Е. Р. Аваков, Г. Г. Магарил-Ильяев, Релаксация и управляемость в задачах оптимального управления, *Матем. сб.*, 2017, том 208, номер 5, 3–37

DOI: http://dx.doi.org/10.4213/sm8721

УДК 517.977.52

Е. Р. Аваков, Г. Г. Магарил-Ильяев

Релаксация и управляемость в задачах оптимального управления

Исследуются взаимосвязи необходимых условий минимума в абстрактной задаче оптимального управления, условий минимума в соответствующей релаксационной (ослабленной) задаче и достаточных условий локальной управляемости управляемой системы. Полученные результаты применяются к задаче оптимального управления достаточно общего вида.

Библиография: 7 названий.

Ключевые слова: оптимальное управление, принцип максимума Понтрягина, управляемость, регулярность, релаксация, микс управлений.

DOI: https://doi.org/10.4213/sm8721

§ 1. Введение

В работе изучается задача оптимального управления и ее связь с релаксационными задачами и задачами управляемости управляемых систем. Полученные здесь результаты являются отражением следующих подходов к исследованию подобного рода проблем. Во-первых, это двойственность управляемости и экстремальности, заключающаяся в том, что отрицание необходимых условий оптимальности одновременно является достаточными условиями локальной управляемости некоторой управляемой системы, построенной по исходной задаче. И обратно, достаточные условия локальной управляемости приводят к необходимым условиям оптимальности соответствующей экстремальной задачи. Во-вторых, задача оптимального управления может быть погружена в достаточно широкое семейство так называемых релаксационных задач, решения которых при естественных условиях регулярности совпадают с решением исходной задачи. Кроме того, релаксационная задача – это гладкая экстремальная задача, и стандартным образом выписанные необходимые условия минимума в ней непосредственно приводят к необходимым условиям минимума для исходной задачи.

Идея рассмотрения релаксации задачи оптимального управления впервые была предложена Р. В. Гамкрелидзе (см. [1], [2]; см. также статью Дж. Варги [3]). Рассматриваемые здесь релаксационные задачи имеют несколько иную и, вообще говоря, более простую структуру.

Наши исследования мы начинаем с рассмотрения абстрактной экстремальной задачи, что позволяет полностью изучить те вопросы, которые нас интересуют, не отвлекаясь на специальные свойства задач оптимального управления.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 14-01-00456-а и № 14-01-00744-а).

Расшифровка полученных общих утверждений для задач оптимального управления представляет собой несложное вычисление.

Структура статьи такова. В § 2 приводятся постановки задач, а также даются определения регулярности и управляемости управляемых систем. В § 3 формулируются два основных результата и два следствия из них. Доказательствам основных результатов посвящен § 4. В § 5 расшифровываются полученные абстрактные результаты для задачи оптимального управления. Здесь же рассматривается известный пример Больца, который иллюстрирует взаимосвязи исходной задачи и ее релаксации. В § 6 доказывается теорема о неявной функции в нужной для нас форме, извлекаются некоторые следствия из нее, а также доказываются две леммы о разрешимости систем уравнений.

§ 2. Постановка задач. Регулярность. Управляемость

Пусть X и Y – нормированные пространства, $\mathscr{U}$ – топологическое пространство, G – открытое подмножество $X\times\mathbb{R}^n$, $f_0\colon G\to\mathbb{R}$, $f\colon G\to\mathbb{R}^{m_1}$ и $g\colon G\to\mathbb{R}^{m_2}$ – отображения переменных $x\in X$ и $\xi\in\mathbb{R}^n$, а $F\colon G\times\mathscr{U}\to Y$ – отображение переменных x, ξ и $u\in\mathscr{U}$.

Рассмотрим задачу

$$f_0(x,\xi)\to\min,\qquad F(x,\xi,u)=0,\quad u\in\mathscr{U},\quad f(x,\xi)\leqslant 0,\quad g(x,\xi)=0,\tag{1}$$

где неравенство $f(x,\xi)\leqslant 0$ понимается покоординатно.

Допустимая в этой задаче точка $(\widehat{x},\widehat{\xi},\widehat{u})$ называется *сильным минимумом*, если найдется такая окрестность $W\subset G$ точки $(\widehat{x},\widehat{\xi}\,)$, что $f_0(x,\xi)\geqslant f_0(\widehat{x},\widehat{\xi}\,)$ для всех допустимых точек $(x,\xi,u)\in W\times\mathscr{U}$.

Задача (1) моделирует задачу оптимального управления: x – фазовая переменная, u – управление, а переменная ξ позволяет учитывать граничные условия достаточно общего вида.

Наряду с задачей (1) рассмотрим также следующую постановку. Для каждого $k\in\mathbb{N}$ обозначим

$$\Sigma^k=\biggl\{\overline{\alpha}=(\alpha_1,\dots,\alpha_k)^T\in\mathbb{R}^k_+\colon\ \sum_{i=1}^k\alpha_i<1\biggr\}.$$

Если $\overline{\alpha}=(\alpha_1,\dots,\alpha_k)^T\in\Sigma^k$, то положим $\alpha_0=1-\sum_{i=1}^k\alpha_i$.

Задачу

$$\begin{gathered}f_0(x,\xi)\to\min,\qquad \sum_{i=0}^k\alpha_iF(x,\xi,u_i)=0,\quad \overline{\alpha}=(\alpha_1,\dots,\alpha_k)^T\in\Sigma^k,\\ f(x,\xi)\leqslant 0,\quad g(x,\xi)=0,\quad \overline{u}=(u_0,u_1,\dots,u_k)\in\mathscr{U}^{k+1},\end{gathered}\tag{2}$$

где x, ξ, $\overline{\alpha}$ и $\overline{u}$ – переменные, назовем[1] *k-релаксацией задачи* (1).

Допустимая в этой задаче точка $(\widehat{x},\widehat{\xi},\widehat{\overline{\alpha}},\widehat{\overline{u}})$ называется *локальным минимумом*, если найдется такая окрестность $\mathscr{W}\subset G\times\Sigma^k\times\mathscr{U}^{k+1}$ точки $(\widehat{x},\widehat{\xi},\widehat{\overline{\alpha}},\widehat{\overline{u}})$, что $f_0(x,\xi)\geqslant f_0(\widehat{x},\widehat{\xi}\,)$ для всех допустимых точек $(x,\xi,\overline{\alpha},\overline{u})\in\mathscr{W}$.

[1] Переменные $\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_k$ равноправны, но удобно считать, что какое-то α_i всегда положительно. Мы выбрали α_0, и этим определяется такая формулировка задачи.

Очевидно, что при $\overline{\alpha} = 0$ мы получаем задачу (1), т.е. задача (2) является более общей постановкой, включающей в себя задачу (1).

Далее, помимо задач (1) и (2) нас будут также интересовать вопросы управляемости управляемых систем, которые тесно связаны с этими задачами.

Пусть F и $\mathscr{U}$ те же, что и выше, $f\colon G \to \mathbb{R}^{l_1}$ и $g\colon G \to \mathbb{R}^{l_2}$. Систему вида

$$F(x, \xi, u) = 0, \quad u \in \mathscr{U}, \qquad f(x, \xi) \leqslant 0, \qquad g(x, \xi) = 0 \tag{3}$$

назовем *управляемой системой* (F, f, g). Управляющими параметрами являются элементы $u \in \mathscr{U}$.

Пусть $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим также такую управляемую систему:

$$\begin{gathered}\sum_{i=0}^{k} \alpha_i F(x, \xi, u_i) = 0, \qquad \overline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)^T \in \Sigma^k, \\ f(x, \xi) \leqslant 0, \quad g(x, \xi) = 0, \quad \overline{u} = (u_0, u_1, \dots, u_k) \in \mathscr{U}^{k+1}\end{gathered} \tag{4}$$

(где, напомним, $\alpha_0 = 1 - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$). Обозначим $\mathscr{F}_k(x, \xi, \overline{\alpha}, \overline{u}) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i F(x, \xi, u_i)$ и будем говорить о системе (4) как об управляемой системе $(\mathscr{F}_k, f, g)$. Управляющими параметрами здесь являются пары $(\overline{\alpha}, \overline{u}) \in \Sigma^k \times \mathscr{U}^{k+1}$.

Заметим, что ограничения в задачах (1) и (2) определяют управляемые системы. Мы будем говорить о них как об управляемых системах, задающих ограничения соответственно в задачах (1) и (2).

Приведем понятие управляемости управляемой системы (F, f, g) в допустимой точке, т.е. в точке, которая удовлетворяет соотношениям в (3).

Определение 1. Скажем, что управляемая система (F, f, g) *локально управляема относительно допустимой точки* $(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u})$, если для каждой окрестности W точки $(\widehat{x}, \widehat{\xi})$ существуют такие окрестности W_1 и W_2 нулей в $\mathbb{R}^{l_1}$ и $\mathbb{R}^{l_2}$, что для любого $y = (y_1, y_2) \in W_1 \times W_2$ найдется элемент $(x_y, \xi_y, u_y) \in W \times \mathscr{U}$, для которого $F(x_y, \xi_y, u_y) = 0$, $f(x_y, \xi_y) \leqslant y_1$ и $g(x_y, \xi_y) = y_2$.

Теперь приведем условия регулярности систем (F, f, g) и $(\mathscr{F}_k, f, g)$ в допустимых точках. Эти условия, как будет видно из формулируемых ниже утверждений, гарантируют, с одной стороны, "содержательность" необходимых условий минимума в сформулированных выше задачах, а с другой – управляемость управляемой системы (F, f, g). Но сначала приведем некоторые обозначения.

Пусть X и Y – нормированные пространства и X^*, Y^* – их сопряженные. Если $\Lambda\colon X \to Y$ – линейный непрерывный оператор, то Λ^* обозначает сопряженный оператор. Через $\langle x^*, x\rangle$ обозначаем значение линейного функционала $x^* \in X^*$ на элементе $x \in X$. Сопряженное $(\mathbb{R}^n)^*$ к $\mathbb{R}^n$ отождествляется с вектор-строками; $(\mathbb{R}^n)^*_+$ – конус положительных функционалов на $\mathbb{R}^n$ (т.е. неотрицательных вектор-строк).

Ниже, если фиксирована точка $(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u})$, то для производных[2] по x и ξ в этой точке для краткости пишем $\widehat{F}_x = F_x(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u})$, $\widehat{F}_\xi = F_\xi(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u})$, $\widehat{f}_x = f_x(\widehat{x}, \widehat{\xi})$, $\widehat{f}_\xi = f_\xi(\widehat{x}, \widehat{\xi})$.

В определениях ниже предполагается, что производные по x и ξ отображений F, f и g в соответствующих точках существуют.

[2]Всюду в этой работе имеются в виду производные по Фреше.

Определение 2. Скажем, что управляемая система (F, f, g) *регулярна в допустимой точке* $(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u})$, если система уравнений

$$\begin{cases} \widehat{F}_x^* y^* + \widehat{f}_x^* \lambda_1 + \widehat{g}_x^* \lambda_2 = 0, \\ \widehat{F}_\xi^* y^* + \widehat{f}_\xi^* \lambda_1 + \widehat{g}_\xi^* \lambda_2 = 0, \\ \min\limits_{u \in \mathscr{U}} \langle y^*, F(\widehat{x}, \widehat{\xi}, u) \rangle = \langle y^*, F(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u}) \rangle, \\ \langle \lambda_1, f(\widehat{x}, \widehat{\xi}\,) \rangle = 0 \end{cases} \tag{5}$$

относительно переменных $y^* \in Y^*$, $\lambda_1 \in (\mathbb{R}^{l_1})^*_+$ и $\lambda_2 \in (\mathbb{R}^{l_2})^*$ имеет только тривиальное решение.

Сопоставим управляемой системе (F, f, g) функцию Лагранжа $\mathscr{L}(x, \xi, u, \overline{\lambda}) = \langle y^*, F(x, \xi, u) \rangle + \langle \lambda_1, f(x, \xi) \rangle + \langle \lambda_2, g(x, \xi) \rangle$, где $\overline{\lambda} = (y^*, \lambda_1, \lambda_2)$. Тогда соотношения (5) при каждом $\overline{\lambda}$ суть необходимые условия минимума этой функции в точке $(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u})$, т.е. стационарность по x и ξ, условие минимума по u и условие дополняющей нежесткости.

Определение 3. Скажем, что управляемая система $(\mathscr{F}_k, f, g)$ *регулярна в допустимой точке*[3] $(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{\overline{\alpha}}, \widehat{\overline{u}})$, если система соотношений

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{k} \widehat{\alpha}_i F_x^*(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u}_i) y^* + \widehat{f}_x^* \lambda_1 + \widehat{g}_x^* \lambda_2 = 0, \\ \sum\limits_{i=0}^{k} \widehat{\alpha}_i F_\xi^*(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u}_i) y^* + \widehat{f}_\xi^* \lambda_1 + \widehat{g}_\xi^* \lambda_2 = 0, \\ \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} \langle y^*, F(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u}_i) \rangle \geqslant \langle y^*, F(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u}_0) \rangle, \\ \langle \lambda_1, f(\widehat{x}, \widehat{\xi}\,) \rangle = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{k} \widehat{\alpha}_i \big\langle y^*, F(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u}_0) - F(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u}_i) \big\rangle = 0 \end{cases} \tag{6}$$

относительно переменных $y^* \in Y^*$, $\lambda_1 \in (\mathbb{R}^{l_1})^*_+$ и $\lambda_2 \in (\mathbb{R}^{l_2})^*$ имеет только тривиальное решение.

Соотношения (6) суть необходимые условия минимума функции Лагранжа

$$\mathscr{L}(x, \xi, \overline{\alpha}, \overline{u}, \overline{\lambda}) = \left\langle y^*, \sum_{i=0}^{k} F(x, \xi, u_i) \rangle + \langle \lambda_1, f(x, \xi) \right\rangle + \langle \lambda_2, g(x, \xi) \rangle - \langle \lambda_3, \overline{\alpha} \rangle,$$

где $\overline{\lambda} = (y^*, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, в точке $(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{\overline{\alpha}}, \widehat{\overline{u}})$. В частности, последнее соотношение в (6) следует из условия стационарности по $\overline{\alpha}$ и условия дополняющей нежесткости по этой переменной (при этом исключается λ_3).

Задача (1) представляет собой, как уже говорилось, абстрактную модель задачи оптимального управления. Приведем абстрактные варианты предположений и свойств, которые выполняются, как будет показано далее, в стандартной задаче оптимального управления.

[3] Здесь $\widehat{\overline{\alpha}} = (\widehat{\alpha}_1, \dots, \widehat{\alpha}_k)^T$, $\widehat{\overline{u}} = (\widehat{u}_0, \widehat{u}_1, \dots, \widehat{u}_k)$ и $\widehat{\alpha}_0 = 1 - \sum_{i=1}^{k} \widehat{\alpha}_i$.

Основные предположения:

1) X и Y – банаховы пространства;
2) функция f_0 и отображения f и g непрерывно дифференцируемы на G, отображение F непрерывно на $G \times \mathscr{U}$ вместе со своей производной по (x, ξ);
3) для любых $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)^T \in \Sigma^k$ и $\overline{u} = (u_0, u_1, \dots, u_k) \in \mathscr{U}^{k+1}$ существует такой элемент $M_\varepsilon(\overline{\alpha}, \overline{u}) \in \mathscr{U}$, что отображение $\overline{\alpha} \mapsto M_\varepsilon(\overline{\alpha}, \overline{u})$ непрерывно на Σ^k, и если $(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{\overline{u}}) \in G \times U^{k+1}$, то найдется такая окрестность U точки $(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{\overline{u}})$, что
$$\biggl\|F(x, \xi, M_\varepsilon(\overline{\alpha}, \overline{u})) - \sum_{i=0}^{k} \alpha_i F(x, \xi, u_i)\biggr\|_Y < \varepsilon,$$
$$\biggl\|F_x(x, \xi, M_\varepsilon(\overline{\alpha}, \overline{u})) - \sum_{i=0}^{k} \alpha_i F_x(x, \xi, u_i)\biggr\| < \varepsilon$$
при всех $(x, \xi, \overline{u}) \in U$ и $\overline{\alpha} \in \Sigma^k$.

Условие 3) означает, в частности, что замыкания образов отображений $u \mapsto F(x, \xi, u)$ и $u \mapsto F_x(x, \xi, u)$ из $\mathscr{U}$ в Y суть выпуклые множества. В задаче оптимального управления, где F – интегральный оператор, соответствующий дифференциальной связи, это всегда выполняется (см. § 5). Величину $M_\varepsilon(\overline{\alpha}, \overline{u})$ будем называть *миксом управлений* $u_0, u_1, \dots, u_k$. Это понятие впервые появилось в работе В. М. Тихомирова [4] (см. также [5]). Микс позволяет неким регулярным образом "добраться" до любой точки из замыкания образов указанных отображений.

§ 3. Формулировка основных результатов

Здесь мы формулируем две основные теоремы и два следствия из них. Теорема 1 касается взаимосвязи значения задачи (1) (т.е. точной нижней грани минимизируемого функционала при данных ограничениях) с решением релаксационной задачи (2). Существование решения в релаксационной задаче, если есть решение в исходной задаче, является непосредственным следствием этого результата (следствие 1). В теореме 2 приводятся достаточные условия локальной управляемости управляемой системы. В следствии 2, которое, собственно, и моделирует задачу оптимального управления, приводятся необходимые условия минимума в задаче (1) в виде принципа минимума. Доказательствам всех сформулированных утверждений посвящен § 4. В частности, там будут даны два независимых доказательства следствия 2: первое из них опирается на следствие 1, а второе – на теорему 2.

Обозначим через S значение задачи (1).

Теорема 1. *Пусть управляемая система $(\mathscr{F}_k, f, g)$, задающая ограничения в задаче (2), регулярна в допустимой точке $(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{\overline{\alpha}}, \widehat{\overline{u}})$, выполнены основные предположения и оператор $\sum_{i=0}^{k} \widehat{\alpha}_i F_x(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u}_i)$ обратим.*

Тогда условие $f_0(\widehat{x}, \widehat{\xi}\,) = S$ необходимо для того, чтобы точка $(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{\overline{\alpha}}, \widehat{\overline{u}})$ была глобальным минимумом в задаче (2), и достаточно для того, чтобы эта точка была локальным минимумом в данной задаче.

Следствие 1. *Пусть $(\widehat{\xi},\widehat{x},\widehat{u})$ – сильный минимум в задаче* (1)*, управляемая система* (F,f,g)*, задающая ограничения в задаче* (1)*, регулярна в точке* $(\widehat{\xi},\widehat{x},\widehat{u})$*, выполнены основные предположения и* $\widehat{F}_x(\widehat{x},\widehat{\xi},\widehat{u})$ *– обратимый оператор.*

Тогда для каждого $k\in\mathbb{N}$ и каждого набора $\widehat{\overline{u}}=(\widehat{u},\widehat{u}_1,\dots,\widehat{u}_k)\in\mathscr{U}^{k+1}$ точка $(\widehat{x},\widehat{\xi},\overline{0},\widehat{\overline{u}})$ является локальным минимумом в задаче (2).

Теорема 2. *Пусть управляемая система (F,f,g) регулярна в допустимой точке $(\widehat{x},\widehat{\xi},\widehat{u})$, выполнены основные предположения и $F_x(\widehat{x},\widehat{\xi},\widehat{u})$ – обратимый оператор.*

Тогда управляемая система (F,f,g) локально управляема относительно точки $(\widehat{x},\widehat{\xi},\widehat{u})$.

Более того, существует такая константа $c_0>0$, что для переменных y, x_y и ξ_y из определения управляемости системы (F,f,g) справедлива оценка

$$\|x_y-\widehat{x}\|_X+|\xi_y-\widehat{\xi}|\leqslant c_0|y|.$$

Сопоставим задаче (1) следующую функцию Лагранжа:

$$\mathscr{L}(x,\xi,u,\overline{\lambda})=\lambda_0 f_0(x,\xi)+\langle y^*,F(x,\xi,u)\rangle+\langle\lambda_1,f(x,\xi)\rangle+\langle\lambda_2,g(x,\xi)\rangle,$$

где $\overline{\lambda}=(\lambda_0,y^*,\lambda_1,\lambda_2,)\in\mathbb{R}\times Y^*\times(\mathbb{R}^{m_1})^*\times(\mathbb{R}^{m_2})^*$ – набор множителей Лагранжа.

Следствие 2 (принцип минимума для задачи (1)). *Пусть $(\widehat{x},\widehat{\xi},\widehat{u})$ – допустимая точка в задаче* (1)*, выполнены основные предположения и $F_x(\widehat{x},\widehat{\xi},\widehat{u})$ – обратимый оператор.*

Тогда если $(\widehat{x},\widehat{\xi},\widehat{u})$ доставляет сильный минимум в этой задаче, то найдутся ненулевой набор $(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}_+\times(\mathbb{R}^{m_1})^*_+\times(\mathbb{R}^{m_2})^*$ и функционал $y^*\in Y^*$ такие, что

$$\mathscr{L}_x(\widehat{x},\widehat{\xi},\widehat{u},\overline{\lambda})=0 \iff \lambda_0\widehat{f}_{0x}+\widehat{F}_x^*y^*+\widehat{f}_x^*\lambda_1+\widehat{g}_x^*\lambda_2=0,$$
$$\mathscr{L}_\xi(\widehat{x},\widehat{\xi},\widehat{u},\overline{\lambda})=0 \iff \lambda_0\widehat{f}_{0\xi}+\widehat{F}_\xi^*y^*+\widehat{f}_\xi^*\lambda_1+\widehat{g}_\xi^*\lambda_2=0,$$
$$\langle\lambda_1,f(\widehat{x},\widehat{\xi})\rangle=0,$$
$$\min_{u\in\mathscr{U}}\mathscr{L}(\widehat{x},\widehat{\xi},u,\overline{\lambda})=\mathscr{L}(\widehat{x},\widehat{\xi},\widehat{u},\overline{\lambda}) \iff \min_{u\in\mathscr{U}}\langle y^*,F(\widehat{x},\widehat{\xi},u)\rangle=\langle y^*,F(\widehat{x},\widehat{\xi},\widehat{u})\rangle=0.$$

Если управляемая система (F,f,g), задающая ограничения в задаче (1)*, регулярна в точке $(\widehat{x},\widehat{\xi},\widehat{u})$, то $\lambda_0\neq0$.*

§ 4. Доказательства основных теорем

Перед непосредственным доказательством сформулированных выше утверждений докажем один технический, но важный результат, касающийся эквивалентных формулировок и соотношений между приведенными определениями регулярности управляемых систем (3) и (4). Сначала приведем несколько предварительных определений.

