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} + \int_0^{t_1} \frac{t_1 - t}{t_2 - t_1} x''(t)dt - \int_0^{t_2} \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} x''(t)dt. \quad (5)$$

Рассмотрим следующие случаи:

A) $-1 \leq t_1 < 0 < t_2 \leq 1,$

B) $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1.$

Случай А):

$$-1 \leq t_1 < 0 < t_2 \leq 1.$$

Введем обозначение:

$$\int_{-1}^1 K(t)x''(t)dt = \int_0^{t_1} \frac{t_1-t}{t_2-t_1} x''(t)dt - \int_0^{t_2} \frac{t_2-t}{t_2-t_1} x''(t)dt.$$

$$\text{Тогда } K(t) = \begin{cases} 0, & -1 \leq t < t_1, \\ \frac{t-t_1}{t_2-t_1}, & t_1 \leq t < 0, \\ \frac{t-t_2}{t_2-t_1}, & 0 \leq t < t_2, \\ 0, & t_2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Найдем $\hat{x}(\cdot) \in W_\infty^2([-1,1])$, для которого выполнены условия 1) – 3) из теоремы 1.

$$1) \text{ Первое условие имеет вид: } \sup_{x(\cdot) \in W_\infty^2[-1,1]} \left| \int_{-1}^1 K(t)x''(t)dt \right| = \int_{-1}^1 K(t)\hat{x}''(t)dt$$

$$\sup_{x(\cdot) \in W_\infty^2[-1,1]} \left| \int_{-1}^1 K(t)\hat{x}''(t)dt \right| \leq \int_{-1}^1 |K(t)\hat{x}''(t)|dt \leq \int_{-1}^1 |K(t)|dt$$

$$\text{Равенство достигается при } \hat{x}''(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-1;0), \\ -1, & t \in [0;1]. \end{cases} \quad (6)$$

$$2) \text{ Второе условие имеет вид: } \langle \hat{m}, I\hat{x} \rangle = d \|\hat{m}\|_Y = 1 \cdot \|\hat{m}\|_Y.$$

$$\text{Из равенства (5) имеем: } \hat{m}(y) = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}, \text{ тогда } \|\hat{m}(y)\|_Y = \frac{d_2 + d_1}{t_2 - t_1}.$$

$$\text{Из этого следует, что } \hat{x}(t_1) = -d_1, \hat{x}(t_2) = d_2. \quad (7)$$

3) Условие, очевидно, выполняется, при выполнении равенств (7)

Из условий (6) и (7) имеем $\hat{x}(t)$ в виде:

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} \frac{(t-t_1)^2}{2} + a(t-t_1) - d_1, & t \in (-1;0) \\ -\frac{(t-t_2)^2}{2} + b(t-t_2) + d_2, & t \in (0;1) \end{cases} \quad (8)$$

Из условий непрерывности $\hat{x}(t)$ и $\hat{x}'(t)$ в нуле имеем следующие ограничения на a, b .

$$\begin{cases} \frac{t_1^2}{2} - at_1 - d_1 = -\frac{t_2^2}{2} - bt_2 + d_2 \\ -t_1 + a = t_2 + b \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение:

$$\begin{cases} a = \frac{t_1 + t_2}{2} + \frac{t_1 t_2 + d_1 + d_2}{t_2 - t_1} \\ b = -\frac{t_2 + t_1}{2} + \frac{t_1 t_2 + d_1 + d_2}{t_2 - t_1} \end{cases}$$

Теперь мы можем вычислить погрешность оптимального метода. Из тождества (1) и его интерпретации в нашей задаче (5), следует, что $\langle x', \hat{x} \rangle = \hat{x}'(0)$ - погрешность оптимального метода восстановления. Используя (6), получаем:

$$\hat{x}'(0) = \frac{t_2 - t_1}{2} + \frac{t_1 t_2 + d_1 + d_2}{t_2 - t_1}$$

Случай Б):

$$0 \leq t_1 < t_2 \leq 1.$$

Введем обозначение:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 K(t)x''(t)dt &= \int_0^{t_1} \frac{t_1 - t}{t_2 - t_1} x''(t)dt - \int_0^{t_2} \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} x''(t)dt = \\ &= \int_0^{t_1} \frac{t_1 - t}{t_2 - t_1} x''(t)dt - \int_0^{t_1} \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} x''(t)dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} x''(t)dt = \\ &= \int_0^{t_1} \frac{t_1 - t_2}{t_2 - t_1} x''(t)dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} x''(t)dt = - \int_0^{t_1} x''(t)dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} x''(t)dt. \end{aligned}$$

