УДК 517.9

# ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ


Е. В. АБРАМОВА, Е. О. СИВКОВА

Е. В. Абрамова: Национальный исследовательский университет «МЭИ»
Е. О. Сивкова: Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН, Национальный исследовательский университет «МЭИ»



Аннотация. In this paper, we find a family of optimal methods for recovering the solution of the Dirichlet problem in the $L_2(\mathbb{R})$ metric on a line in the upper half-plane parallel to the $x$ axis from an approximate measurement of this solution on another line and under the condition that the boundary function belongs to some Sobolev function class.



Keywords: Dirichlet problem, optimal methods, Fourier transform


## Постановка задачи и формулировка основного результата

Пусть $r$ — целое неотрицательное число. Если $r \geq 1$, то обозначим через $\mathcal{W}_2^r(\mathbb{R})$ соболевское пространство функций $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, у которых $(r-1)$-ая производная локально абсолютно непрерывна и $f^{(r)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, а через $W_2^r(\mathbb{R})$ — класс функций

$$W_2^r(\mathbb{R}) = \{\, f(\cdot) \in \mathcal{W}_2^r(\mathbb{R}) : \|f^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq 1 \,\}.$$

Если $r = 0$, то полагаем $\mathcal{W}_2^0(\mathbb{R}) = L_2(\mathbb{R})$, и в этом случае $W_2^0(\mathbb{R})$ — единичный шар в $L_2(\mathbb{R})$.

Рассмотрим задачу Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u(\cdot, 0) = f(\cdot), \end{cases} \tag{1}$$

где $\Delta$ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^2$ и $f(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{R})$, заключающуюся в нахождении такой гармонической функции $u(\cdot,\cdot)$ в верхней полуплоскости $\{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\,\}$, что $u(\cdot, y) \in L_2(\mathbb{R})$ для любого $y > 0$, $\sup_{y>0} \|u(\cdot, y)\|_{L_2(\mathbb{R})} < \infty$ и $u(\cdot, y) \to f(\cdot)$ при $y \to 0$ в метрике $L_2(\mathbb{R})$.

В этом случае решение задачи Дирихле единственно и выражается интегралом Пуассона (см. [1])

$$u(x,y;f)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{x}{(y-t)^2+x^2}\,f(t)\,dt. \tag{2}$$

Мы ставим перед собой следующую задачу. Пусть на прямой $y=A>0$ имеется возможность измерить решение задачи Дирихле в метрике $L_2(\mathbb{R})$ с точностью до $\delta>0$, т. е. нам известна функция $g(\cdot)\in L_2(\mathbb{R})$ такая, что

$$\|u(\cdot,A;f)-g(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\delta \tag{3}$$

при некотором $f(\cdot)\in W_2^r(\mathbb{R})$, которое мы не знаем. По этой информации мы хотим восстановить решение задачи Дирихле на прямой $y=a$, где $0<a<A$.

Точная постановка такова. Под методами восстановления мы понимаем любые отображения $m\colon L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})$. Сопоставим каждому такому методу его *погрешность*, которую определим следующим образом

$$e(W_2^r(\mathbb{R}),\delta,m)=\sup_{\substack{f(\cdot)\in W_2^r(\mathbb{R}),\ g(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}),\\ \|u(\cdot,A;f)-g(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\delta}}\|u(\cdot,a;f)-m(g(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}. \tag{4}$$

Это то “наихудшее”, что мы можем получить, используя данный метод, зная соотношение (3) и не зная функции $f(\cdot)$.

Нас интересуют, разумеется, те методы, на которых эта величина минимальна, т. е. такие методы $\widehat{m}$, что

$$e(W_2^r(\mathbb{R}),\delta,\widehat{m})=\inf_m e(W_2^r(\mathbb{R}),\delta,m), \tag{5}$$

где нижняя грань берется по всем отображениям (методам) $m\colon L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})$. Такие методы будем называть *оптимальными.*

Величину справа в (5) будем называть *погрешностью оптимального* восстановления и обозначать $E(W_2^r(\mathbb{R}),\delta)$.

Перед формулировкой теоремы введем некоторые обозначения. Рассмотрим функцию $\varphi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, определенную формулой

$$\varphi(\xi)=\xi^{2r}e^{2A|\xi|}.$$

Ясно, что эта функция равна нулю в нуле, четна и монотонно возрастает на $[0,+\infty)$. Следовательно, для любого $\delta>0$ существует единственное $\xi_0=\xi_0(\delta)>0$ такое, что $\varphi(\xi_0)=\delta^{-2}$.

Положим

$$\widehat{\lambda}_1(\delta)=\frac{r+a\xi_0}{r+A\xi_0}\,e^{2(A-a)\xi_0},\quad \widehat{\lambda}_2(\delta)=\frac{(A-a)\xi_0^{1-2r}}{r+A\xi_0}\,e^{-2a\xi_0}.$$

Определим еще отрезок на прямой с центром в нуле:

$$D = \{\, \xi \in \mathbb{R} : \widehat{\lambda}_2(\delta)\xi^{2r}e^{2a|\xi|} \le 1 \,\}.$$

Наконец, если $F\colon L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ — преобразование Фурье, то $F[f](\cdot)$ обозначает преобразование Фурье функции $f(\cdot)$.