Всюду ниже для обозначения окрестности какой-либо точки a будем использовать запись $\mathscr{O}(a)$, не оговаривая, что это окрестность именно точки a.

Пусть выполнены основные предположения, $(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{\overline{\alpha}}, \widehat{\overline{u}}) \in G \times \Sigma^k \times \mathscr{U}^{k+1}$, $\sum_{i=0}^k \widehat{\alpha}_i F(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u}_i) = 0$ и $\sum_{i=0}^k \widehat{\alpha}_i F_x(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u}_i)$ – обратимый оператор. Согласно следствию 3 (см. § 6) существуют окрестности $\mathscr{O}(\widehat{x})$, $\mathscr{O}(\widehat{\xi}\,)$ $(\mathscr{O}(\widehat{x}) \times \mathscr{O}(\widehat{\xi}\,) \subset G)$, $\mathscr{O}(\widehat{\overline{\alpha}})$, $\mathscr{O}(\widehat{\overline{u}})$ и отображение $(\xi, \overline{\alpha}, \overline{u}) \mapsto x(\xi, \overline{\alpha}, \overline{u})$ из $\mathscr{O}(\widehat{\xi}\,) \times \mathscr{O}(\widehat{\overline{\alpha}}) \times \mathscr{O}(\widehat{\overline{u}})$ в $\mathscr{O}(\widehat{x})$, непрерывное вместе со своей производной по $(\xi, \overline{\alpha})$, такие, что

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i F(x(\xi, \overline{\alpha}, \overline{u}), \xi, u_i) = 0$$

для всех $(\xi, \overline{\alpha}, \overline{u}) \in \mathscr{O}(\widehat{\xi}\,) \times \mathscr{O}(\widehat{\overline{\alpha}}) \times \mathscr{O}(\widehat{\overline{u}})$.

При этом равенство $\sum_{i=0}^k \alpha_i F(x, \xi, u_i) = 0$ на $\mathscr{O}(\widehat{x}) \times \mathscr{O}(\widehat{\xi}\,) \times \mathscr{O}(\widehat{\overline{\alpha}}) \times \mathscr{O}(\widehat{\overline{u}})$ возможно лишь тогда, когда $\sum_{i=0}^k \alpha_i F(x(\xi, \overline{\alpha}, \overline{u}), \xi, u_i) = 0$.

Тогда на $\mathscr{O}(\widehat{\xi}\,) \times \mathscr{O}(\widehat{\overline{\alpha}}) \times \mathbb{R}^{m_1} \times \mathscr{O}(\widehat{\overline{u}})$ определено отображение Φ, сопоставляющее четверке $(\xi, \overline{\alpha}, v, \overline{u})$ вектор из $\mathbb{R}^{l_1+l_2}$ по правилу

$$\Phi(\xi, \overline{\alpha}, v, \overline{u}) = \bigl(f(x(\xi, \overline{\alpha}, \overline{u}), \xi) + v,\ g(x(\xi, \overline{\alpha}, \overline{u}), \xi)\bigr)^T, \tag{7}$$

и это отображение в силу свойств f и g непрерывно вместе со своей производной по $(\xi, \overline{\alpha}, v)$ (которую обозначаем $\Phi_{(\xi, \overline{\alpha}, v)}$) на указанном множестве.

Предложение 1. 1) *Пусть* $(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{\overline{\alpha}}, \widehat{\overline{u}})$ *– допустимая точка для управляемой системы* $(\mathscr{F}_k, f, g)$, *выполнены основные предположения и* $\sum_{i=0}^k \widehat{\alpha}_i F_x(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u}_i)$ *есть обратимый оператор.*

Тогда следующие утверждения эквивалентны[4]:

(a$_1$) *управляемая система* $(\mathscr{F}_k, f, g)$ *регулярна в точке* $(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{\overline{\alpha}}, \widehat{\overline{u}})$;

(b$_1$) $0 \in \operatorname{int} \Phi_{(\xi, \overline{\alpha}, v)}(\widehat{\xi}, \widehat{\overline{\alpha}}, -f(\widehat{x}, \widehat{\xi}\,), \widehat{\overline{u}})(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^k_+ - \widehat{\overline{\alpha}}) \times (\mathbb{R}^{l_1}_+ + f(\widehat{x}, \widehat{\xi}\,)))$.

2) *Пусть* $(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u})$ *– допустимая точка для управляемой системы* (F, f, g), *выполнены основные предположения и* $F_x(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u})$ *– обратимый оператор.*

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(a$_2$) *управляемая система* (F, f, g) *регулярна в точке* $(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u})$;

(b$_2$) *найдутся такие* $u_i \in \mathscr{U}$, $i = 1, \dots, m$, *что если* $\overline{u} = (\widehat{u}, u_1, \dots, u_m)$, *то в точке* $(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \overline{0}, \overline{u})$ *управляемая система*[5] $(\mathscr{F}_m, f, g)$ *регулярна.*

Доказательство. 1) (a$_1$) $\Rightarrow$ (b$_1$). Доказываем от противного. Если утверждение (b$_1$) не выполняется, то в силу теоремы отделимости найдется ненулевой вектор $\overline{\lambda} = (\mathbb{R}^{l_1+l_2})^*$ такой, что

$$\bigl\langle \overline{\lambda}, \Phi_{(\xi, \overline{\alpha}, v)}(\widehat{\xi}, \widehat{\overline{\alpha}}, -f(\widehat{x}, \widehat{\xi}\,), \widehat{\overline{u}})(\xi, \overline{\alpha} - \widehat{\overline{\alpha}}, v + f(\widehat{x}, \widehat{\xi}\,))\bigr\rangle \geqslant 0 \tag{8}$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)^T \in \mathbb{R}^k_+$ и $v \in \mathbb{R}^{l_1}_+$.

[4] В определении Φ участвует отображение $(\xi, \overline{\alpha}, \overline{u}) \mapsto x(\xi, \overline{\alpha}, \overline{u})$, которое есть решение уравнения $\mathscr{F}_k(x, \xi, \overline{\alpha}, \overline{u}) = \sum_{i=0}^k \alpha_i F(x, \xi, u_i) = 0$.

[5] Очевидно, что точка $(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \overline{0}, \overline{u})$ допустима для этой системы.

Представляя вектор $\overline{\lambda}$ в виде $\overline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$, где $\lambda_i \in (\mathbb{R}^{l_i})^*$, $i = 1, 2$, соотношение (8) по теореме о производной сложной функции запишем так:

$$\left\langle \lambda_1, \widehat{f}_x \widehat{x}_\xi \xi + \widehat{f}_\xi \xi + \sum_{i=1}^k \widehat{f}_x \widehat{x}_{\alpha_i}(\alpha_i - \widehat{\alpha}_i) + v + f(\widehat{x}, \widehat{\xi}\,) \right\rangle + \left\langle \lambda_2, \widehat{g}_x \widehat{x}_\xi \xi + \widehat{g}_\xi \xi + \sum_{i=1}^k \widehat{g}_x \widehat{x}_{\alpha_i}(\alpha_i - \widehat{\alpha}_i) \right\rangle \geqslant 0 \tag{9}$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\overline{\alpha} \in \mathbb{R}^k_+$ и $v \in \mathbb{R}^{l_1}_+$. Здесь $\widehat{x}_{\alpha_j}$, $1 \leqslant j \leqslant k$, и $\widehat{x}_\xi$ – производные по α_j и ξ соответственно отображения $(\xi, \overline{\alpha}, \widehat{\overline{u}}) \mapsto x(\xi, \overline{\alpha}, \widehat{\overline{u}})$ в точке $(\widehat{\xi}, \widehat{\overline{\alpha}}, \widehat{\overline{u}})$, которые согласно теореме о неявной функции действуют по формулам (65) и (66).

Полагая в (9) $\xi = 0$, $\overline{\alpha} = \widehat{\overline{\alpha}}$ и $v = v' - f(\widehat{x}, \widehat{\xi}\,)$, где $v' \in \mathbb{R}^{l_1}$, получаем, что $\langle \lambda_1, v' \rangle \geqslant 0$ для всех $v' \in \mathbb{R}^{l_1}_+$ и, значит, $\lambda_1 \in (\mathbb{R}^{l_1})^*_+$.

Пусть в (9) $\xi = 0$, $\overline{\alpha} = \widehat{\overline{\alpha}}$ и $v = 0$; тогда получаем, что $\langle \lambda_1, f(\widehat{x}, \widehat{\xi}\,) \rangle \geqslant 0$. Но поскольку $\lambda_1 \geqslant 0$ и $f(\widehat{x}, \widehat{\xi}\,) \leqslant 0$, то $\langle \lambda_1, f(\widehat{x}, \widehat{\xi}\,) \rangle \leqslant 0$, и поэтому

$$\langle \lambda_1, f(\widehat{x}, \widehat{\xi}\,) \rangle = 0. \tag{10}$$

Обозначим для краткости $\Lambda = \sum_{i=0}^k \widehat{\alpha}_i F_x(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u}_i)$ и положим

$$y^* = -(\Lambda^{-1})^* (\widehat{f}^*_x \lambda_1 + \widehat{g}^*_x \lambda_2).$$

Тогда

$$\Lambda^* y^* + \widehat{f}^*_x \lambda_1 + \widehat{g}^*_x \lambda_2 = 0. \tag{11}$$

Пусть $1 \leqslant j \leqslant k$. Из (9) при $\xi = 0$, $\alpha_i = \widehat{\alpha}_i$, $i \neq j$, $\alpha_j = \alpha'_j + \widehat{\alpha}_j$, где $\alpha'_j \in \mathbb{R}_+$ и $v = -f(\widehat{x}, \widehat{\xi}\,)$, следует, что $\langle \widehat{f}^*_x \lambda_1 + \widehat{g}^*_x \lambda_2, \widehat{x}_{\alpha_j} \alpha'_j \rangle \geqslant 0$ для всех $\alpha'_j \in \mathbb{R}_+$. Подставляя сюда вместо величины $\widehat{x}_{\alpha_j} \alpha'_j$ ее выражение из (65) и учитывая (11), получаем, что

$$\langle y^*, F(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u}_j) \rangle \geqslant \langle y^*, F(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u}_0) \rangle, \qquad j = 1, \dots, k. \tag{12}$$

Пусть снова $1 \leqslant j \leqslant k$. Из (9) при $\xi = 0$, $\alpha_i = \widehat{\alpha}_i$, $i \neq j$, $\alpha_j = 0$ и $v = -f(\widehat{x}, \widehat{\xi}\,)$ следует, что $\langle \widehat{f}^*_x \lambda_1 + \widehat{g}^*_x \lambda_2, \widehat{x}_{\alpha_j} \widehat{\alpha}_j \rangle \leqslant 0$. Подставляя сюда вместо величины $\widehat{x}_{\alpha_j} \widehat{\alpha}_j$ ее выражение из (65) и учитывая (11), приходим к соотношению

$$\sum_{i=1}^k \widehat{\alpha}_i \big\langle y^*, F(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u}_i) - F(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u}_0) \big\rangle \leqslant 0.$$

Умножая j-е неравенство в (12) на $\widehat{\alpha}_j$, $j = 1, \dots, k$, а затем складывая полученные неравенства, придем к неравенству, противоположному только что доказанному и, тем самым,

$$\sum_{i=1}^k \widehat{\alpha}_i \big\langle y^*, F(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u}_i) - F(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u}_0) \big\rangle = 0. \tag{13}$$

Теперь если $\overline{\alpha} = \widehat{\overline{\alpha}}$ и $v = -f(\widehat{x}, \widehat{\xi}\,)$ в (9), то в силу произвольности ξ справедливо равенство

$$\langle \lambda_1, \widehat{f}_x \widehat{x}_\xi \xi + \widehat{f}_\xi \xi \rangle + \langle \lambda_2, \widehat{g}_x \widehat{x}_\xi \xi + \widehat{g}_\xi \xi \rangle = 0.$$

Отсюда и из равенства (11), примененного к $\widehat{x}_\xi \xi$, приходим к соотношению

$$-\langle y^*, \Lambda \widehat{x}_\xi \xi \rangle + \langle \lambda_1, \widehat{f}_\xi \xi \rangle + \langle \lambda_2, \widehat{g}_\xi \xi \rangle = 0.$$

Вместе с (66) это означает, что

$$\left\langle y^*, \sum_{i=0}^{k} \widehat{\alpha}_i F_\xi(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u}_i) \xi \right\rangle + \langle \lambda_1, \widehat{f}_\xi \xi \rangle + \langle \lambda_2, \widehat{g}_\xi \xi \rangle = 0,$$

или

$$\sum_{i=0}^{k} \widehat{\alpha}_i F^*_\xi(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u}_i) y^* + \widehat{f}^*_\xi \lambda_1 + \widehat{g}^*_\xi \lambda_2 = 0. \tag{14}$$

Так как набор $(y^*, \lambda_1, \lambda_2) \in Y^* \times (\mathbb{R}^{l_1})^*_+ \times (\mathbb{R}^{l_2})^*$ ненулевой, то соотношения (10)–(14) означают, что управляемая система $(\mathscr{F}_k, f, g)$ нерегулярна в точке $(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{\overline{\alpha}}, \widehat{\overline{u}})$, и, тем самым, импликация $(\mathrm{a}_1) \Rightarrow (\mathrm{b}_1)$ доказана.

$(\mathrm{b}_1) \Rightarrow (\mathrm{a}_1)$. Также доказываем от противного. Предположим, что существует нетривиальное решение $(y^*, \lambda_1, \lambda_2)$ системы (6). Мы покажем, что в этом случае выполняется соотношение (8) с $\overline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$, откуда будет следовать, что включение в условии (b_1) невозможно. Действительно, если бы оно выполнялось, то из (8), очевидно, вытекало бы, что $\overline{\lambda} = 0$. Но это не так, поскольку из обратимости Λ следовало бы из первого уравнения в (6), что и $y^* = 0$ в противоречии с нетривиальностью набора $(y^*, \lambda_1, \lambda_2)$.

Соотношение (8) равносильно соотношению (9), которое и будем доказывать.

Покажем сначала, что для любого $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)^T \in \mathbb{R}^k_+$ справедливо неравенство

$$\left\langle \lambda_1, \sum_{i=1}^{k} \widehat{f}_x \widehat{x}_{\alpha_i} (\alpha_i - \widehat{\alpha}_i) \right\rangle + \left\langle \lambda_2, \sum_{i=1}^{k} \widehat{g}_x \widehat{x}_{\alpha_i} (\alpha_i - \widehat{\alpha}_i) \right\rangle \geqslant 0. \tag{15}$$

В самом деле, применяя левую и правую части первого уравнения в (6) к $\widehat{x}_{\alpha_i}(\alpha_i - \widehat{\alpha}_i)$, получим для всех $i = 1, \ldots, k$

$$\langle y^*, \Lambda \widehat{x}_{\alpha_i}(\alpha_i - \widehat{\alpha}_i) \rangle + \langle \lambda_1, \widehat{f}_x \widehat{x}_{\alpha_i}(\alpha_i - \widehat{\alpha}_i) \rangle + \langle \lambda_2, \widehat{g}_x \widehat{x}_{\alpha_i}(\alpha_i - \widehat{\alpha}_i) \rangle = 0.$$

Отсюда, из (65) и третьего условия в (6) следует, что

$$\begin{aligned}
&\big\langle \lambda_1, \widehat{f}_x \widehat{x}_{\alpha_i}(\alpha_i - \widehat{\alpha}_i) \big\rangle + \big\langle \lambda_2, \widehat{g}_x \widehat{x}_{\alpha_i}(\alpha_i - \widehat{\alpha}_i) \big\rangle \\
&\qquad = \big\langle y^*, (F(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u}_i) - F(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u}_0))(\alpha_i - \widehat{\alpha}_i) \big\rangle \\
&\qquad = \alpha_i \big\langle y^*, (F(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u}_i) - F(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u}_0)) \big\rangle - \widehat{\alpha}_i \big\langle y^*, (F(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u}_i) - F(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u}_0)) \big\rangle \\
&\qquad \geqslant -\widehat{\alpha}_i \big\langle y^*, (F(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u}_i) - F(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u}_0)) \big\rangle
\end{aligned}$$

для каждого $i = 1, \ldots, k$. Складывая эти соотношения и учитывая последнее условие в (6), получаем (15).

Покажем теперь, что для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ справедливо равенство

$$\langle \lambda_1, \widehat{f}_x \widehat{x}_\xi \xi + \widehat{f}_\xi \xi \rangle + \langle \lambda_2, \widehat{g}_x \widehat{x}_\xi \xi + \widehat{g}_\xi \xi \rangle = 0. \tag{16}$$

Действительно, применяя обе части второго уравнения в (6) к ξ, будем иметь

$$\left\langle y^*, \sum_{i=0}^{k} \widehat{\alpha}_i F_\xi^*(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u}_i)\xi \right\rangle + \langle \lambda_1, \widehat{f}_\xi \xi \rangle + \langle \lambda_2, \widehat{g}_\xi \xi \rangle = 0.$$

Отсюда и из (16) следует, что

$$-\langle y^*, \Lambda \widehat{x}_\xi \xi \rangle + \langle \lambda_1, \widehat{f}_\xi \xi \rangle + \langle \lambda_2, \widehat{g}_\xi \xi \rangle = 0.$$

Далее, из первого равенства в (6), примененного к $\widehat{x}_\xi \xi$, вытекает, что

$$\langle y^*, \Lambda \widehat{x}_\xi \xi \rangle + \langle \lambda_1, \widehat{f}_x \widehat{x}_\xi \xi \rangle + \langle \lambda_2, \widehat{g}_x \widehat{x}_\xi \xi \rangle = 0.$$

Складывая последние два равенства, получаем (16).

Наконец, так как $\lambda_1 \in (\mathbb{R}^{l_1})^*_+$, то для всех $v \in \mathbb{R}^{l_1}_+$, учитывая четвертое соотношение в (6), имеем

$$\langle \lambda_1, v + f(\widehat{x}, \widehat{\xi}\,) \rangle = \langle \lambda_1, v \rangle + \langle \lambda_1, f(\widehat{x}, \widehat{\xi}\,) \rangle = \langle \lambda_1, v \rangle \geqslant 0,$$

и тогда, складывая это неравенство с неравенством (15) и равенством (16), приходим к соотношению (9).

2) $(\mathrm{a}_2) \Rightarrow (\mathrm{b}_2)$. Покажем сначала, что если управляемая система (F, f, g) регулярна в точке $(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u})$, то

$$\begin{aligned} &\operatorname{conv}\bigl\{ \Phi_{(\xi,\alpha,v)}(\widehat{\xi}, 0, -f(\widehat{x}, \widehat{\xi}\,), (\widehat{u}, u))(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}^{l_1}_+ + f(\widehat{x}, \widehat{\xi}\,))),\ u \in \mathscr{U} \bigr\} \\ &\qquad = \mathbb{R}^{l_1+l_2}, \end{aligned} \tag{17}$$

где $\operatorname{conv} A$ обозначает выпуклую коническую оболочку множества A (для удобства пишем здесь $(\widehat{u}, u)$ вместо $(\widehat{u}, u_1)$, и так как в данном случае $\overline{\alpha} = \alpha_1$, то соответственно вместо α_1 будем писать α).

Доказываем от противного. Если (17) не выполняется, то по теореме отделимости найдется ненулевой вектор $\overline{\lambda} \in (\mathbb{R}^{l_1+l_2})^*$ такой, что

$$\begin{gathered} \bigl\langle \overline{\lambda}, \Phi_{(\xi,\alpha,v)}(\widehat{\xi}, 0, -f(\widehat{x}, \widehat{\xi}\,), (\widehat{u}, u))(\xi, \alpha, v) \bigr\rangle \geqslant 0 \quad \forall\, u \in \mathscr{U}, \\ \xi \in \mathbb{R}^n, \qquad \alpha \geqslant 0, \qquad v \in \mathbb{R}^{l_1}_+ + f(\widehat{x}, \widehat{\xi}\,). \end{gathered} \tag{18}$$

Представляя вектор $\overline{\lambda}$ в виде $\overline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$, где $\lambda_i \in (\mathbb{R}^{l_i})^*$, $i = 1, 2$, так же, как и при доказательстве части 1) предложения, соотношение (18) по теореме о производной сложной функции запишем так:

$$\begin{aligned} &\bigl\langle \lambda_1, \widehat{f}_x \widehat{x}_\xi \xi + \widehat{f}_\xi \xi + \widehat{f}_x \widehat{x}_\alpha(u)\alpha + v + f(\widehat{x}, \widehat{\xi}\,) \bigr\rangle \\ &\qquad + \bigl\langle \lambda_2, \widehat{g}_x \widehat{x}_\xi \xi + \widehat{g}_\xi \xi + \widehat{g}_x \widehat{x}_\alpha(u)\alpha \bigr\rangle \geqslant 0 \end{aligned} \tag{19}$$

для всех $u \in \mathscr{U}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \geqslant 0$ и $v \in \mathbb{R}^{l_1}_+ + f(\widehat{x}, \widehat{\xi}\,)$, где $\widehat{x}_\xi$ и $\widehat{x}_\alpha(u)$ – производные по ξ и α отображения $(\xi, \alpha) \mapsto x(\xi, \alpha, (\widehat{u}, u))$ в точке $(\widehat{\xi}, 0, (\widehat{u}, u))$. Они удовлетворяют (согласно правилу дифференцирования неявной функции; см. формулы (65) и (66)) соотношениям

$$\widehat{F}_x \widehat{x}_\alpha(u) + F(\widehat{x}, \widehat{\xi}, u) = 0, \tag{20}$$

$$\widehat{F}_x \widehat{x}_\xi + \widehat{F}_\xi = 0. \tag{21}$$

Из соотношения (19) точно так же, как и при доказательстве части 1) предложения, выводим, что $\lambda_1 \in (\mathbb{R}^{l_1})^*_+$ и $\langle \lambda_1, f(\widehat{x}, \widehat{\xi}\,)\rangle = 0$.