Тогда:

$$K(t) = \begin{cases} 0, -1 \leq t < 0, \\ -1, 0 \leq t < t_1, \\ \frac{t - t_2}{t_2 - t_1}, 0 \leq t < t_2, \\ 0, t_2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Необходимо выполнение условий 1) – 3) из теоремы 1.

1) Первое условие имеет вид: $\sup_{x(\cdot) \in W^2_\infty[-1,1]} \left| \int_{-1}^1 K(t)x''(t)dt \right| = \int_{-1}^1 K(t)\hat{x}''(t)dt$

$$\sup_{x(\cdot) \in W^2_\infty[-1,1]} \left| \int_{-1}^1 K(t)\hat{x}''(t)dt \right| \leq \int_{-1}^1 |K(t)\hat{x}''(t)|dt \leq \int_{-1}^1 |K(t)|dt$$

Равенство достигается на $\hat{x}''(t) = -1, t \in [-1,1]$.

2) Второе условие имеет вид: $\langle \hat{m}, I\hat{x} \rangle = d \|\hat{m}\|_Y = 1 \cdot \|\hat{m}\|_Y$.

Из равенства (5) имеем: $\hat{m}(y) = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}$, тогда $\|\hat{m}(y)\|_Y = \frac{d_2 + d_1}{t_2 - t_1}$.

Из этого следует, что $\hat{x}(t_1) = -d_1, \hat{x}(t_2) = d_2$. (9)

3) Условие, очевидно, выполняется, при выполнении равенств (9).

Теперь постоим $\hat{x}(t)$ из условий:

$$\begin{cases} \hat{x}''(t) = -1, \\ \hat{x}(t_1) = -d_1, \\ \hat{x}(t_2) = d_2. \end{cases}$$

$\hat{x}(t)$ имеет вид $\hat{x}(t) = at^2 + bt + c$.

Подставляя в условия, получаем систему:

$$\begin{cases} \hat{x}''(t) = 2a = -1, \\ \hat{x}(t_1) = at_1^2 + bt_1 + c = -d_1, \\ \hat{x}(t_2) = at_2^2 + bt_2 + c = d_2. \end{cases}$$

Система имеет единственное решение:

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{2}, \\ b = \frac{d_1 + d_2}{t_2 - t_1} + \frac{t_2 + t_1}{2}, \\ c = t_1^2 + \frac{t_1 t_2}{2} - \frac{(d_1 + d_2)t_1}{t_2 - t_1} - d_1. \end{cases}$$

Теперь мы можем вычислить погрешность оптимального метода. Из тождества (1) и его интерпретации в нашей задаче (5), следует, что $\langle x', \hat{x} \rangle = \hat{x}'(0)$ - погрешность оптимального метода восстановления. Используя (6), получаем:

$$\hat{x}'(0) = \frac{t_2 + t_1}{2} + \frac{d_1 + d_2}{t_2 - t_1}.$$

Минимизация значения погрешности оптимального восстановления.

Случай А):

$$-1 \leq t_1 < 0 < t_2 \leq 1.$$

Найдем значения t_1, t_2 минимизирующие погрешность оптимального метода.

Рассмотрим функцию: $F(t_1, t_2) = \frac{t_2 - t_1}{2} + \frac{t_1 t_2 + d_1 + d_2}{t_2 - t_1}$ и найдем, при каких значениях t_1, t_2 она достигает минимума.