Далее проверяется, что существует элемент $y^* \in Y^*$ такой, что

$$\widehat{F}^*_x y^* + \widehat{f}^*_x \lambda_1 + \widehat{g}^*_x \lambda_2 = 0. \tag{22}$$

Пусть в (19) $\xi = 0$, $v = -f(\widehat{x}, \widehat{\xi}\,)$ и $\alpha = 1$. Тогда

$$\langle \lambda_1, \widehat{f}_x x_\alpha(u)\rangle + \langle \lambda_2, \widehat{g}_x x_\alpha(u)\rangle \geqslant 0 \tag{23}$$

для всех $u \in \mathscr{U}$.

Применяя (22) к $x_\alpha(u)$, получаем

$$\langle y^*, \widehat{F}_x x_\alpha(u)\rangle + \langle \lambda_1, \widehat{f}_x x_\alpha(u)\rangle + \langle \lambda_2, \widehat{g}_x x_\alpha(u)\rangle = 0.$$

Тогда отсюда с учетом (20) и (23) получаем

$$-\langle y^*, \widehat{F}_x x_\alpha(u)\rangle = \langle y^*, F(\widehat{\xi}, \widehat{x}, u)\rangle \geqslant 0 = \langle y^*, F(\widehat{\xi}, \widehat{x}, \widehat{u})\rangle,$$

т.е.

$$\min_{u \in \mathscr{U}} \langle y^*, F(\widehat{\xi}, \widehat{x}, u)\rangle = \langle y^*, F(\widehat{\xi}, \widehat{x}, \widehat{u})\rangle. \tag{24}$$

Наконец, равенство

$$\widehat{F}^*_\xi y^* + \widehat{f}^*_\xi \lambda_1 + \widehat{g}^*_\xi \lambda_2 = 0 \tag{25}$$

доказывается точно так же, как и раньше.

Полученные соотношения показывают, что система уравнений (5) имеет нетривиальное решение $(y^*, \lambda_1, \lambda_2)$, и, тем самым, управляемая система (F, f, g) нерегулярна в точке $(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u})$.

Итак, если управляемая система (F, f, g) регулярна в точке $(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u})$, то справедливо равенство (17). Тогда с помощью теоремы Каратеодори (см. [6; п. 2.6.1]) нетрудно показать, что найдутся такие элементы $u_i \in \mathscr{U}$ и векторы $(\xi_i^0, \alpha_i^0, v_i^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}^{l_1}_+ + f(\widehat{x}, \widehat{\xi}\,))$, $i = 1, \dots, m$, что

$$\operatorname{conv}\bigl\{\Phi_{(\xi,\alpha,v)}(\widehat{\xi}, 0, -f(\widehat{x}, \widehat{\xi}\,), (\widehat{u}, u_i))(\xi_i^0, \alpha_i^0, v_i^0),\ i = 1, \dots, m\bigr\} = \mathbb{R}^{l_1+l_2}. \tag{26}$$

Положим $\overline{u} = (\widehat{u}, u_1, \dots, u_m)$. Согласно формулам (20) и (21) производные по ξ и α отображений $(\xi, \alpha) \mapsto x(\xi, \alpha, (\widehat{u}, u_i))$, $i = 1, \dots, m$, в точке $(\widehat{\xi}, 0, (\widehat{u}, u_i))$ совпадают с производными соответственно по ξ и $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ отображения $(\xi, \overline{\alpha}) \mapsto x(\xi, \overline{\alpha}, \overline{u})$ (где $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)^T$) в точке $(\widehat{\xi}, \overline{0}, \overline{u})$. Поэтому

$$\begin{gathered}\Phi_\xi\bigl(\widehat{\xi}, \overline{0}, -f(\widehat{x}, \widehat{\xi}\,), \overline{u}\bigr) = \Phi_\xi\bigl(\widehat{\xi}, 0, -f(\widehat{x}, \widehat{\xi}\,), (\widehat{u}, u_i)\bigr),\\ \Phi_{\alpha_i}\bigl(\widehat{\xi}, \overline{0}, -f(\widehat{x}, \widehat{\xi}\,), \overline{u}\bigr) = \Phi_\alpha\bigl(\widehat{\xi}, 0, -f(\widehat{x}, \widehat{\xi}\,), (\widehat{u}, u_i)\bigr),\\ i = 1, \dots, m.\end{gathered}$$

Кроме того, если обозначить $\overline{\alpha}_1^0=(\alpha_1^0,0,\dots,0)^T$, …, $\overline{\alpha}_m^0=(0,\dots,0,\alpha_m^0)^T$, то

$$\Phi_{\overline{\alpha}}\big(\widehat{\xi},\overline{0},-f(\widehat{x},\widehat{\xi}\,),\overline{u}\big)\overline{\alpha}_i^0=\Phi_{\alpha_i}\big(\widehat{\xi},\overline{0},-f(\widehat{x},\widehat{\xi}\,),\overline{u}\big)\alpha_i^0=\Phi_{\alpha}\big(\widehat{\xi},0,-f(\widehat{x},\widehat{\xi}\,),(\widehat{u},u_i)\big)\alpha_i^0,$$

$i=1,\dots,m$. Таким образом,

$$\Phi_{(\xi,\alpha,v)}\big(\widehat{\xi},0,-f(\widehat{x},\widehat{\xi}\,),(\widehat{u},u_i)\big)(\xi_i^0,\alpha_i^0,v_i^0)=\Phi_{(\xi,\overline{\alpha},v)}\big(\widehat{\xi},\overline{0},-f(\widehat{x},\widehat{\xi}\,),\overline{u}\big)(\xi_i^0,\overline{\alpha}_i^0,v_i^0),$$

$i=1,\dots,m$, и, значит, согласно (26)

$$\operatorname{conv}\big\{\Phi_{(\xi,\overline{\alpha},v)}(\widehat{\xi},\overline{0},-f(\widehat{x},\widehat{\xi}\,),\overline{u})(\xi_i^0,\overline{\alpha}_i^0,v_i^0),\ i=1,\dots,m\big\}=\mathbb{R}^{l_1+l_2},$$

откуда вытекает, что

$$0\in\operatorname{int}\Phi_{(\xi,\overline{\alpha},v)}\big(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m_+\times(\mathbb{R}^{l_1}_+ + f(\widehat{x},\widehat{\xi}\,))\big).$$

Теперь из части 1) предложения 1 следует, что система $(\mathscr{F}_m,f,g)$ регулярна в точке $(\widehat{x},\widehat{\xi},\overline{0},\overline{u})$. Этим доказана импликация $(\mathrm{a}_2)\Rightarrow(\mathrm{b}_2)$.

Импликация $(\mathrm{b}_2)\Rightarrow(\mathrm{a}_2)$ очевидна.

Предложение 1 доказано.

Доказательство теоремы 1 начнем с формулировки предложения 2, которое представляет самостоятельный интерес и которое содержит основную идею доказательства теоремы 1. После этого выведем из него утверждения теоремы 1, а затем докажем и само предложение 2.

Предложение 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.

Тогда существует такая окрестность $\mathscr{O}(\widehat{x},\widehat{\xi},\widehat{\overline{\alpha}},\widehat{\overline{u}})$, *что для любой допустимой в задаче* (2) *точки* $(x,\xi,\overline{\alpha},\overline{u})\in\mathscr{O}(\widehat{x},\widehat{\xi},\widehat{\overline{\alpha}},\widehat{\overline{u}})$ *и любого* $\varepsilon>0$ *найдется допустимая в задаче* (1) *точка* $(x_\varepsilon,\xi_\varepsilon,u_\varepsilon)$, *для которой* $\|x_\varepsilon-x\|_X+|\xi_\varepsilon-\xi|<\varepsilon$.

Доказательство теоремы 1. В задачах (1) и (2) минимизируемые функционалы совпадают, но здесь удобнее их различать, обозначая соответственно f_0^1 и f_0^2. Напомним, что S обозначает значение задачи (1).

Необходимость. Пусть $(\widehat{x},\widehat{\xi},\widehat{\overline{\alpha}},\widehat{\overline{u}})$ – глобальный минимумом в задаче (2). Если (x,ξ,u) – допустимая точка в задаче (1), то точка $(x,\xi,\overline{0},\overline{u})$, где $\overline{u}=(u,u_1,\dots,u_k)$, а $u_1,\dots,u_k$ произвольны, допустима в задаче (2), и значения функционалов f_0^1 и f_0^2 в этих точках равны. Следовательно, $f_0^2(\widehat{x},\widehat{\xi}\,)\leqslant S$. Применим предложение 2 к самой точке $(\widehat{x},\widehat{\xi},\widehat{\overline{\alpha}},\widehat{\overline{u}})$. Пусть $\varepsilon>0$. В силу непрерывности f_0^1 найдется такое $0<\delta\leqslant\varepsilon$, что $|f_0^1(x,\xi)-f_0^1(\widehat{x},\widehat{\xi}\,)|<\varepsilon$, если $\|x-\widehat{x}\|_X+|\xi-\widehat{\xi}|<\delta\leqslant\varepsilon$. Согласно предложению 2 среди пар (x,ξ), удовлетворяющих последнему неравенству, есть пара $(x_\varepsilon,\xi_\varepsilon)$ такая, что тройка $(x_\varepsilon,\xi_\varepsilon,u_\varepsilon)$ допустима в задаче (1). Тогда $S\leqslant f_0^1(x_\varepsilon,\xi_\varepsilon)\leqslant f_0^1(\widehat{x},\widehat{\xi}\,)+\varepsilon$ и, тем самым, $S\leqslant f_0^1(\widehat{x},\widehat{\xi}\,)$. Но $f_0^1(\widehat{x},\widehat{\xi}\,)=f_0^2(\widehat{x},\widehat{\xi}\,)$, и необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $f_0^2(\widehat{x},\widehat{\xi}\,)=S$, $\mathscr{O}(\widehat{x},\widehat{\xi},\widehat{\overline{\alpha}},\widehat{\overline{u}})$ – окрестность из предложения 2, и пусть $(x,\xi,\overline{\alpha},\overline{u})$ – допустимая точка в задаче (2), принадлежащая $\mathscr{O}(\widehat{x},\widehat{\xi},\widehat{\overline{\alpha}},\widehat{\overline{u}})$. Тогда согласно этому предложению и по тем же соображениям непрерывности, что и выше, для любого $\varepsilon>0$ найдется допустимая в задаче (1) точка $(x_\varepsilon,\xi_\varepsilon,u_\varepsilon)$ такая, что

$$f_0^2(x,\xi)\geqslant f_0^2(x_s,\xi_s)-\varepsilon=f_0^1(x_s,\xi_s)-\varepsilon\geqslant S-\varepsilon=f_0^2(\widehat{x},\widehat{\xi}\,)-\varepsilon.$$

Следовательно, $f_0^2(x,\xi) \geqslant f_0^2(\widehat{x},\widehat{\xi})$ и, значит, $(\widehat{x},\widehat{\xi},\widehat{\overline{\alpha}},\widehat{\overline{u}})$ – локальный минимум в задаче (2).

Теорема доказана.

Доказательство предложения 2. Перед формулировкой предложения 1 (при условиях, которые, очевидно, следуют из условий теоремы 1) были определены согласно следствию 3 (из § 6) окрестности $\mathscr{O}(\widehat{x})$, $\mathscr{O}(\widehat{\xi})$, $\mathscr{O}(\widehat{\overline{\alpha}})$ и $\mathscr{O}(\widehat{\overline{u}})$, отображение $(\xi,\overline{\alpha},\overline{u}) \mapsto x(\xi,\overline{\alpha},\overline{u})$ из $\mathscr{O}(\widehat{\xi}) \times \mathscr{O}(\widehat{\overline{\alpha}}) \times \mathscr{O}(\widehat{\overline{u}})$ в $\mathscr{O}(\widehat{x})$, непрерывное вместе со своей производной по $(\xi,\overline{\alpha})$, и отображение $\Phi\colon \mathscr{O}(\widehat{\xi}) \times \mathscr{O}(\widehat{\overline{\alpha}}) \times \mathbb{R}^{m_1} \times \mathscr{O}(\widehat{\overline{u}}) \to \mathbb{R}^{l_1+l_2}$ по формуле (7), которое непрерывно вместе со своей производной по $(\xi,\overline{\alpha},v)$. Здесь мы имеем дело с управляемыми системами, задающими ограничения в задачах (1) и (2), и поэтому Φ действует в $\mathbb{R}^{m_1+m_2}$.

Уменьшая, если нужно, окрестности $\mathscr{O}(\widehat{\xi})$, $\mathscr{O}(\widehat{\overline{\alpha}})$ и $\mathscr{O}(\widehat{\overline{u}})$ и беря произвольную ограниченную окрестность $\mathscr{O}(-f(\widehat{x},\widehat{\xi}))$, можно считать, что Φ ограничено на $\mathscr{O}(\widehat{\xi}) \times \mathscr{O}(\widehat{\overline{\alpha}}) \times \mathscr{O}(-f(\widehat{x},\widehat{\xi})) \times \mathscr{O}(\widehat{\overline{u}})$.

Так как отображения f и g непрерывно дифференцируемы по (x,ξ), а отображение $(\xi,\overline{\alpha},\overline{u}) \mapsto x(\xi,\overline{\alpha},\overline{u})$ непрерывно дифференцируемо по $(\xi,\overline{\alpha})$, то, уменьшая окрестности $\mathscr{O}(\widehat{x})$, $\mathscr{O}(\widehat{\xi})$, $\mathscr{O}(\widehat{\overline{\alpha}})$ (считая их выпуклыми) и $\mathscr{O}(\widehat{\overline{u}})$, получим по теореме о среднем, что для некоторой константы $c>0$ выполняются неравенства

$$\bigl|f(x,\xi)-f(x',\xi')\bigr| \leqslant c\bigl(\|x-x'\|_X+|\xi-\xi'|\bigr), \tag{27}$$

$$\bigl|g(x,\xi)-g(x',\xi')\bigr| \leqslant c\bigl(\|x-x'\|_X+|\xi-\xi'|\bigr) \tag{28}$$

для всех (x,ξ) и (x',ξ') из $\mathscr{O}(\widehat{x}) \times \mathscr{O}(\widehat{\xi})$, а также неравенство

$$\bigl\|x(\xi,\overline{\alpha},\overline{u})-x(\xi',\overline{\alpha}',\overline{u})\bigr\|_X \leqslant c\bigl(|\xi-\xi'|+|\overline{\alpha}-\overline{\alpha}'|\bigr) \tag{29}$$

для всех $(\xi,\overline{\alpha},\overline{u})$ и $(\xi',\overline{\alpha}',\overline{u})$ из $\mathscr{O}(\widehat{\xi}) \times \mathscr{O}(\widehat{\overline{\alpha}}) \times \mathscr{O}(\widehat{\overline{u}})$.

В силу следствия 3 (из § 6) существуют такие окрестности $\mathscr{O}_0(\widehat{\xi}) \subset \mathscr{O}(\widehat{\xi})$, $\mathscr{O}_0(\widehat{\overline{\alpha}}) \subset \mathscr{O}(\widehat{\overline{\alpha}})$, $\mathscr{O}_0(\widehat{\overline{u}}) \subset \mathscr{O}(\widehat{\overline{u}})$ и $\varepsilon_0>0$, что для всех $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ найдется непрерывное отображение $(\xi,\overline{\alpha},\overline{u}) \mapsto x_\varepsilon(\xi,\overline{\alpha},\overline{u})$ из $\mathscr{O}_0(\widehat{\xi}) \times (\mathscr{O}_0(\widehat{\overline{\alpha}}) \cap \mathbb{R}^k_+) \times \mathscr{O}_0(\widehat{\overline{u}})$ в $\mathscr{O}(\widehat{x})$, для которого $F(x_\varepsilon(\xi,\overline{\alpha},\overline{u}),\xi,M_\varepsilon(\overline{\alpha},\overline{u}))=0$ и

$$\|x_\varepsilon(\xi,\overline{\alpha},\overline{u})-x(\xi,\overline{\alpha},\overline{u})\|_X < 2\|\Lambda^{-1}\|\varepsilon \tag{30}$$

при всех $(\xi,\overline{\alpha},\overline{u}) \in \mathscr{O}_0(\widehat{\xi}) \times (\mathscr{O}_0(\widehat{\overline{\alpha}}) \cap \mathbb{R}^k_+) \times \mathscr{O}_0(\widehat{\overline{u}})$, где $\Lambda=\sum_{i=0}^k \widehat{\alpha}_i F_x(\widehat{x},\widehat{\xi},\widehat{u}_i)$.

Таким образом, для всех $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ на $\mathscr{O}_0(\widehat{\xi}) \times (\mathscr{O}_0(\widehat{\overline{\alpha}}) \cap \mathbb{R}^k_+) \times \mathbb{R}^{m_1} \times \mathscr{O}_0(\widehat{\overline{u}})$ определено непрерывное отображение Φ_ε, сопоставляющее четверке $(\xi,\overline{\alpha},v,\overline{u})$ вектор из $\mathbb{R}^{m_1+m_2}$ по правилу

$$\Phi_\varepsilon(\xi,\overline{\alpha},v,\overline{u})=\bigl(f(x_\varepsilon(\xi,\overline{\alpha},\overline{u}),\xi)+v,\ g(x_\varepsilon(\xi,\overline{\alpha},\overline{u}),\xi)\bigr)^T. \tag{31}$$

Воспользуемся леммой 1, где $K=\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{R}^{m_1}_+$, $\widehat{w}=(\widehat{\xi},\widehat{\overline{\alpha}},-f(\widehat{x},\widehat{\xi})) \in K$, $\mathscr{O}(\widehat{\xi},\widehat{\overline{\alpha}},-f(\widehat{x},\widehat{\xi}))=\mathscr{O}_0(\widehat{\xi}) \times \mathscr{O}_0(\widehat{\overline{\alpha}}) \times \mathscr{O}(-f(\widehat{x},\widehat{\xi}))$, $\mathscr{U}=\mathscr{O}_0(\widehat{\overline{u}})$ и $\Phi\colon \mathscr{O}(\widehat{w}) \times \mathscr{O}_0(\widehat{\overline{u}}) \to \mathbb{R}^{m_1+m_2}$ – отображение, определенное формулой (7). В силу регулярности из предложения 1 следует включение

$$\begin{aligned} 0 &\in \operatorname{int}\Phi_w(\widehat{w},\widehat{u})(K-\widehat{w}) \\ &= \operatorname{int}\Phi_{(\xi,\overline{\alpha},v)}(\widehat{\xi},\widehat{\overline{\alpha}},-f(\widehat{x},\widehat{\xi}),\widehat{\overline{u}})\bigl(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^k_+-\widehat{\overline{\alpha}}) \times (\mathbb{R}^{m_1}_+ + f(\widehat{x},\widehat{\xi}))\bigr). \end{aligned}$$

Пусть

$$\mathscr{O}_0'(\widehat{\xi},\widehat{\overline{\alpha}},-f(\widehat{x},\widehat{\xi}\,))=\mathscr{O}_0'(\widehat{\xi}\,)\times\mathscr{O}_0'(\widehat{\overline{\alpha}})\times\mathscr{O}_0'(-f(\widehat{x},\widehat{\xi}\,))\subset\mathscr{O}(\widehat{\xi},\widehat{\overline{\alpha}},-f(\widehat{x},\widehat{\xi}\,)),$$

$\mathscr{O}_0'(\widehat{\overline{u}})\subset\mathscr{O}_0(\widehat{\overline{u}})$, $\kappa>0$ и $r_0>0$ – соответственно окрестности (мы их здесь обозначаем штрихами) и константы из утверждения леммы 1, примененной к данной ситуации. Уменьшая, если необходимо, $\mathscr{O}_0'(\widehat{\xi}\,)$, $\mathscr{O}_0'(\widehat{\overline{\alpha}})$ и $\mathscr{O}_0'(\widehat{\overline{u}})$, считаем, что $-f(x(\xi,\overline{\alpha},\overline{u}),\xi)\in\mathscr{O}_0'(-f(\widehat{x},\widehat{\xi}\,))$ для всех $(\xi,\overline{\alpha},\overline{u})\in\mathscr{O}_0'(\widehat{\xi}\,)\times\mathscr{O}_0'(\widehat{\overline{\alpha}})\times\mathscr{O}_0'(\widehat{\overline{u}})$.

Пусть $\mathscr{O}(\widehat{x},\widehat{\xi},\widehat{\overline{\alpha}},\widehat{\overline{u}})=\mathscr{O}(\widehat{x})\times\mathscr{O}_0'(\widehat{\xi}\,)\times\mathscr{O}_0'(\widehat{\overline{\alpha}})\times\mathscr{O}_0'(\widehat{\overline{u}})$, точка $(x^0,\xi^0,\overline{\alpha}^0,\overline{u}^0)$ принадлежит $\mathscr{O}(\widehat{x},\widehat{\xi},\widehat{\overline{\alpha}},\widehat{\overline{u}})$ и допустима в задаче (2). Тогда $x^0=x(\xi^0,\overline{\alpha}^0,\overline{u}^0)$. Обозначая $v^0=-f(x(\xi^0,\overline{\alpha}^0,\overline{u}^0),\xi^0)$, получаем $(\xi^0,\overline{\alpha}^0,v^0)\in\mathscr{O}_0'(\widehat{\xi},\widehat{\overline{\alpha}},-f(\widehat{x},\widehat{\xi}\,))\cap K$, и ясно, что $\Phi(\xi^0,\overline{\alpha}^0,v^0,\overline{u}^0)=0$.