Необходимое условие минимума:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t_1} = \frac{\partial F}{\partial t_2} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial t_1} = -\frac{1}{2} + \frac{t_2(t_2 - t_1) + t_1 t_2 + d_1 + d_2}{(t_2 - t_1)^2} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial t_2} = \frac{1}{2} + \frac{t_1(t_2 - t_1) - t_1 t_2 - d_1 - d_2}{(t_2 - t_1)^2} = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение:
$$\begin{cases} t_1 = -\sqrt{d_1 + d_2}, \\ t_2 = \sqrt{d_1 + d_2}. \end{cases}$$

Достаточное условие:

Проверим, выполнены ли следующие условия:

а) $\frac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_1} (-\sqrt{d_1 + d_2}, \sqrt{d_1 + d_2}) > 0,$

б) $\frac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_1} (-\sqrt{d_1 + d_2}, \sqrt{d_1 + d_2}) \frac{\partial^2 F}{\partial t_2 \partial t_2} (-\sqrt{d_1 + d_2}, \sqrt{d_1 + d_2}) - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_2} (-\sqrt{d_1 + d_2}, \sqrt{d_1 + d_2}) \right)^2 > 0.$

Для этого вычислим частные производные второго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_1} &= \frac{2(t_2^2 + d_1 + d_2)}{(t_2 - t_1)^3}, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_2} &= -\frac{2(t_1 t_2 + d_1 + d_2)}{(t_2 - t_1)^3}, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial t_2 \partial t_2} &= \frac{2(t_1^2 + d_1 + d_2)}{(t_2 - t_1)^3}. \end{aligned}$$

Теперь найдем значения $\frac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_1}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_2}$ и $\frac{\partial^2 F}{\partial t_2 \partial t_2}$ в точке $(-\sqrt{d_1 + d_2}, \sqrt{d_1 + d_2})$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_1} (-\sqrt{d_1 + d_2}, \sqrt{d_1 + d_2}) = \frac{t_2^2 + d_1 + d_2}{4t_2^3} = \frac{(\sqrt{d_1 + d_2})^2 + d_1 + d_2}{4(\sqrt{d_1 + d_2})^3} = \frac{2(\sqrt{d_1 + d_2})^2}{4(\sqrt{d_1 + d_2})^3} = \frac{1}{2\sqrt{d_1 + d_2}},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_2} (-\sqrt{d_1 + d_2}, \sqrt{d_1 + d_2}) = \frac{-t_2^2 + d_1 + d_2}{4t_1^3} = \frac{-(\sqrt{d_1 + d_2})^2 + d_1 + d_2}{4(-\sqrt{d_1 + d_2})^3} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t_2 \partial t_2} (-\sqrt{d_1 + d_2}, \sqrt{d_1 + d_2}) = \frac{t_2^2 + d_1 + d_2}{4t_2^3} = \frac{(\sqrt{d_1 + d_2})^2 + d_1 + d_2}{4(\sqrt{d_1 + d_2})^3} = \frac{2(\sqrt{d_1 + d_2})^2}{4(\sqrt{d_1 + d_2})^3} = \frac{1}{2\sqrt{d_1 + d_2}}.$$

Итак, очевидно что $\frac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_1} (-\sqrt{d_1 + d_2}, \sqrt{d_1 + d_2}) = \frac{1}{2\sqrt{d_1 + d_2}} > 0,$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t_2 \partial t_2} (-\sqrt{d_1 + d_2}, \sqrt{d_1 + d_2}) = \frac{1}{2\sqrt{d_1 + d_2}} > 0.$$

Теперь вычислим значение следующего выражения:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_1} (-\sqrt{d_1 + d_2}, \sqrt{d_1 + d_2}) \frac{\partial^2 F}{\partial t_2 \partial t_2} (-\sqrt{d_1 + d_2}, \sqrt{d_1 + d_2}) - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial t_1 t_2} (-\sqrt{d_1 + d_2}, \sqrt{d_1 + d_2}) \right)^2 = \\ & = \frac{1}{2\sqrt{d_1 + d_2}} \frac{1}{2\sqrt{d_1 + d_2}} - 0 = \frac{1}{4(d_1 + d_2)} > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, точка с координатами $(-\sqrt{d_1 + d_2}, \sqrt{d_1 + d_2})$ является точкой локального минимума функции $F(t_1, t_2) = \frac{t_2 - t_1}{2} + \frac{t_1 t_2 + d_1 + d_2}{t_2 - t_1}$, если она принадлежит области определения функции $F(t_1, t_2)$.

Область определения функции $F(t_1, t_2)$ представляет собой $[-1, 0] \times [0, 1] \setminus \{0\}$.

Пусть $(-\sqrt{d_1 + d_2}, \sqrt{d_1 + d_2}) \notin [-1, 0] \times [0, 1] \setminus \{0\}$, чтобы найти глобальный минимум, необходимо рассматривать поведение функции на границе.

Рассмотрим случаи:

а) $t_1 = 0$.

$$F(0, t_2) = \frac{t_2}{2} + \frac{d_1 + d_2}{t_2}.$$

Будем минимизировать эту функцию по t_2 :

$$\frac{\partial F}{\partial t_2} = \frac{1}{2} - \frac{d_1 + d_2}{t_2^2} = 0,$$

$$\frac{t_2^2 - 2(d_1 + d_2)}{2t_2^2} = 0,$$

$t_2 = \sqrt{2(d_1 + d_2)}$, но т.к. $\sqrt{d_1 + d_2} > 1$, то $\sqrt{2(d_1 + d_2)} > 1$, а значит, минимальное значение функция

$$F(0, t_2) = \frac{t_2}{2} + \frac{d_1 + d_2}{t_2} \text{ принимает в точке } (0, 1).$$

$$F(0, 1) = \frac{1}{2} + d_1 + d_2.$$

b) $t_2 = 0$, аналогично получаем:

$$F(t_1, 0) = -\frac{t_1}{2} - \frac{d_1 + d_2}{t_1},$$

$$\frac{\partial F}{\partial t_1} = -\frac{1}{2} + \frac{d_1 + d_2}{t_1^2} = 0,$$

$$\frac{t_1^2 - 2(d_1 + d_2)}{2t_1^2} = 0,$$

$t_1 = -\sqrt{2(d_1 + d_2)}$, но т.к. $-\sqrt{d_1 + d_2} < -1$, то $-\sqrt{2(d_1 + d_2)} < -1$, а значит, минимальное значение функция $F(t_1, 0) = -\frac{t_1}{2} - \frac{d_1 + d_2}{t_1}$ принимает в точке $(-1, 0)$.

$$F(-1, 0) = \frac{1}{2} + d_1 + d_2.$$

c) $t_2 = 1$,

$$F(t_1, 1) = \frac{1-t_1}{2} + \frac{t_1 + d_1 + d_2}{1-t_1},$$

$$\frac{\partial F}{\partial t_1} = -\frac{1}{2} + \frac{1-t_1+t_1+d_1+d_2}{(1-t_1)^2} = 0,$$

$$\frac{t_1^2 - 2t_1 - 1 - 2(d_1 + d_2)}{2(1-t_1)^2} = 0,$$

$t_1 = 1 - \sqrt{2 + 2(d_1 + d_2)}$, но т.к. $-\sqrt{d_1 + d_2} < -1$, то $1 - \sqrt{2 + 2(d_1 + d_2)} < -1$, а значит, минимальное значение функция $F(t_1, 1) = \frac{1-t_1}{2} + \frac{t_1 + d_1 + d_2}{1-t_1}$ принимает в точке $(-1, 1)$.

$$F(-1, 1) = \frac{1}{2} + \frac{d_1 + d_2}{2}.$$

Итак, если $(-\sqrt{d_1 + d_2}, \sqrt{d_1 + d_2}) \notin [-1, 0] \times [0, 1] \setminus \{0\}$, то минимальное значение достигается на границе:

$$F(0, 1) = \frac{1}{2} + d_1 + d_2,$$

$$F(-1, 0) = \frac{1}{2} + d_1 + d_2,$$

$$F(-1, 1) = \frac{1}{2} + \frac{d_1 + d_2}{2},$$

Очевидно, $F(0, 1) = F(-1, 0) > F(-1, 1)$, значит, минимальное значение на границе достигается в точке $(-1, 1)$ и погрешность оптимального метода восстановления для оптимальных узлов \hat{t}_1, \hat{t}_2 равна

$$\hat{x}'(0) = \frac{1}{2} + \frac{d_1 + d_2}{2}.$$

Случай Б):

$$0 \leq t_1 < t_2 \leq 1.$$

Найдем значения t_1, t_2 , минимизирующие погрешность оптимального метода.

Рассмотрим функцию: $F(t_1, t_2) = \frac{t_2 + t_1}{2} + \frac{d_1 + d_2}{t_2 - t_1}$ и найдем, при каких значениях t_1, t_2 она достигает минимума.