Пусть $\delta>0$, и пусть число $0<r\leqslant\min(r_0,\delta/(2\kappa),\delta/(4c\kappa))$ и окрестность $\mathscr{O}_r(\Phi(\,\cdot\,,\overline{u}^0))$ такие, как в утверждении леммы 1. Из (27), (28) и (30) следует, что найдется такое $\varepsilon=\varepsilon(r)\leqslant\delta/(8\|\Lambda^{-1}\|)$, что отображение Φ_ε будет принадлежать окрестности $\mathscr{O}_r(\Phi(\cdot,\overline{u}^0))$. Тогда, обозначая $(\xi_{r,\overline{u}^0},\overline{\alpha}_{r,\overline{u}^0},v_{r,\overline{u}^0})=\varphi_{r,\overline{u}^0}(\xi^0,\overline{\alpha}^0,v^0)$ и учитывая, что $\Phi(\widehat{\xi},\widehat{\overline{\alpha}},-f(\widehat{x},\widehat{\xi}\,),\widehat{\overline{u}})=0$, будем иметь согласно лемме 1

$$f(x_\varepsilon(\xi_{r,\overline{u}^0},\overline{\alpha}_{r,\overline{u}^0},\overline{u}^0),\xi_{r,\overline{u}^0})+v_{r,\overline{u}^0}=0,\qquad g(x_\varepsilon(\xi_{r,\overline{u}^0},\overline{\alpha}_{r,\overline{u}^0},\overline{u}^0),\xi_{r,\overline{u}^0})=0,\tag{32}$$

$$|\xi_{r,\overline{u}^0}-\xi^0|+|\overline{\alpha}_{r,\overline{u}^0}-\overline{\alpha}^0|+|v_{r,\overline{u}^0}-v^0|\leqslant\kappa r\leqslant\frac{\delta}{2}.\tag{33}$$

Из (32) следует, что $(x_\varepsilon(\xi_{r,\overline{u}^0},\overline{\alpha}_{r,\overline{u}^0},\overline{u}^0),\xi_{r,\overline{u}^0},M_\varepsilon(\overline{\alpha}_{r,\overline{u}^0},\overline{u}^0))$ – допустимый элемент в задаче (1), так как $v_{r,\overline{u}^0}\in\mathbb{R}^{m_1}_+$.

Положим $x_\delta=x_\varepsilon(\xi_{r,\overline{u}^0},\overline{\alpha}_{r,\overline{u}^0},\overline{u}^0)$, $\xi_\delta=\xi_{r,\overline{u}^0}$ и $u_\delta=M_\varepsilon(\overline{\alpha}_{r,\overline{u}^0},\overline{u}^0)$. В силу (30), (29), (33) и выбора r и ε имеем

$$\begin{aligned}\|x_\delta-x^0\|_X+|\xi_\delta-\xi^0|\leqslant\|x_\delta-x(\xi_{r,\overline{u}^0},\overline{\alpha}_{r,\overline{u}^0},\overline{u}^0)\|_X&\\ +\|x(\xi_{r,\overline{u}^0},\overline{\alpha}_{r,\overline{u}^0},\overline{u}^0)-x^0\|_X+|\xi_\delta-\xi^0|<\delta,&\end{aligned}$$

что доказывает предложение 2 с заменой δ на ε и (x^0,ξ^0) на (x,ξ).

Предложение 2 доказано.

Доказательство следствия 1. Пусть $\widehat{\overline{u}}=(\widehat{u},\widehat{u}_1,\dots,\widehat{u}_k)\in\mathscr{U}^{k+1}$. В силу предложения 1 существует такой набор $\overline{u}'=(\widehat{u},u_1',\dots,u_m')$, что

$$0\in\operatorname{int}\Phi_{(\xi,\overline{\alpha},v)}(\widehat{\xi},\overline{0},-f(\widehat{x},\widehat{\xi}\,),\overline{u}')\bigl(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k_+\times(\mathbb{R}^{m_1}_++f(\widehat{x},\widehat{\xi}\,))\bigr).\tag{34}$$

Образуем новый набор $\widetilde{\overline{u}}=(\widehat{u},\widehat{u}_1,\dots,\widehat{u}_k,\widetilde{u}_{k+1},\dots,\widetilde{u}_N)$, где $(\widetilde{u}_{k+1},\dots,\widetilde{u}_N)$ – те элементы из набора $\overline{u}'$ (если они есть), которые не принадлежат набору $\widehat{\overline{u}}$. Тогда для $\widetilde{\overline{u}}$ справедливо включение

$$0\in\operatorname{int}\Phi_{(\xi,\overline{\alpha},v)}(\widehat{\xi},\overline{0},-f(\widehat{x},\widehat{\xi}\,),\widetilde{\overline{u}})\bigl(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^N_+\times(\mathbb{R}^{m_1}_++f(\widehat{x},\widehat{\xi}\,))\bigr),\tag{35}$$

поскольку множество справа в (34) содержится во множестве справа в (35).

Из (35) и предложения 1 следует, что управляемая система, задающая ограничения в задаче (2), регулярна в точке $(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \overline{0}, \widetilde{\overline{u}}) \in X \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathscr{U}^{N+1}$. Для этой точки выполнены все предположения теоремы 1 (где $\widehat{\overline{\alpha}} = \overline{0}$ и $\widehat{\overline{u}} = \widetilde{\overline{u}}$). Пусть $\mathscr{O}(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \overline{0}, \widetilde{\overline{u}})$ – окрестность из предложения 2 (см. доказательство теоремы 1). Рассмотрим проекцию $\mathscr{O}(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \overline{0}, \widetilde{\overline{u}})$ на $X \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathscr{U}^{k+1}$ (на первые k сомножителей $\mathbb{R}^N$ и первые $k+1$ сомножителей $\mathscr{U}^{N+1}$). Ясно, что эта проекция есть некоторая окрестность $\mathscr{O}_0(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \overline{0}, \widehat{\overline{u}})$ точки $(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \overline{0}, \widehat{\overline{u}})$.

Пусть точка $(x, \xi, \overline{\alpha}, \overline{u})$ принадлежит $\mathscr{O}_0(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \overline{0}, \widehat{\overline{u}})$ и допустима в задаче (2) с набором $\widehat{\overline{u}}$. Сопоставим ей точку $(x, \xi, \overline{\alpha}^0, \overline{u}^0)$, где $\overline{\alpha}^0 = (\overline{\alpha}, 0, \dots, 0)^T$ (добавлены $N-k$ нулей) и $\overline{u}^0 = (\overline{u}, \widetilde{u}_{k+1}, \dots, \widetilde{u}_N)$. Тогда эта точка, очевидно, принадлежит $\mathscr{O}(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \overline{0}, \widetilde{\overline{u}})$, допустима в задаче (2) с набором $\widetilde{\overline{u}}$ и значения функционала f_0 в точках $(x, \xi, \overline{\alpha}, \overline{u})$ и $(x, \xi, \overline{\alpha}^0, \overline{u}^0)$ совпадают.

По условию $S = f_0(\widehat{x}, \widehat{\xi})$, и поэтому по теореме 1 точка $(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \overline{0}, \widetilde{\overline{u}})$ – локальный минимум в задаче (2) с набором $\widetilde{\overline{u}}$, а именно, $f_0(x, \xi) \geqslant f_0(\widehat{x}, \widehat{\xi})$ для всех допустимых точек $(x, \xi, \overline{\alpha}, \overline{u}) \in \mathscr{O}(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \overline{0}, \widetilde{\overline{u}})$. Но тогда $f_0(x, \xi) \geqslant f_0(\widehat{x}, \widehat{\xi})$ для всех допустимых точек $(x, \xi, \overline{\alpha}, \overline{u}) \in \mathscr{O}_0(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \overline{0}, \widehat{\overline{u}})$, и, тем самым, $(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \overline{0}, \widehat{\overline{u}})$ – локальный минимум в задаче (2) с набором $\widehat{\overline{u}}$.

Следствие доказано.

Доказательство теоремы 2. Так как система (F, f, g) регулярна в точке $(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u})$, то согласно предложению 1 существует такой набор $\overline{u}' = (\widehat{u}, u_1', \dots, u_m')$, что

$$0 \in \operatorname{int} \Phi_{(\xi, \overline{\alpha}, v)}(\widehat{\xi}, \overline{0}, -f(\widehat{x}, \widehat{\xi}), \overline{u}')(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+ \times (\mathbb{R}^{l_1}_+ + f(\widehat{x}, \widehat{\xi}))).$$

Здесь набор $\overline{u}'$ фиксирован, и мы рассматриваем Φ (см. (7)) как отображение, определенное на $\mathscr{O}(\widehat{\xi}) \times \mathscr{O}(\overline{0}) \times \mathbb{R}^{l_1}$, где окрестности $\mathscr{O}(\widehat{\xi})$ и $\mathscr{O}(\overline{0})$ (как и в начале доказательства предложения 2) такие, как в следствии 3 при $\widehat{\overline{\alpha}} = \overline{0}$ и $\widehat{\overline{u}} = \overline{u}'$. Считаем, что Φ ограничено на $\mathscr{O}(\widehat{\xi}) \times \mathscr{O}(\overline{0}) \times \mathscr{O}(-f(\widehat{x}, \widehat{\xi}))$, где $\mathscr{O}(-f(\widehat{x}, \widehat{\xi}))$ – некоторая ограниченная окрестность.

Уменьшая $\mathscr{O}(\widehat{\xi})$ и $\mathscr{O}(\overline{0})$, можно считать по теореме о среднем, что

$$\|x(\xi, \overline{\alpha}, \overline{u}') - \widehat{x}\|_X \leqslant c(|\xi - \widehat{\xi}| + |\overline{\alpha}|) \tag{36}$$

для всех $(\xi, \overline{\alpha}) \in \mathscr{O}(\widehat{\xi}) \times \mathscr{O}(\overline{0})$ и некоторой константы $c > 0$.

Далее, как и в доказательстве предложения 2, на $\mathscr{O}(\widehat{\xi}) \times (\mathscr{O}(\overline{0}) \cap \mathbb{R}^m_+) \times \mathbb{R}^{l_1}$ для $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ определено непрерывное отображение Φ_ε (см. (31)).

Воспользуемся леммой 2, где $K = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^{l_1}_+$, $\widehat{w} = (\widehat{\xi}, \overline{0}, -f(\widehat{x}, \widehat{\xi})) \in K$, $\mathscr{O}(\widehat{\xi}, \overline{0}, -f(\widehat{x}, \widehat{\xi})) = \mathscr{O}(\widehat{\xi}) \times \mathscr{O}(\overline{0}) \times \mathscr{O}(-f(\widehat{x}, \widehat{\xi}))$, отображение Φ определено выше. Ясно, что $\Phi(\widehat{\xi}, \overline{0}, -f(\widehat{x}, \widehat{\xi}), \overline{u}') = 0$. Пусть $\mathscr{O}_1(\overline{0})$ – окрестность в $\mathbb{R}^{l_1} \times \mathbb{R}^{l_1}$ и κ – число из утверждения этой леммы.

Пусть теперь W – произвольная окрестность точки $(\widehat{x}, \widehat{\xi})$ и $\rho > 0$ такое, что $U_{X \times \mathbb{R}^n}((\widehat{x}, \widehat{\xi}), \rho) \subset W$. Пусть, далее, $0 < r \leqslant \rho/(1 + (c+1)\kappa)$ таково, что $U_{\mathbb{R}^{l_1+l_2}}(0, r) \subset \mathscr{O}_1(\overline{0})$, а W_1 и W_2 – окрестности нулей в $\mathbb{R}^{l_1}$ и $\mathbb{R}^{l_2}$ соответственно такие, что $W_1 \times W_2 \subset U_{\mathbb{R}^{l_1+l_2}}(0, r)$.

Пусть $y = (y_1, y_2) \in W_1 \times W_2$ и $\mathscr{O}_y(\Phi)$ – соответствующая окрестность из утверждения леммы 2.

Как и при доказательстве предложения 2, из (27), (28) и неравенства (30) (для данного случая) следует, что существует такое $\varepsilon = \varepsilon(y) \leqslant |y|/(2\|\Lambda^{-1}\|)$

($y \neq 0$), что отображение Φ_ε будет принадлежать окрестности $\mathscr{O}_y(\Phi)$. Тогда согласно утверждениям леммы найдется точка $(\xi_y, \overline{\alpha}_y, v_y) \in \mathscr{O}(\widehat{w}) \cap K$ такая, что

$$f(x_\varepsilon(\xi_y, \overline{\alpha}_y, \overline{u}'), \xi_y) + v_y = y_1, \qquad g(x_\varepsilon(\xi_y, \overline{\alpha}_y, \overline{u}'), \xi_y) = y_2, \tag{37}$$

$$|\xi_y - \widehat{\xi}\,| + |\overline{\alpha}_y| + |v_y + f(\widehat{x}, \widehat{\xi}\,)| \leqslant \kappa|y|. \tag{38}$$

Поскольку $v_y \in \mathbb{R}^{l_1}_+$, то $f(x_\varepsilon(\xi_y, \overline{\alpha}_y, \overline{u}'), \xi_y) \leqslant y_1$.

В силу (30), (36), (38) и выбора ε имеем

$$\begin{aligned}\|x_\varepsilon(\xi_y, \overline{\alpha}_y, \overline{u}') - \widehat{x}\|_X &\leqslant \|x_\varepsilon(\xi_y, \overline{\alpha}_y, \overline{u}') - x(\xi_y, \overline{\alpha}_y, \overline{u}')\|_X \\ &\quad + \|x(\xi_y, \overline{\alpha}_y, \overline{u}') - \widehat{x}\|_X < |y| + c\kappa|y|.\end{aligned}$$

Тогда, снова используя (38), приходим к неравенству

$$\|x_\varepsilon(\xi_y, \overline{\alpha}_y, \overline{u}') - \widehat{x}\|_X + |\xi_y - \widehat{\xi}\,| < |y| + c\kappa|y| + \kappa|y| = c_0|y|. \tag{39}$$

Положим $x_y = x_\varepsilon(\xi_y, \overline{\alpha}_y, \overline{u}')$ и $u_y = M_\varepsilon(\overline{\alpha}_y, \overline{u}')$. Тогда $F(x_y, \xi_y, u_y) = 0$, $f(x_y, \xi_y) \leqslant y_1$, $g(x_y, \xi_y) = y_2$ и (вследствие (39)) $(x_y, \xi_y, u_y) \in W \times \mathscr{U}$.

Оценка в теореме также следует из (39).

Теорема 2 доказана.

Доказательство следствия 2. Приведем, как уже было сказано, два независимых доказательства.

Первое доказательство следствия 2. Пусть точка $(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u})$ доставляет сильный минимум в задаче (1). Если управляемая система (F, f, g), задающая ограничения в этой задаче, не является регулярной в точке $(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u})$, то по определению существует нетривиальное решение $(y^*, \lambda_1, \lambda_2)$ системы (5). Это означает, что справедливо утверждение данного следствия с ненулевым набором множителей Лагранжа $(0, y^*, \lambda_1, \lambda_2)$.

Пусть управляемая система (F, f, g) регулярна в точке $(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u})$. Тогда из следствия 1 вытекает, в частности, что если в задаче (2) фиксировать произвольный набор $\widehat{\overline{u}} = (\widehat{u}, \widehat{u}_1, \dots, \widehat{u}_k)$, то в этой задаче с переменными x, ξ и $\overline{\alpha}$ точка $(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \overline{0})$ доставляет локальный минимум. Данная задача представляет собой стандартную гладкую задачу с ограничениями типа равенств и неравенств (см., например, [6; п. 3.2.1]), и необходимые условия локального минимума в ней состоят в том, что найдется нетривиальный набор $(\lambda_0, y^*, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}_+ \times Y^* \times (\mathbb{R}^{m_1})^*_+ \times (\mathbb{R}^{m_2})^*$, для которого выполнены соотношения

$$\begin{cases} \lambda_0 \widehat{f}_{0x} + \widehat{F}^*_x y^* + \widehat{f}^*_x \lambda_1 + \widehat{g}^*_x \lambda_2 = 0, \\ \lambda_0 \widehat{f}_{0\xi} + \widehat{F}^*_\xi y^* + \widehat{f}^*_\xi \lambda_1 + \widehat{g}^*_\xi \lambda_2 = 0, \\ \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} \langle y^*, F(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u}_i)\rangle \geqslant \langle y^*, F(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u})\rangle, \\ \langle \lambda_1, f(\widehat{x}, \widehat{\xi}\,)\rangle = 0, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^k \widehat{\alpha}_i \langle y^*, F(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u}_0) - F(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u}_i)\rangle = 0. \end{cases}$$

Это означает согласно определению 3, что управляемая система $(\mathscr{F}_k, \widetilde{f}, g)$, где $\widetilde{f}(x,\xi) = (f_0(x,\xi) - f_0(\widehat{x},\widehat{\xi}\,), f_1(x,\xi), \dots, f_{m_1}(x,\xi))$, нерегулярна в точке $(\widehat{x},\widehat{\xi},\overline{0})$. Но поскольку это справедливо для любого набора, то из предложения 1 следует, что управляемая система $(F,\widetilde{f},g)$ нерегулярна в точке $(\widehat{x},\widehat{\xi},\widehat{u})$, а это в точности (см. определение 2) есть утверждения следствия 2, кроме последнего из них, доказательство которого очевидно.

Второе доказательство следствия 2. Доказываем от противного. Пусть утверждение теоремы не выполняется ни для какого ненулевого набора $\overline{\lambda} = (\lambda_0, y^*, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}_+ \times Y^* \times (\mathbb{R}^{m_1})^*_+ \times (\mathbb{R}^{m_2})^*$. Это означает согласно определению 2, что управляемая система $(F,\widetilde{f},g)$, где $\widetilde{f}$ то же, что и в предыдущем доказательстве, регулярна в точке $(\widehat{x},\widehat{\xi},\widehat{u})$. Тогда в силу теоремы 2 управляемая система $(F,\widetilde{f},g)$ локально управляема в данной точке.

Пусть $\mathscr{O}(\widehat{x},\widehat{\xi}\,)$ – произвольная окрестность и W_1, W_2 – соответствующие окрестности нулей в $\mathbb{R}^{m_1+1}$ и $\mathbb{R}^{m_2}$ из определения управляемости. Ясно, что $y(\varepsilon) = ((-\varepsilon,0),0) \in W_1 \times W_2$ для достаточно малых $\varepsilon > 0$. Поэтому для каждого такого ε найдется элемент $(x_{y(\varepsilon)},\xi_{y(\varepsilon)},u_{y(\varepsilon)}) \in \mathscr{O}(\widehat{x},\widehat{\xi}\,) \times \mathscr{U}$, для которого $F(x_{y(\varepsilon)},\xi_{y(\varepsilon)},u_{y(\varepsilon)}) = 0$, $f_0(x_{y(\varepsilon)},\xi_{y(\varepsilon)}) \leqslant f_0(\widehat{x},\widehat{\xi}\,) - \varepsilon$, $f(x_{y(\varepsilon)},\xi_{y(\varepsilon)}) \leqslant 0$, $g(x_{y(\varepsilon)},\xi_{y(\varepsilon)}) = 0$ и $(x_{y(\varepsilon)},\xi_{y(\varepsilon)}) \in \mathscr{O}(\widehat{x},\widehat{\xi}\,)$ в противоречии с тем, что $(\widehat{x},\widehat{\xi},\widehat{u})$ – сильный минимум в задаче (1).

Следствие 2 доказано.

§ 5. Расшифровки для задачи оптимального управления

В этом параграфе будет показано, что стандартная задача оптимального управления легко переписывается в виде задачи (1), и, тем самым, для нее справедливы аналоги доказанных выше результатов.

Пусть $[t_0,t_1]$ – отрезок прямой, Ω_0 и Ω – открытые множества соответственно в $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, U – непустое подмножество $\mathbb{R}^r$, $\varphi\colon \Omega_0 \times \operatorname{cl} U \to \mathbb{R}^n$ ($\operatorname{cl} U$ обозначает замыкание множества U), $f_0\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^{m_1}$ и $g\colon \Omega \to \mathbb{R}^{m_2}$.

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления (в канонической форме):

$$\begin{aligned} f_0(x(t_0),x(t_1)) \to \min, \qquad \dot{x} = \varphi(t,x,u), \quad u(t) \in U, \\ f(x(t_0),x(t_1)) \leqslant 0, \qquad g(x(t_0),x(t_1)) = 0. \end{aligned} \tag{40}$$

Пару $(x(\,\cdot\,),u(\,\cdot\,)) \in \mathrm{AC}([t_0,t_1],\mathbb{R}^n) \times L_\infty([t_0,t_1],\mathbb{R}^r)$, где $\mathrm{AC}([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$ – совокупность абсолютно непрерывных вектор-функций на $[t_0,t_1]$, назовем *допустимым процессом* в задаче (40), если $\{(t,x(t))\colon t \in [t_0,t_1]\} \subset \Omega_0$, $(x(t_0),x(t_1)) \in \Omega$, равенство $\dot{x}(t) = \varphi(t,x(t),u(t))$ и включение $u(t) \in U$ выполняются для почти всех $t \in [t_0,t_1]$, $f(x(t_0),x(t_1)) \leqslant 0$ и $g(x(t_0),x(t_1)) = 0$.