Необходимое условие:

$$\frac{\partial F}{\partial t_1} = \frac{\partial F}{\partial t_2} = 0.$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t_1} = \frac{1}{2} + \frac{d_1 + d_2}{(t_2 - t_1)^2} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial t_2} = \frac{1}{2} - \frac{d_1 + d_2}{(t_2 - t_1)^2} = 0. \end{cases} \Rightarrow \text{Система несовместна.}$$

Функция не имеет минимума, т.к. не выполняется необходимое условие минимума, следовательно, остается рассмотреть значения функции $F(t_1, t_2)$ на границе области определения. Область определения функции $F(t_1, t_2)$ задается следующей системой:

$$D(F) = \begin{cases} 0 \leq t_1 \leq 1, \\ 0 \leq t_2 \leq 1, \\ t_1 < t_2. \end{cases}$$

а) Пусть $t_1 = 0$,

$$F(0, t_2) = \frac{t_2}{2} + \frac{d_1 + d_2}{t_2}.$$

Будем минимизировать эту функцию по t_2 :

$$\frac{\partial F}{\partial t_2} = \frac{1}{2} - \frac{d_1 + d_2}{t_2^2} = 0,$$

$$\frac{t_2^2 - 2(d_1 + d_2)}{2t_2^2} = 0,$$

$$t_2 = \sqrt{2(d_1 + d_2)} \text{ и при } \sqrt{2(d_1 + d_2)} < 1 \text{ минимальное значение функция } F(0, t_2) = \frac{t_2}{2} + \frac{d_1 + d_2}{t_2}$$

принимает в точке $(0, \sqrt{2(d_1 + d_2)})$.

Если $\sqrt{2(d_1 + d_2)} > 1$, а значит, минимальное значение функция $F(0, t_2) = \frac{t_2}{2} + \frac{d_1 + d_2}{t_2}$ принимает в точке $(0, 1)$.

б) $t_2 = 1$,

$$F(t_1, 1) = \frac{1 + t_1}{2} + \frac{d_1 + d_2}{1 - t_1},$$

$$\frac{\partial F}{\partial t_1} = \frac{1}{2} + \frac{d_1 + d_2}{(1 - t_1)^2} = 0,$$

$$\frac{(1 - t_1)^2 + 2(d_1 + d_2)}{2(1 - t_1)^2} = 0.$$

Не имеет решений.

Итак, при $\sqrt{2(d_1 + d_2)} < 1$ минимальное значение функция $F(t_1, t_2) = \frac{t_2 + t_1}{2} + \frac{d_1 + d_2}{t_2 - t_1}$ принимает в точке $(0, \sqrt{2(d_1 + d_2)})$, а при $\sqrt{2(d_1 + d_2)} > 1$ минимальное значение функция $F(t_1, t_2) = \frac{t_2 + t_1}{2} + \frac{d_1 + d_2}{t_2 - t_1}$ принимает в точке $(0, 1)$.

Итог:

Решая задачу восстановления значения производной функции в нуле по двум различным значениям функции в других точках, получили, что:

Оптимальный метод восстановления $\hat{m}(y) = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}$, а погрешность оптимального метода

восстановления:

А) $-1 \leq t_1 < 0 < t_2 \leq 1$,

$E(x', W, t_1, t_2, d_1, d_2, m) = \sqrt{d_1 + d_2}$, достигается в точке $(-\sqrt{d_1 + d_2}, \sqrt{d_1 + d_2})$, если $\sqrt{d_1 + d_2} \leq 1$,

$E(x', W, t_1, t_2, d_1, d_2, m) = \frac{1}{2} + \frac{d_1 + d_2}{2}$, достигается в точке $(-1, 1)$, если $\sqrt{d_1 + d_2} > 1$.

Б) $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$,

$E(x', W, t_1, t_2, d_1, d_2, m) = \sqrt{2(d_1 + d_2)}$, достигается в точке $(0, \sqrt{2(d_1 + d_2)})$, если $\sqrt{2(d_1 + d_2)} < 1$,

$E(x', W, t_1, t_2, d_1, d_2, m) = \frac{1}{2} + d_1 + d_2$, достигается в точке $(0, 1)$, если $\sqrt{2(d_1 + d_2)} > 1$.