Допустимый процесс $(\widehat{x}(\,\cdot\,),\widehat{u}(\,\cdot\,))$ называется *сильным минимумом*, если существует такое $\varepsilon > 0$, что для всякого допустимого процесса $(x(\,\cdot\,),u(\,\cdot\,))$, для которого $\|x(\,\cdot\,) - \widehat{x}(\,\cdot\,)\|_{C([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$, справедливо неравенство

$$f_0(x(t_0),x(t_1)) \geqslant f_0(\widehat{x}(t_0),\widehat{x}(t_1)).$$

Пусть функции f_0, f, g и φ те же, что и в формулировке задачи (40). Задачу

$$\begin{gathered} f_0(x(t_0),x(t_1))\to\min, \qquad \dot x=\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\varphi(t,x,u_i(t)), \quad f(x(t_0),x(t_1))\leqslant 0,\\ g(x(t_0),x(t_1))=0, \qquad \overline{\alpha}=(\alpha_1,\dots,\alpha_k)^T\in\Sigma^k,\\ \overline{u}(t)=(u_0(t),u_1(t),\dots,u_k(t))\in U^{k+1}, \end{gathered}\tag{41}$$

где $\alpha_0=1-\sum_{i=1}^{k}\alpha_i$, относительно переменных $x(\,\cdot\,)$, $\overline{\alpha}$ и $\overline{u}(\,\cdot\,)$ назовем *k-релаксацией задачи* (40).

Обычным образом определяются понятия допустимой тройки

$$(x(\,\cdot\,),\overline{\alpha},\overline{u}(\,\cdot\,))\in \mathrm{AC}([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)\times\Sigma^k\times(L_\infty([t_0,t_1],\mathbb{R}^r))^{k+1}$$

и локального минимума в данной задаче.

Пусть φ и U такие, как в задаче (40), $f\colon\Omega\to\mathbb{R}^{l_1}$, $g\colon\Omega\to\mathbb{R}^{l_2}$. Систему вида

$$\dot x=\varphi(t,x,u), \quad u(t)\in U, \qquad f(x(t_0),x(t_1))\leqslant 0, \qquad g(x(t_0),x(t_1))=0 \tag{42}$$

назовем *управляемой системой* (φ,f,g).

Пусть $k\in\mathbb{N}$. Рассмотрим также такую управляемую систему:

$$\begin{gathered} \dot x=\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\varphi(t,x,u_i(t)), \qquad f(x(t_0),x(t_1))\leqslant 0, \quad g(x(t_0),x(t_1))=0,\\ \overline{\alpha}=(\alpha_1,\dots,\alpha_k)^T\in\Sigma^k, \qquad \overline{u}(t)=(u_0(t),u_1(t),\dots,u_k(t))\in U^{k+1}. \end{gathered}\tag{43}$$

Обозначим $\Phi_k(x(\,\cdot\,),\overline{\alpha},\overline{u}(\,\cdot\,))(\,\cdot\,)=\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\varphi(\cdot,x(\,\cdot\,),u_i(\,\cdot\,))$ и будем говорить о системе (43) как об управляемой системе (Φ_k,f,g). Управляющими параметрами здесь являются пары $(\overline{\alpha},\overline{u}(\,\cdot\,))\in\Sigma^k\times\mathscr{U}^{k+1}$.

Естественным образом определяются допустимые элементы для управляемых систем (42) и (43).

Сформулируем понятия управляемости и регулярности управляемой системы.

Определение 4. Пусть $(\widehat{x}(\,\cdot\,),\widehat{u}(\,\cdot\,))$ – допустимый процесс для управляемой системы (φ,f,g). Скажем, что эта система *локально управляема относительно процесса* $(\widehat{x}(\,\cdot\,),\widehat{u}(\,\cdot\,))$, если для каждой окрестности W точки $\widehat{x}(\,\cdot\,)$ существуют такие окрестности W_1 и W_2 нулей в $\mathbb{R}^{l_1}$ и $\mathbb{R}^{l_2}$, что для любого $y=(y_1,y_2)\in W_1\times W_2$ найдется процесс $(x_y(\,\cdot\,),u_y(\,\cdot\,))$, удовлетворяющий условиям $\dot x_y(t)=\varphi(t,x_y(t),u_y(t))$ и $u_y(t)\in U$ для почти всех $t\in[t_0,t_1]$, $(x_y(t_0),x_y(t_1))\in\Omega$, и такой, что $x_y(\,\cdot\,)\in W$, $f(x_y(t_0),x_y(t_1))\leqslant y_1$ и $g(x_y(t_0),x_y(t_1))=y_2$.

Отображения f и g рассматриваем как функции переменных $\zeta_1\in\mathbb{R}^n$ и $\zeta_2\in\mathbb{R}^n$. Если фиксирована пара $(\widehat{x}(\,\cdot\,),\widehat{u}(\,\cdot\,))$, то для сокращения записи их частные производные по ζ_1 и ζ_2 в точке $(\widehat{x}(t_0),\widehat{x}(t_1))$ записываем как $\widehat{f}_{\zeta_i}$ и $\widehat{g}_{\zeta_i}$, а сопряженные операторы к ним обозначаем $\widehat{f}^{\,*}_{\zeta_i}$ и $\widehat{g}^{\,*}_{\zeta_i}$, $i=1,2$. Пишем также $\widehat{\varphi}(t)=\varphi(t,\widehat{x}(t),\widehat{u}(t))$ и $\widehat{\varphi}_x(t)=\varphi_x(t,\widehat{x}(t),\widehat{u}(t))$.

Обозначим через $H(t,x,u,p(\,\cdot\,))=\langle p(t),\varphi(t,x,u)\rangle$ *функцию Понтрягина задачи* (40), где $p(\,\cdot\,)\colon[t_0,t_1]\to(\mathbb{R}^n)^*$.

Определение 5. Скажем, что управляемая система (φ, f, g) *регулярна в допустимой точке* $(\widehat{x}(\,\cdot\,), \widehat{u}(\,\cdot\,))$, если система уравнений

$$\begin{cases} -\dot{p} = p\,\widehat{\varphi}_x(t), \quad p(t_0) = \widehat{f}^{\,*}_{\zeta_1}\lambda_1 + \widehat{g}^{\,*}_{\zeta_1}\lambda_2, \quad p(t_1) = -\widehat{f}^{\,*}_{\zeta_2}\lambda_1 - \widehat{g}^{\,*}_{\zeta_2}\lambda_2, \\ \max\limits_{u\in U} H(t, \widehat{x}(t), u, p(t)) = H(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t), p(t)) \quad \forall\, \text{п.в. } t \in [t_0, t_1], \\ \langle \lambda_1, f(\widehat{x}(t_0), \widehat{x}(t_1))\rangle = 0 \end{cases}$$

относительно переменных $p(\,\cdot\,) \in \mathrm{AC}([t_0, t_1], (\mathbb{R}^n)^*)$, $\lambda_1 \in (\mathbb{R}^{l_1})^*_+$ и $\lambda_2 \in (\mathbb{R}^{l_2})^*$ имеет только тривиальное решение.

Определение 6. Скажем, что управляемая система (Φ_k, f, g) *регулярна в допустимой точке* $(\widehat{x}(\,\cdot\,), \widehat{\overline{\alpha}}, \widehat{u}(\,\cdot\,))$, если система уравнений

$$\begin{cases} -\dot{p} = p\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \widehat{\alpha}_i \varphi_x(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}_i(t)), \quad p(t_0) = \widehat{f}^{\,*}_{\zeta_1}\lambda_1 + \widehat{g}^{\,*}_{\zeta_1}\lambda_2, \\ p(t_1) = -\widehat{f}^{\,*}_{\zeta_2}\lambda_1 - \widehat{g}^{\,*}_{\zeta_2}\lambda_2, \\ \min\limits_{1\leqslant i\leqslant k} \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} H\big(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}_i(t), p(t)\big)\,dt \geqslant \int_{t_0}^{t_1} H\big(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}_0(t), p(t)\big)\,dt, \\ \langle \lambda_1, f(\widehat{x}(t_0), \widehat{x}(t_1))\rangle = 0, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \widehat{\alpha}_i \int_{t_0}^{t_1} \big(H(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}_0(t), p(t)) - H(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}_i(t), p(t))\big)\,dt = 0 \end{cases}$$

относительно переменных $p(\,\cdot\,) \in \mathrm{AC}([t_0, t_1], (\mathbb{R}^n)^*)$, $\lambda_1 \in (\mathbb{R}^{l_1})^*_+$ и $\lambda_2 \in (\mathbb{R}^{l_2})^*$ имеет только тривиальное решение.

Сформулируем теперь аналоги теорем 1, 2 и следствия 2 для рассматриваемой задачи оптимального управления, а затем приведем их доказательства. Но сначала сформулируем те условия (назовем их условиями $\mathscr{A}$), которым должны удовлетворять функции, входящие в постановку задачи (40).

Условия $\mathscr{A}$. Отображение $\varphi\colon \Omega_0 \times \mathrm{cl}\,U \to \mathbb{R}^n$ непрерывно вместе со своей частной производной по x на $\Omega_0 \times \mathrm{cl}\,U$, а функция $f_0\colon \Omega \to \mathbb{R}$ и отображения $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^{m_1}$ и $g\colon \Omega \to \mathbb{R}^{m_2}$ непрерывно дифференцируемы на Ω.

Заметим, что это вполне стандартные предположения в задаче оптимального управления.

Обозначим через S значение задачи (40), т.е. точную нижнюю грань минимизируемого функционала при данных ограничения.

Теорема 3. *Пусть управляемая система, задающая ограничения в задаче* (41), *регулярна в допустимой точке* $(\widehat{x}(\,\cdot\,), \widehat{\overline{\alpha}}, \widehat{\overline{u}}(\,\cdot\,))$ *и выполнены условия* $\mathscr{A}$.

Тогда условие $f_0(\widehat{x}(t_0), \widehat{x}(t_1)) = S$ *необходимо для того, чтобы точка* $(\widehat{x}(\,\cdot\,), \widehat{\overline{\alpha}}, \widehat{\overline{u}}(\,\cdot\,))$ *была глобальным минимумом в задаче* (41), *и достаточно для того, чтобы эта точка была локальным минимумом в данной задаче.*

Проиллюстрируем здесь на известном примере Больца возможности, которые предоставляет эта теорема в том случае, когда нет решения в исходной задаче.

Рассмотрим задачу

$$\int_0^1 \big(x^2(t) + (1 - \dot{x}^2(t))^2\big)\, dt \to \min, \qquad x(0) = 0, \quad x(1) = 0, \tag{44}$$

где $x(\cdot) \in \mathrm{AC}([0,1])$ и $\dot{x}(\cdot) \in L_\infty([0,1])$.

Вводя новую переменную, эту задачу стандартным образом переписываем в виде

$$\begin{gathered} x_2(1) \to \min, \qquad \dot{x}_1 = u(t), \quad \dot{x}_2 = x_1^2 + (1 - u^2(t)), \\ x_1(0) = 0, \quad x_1(1) = 0, \quad x_2(0) = 0. \end{gathered}$$

Сопоставим этой задаче следующую релаксационную задачу:

$$\begin{gathered} x_2(1) \to \min, \qquad \dot{x}_1 = (1 - \alpha_1)u_0(t) + \alpha_1 u_1(t), \\ \dot{x}_2 = (1 - \alpha_1)\big(x_1^2 + (1 - u_0^2(t))^2\big) + \alpha_1\big(x_1^2 + (1 - u_1^2(t))^2\big), \\ x_1(0) = 0, \quad x_1(1) = 0, \quad x_2(0) = 0, \end{gathered} \tag{45}$$

где $0 \leqslant \alpha_1 < 1$ и $u_i(\cdot) \in L_\infty([0,1])$, $i = 0, 1$.

Так как, очевидно, $x_2(1) \geqslant 0$, то легко видеть, что, например, набор $\widehat{x}_1(\cdot) = \widehat{x}_2(\cdot) = 0$, $\widehat{\alpha}_1 = 1/2$, $\widehat{u}_0(\cdot) = 1$ и $\widehat{u}_1(\cdot) = -1$ доставляет глобальный минимум в данной задаче и $\widehat{x}_2(1) = 0$.

Покажем, что в этой точке управляемая система, задающая ограничения в задаче (45), регулярна. Действительно, пусть переменные $p_i(\cdot)$, $i = 1, 2$, и $\lambda_2 = (\lambda_{21}, \lambda_{22}, \lambda_{23})$ (λ_1 отсутствует) удовлетворяют соотношениям в определении 6. Тогда из первого соотношения следует, что $\dot{p}_i(\cdot) = 0$, $i = 1, 2$, $p_1(0) = \lambda_{21}$, $p_1(1) = -\lambda_{22}$, $p_2(0) = \lambda_{23}$ и $p_2(1) = 0$. Таким образом, $p_1(\cdot)$ и $p_2(\cdot)$ – константы и, следовательно, $p_2(\cdot) = 0$ и $\lambda_{23} = 0$.

Последнее соотношение в определении 6 означает (так как $\widehat{\alpha}_1 = 1/2$), что

$$\int_0^1 p_1 \widehat{u}_0(t)\, dt = \int_0^1 p_1 \widehat{u}_1(t)\, dt,$$

или $p_1 = -p_1$, т.е. $p_1 = 0$ и, значит, $\lambda_{21} = \lambda_{22} = 0$. Регулярность доказана.

Согласно теореме 4 значение исходной задачи (44) равно нулю, но при этом, как легко заметить, решения у этой задачи не существует. Однако из доказательства теоремы следует, что существует минимизирующая последовательность функций $x_s(\cdot)$, $s \in \mathbb{N}$, для задачи (44) следующего вида: $x_s(\cdot)$ – решение краевой задачи $\dot{x} = M_s(\widehat{\alpha}_1, \widehat{u}_0(\cdot), \widehat{u}_1(\cdot))(t)$, $x(0) = x(1) = 0$, где $M_s(\widehat{\alpha}_1, \widehat{u}_0(\cdot), \widehat{u}_1(\cdot))(\cdot)$ – микс, построенный по $\widehat{\alpha}_1, \widehat{u}_0(\cdot), \widehat{u}_1(\cdot)$. Общее конструктивное определение микса будет дано ниже, но в рассматриваемой здесь ситуации $M_s(\widehat{\alpha}_1, \widehat{u}_0(\cdot), \widehat{u}_1(\cdot))(t) = \operatorname{sign}\sin 2\pi s t$ для всех $s \in \mathbb{N}$ и $t \in [0,1]$. Таким образом, мы получаем хорошо известную “пилообразную” последовательность

$$x_s(t) = \int_0^t \operatorname{sign}\sin 2\pi s\tau\, d\tau,$$

сходящуюся равномерно к нулю, на которой минимизируемый функционал в задаче Больца сходится к своей точной нижней грани, равной нулю.

Теорема 4. *Пусть управляемая система* (φ, f, g) *регулярна в допустимой точке* $(\widehat{x}(\,\cdot\,), \widehat{u}(\,\cdot\,))$ *и выполнены условия* $\mathscr{A}$.

Тогда управляемая система (φ, f, g) *локально управляема относительно процесса* $(\widehat{x}(\,\cdot\,), \widehat{u}(\,\cdot\,))$.

Более того, существует такая константа $c_0 > 0$, *что для переменных* y *и* $x_y(\,\cdot\,)$ *из определения управляемости системы* (φ, f, g) *справедлива оценка*

$$\|x_y(\,\cdot\,) - \widehat{x}(\,\cdot\,)\|_{C([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)} \leqslant c_0|y|.$$

Теорема 5. *Пусть* $(\widehat{x}(\,\cdot\,), \widehat{u}(\,\cdot\,))$ *– сильный минимум в задаче* (40) *и выполнены условия* $\mathscr{A}$.

Тогда найдутся ненулевой набор $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}^{m_1})^*_+ \times (\mathbb{R}^{m_2})^*$ *и функция* $p(\,\cdot\,) \in \mathrm{AC}([t_0,t_1], (\mathbb{R}^n)^*)$ *такие, что* $p(\,\cdot\,)$ *является решением дифференциального уравнения*

$$-\dot p = p\,\widehat{\varphi}_x(t)$$

с краевыми условиями

$$p(t_0) = \lambda_0 \widehat{f}_{0\zeta_1} + \widehat{f}^{\,*}_{\zeta_1}\lambda_1 + \widehat{g}^{\,*}_{\zeta_1}\lambda_2, \qquad p(t_1) = -\lambda_0 \widehat{f}_{0\zeta_2} - \widehat{f}^{\,*}_{\zeta_2}\lambda_1 - \widehat{g}^{\,*}_{\zeta_2}\lambda_2,$$
$$\langle \lambda_1, f(\widehat{x}(t_0), \widehat{x}(t_1)\rangle = 0$$

и для почти всех $t \in [t_0,t_1]$ *выполняется равенство*

$$\max_{u\in U} H(t, \widehat{x}(t), u, p(t)) = H(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t), p(t)).$$

Если управляемая система, задающая ограничения в задаче (40), *регулярна в точке* $(\widehat{x}(\,\cdot\,), \widehat{u}(\,\cdot\,))$, *то* $\lambda_0 \neq 0$.

Перед непосредственным доказательством сформулированных теорем проведем редукцию задачи (40) к задаче (1). Пусть

$$X = Y = C([t_0,t_1], \mathbb{R}^n),$$
$$\mathscr{U} = \{u(\,\cdot\,) \in L_\infty([t_0,t_1], \mathbb{R}^r) \colon u(t) \in U \text{ для п.в. } t \in [t_0,t_1]\},$$
$$V = \{x(\,\cdot\,) \in C([t_0,t_1], \mathbb{R}^n) \colon (t, x(t)) \in \Omega_0,\ t \in [t_0,t_1]\},$$

V_0 – проекция Ω на первую компоненту произведения $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и $G = V_0 \times V$. Отображение $F \colon G \times \mathscr{U} \to C([t_0,t_1], \mathbb{R}^n)$ определим формулой

$$F\bigl(\xi, x(\,\cdot\,), u(\,\cdot\,)\bigr)(t) = x(t) - \xi - \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau, x(\tau), u(\tau))\,d\tau \quad \forall\, t \in [t_0,t_1].$$

Функции f_0, f и g в задаче (40) будем рассматривать как функции на G, где паре $(\xi, x(\,\cdot\,))$ сопоставляются величины $f_0(\xi, x(t_1))$, $f(\xi, x(t_1))$ и $g(\xi, x(t_1))$.

Рассмотрим задачу

$$\begin{gathered} f_0(\xi, x(\,\cdot\,)) \to \min, \qquad F\bigl(\xi, x(\,\cdot\,), u(\,\cdot\,)\bigr)(\,\cdot\,) = 0, \quad u(\,\cdot\,) \in \mathscr{U}, \\ f(\xi, x(\,\cdot\,)) \leqslant 0, \qquad g(\xi, x(\,\cdot\,)) = 0, \end{gathered} \tag{46}$$

которая имеет вид задачи (1), но где переменные x и ξ поменялись местами, что технически более удобно для приложения к задаче оптимального управления.

В конце этого параграфа мы покажем, что условия $\mathscr{A}$ гарантируют для данной задачи выполнение основных предположений (сформулированных в § 2).

Легко убедиться, что пара $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))$ – сильный минимум в задаче (40) тогда и только тогда, когда тройка $(\widehat{x}(t_0),\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))$ – сильный минимум в задаче (46).

Пусть $f\colon G\to\mathbb{R}^{l_1}$ и $g\colon G\to\mathbb{R}^{l_2}$. Наряду с задачей (46) рассмотрим следующую управляемую систему:

$$F(\xi,x(\cdot),u(\cdot))(\cdot)=0,\quad u(\cdot)\in\mathscr{U},\qquad f(\xi,x(\cdot))\leqslant 0,\quad g(\xi,x(\cdot))=0, \tag{47}$$

которую назовем управляемой системой $(F(\cdot),f(\cdot),g(\cdot))$ (чтобы отличать по написанию от ее абстрактного аналога (3)).

Пусть $k\in\mathbb{N}$. Рассмотрим также такую управляемую систему (напомним, что $\alpha_0=1-\sum_{i=1}^k\alpha_i$):

$$\sum_{i=0}^k\alpha_iF(\xi,x(\cdot),u_i(\cdot))(\cdot),\qquad \overline{\alpha}=(\alpha_1,\dots,\alpha_k)^T\in\Sigma^k,$$
$$f(\xi,x(\cdot))\leqslant 0,\quad g(\xi,x(\cdot))=0,\qquad \overline{u}(\cdot)=(u_0(\cdot),u_1(\cdot),\dots,u_k(\cdot))\in\mathscr{U}^{k+1}. \tag{48}$$

Обозначим $\mathscr{F}_k(\xi,x(\cdot),\overline{\alpha},\overline{u}(\cdot))(\cdot)=\sum_{i=0}^k\alpha_iF(\xi,x(\cdot),u_i(\cdot))(\cdot)$ и будем говорить о системе (48) как об управляемой системе $(\mathscr{F}_k(\cdot),f(\cdot),g(\cdot))$.

Определяющим моментом при выводе теорем 3–5 из их абстрактных аналогов является доказательство эквивалентности условий регулярности для управляемых систем $(F(\cdot),f(\cdot),g(\cdot))$ и $(\mathscr{F}_k(\cdot),f(\cdot),g(\cdot))$, приведенных в определениях 2 и 3, и условий регулярности для управляемых систем (φ,f,g) и (Φ_k,f,g), приведенных соответственно в определениях 5 и 6.

Мы докажем этот факт только для систем $(F(\cdot),f(\cdot),g(\cdot))$ и (φ,f,g). Для второй пары систем рассуждения совершенно аналогичны.

Предложение 3. *Управляемая система (φ,f,g) регулярна в допустимой точке $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))$ тогда и только тогда, когда управляемая система $(F(\cdot),f(\cdot),g(\cdot))$ регулярна в точке*[6] $(\widehat{x}(t_0),\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))$.

Доказательство. Пусть управляемая система (φ,f,g) регулярна в точке $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))$. Покажем, что тогда управляемая система $(F(\cdot),f(\cdot),g(\cdot))$ регулярна в точке $(\widehat{x}(t_0),\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))$. Доказываем от противного: предположим, что управляемая система $(F(\cdot),f(\cdot),g(\cdot))$ нерегулярна в этой точке. Тогда существует нетривиальный набор $(y^*,\lambda_1,\lambda_2)\in Y^*\times(\mathbb{R}^{l_1})^*_+\times(\mathbb{R}^{l_2})^*$, удовлетворяющий системе уравнений (5). В нашем случае $Y=C([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$ и, следовательно, Y^* можно отождествить с вектор-функциями $\mu(\cdot)$ ограниченной вариации на $[t_0,t_1]$, непрерывными справа на (t_0,t_1) и равными нулю в точке t_0. Частная производная по $x(\cdot)$ отображения F в точке $(\widehat{x}(t_0),\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))$ действует по правилу

$$F_{x(\cdot)}\bigl(\widehat{x}(t_0),\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot)\bigr)[x(\cdot)](t)=x(t)-\int_{t_0}^t\widehat{\varphi}_x(\tau)x(\tau)\,d\tau\quad\forall\,t\in[t_0,t_1],$$

и легко видеть, что $\widehat{f}_\xi=\widehat{f}_{\zeta_1}$, $\widehat{f}_{x(\cdot)}=\widehat{f}_{\zeta_2}$ и $\widehat{g}_\xi=\widehat{g}_{\zeta_1}$, $\widehat{g}_{x(\cdot)}=\widehat{g}_{\zeta_2}$.

[6] Очевидно, что точка $(\widehat{x}(t_0),\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))$ допустима для управляемой системы $(F(\cdot),f(\cdot),g(\cdot))$.

Из сказанного следует, что первое уравнение в (5) в нашем случае записывается как тождество

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(x(t)-\int_{t_0}^{t}\widehat{\varphi}_x(\tau)x(\tau)\,d\tau\right)d\mu(t)+\langle\widehat{f}^*_{\zeta_2}\lambda_1+\widehat{g}^*_{\zeta_2}\lambda_2,x(\,\cdot\,)\rangle=0,$$

справедливое для всех $x(\,\cdot\,)\in C([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$.

Далее, частная производная по ξ отображения F, очевидно, равна $-E$, где E – единичная матрица размера $n\times n$. Меняя порядок интегрирования в двойном интеграле (после интегрирования второго слагаемого в больших скобках), а затем складывая преобразованное тождество со вторым уравнением в (5), получаем, что для всех $\xi\in\mathbb{R}^n$ и $x(\,\cdot\,)\in C([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$ справедливо такое равенство:

$$\int_{t_0}^{t_1}x(t)\,d\left(\mu(t)+\int_{t}^{t_1}\left(\int_{\tau}^{t_1}d\mu(z)\right)\widehat{\varphi}_x(\tau)\,d\tau+c\right)$$
$$+\langle\widehat{f}^*_{\zeta_2}\lambda_1+\widehat{g}^*_{\zeta_2}\lambda_2,x(\,\cdot\,)\rangle-\xi\int_{t_0}^{t_1}d\mu(t)+\langle\widehat{f}^*_{\zeta_1}\lambda_1+\widehat{g}^*_{\zeta_1}\lambda_2,\xi\rangle=0,$$

где константа c подобрана так, что функция ограниченной вариации в скобках в точке t_0 равна нулю.

Пусть функция $\theta(\,\cdot\,)$ на $[t_0,t_1]$ такова, что $\theta(t)=0$, если $t\in[t_0,t_1)$, и $\theta(t_1)=\widehat{f}^*_{\zeta_2}\lambda_1+\widehat{g}^*_{\zeta_2}\lambda_2$. Тогда последнее соотношение для всех $\xi\in\mathbb{R}^n$ и $x(\,\cdot\,)\in C([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$ можно записать следующим образом:

$$\int_{t_0}^{t_1}x(t)\,d\left(\mu(t)+\int_{t}^{t_1}\left(\int_{\tau}^{t_1}d\mu(z)\right)\widehat{\varphi}_x(\tau)\,d\tau+\theta(t)+c\right)$$
$$+\left\langle\widehat{f}^*_{\zeta_1}\lambda_1+\widehat{g}^*_{\zeta_1}\lambda_2-\int_{t_0}^{t_1}d\mu(t),\xi\right\rangle=0.$$

В частности, это верно, если $\xi=x(t_0)$, где $x(\,\cdot\,)\in C([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$. Тогда по теореме Рисса

$$\mu(t)+\int_{t}^{t_1}\left(\int_{\tau}^{t_1}d\mu(z)\right)\widehat{\varphi}_x(\tau)\,d\tau+\theta(t)+c=0\quad\forall\,t\in[t_0,t_1],\tag{49}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}d\mu(t)=\widehat{f}^*_{\zeta_1}\lambda_1+\widehat{g}^*_{\zeta_1}\lambda_2.\tag{50}$$

Положим

$$p(t)=\int_{t}^{t_1}d\mu(z)=\mu(t_1)-\mu(t),$$

если $t\in[t_0,t_1)$, и $p(t_1)=-\widehat{f}^*_{\zeta_2}\lambda_1-\widehat{g}^*_{\zeta_2}\lambda_2$. Отсюда и из (49) следует, что функция $p(\,\cdot\,)$ абсолютно непрерывна на $[t_0,t_1]$ и $-\dot{p}(t)-p(t)\widehat{\varphi}_x(t)=0$ для почти всех $t\in[t_0,t_1]$. Соотношение (50) означает, что $p(t_0)=\widehat{f}^*_{\zeta_1}\lambda_1+\widehat{g}^*_{\zeta_1}\lambda_2$.

Таким образом, показано, что тройка $(p(\,\cdot\,),\lambda_1,\lambda_2)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению и краевым условиям в определении 5.

Доказательство того, что функция $p(\,\cdot\,)$ удовлетворяет второму соотношению в определении 5, вполне стандартно (см., например, [5]). Выполнение последнего равенства очевидно.

По предположению набор $(y^*, \lambda_1, \lambda_2)$ ненулевой, поэтому λ_1 и λ_2 одновременно не равны нулю. Действительно, оператор $\widehat{F}_{x(\,\cdot\,)}$, как хорошо известно, обратим и, значит, сопряженный оператор обратим. Но тогда если $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то из первого соотношения в (5) последует, что $y^* = 0$.

Итак, тройка $(p(\,\cdot\,), \lambda_1, \lambda_2)$ ненулевая, и, тем самым, если управляемая система (φ, f, g) регулярна в точке $(\widehat{x}(\,\cdot\,), \widehat{u}(\,\cdot\,))$, то управляемая система $(F(\,\cdot\,), f(\,\cdot\,), g(\,\cdot\,))$ регулярна в точке $(\widehat{x}(t_0), \widehat{x}(\,\cdot\,), \widehat{u}(\,\cdot\,))$.

Обратное утверждение (которое не нужно для доказательства аналогов общих теорем для задачи (40)) доказывается обращением приведенных рассуждений, и мы на этом останавливаться не будем.

Предложение 3 доказано.

Теоремы 3–5 представляют собой теперь непосредственные следствия доказанных их абстрактных аналогов и предложения 3.

В заключение этого параграфа покажем, что условия $\mathscr{A}$, которым удовлетворяют данные задачи (40), гарантируют выполнение для задачи (46) основных предположений, сформулированных в § 2.

Покажем, что отображения F и $F_{x(\,\cdot\,)}$ непрерывны на $G \times \mathscr{U}$.

Пусть $(\xi', x'(\,\cdot\,), u'(\,\cdot\,)) \in G \times \mathscr{U}$ и $0 < \varepsilon \leqslant 1$. Найдется такое $0 < \delta_0 \leqslant \varepsilon/3$, что компакт $K = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon |x - x'(t)| \leqslant \delta_0,\ t \in [t_0, t_1]\}$ принадлежит Ω_0.

Обозначим $\gamma = \|u'(\,\cdot\,)\|_{L_\infty([t_0,t_1],\mathbb{R}^r)} + 1$. Отображение φ равномерно непрерывно на компакте $\mathscr{K} = K \times (\operatorname{cl} U \cap B_{\mathbb{R}^r}(0, \gamma))$, и поэтому существует такое $0 < \delta_1 \leqslant \delta_0$, что справедливо $|\varphi(t, x_1, u_1) - \varphi(t, x_2, u_2)| < \varepsilon/(3(t_1 - t_0))$ для всех $(t, x_i, u_i) \in \mathscr{K}$, $i = 1, 2$, таких, что $|x_1 - x_2| < \delta_1$ и $|u_1 - u_2| < \delta_1$.

Пусть

$$x(\,\cdot\,) \in U_{C([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)}(x'(\,\cdot\,), \delta_1), \qquad |\xi - \xi'| < \frac{\varepsilon}{3},$$
$$u(\,\cdot\,) \in U_{L_\infty([t_0,t_1],\mathbb{R}^r)}(u'(\,\cdot\,), \delta_1).$$

Тогда для каждого $t \in [t_0, t_1]$ имеем

$$\bigl|F(\xi, x(\,\cdot\,), u(\,\cdot\,))(t) - F(\xi', x'(\,\cdot\,), u'(\,\cdot\,))(t)\bigr| \leqslant |x(t) - x'(t)| + |\xi - \xi'| + \int_{t_0}^{t_1} \bigl|\varphi(\tau, x(\tau), u(\tau)) - \varphi(\tau, x'(\tau), u'(\tau))\bigr|\, d\tau < \varepsilon,$$

т.е. F непрерывно в точке $(\overline{\xi}, \overline{x}(\,\cdot\,), \overline{u}(\,\cdot\,))$ и, значит, всюду на $G \times \mathscr{U}$.

Поскольку производная F по $(\xi, x(\,\cdot\,))$ в точке $(\xi', x'(\,\cdot\,), u'(\,\cdot\,)) \in G \times \mathscr{U}$ действует для всех $(\xi, h(\,\cdot\,)) \in \mathbb{R}^n \times C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ по формуле

$$F_{(\xi, x(\,\cdot\,))}\bigl(\xi', x'(\,\cdot\,), u'(\,\cdot\,)\bigr)[\xi, h(\,\cdot\,)](t) = -\xi + h(t) - \int_{t_0}^{t} \varphi_x(\tau, x'(\tau), u'(\tau)) h(\tau)\, d\tau,$$

то ее непрерывность доказывается точно так же, как непрерывность самого отображения F (роль φ играет отображение φ_x, которое по условию непрерывно по совокупности переменных).

Построим теперь микс управлений и проверим, что он обладает нужными свойствами.

Пусть $(\widehat{\widehat{\xi}}, \widehat{x}(\,\cdot\,), \widehat{\widehat{u}}(\,\cdot\,)) \in G \times \mathscr{U}^{k+1}$, U_1 – некоторая ограниченная окрестность точки $\widehat{\widehat{u}}(\,\cdot\,)$ и $\gamma_1 = \sup_{\overline{u}(\,\cdot\,) \in U_1} \|\overline{u}(\,\cdot\,)\|_{(L_\infty([t_0,t_1],\mathbb{R}^r))^{k+1}}$. Найдется такое $\rho > 0$, что компакт $K_1 = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon |x - \widehat{x}(t)| \leqslant \rho,\ t \in [t_0, t_1]\}$ принадлежит Ω_0.

Положим $\mathscr{O}(\widehat{\xi},\widehat{x}(\,\cdot\,),\widehat{\overline{u}}(\,\cdot\,)) = V_0 \times U_{C([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)}(\widehat{x}(\,\cdot\,),\rho) \times U_1$. Пусть $(\xi, x(\,\cdot\,), \overline{u}(\,\cdot\,)) \in \mathscr{O}(\widehat{\xi},\widehat{x}(\,\cdot\,),\widehat{\overline{u}}(\,\cdot\,))$, $\overline{u}(\,\cdot\,) = (u_0(\,\cdot\,), u_1(\,\cdot\,), \dots, u_k(\,\cdot\,))$, и $0 < \varepsilon < t_1 - t_0$.

Отображение φ непрерывно на компакте $\mathscr{K}_1 = K_1 \times (\operatorname{cl} U \cap B_{\mathbb{R}^r}(0,\gamma_1))$. Обозначим $C_1 = \max(\max\{|\varphi(t,x,u)|,\ (t,x,u) \in \mathscr{K}_1\}, 1/6)$.

Из C-свойства Лузина и регулярности меры Лебега следует существование такого замкнутого множества $A = A(\varepsilon) \subset [t_0,t_1]$, что $\operatorname{mes} A > (t_1-t_0) - \varepsilon/(6C_1)$ и на A функции $u_i(\,\cdot\,)$, $i = 0,1,\dots,k$, непрерывны. Кроме того, существуют непрерывные функции $v_i(\,\cdot\,)$ на $[t_0,t_1]$ такие, что $v_i(\,\cdot\,) = u_i(\,\cdot\,)$ на A и

$$\|v_i(\,\cdot\,)\|_{C([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)} \leqslant \|u_i(\,\cdot\,)\|_{L_\infty([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)}, \qquad i = 0,1,\dots,k.$$

Построим теперь микс управлений $u_0(\,\cdot\,), u_1(\,\cdot\,), \dots, u_k(\,\cdot\,)$. Для этого сопоставим каждому $s \in \mathbb{N}$ разбиение отрезка $[t_0,t_1]$ на s подотрезков $\Delta_j(s) = [t_0 + j(t_1-t_0)/s,\ t_0 + (j+1)(t_1-t_0)/s]$ длины

$$|\Delta_j(s)| = \frac{t_1 - t_0}{s}, \qquad j = 0,\dots,s-1.$$

Пусть $\overline{\alpha} = (\alpha_1,\dots,\alpha_k)^T \in \Sigma^k$ и $\alpha_0 = 1 - \sum_{i=1}^k \alpha_i$. Разобьем, далее, каждый подотрезок $\Delta_j(s)$ на $k+1$ последовательных подподотрезков $\Delta_{ji}(s,\overline{\alpha})$ длины

$$|\Delta_{ji}(s,\overline{\alpha})| = \alpha_i |\Delta_j(s)| = \frac{\alpha_i(t_1-t_0)}{s}, \qquad i = 0,\dots,k.$$

Определим функцию $M_s(\overline{\alpha},\overline{u}(\,\cdot\,))(\,\cdot\,) \in L_\infty([t_0,t_1],\mathbb{R}^r)$ по следующему правилу: $M_s(\overline{\alpha},\overline{u}(\,\cdot\,))(\,\cdot\,)$ совпадает с $v_i(\,\cdot\,)$, $0 \leqslant i \leqslant k$, на подподотрезках $\Delta_{ji}(s,\overline{\alpha})$, $0 \leqslant j \leqslant k$. Эту функцию будем называть *миксом управлений* $u_0(\,\cdot\,),\dots,u_k(\,\cdot\,)$.

Поскольку функции, образующие микс, непрерывны, то очевидно, что отображение $\overline{\alpha} \mapsto M_\varepsilon(\overline{\alpha},\overline{u}(\,\cdot\,))(\,\cdot\,)$ из Σ^k в $L_\infty([t_0,t_1],\mathbb{R}^r)$ непрерывно.

Проверим остальные свойства микса.

Выберем $s(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ столь большим, что

$$\bigl|\varphi(t,x(t),v_i(t)) - \varphi(t',x(t'),v_i(t'))\bigr| < \frac{\varepsilon}{3(t_1-t_0)\sqrt{n}}, \qquad i = 0,1,\dots,k,$$

если $t,t' \in \Delta_j(s(\varepsilon))$, $j = 0,1,\dots,s-1$, и при этом

$$|\Delta_j(s(\varepsilon))| = \frac{t_1-t_0}{s(\varepsilon)} < \frac{\varepsilon}{6C_1}.$$

Будем писать $M_\varepsilon(\overline{\alpha},\overline{u}(\,\cdot\,))(\,\cdot\,)$ вместо $M_{s(\varepsilon)}(\overline{\alpha},\overline{u}(\,\cdot\,))(\,\cdot\,)$. Покажем, что

$$\left|F(\xi,x(\,\cdot\,),M_\varepsilon(\overline{\alpha},\overline{u}(\,\cdot\,))(\,\cdot\,))(t) - \sum_{i=0}^k \alpha_i F(\xi,x(\,\cdot\,),u_i(\,\cdot\,))(t)\right| < \varepsilon \tag{51}$$

для всех $t \in [t_0,t_1]$, $(\xi,x(\,\cdot\,),\overline{u}(\,\cdot\,)) \in \mathscr{O}(\widehat{\xi},\widehat{x}(\,\cdot\,),\widehat{\overline{u}}(\,\cdot\,))$ и $\overline{\alpha} = (\alpha_1,\dots,\alpha_k)^T \in \Sigma^k$.

Пусть $t \in (t_0, t_1]$. Выражение под модулем в (51) запишем так:

$$
\begin{aligned}
&F(\xi, x(\cdot), M_\varepsilon(\overline{\alpha}, \overline{u}(\cdot))(\cdot))(t) - \sum_{i=0}^{k} \alpha_i F(\xi, x(\cdot), u_i(\cdot))(t) \\
&\qquad = \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau, x(\tau), M_\varepsilon(\overline{\alpha}, \overline{u}(\cdot))(\cdot))(\tau)\, d\tau - \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau, x(\tau), v_i(\tau))\, d\tau \\
&\qquad\qquad + \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \int_{[t_0,t_1]\setminus A} (\varphi(\tau, x(\tau), v_i(\tau)) - \varphi(\tau, x(\tau), u_i(\tau))\, d\tau. \qquad (52)
\end{aligned}
$$

Предположим сначала, что $t < t_0 + (t_1 - t_0)/s(\varepsilon)$. Тогда, учитывая элементарно проверяемую оценку $\|M_\varepsilon(\overline{\alpha}, \overline{u}(\cdot))\|_{L_\infty([t_0,t_1],\mathbb{R}^r)} \leqslant \gamma_1$, получаем, что сумма первых двух слагаемых справа в (52) по модулю не превосходят величины $2C_1(t - t_0) < 2C_1|\Delta_0(s(\varepsilon))| < \varepsilon/3$.

Пусть теперь на отрезке $[t_0, t]$ содержится целое число подотрезков $\Delta_j(s(\varepsilon))$. На каждом таком подотрезке первые два слагаемых справа в (52) в силу определения микса записываются в виде (для краткости пишем Δ_{ji} вместо $\Delta_{ji}(s(\varepsilon), \overline{\alpha})$ и Δ_j вместо $\Delta_j(s(\varepsilon))$)

$$
\sum_{i=0}^{k} \int_{\Delta_{ji}} \varphi(\tau, x(\tau), v_i(\tau))\, d\tau - \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \int_{\Delta_j} \varphi(\tau, x(\tau), v_i(\tau))\, d\tau. \qquad (53)
$$

Пусть $\varphi(\cdot, x(\cdot), v_i(\cdot)) = (\varphi_1(\cdot, x(\cdot), v_i(\cdot)), \dots, \varphi_n(\cdot, x(\cdot), v_i(\cdot)))^T$ для $i = 0, 1, \dots, k$. Для каждого $1 \leqslant l \leqslant n$ имеем по теореме о среднем для интегралов

$$
\begin{aligned}
&\left| \sum_{i=0}^{k} \int_{\Delta_{ji}} \varphi_l(\tau, x(\tau), v_i(\tau))\, d\tau - \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \int_{\Delta_j} \varphi_l(\tau, x(\tau), v_i(\tau))\, d\tau \right| \\
&\qquad = \left| \sum_{i=0}^{k} \varphi_l(\xi_{li}, x(\xi_{li}), v_i(\xi_{li}))\alpha_i |\Delta_j| - \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \varphi_l(\zeta_{li}, x(\zeta_{li}), v_i(\zeta_{li}))|\Delta_j| \right| \\
&\qquad \leqslant |\Delta_j| \sum_{i=0}^{k} \alpha_i |\varphi_l(\xi_{li}, x(\xi_{li}), v_i(\xi_{li})) - \varphi_l(\zeta_{li}, x(\zeta_{li}), v_i(\zeta_{li}))| \\
&\qquad \leqslant \frac{\varepsilon}{3(t_1 - t_0)\sqrt{n}} |\Delta_j|,
\end{aligned}
$$

где $\xi_{li}, \zeta_{li} \in \Delta_j$, $0 \leqslant i \leqslant k$, $1 \leqslant l \leqslant n$.

Отсюда следует, что выражение в (53) оценивается по модулю величиной $\varepsilon|\Delta_j|/(3(t_1 - t_0))$, а тогда, суммируя эти выражения по всем $\Delta_j \subset [t_0, t]$, получаем для данного случая оценку для первых двух слагаемых справа в (52)

$$
\left| \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau, x(\tau), M_\varepsilon(\overline{\alpha}, \overline{u}(\cdot))(\cdot))(\tau)\, d\tau - \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau, x(\tau), v_i(\tau))\, d\tau \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\,.
$$

Пусть, наконец, отрезок $[t_0, t]$ содержит нецелое число подотрезков $\Delta_j(s(\varepsilon))$. Представим интегралы в первых двух слагаемых справа в (53) как интегралы по отрезку максимальной длины, который содержит целое число подотрезков

$\Delta_j(s(\varepsilon))$, и по оставшемуся отрезку (длина которого меньше $(t_1 - t_0)/s(\varepsilon)$). Оценка для интегралов по первому отрезку только что получена. Для интегралов по второму отрезку она точно такая же, как и в случае, когда $t < t_0 + (t_1 - t_0)/s(\varepsilon)$. Объединяя эти оценки, получаем, что сумма двух первых слагаемых справа в (52) по модулю не превосходит $2\varepsilon/3$.

Третье слагаемое справа в (52), очевидно, оценивается по модулю величиной $(\varepsilon/(6C_1))2C_1 = \varepsilon/3$, и, тем самым, доказана оценка (51).

Так как производная F по $x(\,\cdot\,)$ в точке $(\overline{\xi}, \overline{x}(\,\cdot\,), \overline{u}(\,\cdot\,)) \in G \times \mathscr{U}$ действует для всех $h(\,\cdot\,) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ по формуле

$$F_{x(\,\cdot\,)}(\overline{\xi}, \overline{x}(\,\cdot\,), \overline{u}(\,\cdot\,))[h(\,\cdot\,)](t) = h(t) - \int_{t_0}^{t} \varphi_x(\tau, \overline{x}(\tau), \overline{u}(\tau))h(\tau)\, d\tau,$$

то для доказательства аналога оценки (51) для производной $F_{x(\,\cdot\,)}$ надо фактически повторить только что приведенные рассуждения.

§ 6. Приложение

В этом параграфе, основываясь на методе Ньютона, мы докажем теорему о неявной функции в форме, которая позволяет гарантировать существование неявной функции не только для исходного отображения, но и для “близких” к нему отображений. Кроме того здесь в такой же форме докажем две леммы о существовании решений конечномерной системы нелинейных уравнений.

Пусть X и Y – нормированные пространства, Σ – топологическое пространство и V – открытое подмножество в X. Обозначим через $C^1_x(V \times \Sigma, Y)$ пространство отображений $F\colon V \times \Sigma \to Y$, непрерывных вместе со своей производная по x на $V \times \Sigma$, для которых конечна норма

$$\|F\| = \sup_{(x,\sigma)\in V\times\Sigma} \|F(x,\sigma)\|_Y + \sup_{(x,\sigma)\in V\times\Sigma} \|F_x(x,\sigma)\|.$$

Теорема 6 (о неявной функции). *Пусть X и Y – банаховы пространства, Σ – топологическое пространство, $\widehat{\sigma} \in \Sigma$, V – окрестность точки $\widehat{x} \in X$, $\widehat{F} \in C^1_x(V \times \Sigma, Y)$, $\widehat{F}(\widehat{x}, \widehat{\sigma}) = 0$ и оператор $\widehat{F}_x(\widehat{x}, \widehat{\sigma})$ обратим.*

Тогда найдутся окрестности $V_0' \subset V_0 \subset V$ точки $\widehat{x}$, окрестность U_0 точки $\widehat{\sigma}$ и окрестность W_0 отображения $\widehat{F}$ такие, что для каждого $F \in W_0$ существует непрерывное отображение $\varphi_F\colon U_0 \to V_0$, обладающее тем свойством, что

$$F(\varphi_F(\sigma), \sigma) = 0, \qquad \|\varphi_F(\sigma) - x\|_X \leqslant 2\|(\widehat{F}_x(\widehat{x}, \widehat{\sigma}))^{-1}\|\, \|F(x,\sigma)\|_Y \tag{54}$$

для всех $(x, \sigma) \in V_0' \times U_0$. При этом равенство $F(x, \sigma) = 0$ на $V_0 \times U_0$ возможно лишь тогда, когда $x = \varphi_F(\sigma)$.

Кроме того, если Σ – окрестность $\widehat{\sigma}$ в нормированном пространстве и отображение $\widehat{F}$ дифференцируемо по σ в точке $(\widehat{x}, \widehat{\sigma})$, то отображение $\varphi_{\widehat{F}}$ дифференцируемо в точке $\widehat{\sigma}$ и

$$\varphi'_{\widehat{F}}(\widehat{\sigma}) = -(\widehat{F}_x(\widehat{x}, \widehat{\sigma}))^{-1} \widehat{F}_\sigma(\widehat{x}, \widehat{\sigma}). \tag{55}$$

Доказательство. Обозначаем для краткости $\Lambda = \widehat{F}_x(\widehat{x},\widehat{\sigma})$ и пишем C^1_x вместо $C^1_x(V\times\Sigma,Y)$. Отображение $(x,\sigma)\mapsto \widehat{F}_x(x,\sigma)$ непрерывно в точке $(\widehat{x},\widehat{\sigma})$, и поэтому найдутся $0<\delta\leqslant 1$ такое, что[7] $U_X(\widehat{x},\delta)\subset V$, и окрестность U точки $\widehat{\sigma}$, для которых $\|\widehat{F}_x(x,\sigma)-\Lambda\|\leqslant 1/(8\|\Lambda^{-1}\|)$ при всех $(x,\sigma)\in U_X(\widehat{x},\delta)\times U$.

Положим $V_0=U_X(\widehat{x},\delta)$, а окрестности V_0', U_0 и W_0 выберем так, что $V_0'\subset U_X(\widehat{x},\delta/2)$, $U_0\subset U$ и при этом $\|\widehat{F}(x,\sigma)\|_Y<\delta/(8\|\Lambda^{-1}\|)$, если $(x,\sigma)\in V_0'\times U_0$, $W_0=U_{C^1_x}(\widehat{F},\delta/(8\|\Lambda^{-1}\|))$.

Покажем, что если $F\in W_0$, то для любых $x,x'\in V_0$ и $\sigma\in U_0$ выполняется соотношение

$$\|F(x,\sigma)-F(x',\sigma)-\Lambda(x-x')\|_Y\leqslant \frac{1}{2\|\Lambda^{-1}\|}\|x-x'\|_X. \tag{56}$$

Действительно, во-первых,

$$\begin{aligned}\|F_x(x,\sigma)-F_x(\widehat{x},\widehat{\sigma})\| &\leqslant \|F_x(x,\sigma)-\widehat{F}_x(x,\sigma)\|+\|\widehat{F}_x(x,\sigma)-\widehat{F}_x(\widehat{x},\widehat{\sigma})\|\\ &\quad+\|F_x(\widehat{x},\widehat{\sigma})-\widehat{F}_x(\widehat{x},\widehat{\sigma})\|<\frac{3}{8\|\Lambda^{-1}\|}\,.\end{aligned}\tag{57}$$

Далее, можно считать, что V_0 – выпуклое множество, и тогда если $x,x'\in V_0$ и $\theta\in[0,1]$, то $x_\theta\in V_0$, где $x_\theta=(1-\theta)x+\theta x'$. По теореме о среднем, примененной к отображению $x\to F(x,\sigma)-F_x(\widehat{x},\widehat{\sigma})x$, получаем

$$\begin{aligned}&\|F(x,\sigma)-F(x',\sigma)-\Lambda(x-x')\|_Y\\ &\quad\leqslant \|F(x,\sigma)-F(x',\sigma)-F_x(\widehat{x},\widehat{\sigma})(x-x')\|_Y+\|F_x(\widehat{x},\widehat{\sigma})(x-x')-\Lambda(x-x')\|_Y\\ &\quad\leqslant \sup_{\theta\in[0,1]}\|F_x(x_\theta,\sigma)-F_x(\widehat{x},\widehat{\sigma})\|\,\|x-x'\|_X+\|F_x(\widehat{x},\widehat{\sigma})-\Lambda\|\,\|x-x'\|_X\\ &\quad\leqslant \frac{3}{8\|\Lambda^{-1}\|}\|x-x'\|_X+\frac{1}{8\|\Lambda^{-1}\|}\|x-x'\|_X=\frac{1}{2\|\Lambda^{-1}\|}\|x-x'\|_X,\end{aligned}$$

и, тем самым, (56) доказано.

Пусть $(x,\sigma)\in V_0'\times U_0$. Рассмотрим последовательность (модифицированный метод Ньютона)

$$x_n=x_{n-1}-\Lambda^{-1}F(x_{n-1},\sigma),\qquad n\in\mathbb{N},\quad x_0=x. \tag{58}$$

Покажем, что эта последовательность принадлежит $U_X(\widehat{x},\delta)$ и фундаментальна. Первое доказываем по индукции. Ясно, что $x_0\in U_X(\widehat{x},\delta)$. Пусть $x_k\in U_X(\widehat{x},\delta)$, $1\leqslant k\leqslant n$. Применяя к обеим частям (58) оператор Λ, получим

$$\Lambda(x_n-x_{n-1})=-F(x_{n-1},\sigma). \tag{59}$$

Используя последовательно (58), (59), (56) и затем итерируя процедуру, будем иметь

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x_n\|_X&\leqslant\|\Lambda^{-1}\|\,\|F(x_n,\sigma)\|_Y\\ &=\|\Lambda^{-1}\|\,\|F(x_n,\sigma)-F(x_{n-1},\sigma)-\Lambda(x_n-x_{n-1})\|_Y\\ &\leqslant\frac12\|x_n-x_{n-1}\|_X\leqslant\dots\leqslant\frac{1}{2^n}\|x_1-x\|_X.\end{aligned}\tag{60}$$

[7] $U_X(\widehat{x},\delta)$ обозначает открытый шар в нормированном пространстве X с центром в точке $\widehat{x}$ радиуса δ.

Далее, по неравенству треугольника, по (60), (58), по формуле для суммы геометрической прогрессии и в силу $F \in W_0$ получаем

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - \widehat{x}\|_X &\leqslant \|x_{n+1} - x\|_X + \|x - \widehat{x}\|_X \\
&\leqslant \|x_{n+1} - x_n\|_X + \dots + \|x_1 - x\|_X + \|x - \widehat{x}\|_X \\
&\leqslant \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots + 1\right)\|x_1 - x\|_X + \|x - \widehat{x}\|_X \\
&< 2\|\Lambda^{-1}\|\,\|F(x,\sigma)\|_Y + \|x - \widehat{x}\|_X \\
&< 2\|\Lambda^{-1}\|\,\|F(x,\sigma) - \widehat{F}(x,\sigma)\|_Y + 2\|\Lambda^{-1}\|\,\|\widehat{F}(x,\sigma)\|_Y + \|x - \widehat{x}\|_X \\
&< \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{2} = \delta,
\end{aligned} \tag{61}$$

т.е. $x_{n+1} \in U_X(\widehat{x}, \delta)$, и, значит, вся последовательность $\{x_n\}$ принадлежит шару $U_X(\widehat{x}, \delta)$.

Последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна. Действительно, используя (60) и рассуждая, как в предыдущем неравенстве, будем иметь для всех $n, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\|x_{n+m} - x_n\|_X &\leqslant \|x_{n+m} - x_{n+m-1}\|_X + \dots + \|x_{n+1} - x_n\|_X \\
&\leqslant \left(\frac{1}{2^{n+m-1}} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)\|x_1 - x\|_X < \frac{\|x_1 - x\|_X}{2^{n-1}} < \frac{\delta}{2^n}\,.
\end{aligned} \tag{62}$$

Функции x_n определены на $V_0' \times U_0$. Пусть $(x,\sigma) \in V_0' \times U_0$. Положим $\widetilde{\varphi}_F(x,\sigma) = \lim_{n\to\infty} x_n$. Из (61) следует, что $\widetilde{\varphi}_F(x,\sigma) \in U_X(\widehat{x},\delta) = V_0$, и, значит, определено отображение $\widetilde{\varphi}_F \colon V_0' \times U_0 \to V_0$.

Переходя к пределу в (59) при $n \to \infty$ и учитывая непрерывность F, приходим к соотношению $F(\widetilde{\varphi}_F(x,\sigma),\sigma) = 0$.

Покажем, что $\widetilde{\varphi}_F(x,\sigma) = \widetilde{\varphi}_F(\widehat{x},\sigma)$ для любой точки $(x,\sigma) \in V_0' \times U_0$. Действительно, в силу (56) имеем

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{\varphi}_F(x,\sigma) - \widetilde{\varphi}_F(\widehat{x},\sigma)\|_X &= \|\Lambda^{-1}\Lambda(\widetilde{\varphi}_F(x,\sigma) - \widetilde{\varphi}_F(\widehat{x},\sigma))\|_X \\
&\leqslant \|\Lambda^{-1}\|\,\|\Lambda(\widetilde{\varphi}_F(x,\sigma) - \widetilde{\varphi}_F(\widehat{x},\sigma))\|_Y \\
&= \|\Lambda^{-1}\|\,\|F(\widetilde{\varphi}_F(x,\sigma),\sigma) - F(\widetilde{\varphi}_F(\widehat{x},\sigma),\sigma) - \Lambda(\widetilde{\varphi}_F(x,\sigma) - \widetilde{\varphi}_F(\widehat{x},\sigma)\|_Y \\
&\leqslant \frac{1}{2}\|\widetilde{\varphi}_F(x,\sigma) - \widetilde{\varphi}_F(\widehat{x},\sigma)\|_X,
\end{aligned} \tag{63}$$

т.е. $\widetilde{\varphi}_F(x,\sigma) = \widetilde{\varphi}_F(\widehat{x},\sigma)$.

Положим $\varphi_F(\sigma) = \widetilde{\varphi}_F(\widehat{x},\sigma)$. Это отображение из U_0 в V_0, и по доказанному $F(\varphi_F(\sigma),\sigma) = 0$ для всех $\sigma \in U_0$.

Из (61) следует, что $\|x_n - x\|_X \leqslant 2\|\Lambda^{-1}\|\|F(x,\sigma)\|_Y$. Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, приходим к неравенству $\|\varphi_F(\sigma) - x\|_X \leqslant 2\|\Lambda^{-1}\|\|F(x,\sigma)\|_Y$.

Из непрерывности F и (58) следует, что функции x_n как функции σ непрерывны на U_0. Переходя в (62) к пределу при $m \to \infty$, получаем, что отображение $\sigma \mapsto \varphi_F(\sigma)$ есть равномерный предел непрерывных функций и, значит, само непрерывно.

То, что равенство $F(x,\sigma) = 0$ на $V_0 \times U_0$ возможно лишь, когда $x = \varphi_F(\sigma)$, доказывается теми же рассуждениями, что и в (63).

Доказательство второй части теоремы вполне стандартно (см., например, [6; п. 2.3.4]), и поэтому мы его опускаем.

Теорема 6 доказана.

Следствие 3. *Пусть выполнены основные предположения,* $(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{\overline{\alpha}}, \widehat{\overline{u}}) \in G \times \Sigma^k \times \mathscr{U}^{k+1}$, *где*[8] $\widehat{\overline{\alpha}} = (\widehat{\alpha}_1, \dots, \widehat{\alpha}_k)^T$, $\widehat{\overline{u}} = (\widehat{u}_0, \widehat{u}_1, \dots, \widehat{u}_k)$, $\sum_{i=0}^k \widehat{\alpha}_i F(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u}_i) = 0$ *и* $\Lambda = \sum_{i=0}^k \widehat{\alpha}_i F_x(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u}_i)$ *– обратимый оператор.*

Тогда справедливы следующие утверждения.

1) *Найдутся окрестности* $\mathscr{O}(\widehat{x})$, $\mathscr{O}(\widehat{\xi}\,)$, $\mathscr{O}(\widehat{\overline{\alpha}})$, $\mathscr{O}(\widehat{\overline{u}})$ *и непрерывное отображение* $(\xi, \overline{\alpha}, \overline{u}) \mapsto x(\xi, \overline{\alpha}, \overline{u})$ *из* $\mathscr{O}(\widehat{\xi}\,) \times \mathscr{O}(\widehat{\overline{\alpha}}) \times \mathscr{O}(\widehat{\overline{u}})$ *в* $\mathscr{O}(\widehat{x})$ *такие, что*

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i F(x(\xi, \overline{\alpha}, \overline{u}), \xi, u_i) = 0. \tag{64}$$

Равенство $\sum_{i=0}^k \alpha_i F(x, \xi, u_i) = 0$ *на* $\mathscr{O}(\widehat{x}) \times \mathscr{O}(\widehat{\xi}\,) \times \mathscr{O}(\widehat{\overline{\alpha}}) \times \mathscr{O}(\widehat{\overline{u}})$ *возможно лишь тогда, когда* $x = x(\xi, \overline{\alpha}, \overline{u})$.

Отображение $(\xi, \overline{\alpha}, \overline{u}) \mapsto x(\xi, \overline{\alpha}, \overline{u})$ *на* $\mathscr{O}(\widehat{\xi}\,) \times \mathscr{O}(\widehat{\overline{\alpha}}) \times \mathscr{O}(\widehat{\overline{u}})$ *имеет непрерывные частные производные по* α_j, $j = 1, \dots, k$, *и* ξ, *которые в точке* $(\widehat{\xi}, \widehat{\overline{\alpha}}, \widehat{\overline{u}})$ *действуют по правилам*

$$\widehat{x}_{\alpha_j} \alpha_j = -\Lambda^{-1}(F(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u}_j) - F(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u}_0))\alpha_j \tag{65}$$

для всех $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, k$, *и*

$$\widehat{x}_\xi \xi = -\Lambda^{-1} \sum_{i=0}^{k} \widehat{\alpha}_i F_\xi(\widehat{x}, \widehat{\xi}, \widehat{u}_i)\xi \tag{66}$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$.

2) *Найдутся такие окрестности* $\mathscr{O}_0(\widehat{\xi}\,) \subset \mathscr{O}(\widehat{\xi}\,)$, $\mathscr{O}_0(\widehat{\overline{\alpha}}) \subset \mathscr{O}(\widehat{\overline{\alpha}})$, $\mathscr{O}_0(\widehat{\overline{u}}) \subset \mathscr{O}(\widehat{\overline{u}})$ *и* $\varepsilon_0 > 0$, *что для всех* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ *существует непрерывное отображение* $(\xi, \overline{\alpha}, \overline{u}) \mapsto x_\varepsilon(\xi, \overline{\alpha}, \overline{u})$ *из* $\mathscr{O}_0(\widehat{\xi}\,) \times (\mathscr{O}_0(\widehat{\overline{\alpha}}) \cap \mathbb{R}^k_+) \times \mathscr{O}_0(\widehat{\overline{u}})$ *в* $\mathscr{O}(\widehat{x})$, *для которого*

$$F(x_\varepsilon(\xi, \overline{\alpha}, \overline{u}), \xi, M_\varepsilon(\overline{\alpha}, \overline{u})) = 0, \tag{67}$$

$$\|x_\varepsilon(\xi, \overline{\alpha}, \overline{u}) - x(\xi, \overline{\alpha}, \overline{u})\|_X < 2\|\Lambda^{-1}\|\varepsilon \tag{68}$$

при всех $(\xi, \overline{\alpha}, \overline{u}) \in \mathscr{O}_0(\widehat{\xi}\,) \times (\mathscr{O}_0(\widehat{\overline{\alpha}}) \cap \mathbb{R}^k_+) \times \mathscr{O}_0(\widehat{\overline{u}})$.

Доказательство. 1) Применим теорему к ситуации, когда $\Sigma = G_\xi \times \mathbb{R}^k \times \mathscr{U}^{k+1}$ (G_ξ – проекция G на $\mathbb{R}^n$), $\widehat{\sigma} = (\widehat{\xi}, \widehat{\overline{\alpha}}, \widehat{\overline{u}})$, отображение $\widehat{F}\colon G_x \times \Sigma \to Y$ (G_x – проекция G на X) имеет вид

$$\widehat{F}(x, \xi, \overline{\alpha}, \overline{u}) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i F(x, \xi, u_i),$$

где $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)^T$, $\alpha_0 = 1 - \sum_{i=1}^k \alpha_i$ и $\overline{u} = (u_0, u_1, \dots, u_k)$.

[8] Напомним, что $\widehat{\alpha}_0 = 1 - \sum_{i=1}^k \widehat{\alpha}_i$.

В силу основных предположений отображение $\widehat{F}$ и его производная по x непрерывны на $G_x \times \Sigma$. Ясно, что найдется такая окрестность $\mathscr{O}(\widehat{x},\widehat{\xi},\widehat{\overline{\alpha}},\widehat{\overline{u}}) \subset G_x \times \Sigma$, что $\widehat{F} \in C^1_x(\mathscr{O}(\widehat{x},\widehat{\xi},\widehat{\overline{\alpha}},\widehat{\overline{u}}),Y)$.

По условию $\sum_{i=0}^k \widehat{\alpha}_i F(\widehat{x},\widehat{\xi},\widehat{u}_i)=0$, $\Lambda=\sum_{i=0}^k \widehat{\alpha}_i F_x(\widehat{x},\widehat{\xi},\widehat{u}_i)$ – обратимый оператор и, наконец, отображение $\widehat{F}$ дифференцируемо по $(\xi,\overline{\alpha})$ в точке $(\widehat{x},\widehat{\xi},\widehat{\overline{\alpha}},\widehat{\overline{u}})$. Теперь все утверждения части 1) следствия непосредственно вытекают из теоремы о неявной функции, примененной к самому отображению $\widehat{F}$, кроме непрерывности частных производных. Но доказательство последнего вполне стандартно (см., например, [6; п. 2.3.4]), и поэтому мы его опускаем.

2) Из доказательства теоремы видно, что окрестность V_0, а тем самым, и остальные окрестности могут быть сделаны сколь угодно малыми. Пусть $\mathscr{O}(\widehat{x})$, $\mathscr{O}(\widehat{\xi}\,)$, $\mathscr{O}(\widehat{\overline{\alpha}})$ и $\mathscr{O}(\widehat{\overline{u}})$ – окрестности из утверждения 1) данного следствия. Уменьшая окрестности $\mathscr{O}(\widehat{x})$, $\mathscr{O}(\widehat{\xi}\,)$ и $\mathscr{O}(\widehat{\overline{u}})$, можно считать, что $\mathscr{O}(\widehat{x})\times\mathscr{O}(\widehat{\xi}\,)\times\mathscr{O}(\widehat{\overline{u}})$ содержится в окрестности U точки $(\widehat{x},\widehat{\xi},\widehat{\overline{u}})$ в силу основных предположений, касающихся микса.

Применим теперь теорему о неявной функции к случаю, когда $\Sigma=\mathscr{O}(\widehat{\xi}\,)\times(\mathscr{O}(\widehat{\overline{\alpha}})\cap\mathbb{R}^k_+)\times\mathscr{O}(\widehat{\overline{u}})$, роль $\widehat{F}$ играет отображение $(x,\xi,\overline{\alpha},\overline{u})\mapsto\sum_{i=0}^k \alpha_i F(x,\xi,u_i)$, которое, можно считать, принадлежит $C^1_x(\mathscr{O}(\widehat{x})\times\mathscr{O}(\widehat{\xi}\,)\times(\mathscr{O}(\widehat{\overline{\alpha}})\cap\mathbb{R}^k_+)\times\mathscr{O}(\widehat{\overline{u}}),Y)$, и пусть $\mathscr{O}(\widehat{F})$ – соответствующая окрестность из этой теоремы.

Пусть $\varepsilon_0>0$ таково, что для всех $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ отображение $(x,\xi,\overline{\alpha},\overline{u})\mapsto F(x,\xi,M_\varepsilon(\overline{\alpha},\overline{u}))$ принадлежит $\mathscr{O}(\widehat{F})$ (см. основные предположения в § 2). Поэтому найдутся окрестности $\mathscr{O}_0'(\widehat{x})\subset\mathscr{O}_0(\widehat{x}))\subset\mathscr{O}(\widehat{x})$, $\mathscr{O}_0(\widehat{\xi}\,)\subset\mathscr{O}(\widehat{\xi}\,)$, $\mathscr{O}_0(\widehat{\overline{\alpha}})\subset\mathscr{O}(\widehat{\overline{\alpha}})$ и $\mathscr{O}_0(\widehat{\overline{u}})\subset\mathscr{O}(\widehat{\overline{u}})$, и для ε – непрерывное отображение $\varphi_\varepsilon\colon\mathscr{O}_0(\widehat{\xi}\,)\times(\mathscr{O}_0(\widehat{\overline{\alpha}})\cap\mathbb{R}^k_+)\times\mathscr{O}_0(\widehat{\overline{u}})\to\mathscr{O}_0(\widehat{x})$, которое обозначим $x_\varepsilon(\xi,\overline{\alpha},\overline{u})$, обладающее тем свойством, что

$$F(x_\varepsilon(\xi,\overline{\alpha},\overline{u}),\xi,M_\varepsilon(\overline{\alpha},\overline{u}))=0,$$
$$\|x_\varepsilon(\xi,\overline{\alpha},\overline{u})-x\|_X\leqslant 2\|\Lambda^{-1}\|\,\|F(x,\xi,M_\varepsilon(\overline{\alpha},\overline{u}))\|_Y$$

для всех $(x,\xi,\overline{\alpha},\overline{u})\in\mathscr{O}_0'(\widehat{x})\times\mathscr{O}_0(\widehat{\xi}\,)\times(\mathscr{O}_0(\widehat{\overline{\alpha}})\cap\mathbb{R}^k_+)\times\mathscr{O}(\widehat{\overline{u}})$.

Если $x=x(\xi,\overline{\alpha},\overline{u})$, то $\sum_{i=0}^k \alpha_i F(x(\xi,\overline{\alpha},\overline{u}),\xi,u_i)=0$. Тогда из последнего соотношения вытекает, что

$$\begin{aligned}\|x_\varepsilon(\xi,\overline{\alpha},\overline{u})-x(\xi,\overline{\alpha},\overline{u})\|_X&\leqslant 2\|\Lambda^{-1}\|\,\|F(x(\xi,\overline{\alpha},\overline{u}),\xi,M_\varepsilon(\overline{\alpha},\overline{u}))\|\|_Y\\&=2\|\Lambda^{-1}\|\left\|F(x(\xi,\overline{\alpha},\overline{u}),\xi,M_\varepsilon(\overline{\alpha},\overline{u}))-\sum_{i=0}^k\alpha_i F(x(\xi,\overline{\alpha},\overline{u}),\xi,u_i)\right\|_Y<2\|\Lambda^{-1}\|\varepsilon.\end{aligned}$$

Следствие 3 доказано.

Пусть M – подмножество в $\mathbb{R}^l$. Обозначим через $C(M,\mathbb{R}^m)$ совокупность всех непрерывных отображений $\Phi\colon M\to\mathbb{R}^m$, для которых конечна норма $\|\Phi\|=\sup_{w\in M}|\Phi(w)|$.

Лемма 1. *Пусть K – выпуклое множество в $\mathbb{R}^l$, $\mathscr{O}(\widehat{w})$ – окрестность точки $\widehat{w}\in K$, $\mathscr{U}$ – топологическое пространство, $\widehat{u}\in\mathscr{U}$, отображение $\Phi\colon\mathscr{O}(\widehat{w})\times\mathscr{U}\to\mathbb{R}^m$ непрерывно вместе со своей производной по w на $\mathscr{O}(\widehat{w})\times\mathscr{U}$, ограничено на $\mathscr{O}(\widehat{w})$ при каждом $u\in\mathscr{U}$ и $0\in\operatorname{int}\Phi_w(\widehat{w},\widehat{u})(K-\widehat{w})$.*

Тогда существуют окрестности $\mathscr{O}_0(\widehat{w}) \subset \mathscr{O}(\widehat{w})$, $\mathscr{O}_0(\widehat{u})$ *и константы* $\kappa > 0$, $r_0 > 0$ *такие, что для любых* $0 < r \leqslant r_0$ *и* $u \in \mathscr{O}_0(\widehat{u})$ *найдется окрестность* $\mathscr{O}_r(\Phi(\cdot, u)) \subset C(\mathscr{O}(\widehat{w}) \cap K, \mathbb{R}^m)$, *обладающая тем свойством, что для каждого* $\widetilde{\Phi} \in \mathscr{O}_r(\Phi(\cdot, u))$ *существует отображение* $\varphi_{r,u} = \varphi_{r,u,\widetilde{\Phi}} \colon \mathscr{O}_0(\widehat{w}) \cap K \to \mathscr{O}(\widehat{w}) \cap K$ *такое, что*

$$\widetilde{\Phi}(\varphi_{r,u}(w)) = \Phi(\widehat{w}, \widehat{u}), \tag{69}$$

$$|\varphi_{r,u}(w) - w| \leqslant \kappa(|\Phi(w, u) - \Phi(\widehat{w}, \widehat{u})| + r) \tag{70}$$

при всех $w \in \mathscr{O}_0(\widehat{w}) \cap K$.

Доказательство. Отметим, что из предположения $0 \in \operatorname{int} \Phi_w(\widehat{w}, \widehat{u})(K - \widehat{w})$ следует существование $\rho > 0$, для которого $U_{\mathbb{R}^m}(0, \rho) \subset \operatorname{int} \Phi_w(\widehat{w}, \widehat{u})(K - \widehat{w})$, непрерывного отображения $R \colon U_{\mathbb{R}^m}(0, \rho) \to K - \widehat{w}$ и константы $\gamma > 0$ таких, что $\Phi_w(\widehat{w}, \widehat{u})R(z) = z$ и $|R(z)| \leqslant \gamma |z|$ для всех $z \in U_{\mathbb{R}^m}(0, \rho)$. (Это несложное утверждение доказано в [7].)

Поскольку отображение Φ имеет непрерывную производную по w в точке $(\widehat{w}, \widehat{u})$, то из теоремы о среднем следует, что найдутся окрестности $\mathscr{O}_\gamma(\widehat{w}) \subset \mathscr{O}(\widehat{w})$ и $\mathscr{O}_\gamma(\widehat{u})$ такие, что для всех $w, w' \in \mathscr{O}_\gamma(\widehat{w})$ и $u \in \mathscr{O}_\gamma(\widehat{u})$ справедливо неравенство

$$|\Phi(w, u) - \Phi(w', u) - \Phi_w(\widehat{w}, \widehat{u})(w - w')| \leqslant \frac{1}{2\gamma}|w - w'|. \tag{71}$$

Пусть $0 < \delta \leqslant 2\gamma\rho$ таково, что $U_{\mathbb{R}^k}(\widehat{w}, \delta) \subset \mathscr{O}_\gamma(\widehat{w})$. Выберем окрестности $\mathscr{O}_0(\widehat{w})$ и $\mathscr{O}_0(\widehat{u})$ так, что $\mathscr{O}_0(\widehat{w}) \subset U_{\mathbb{R}^k}(\widehat{w}, \delta/2)$, $\mathscr{O}_0(\widehat{u}) \subset \mathscr{O}_\gamma(\widehat{u})$ и

$$|\Phi(w, u) - \Phi(\widehat{w}, \widehat{u})| < \frac{\delta}{8\gamma} \quad \forall\, (w, u) \in \mathscr{O}_0(\widehat{w}) \times \mathscr{O}_0(\widehat{u}). \tag{72}$$

Обозначим $r_0 = \delta/(8\gamma)$. Пусть имеем $0 < r \leqslant r_0$, $u \in \mathscr{O}_0(\widehat{u})$, $\mathscr{O}_r(\Phi(\cdot, u)) = U_{C(\mathscr{O}(\widehat{w}) \cap K, \mathbb{R}^m)}(\Phi(\cdot, u), r)$, $\widetilde{\Phi} \in \mathscr{O}_r(\Phi(\cdot, u)))$ и $w \in \mathscr{O}_0(\widehat{w}) \cap K$.

Положим $d = 2(|\Phi(w, u) - \Phi(\widehat{w}, \widehat{u})| + r)$ и рассмотрим отображение[9] $G = G_{r,u,\widetilde{\Phi},w} \colon B_{\mathbb{R}^m}(\Phi(\widehat{w}, \widehat{u}), d) \to \mathbb{R}^m$, определенное формулой

$$G(z) = z + \Phi(\widehat{w}, \widehat{u}) - \widetilde{\Phi}(w + R(z - \Phi(\widehat{w}, \widehat{u}))).$$

Определение корректно, так как если $z \in B_{\mathbb{R}^m}(\Phi(\widehat{x}, \widehat{u}), d)$, то

$$|z - \Phi(\widehat{w}, \widehat{u})| \leqslant d < 2\left(\frac{\delta}{8\gamma} + \frac{\delta}{8\gamma}\right) = \frac{\delta}{2\gamma} \leqslant \rho.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |R(z - \Phi(\widehat{w}, \widehat{u}))| &\leqslant \gamma |z - \Phi(\widehat{w}, \widehat{u})| \\ &\leqslant 2\gamma(|\Phi(w, u) - \Phi(\widehat{w}, \widehat{u})| + r) < 2\gamma\left(\frac{\delta}{8\gamma} + \frac{\delta}{8\gamma}\right) = \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

[9] $B_X(\widehat{x}, \delta)$ – замкнутый шар в нормированном пространстве X с центром в точке $\widehat{x}$ радиуса δ.

Следовательно,

$$w + R(z - \Phi(\widehat{w}, \widehat{u})) \subset U_{\mathbb{R}^l}\left(\widehat{w}, \frac{\delta}{2}\right) \cap K + U_{\mathbb{R}^l}\left(0, \frac{\delta}{2}\right) \cap (K - \widehat{w})$$
$$\subset U_{\mathbb{R}^l}(\widehat{w}, \delta) \cap K \subset \mathscr{O}(\widehat{w}) \cap K.$$

Покажем, что образ G содержится в шаре $B_{\mathbb{R}^m}(\Phi(\widehat{w}, \widehat{u}), d)$. Действительно, после элементарных преобразований и применения неравенств (71), (72) с учетом того, что $\widetilde{\Phi} \in \mathscr{O}_r(\Phi(\cdot, u)$, получаем

$$\begin{aligned}
&|G(z) - \Phi(\widehat{w}, \widehat{u})| \\
&\quad\leqslant |\Phi(w, u) - \Phi(\widehat{w}, \widehat{u})| + |\widetilde{\Phi}(w + R(z - \Phi(\widehat{w}, \widehat{u}))) - \Phi(w + R(z - \Phi(\widehat{w}, \widehat{u})), u)| \\
&\qquad + |\Phi(w + R(z - \Phi(\widehat{w}, \widehat{u})), u) - \Phi(w, u) - \Phi_w(\widehat{w}, \widehat{u}) R(z - \Phi(\widehat{w}, \widehat{u}))| \\
&\quad\leqslant |\Phi(w, u) - \Phi(\widehat{w}, \widehat{u})| + r + \frac{1}{2\gamma}|R(z - \Phi(\widehat{w}, \widehat{u}))| \\
&\quad\leqslant \frac{d}{2} + \frac{1}{2}|z - \Phi(\widehat{w}, \widehat{u})| \leqslant \frac{d}{2} + \frac{d}{2} = d.
\end{aligned}$$

Отображение G непрерывно в силу непрерывности отображений $\widetilde{\Phi}$ и R. Тогда по теореме Брауэра о неподвижной точке найдется такое $\overline{z} = \overline{z}(r, u, \widetilde{\Phi}, w) \in B_{\mathbb{R}^m}(\Phi(\widehat{w}, \widehat{u}), d)$, что $G(\overline{z}) = \overline{z}$, т.е. $\widetilde{\Phi}(w + R(\overline{z} - \Phi(\widehat{w}, \widehat{u}))) = \Phi(\widehat{w}, \widehat{u})$. Положим $\varphi_{r,u}(w) = \varphi_{r,u,\widetilde{\Phi}}(w) = w + R(\overline{z} - \Phi(\widehat{w}, \widehat{u}))$. Тогда $\widetilde{\Phi}(\varphi_{r,u}(w)) = \Phi(\widehat{w}, \widehat{u})$ и $|\varphi_{r,u}(w) - w| = |R(\overline{z} - \Phi(\widehat{w}, \widehat{u}))| \leqslant \gamma|\overline{z} - \Phi(\widehat{w}, \widehat{u})| \leqslant 2\gamma(|\Phi(w, u) - \Phi(\widehat{w}, \widehat{u})| + r)$. Осталось обозначить $\kappa = 2\gamma$.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть K – выпуклое множество в $\mathbb{R}^l$, $\mathscr{O}(\widehat{w})$ – окрестность точки $\widehat{w} \in K$, отображение $\Phi\colon \mathscr{O}(\widehat{w}) \to \mathbb{R}^m$ непрерывно и ограничено на $\mathscr{O}(\widehat{w})$, дифференцируемо в $\widehat{w}$ и $0 \in \operatorname{int} \Phi'(\widehat{w})(K - \widehat{w})$.*

Тогда существуют окрестность $\mathscr{O}(\Phi(\widehat{w}))$ и константа $\kappa > 0$ такие, что для любого $y \in \mathscr{O}(\Phi(\widehat{x}))$ найдется окрестность $\mathscr{O}_y(\Phi) \subset C(\mathscr{O}(\widehat{w}) \cap K, \mathbb{R}^m)$, обладающая тем свойством, что для каждого $\widetilde{\Phi} \in \mathscr{O}_y(\Phi)$ существует точка $w(y, \widetilde{\Phi}) = w(y) \in \mathscr{O}(\widehat{w}) \cap K$ такая, что

$$\widetilde{\Phi}(w(y)) = y, \qquad |w(y) - \widehat{w}| \leqslant \kappa|y - \Phi(\widehat{w})|. \tag{73}$$

Доказательство. По тем же соображениям, что и в лемме 1, существуют $\rho > 0$, для которого $U_{\mathbb{R}^m}(0, \rho) \subset \operatorname{int} \Phi'(\widehat{w})(K - \widehat{w})$, непрерывное отображение $R\colon U_{\mathbb{R}^m}(0, \rho) \to K - \widehat{w}$ и константа $\gamma > 0$, обладающие тем свойством, что $\Phi'(\widehat{w})R(z) = z$ и $|R(z)| \leqslant \gamma|z|$ для всех $z \in U_{\mathbb{R}^m}(0, \rho)$.

В силу дифференцируемости Φ в точке $\widehat{w}$ найдется такое $0 < \delta \leqslant \gamma\rho$, что $U_{\mathbb{R}^k}(\widehat{w}, \delta) \subset \mathscr{O}(\widehat{w})$ и

$$|\Phi(w) - \Phi(\widehat{w}) - \Phi'(\widehat{w})(w - \widehat{w})| \leqslant \frac{1}{4\gamma}|w - \widehat{w}| \tag{74}$$

для всех $w \in U_{\mathbb{R}^k}(\widehat{w}, \delta)$.

Пусть $\mathscr{O}(\Phi(\widehat{w})) = U_{\mathbb{R}^m}(\Phi(\widehat{w}), \delta/(2\gamma))$. Для каждого $y \in \mathscr{O}(\Phi(\widehat{w}))$ положим $\mathscr{O}_y(\Phi) = U_{C(V \cap K, \mathbb{R}^m)}(\Phi, (1/2)|y - \Phi(\widehat{w})|)$ (считая при $y = \Phi(\widehat{w})$, что $\mathscr{O}_y(\Phi) = \{\Phi\}$, и в этом случае соотношения (73) выполняются очевидным образом).

Пусть $y \in \mathscr{O}(\Phi(\widehat{w}))$, $y \neq \Phi(\widehat{w})$ и $\widetilde{\Phi} \in \mathscr{O}_y(\Phi)$. Рассмотрим отображение G_y: $B_{\mathbb{R}^m}(\Phi(\widehat{w}), 2|y - \Phi(\widehat{w})|) \to \mathbb{R}^m$, определенное формулой

$$G_y(z) = y + z - \widetilde{\Phi}(\widehat{w} + R(z - \Phi(\widehat{w}))).$$

Определение корректно, так как если $z \in B_{\mathbb{R}^m}(\Phi(\widehat{w}), 2|y - \Phi(\widehat{w})|)$, то имеем $|z - \Phi(\widehat{w})| \leqslant 2|y - \Phi(\widehat{w})| < \delta/\gamma \leqslant \rho$ и получаем

$$|R(z - \Phi(\widehat{w}))| \leqslant \gamma|z - \Phi(\widehat{w})| \leqslant 2\gamma|y - \Phi(\widehat{w})| < 2\gamma\left(\frac{\delta}{2\gamma}\right) = \delta,$$

а значит,

$$\widehat{w} + R(z - \Phi(\widehat{w})) \subset U_{\mathbb{R}^k}(\widehat{x}, \delta) \cap K \subset \mathscr{O}(\widehat{w}) \cap K.$$

Покажем, что образ G_y содержится в шаре $B_{\mathbb{R}^m}(\Phi(\widehat{w}), 2|y - \Phi(\widehat{w})|)$. Действительно, после элементарных преобразований и применения неравенства (74) с учетом того, что $\widetilde{\Phi} \in \mathscr{O}_y(\Phi)$, получаем

$$\begin{aligned}
|G_y(z) - \Phi(\widehat{w})| &\leqslant |y - \Phi(\widehat{w})| + |\widetilde{\Phi}(\widehat{w} + R(z - \Phi(\widehat{w}))) - \Phi(\widehat{w} + R(z - \Phi(\widehat{w})))| \\
&\qquad + |\Phi(\widehat{w} + R(z - \Phi(\widehat{w}))) - \Phi(\widehat{w}) - \Phi'(\widehat{w})R(z - \Phi(\widehat{w}))| \\
&\leqslant |y - \Phi(\widehat{w})| + \frac{1}{2}|y - \Phi(\widehat{w})| + \frac{1}{4\gamma}|R(z - \Phi(\widehat{w}))| \\
&\leqslant \frac{3}{2}|y - \Phi(\widehat{w})| + \frac{1}{4\gamma}\gamma|z - \Phi(\widehat{w})| \\
&\leqslant \frac{3}{2}|y - \Phi(\widehat{w})| + \frac{1}{4}2|y - \Phi(\widehat{w})| = 2|y - \Phi(\widehat{w})|.
\end{aligned}$$

Отображение G_y непрерывно в силу непрерывности отображений $\widetilde{\Phi}$ и R. Поэтому по теореме Брауэра о неподвижной точке существует $\overline{z} = \overline{z}(y, \widetilde{\Phi}) \in B_{\mathbb{R}^m}(\Phi(\widehat{w}), 2|y - \Phi(\widehat{w})|)$ такое, что $G_y(\overline{z}) = \overline{z}$, или $\widetilde{\Phi}(\widehat{w} + R(\overline{z} - \Phi(\widehat{w}))) = y$. Положим $w(y) = w(y, \widetilde{\Phi}) = \widehat{w} + R(\overline{z} - \Phi(\widehat{w}))$. Тогда $\widetilde{\Phi}(w(y)) = y$ и $|w(y) - \widehat{w}| = |R(\overline{z} - \Phi(\widehat{w}))| \leqslant \gamma|\overline{z} - \Phi(\widehat{w})| \leqslant 2\gamma|y - \Phi(\widehat{w})|$. Осталось положить $\kappa = 2\gamma$.

Лемма доказана.

Список литературы

[1] Р. В. Гамкрелидзе, “Оптимальные скользящие режимы”, *Докл. АН СССР*, **143** (1962), 1243–1245; англ. пер.: R. V. Gamkrelidze, “Optimal sliding states”, *Soviet Math. Dokl.*, **3** (1962), 559–562.

[2] Р. В. Гамкрелидзе, *Основы оптимального управления*, Изд-во Тбилисского ун-та, Тбилиси, 1977, 254 с.; англ. пер.: R. V. Gamkrelidze, *Principles of optimal control theory*, rev. ed., Math. Concepts Methods Sci. Eng., **7**, Plenum Press, New York–London, 1978, xii+175 pp.

[3] J. Warga, “Relaxed variational problems”, *J. Math. Anal. Appl.*, **4** (1962), 111–128.

[4] В. М. Тихомиров, “Теорема о касательном пространстве и некоторые ее модификации”, *Оптимальное управление*, Математические вопросы управления производством, **7**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1977, 22–30.

[5] Е. Р. Аваков, Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, "О принципе Лагранжа в задачах на экстремум при наличии ограничений", *УМН*, **68**:3(411) (2013), 5–38; англ. пер.: E. R. Avakov, G. G. Magaril-Il'yaev, V. M. Tikhomirov, "Lagrange's principle in extremum problems with constraints", *Russian Math. Surveys*, **68**:3 (2013), 401–433.

[6] В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, *Оптимальное управление*, Наука, М., 1979, 430 с.; англ. пер.: V. M. Alekseev, V. M. Tikhomirov, S. V. Fomin, *Optimal control*, Contemp. Soviet Math., Consultants Bureau, New York, 1987, xiv+309 pp.

[7] А. В. Арутюнов, Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, *Принцип максимума Понтрягина. Доказательство и приложения*, Факториал, М., 2006, 144 с.

Евгений Рачиевич Аваков
(Evgenii R. Avakov)
Институт проблем управления
им. В. А. Трапезникова
Российской академии наук, г. Москва;
Механико-математический факультет,
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
E-mail: eramag@mail.ru

Поступила в редакцию
21.04.2016 и 03.02.2017

Георгий Георгиевич Магарил-Ильяев
(Georgii G. Magaril-Il'yaev)
Механико-математический факультет,
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова;
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича
Российской академии наук, г. Москва;
Южный математический институт
Владикавказского научного центра
Российской академии наук, г. Владикавказ
E-mail: magaril@mech.math.msu.su