**Теорема.** *Пусть $\delta > 0$. Справедливы следующие утверждения.*

$$E(W_2^r(\mathbb{R}), \delta) = \xi_0^{-r}e^{-a\xi_0}. \tag{6}$$

*Множество измеримых функций $\omega(\cdot)$ на $\mathbb{R}$, равных нулю вне $\Delta$ и таких, что*

$$\frac{|\omega(\xi)|^2e^{2A|\xi|}}{\widehat{\lambda}_1(\delta)} + \frac{|1-\omega(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_2(\delta)\,\xi^{2r}} \le e^{2a|\xi|} \tag{7}$$

*для п. в. $\xi \in D$, непусто, и для каждой такой функции $\omega(\cdot)$ метод $\widehat{m}_\omega$, определенный формулой*

$$\widehat{m}_\omega(g(\cdot))(\cdot) = (K * g)(\cdot), \tag{8}$$

*где $F[K](\xi) = \omega(\xi)e^{(A-a)|\xi|}$ для п. в. $\xi \in \mathbb{R}$, является оптимальным.*

Заметим, что оптимальные методы определены корректно. Действительно, так как функция $\omega(\cdot)$ равна нулю вне отрезка $D$, то преобразование Фурье функции $K(\cdot)$ также равно нулю вне $D$ и, очевидно, ограничено на $D$. Следовательно, $F[K](\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ и поэтому $K(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, а тогда $\widehat{m}_\omega(g(\cdot))(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ как свертка двух функций из $L_2(\mathbb{R})$.

Отметим еще, что оптимальные методы линейны и представляют собой “сглаживание“ исходного наблюдения.

## Доказательство теоремы

Общая схема рассуждений такова. Мы сначала докажем неравенство

$$E(W_2^r(\mathbb{R}), \delta) \ge \xi_0^{-r}e^{-a\xi_0}, \tag{9}$$

а затем покажем, что погрешность методов (8) равна величине справа в (9). Отсюда будет следовать оптимальность этих методов и равенство (6).

Сначала докажем, что справедлива следующая оценка

$$E(W_2^r(\mathbb{R}), \delta) \ge \sup_{\substack{f(\cdot)\in W_2^r(\mathbb{R}),\\ \|u(\cdot, A; f)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\delta}} \|u(\cdot, a; f)\|_{L_2(\mathbb{R})}. \tag{10}$$

Действительно, пусть $f_0(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{R})$ и $\|u(\cdot, A; f_0)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \delta$. Тогда функция $-f_0(\cdot)$ также удовлетворяет этим соотношениям

($u(x,y;-f_0)=-u(x,y;f_0)$ согласно (2)), и мы имеем для любого $m\colon L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})$

$$
\begin{aligned}
2\|u(\cdot,a;f_0)\|_{L_2(\mathbb{R})} &= \|u(\cdot,a;f)-m(0)(\cdot)-(u(\cdot,a;-f_0)-m(0)(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R})}\\
&\le 2\sup_{\substack{f(\cdot)\in W_2^r(\mathbb{R}),\\ [2pt]\|u(\cdot,\,A;f)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\delta}}\|u(\cdot,a;f)-m(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\\
&\le 2\sup_{\substack{f(\cdot)\in W_2^r(\mathbb{R}),\ g(\cdot)\in L_2(\mathbb{R})\\ \|u(\cdot,\,A;f)-g(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\delta}}\|u(\cdot,a;f)-m(g(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}=\\
&= 2e(W_2^r(\mathbb{R}),\delta,m).
\end{aligned}
$$

Переходя слева к верхней грани по всем функциям $f(\cdot)$ таким, что $f(\cdot)\in W_2^r(\mathbb{R})$ и $\|u(\cdot,\,A;f)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\delta$, приходим к неравенству

$$
\sup_{\substack{f(\cdot)\in W_2^r(\mathbb{R}),\\ \|u(\cdot,\,A;f)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\delta}}\|u(\cdot,a;f)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le e(W_2^r(\mathbb{R}),\delta,m).
$$

Метод $m$ был выбран произвольно и поэтому переходя справа к нижней грани по всем методам $m$, получаем соотношение (10).

Найдем значение величины справа в (10). Эта величина есть значение следующей экстремальной задачи

$$
\|u(\cdot,a;f)\|_{L_2(\mathbb{R})}\to\max,\quad \|u(\cdot,\,A;f)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\delta,\quad \|f^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le 1,\qquad f(\cdot)\in\mathcal{W}_2^r(\mathbb{R}),\quad (11)
$$

т. е. точная верхняя грань максимизируемого функционала при данных ограничениях.

Как хорошо известно (см. [1]), для любой функции $f(\cdot)\in L_2(\mathbb{R})$ и любого $y\ge 0$ справедливо равенство

$$
F[u(\cdot,y;f)](\xi)=e^{-y|\xi|}F[f](\xi)\ \text{ для п. в. }\ \xi\in\mathbb{R}.
$$

Тогда согласно теореме Планшереля

$$
\|u(\cdot,y;f)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}e^{-2y|\xi|}|F[f](\xi)|^2\,d\xi.
$$

Напомним также, что по теореме Планшереля

$$
\|f^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\xi^{2r}|F[f](\xi)|^2\,d\xi.
$$

Учитывая эти равенства, получим, что квадрат значения задачи (11) равен значению такой задачи

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2a|\xi|}|F[f](\xi)|^2\,d\xi \to \max, \quad \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2A|\xi|}|F[f](\xi)|^2\,d\xi \le \delta^2,$$
$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2r}|F[f](\xi)|^2\,d\xi \le 1, \quad f(\cdot)\in\mathcal{W}_2^r(\mathbb{R}). \quad (12)$$

Можно считать, что переменными в этой задаче являются положительные борелевские меры $\mu_f(\cdot)$, $\mu_f(G) = (2\pi)^{-1}\int_G |F[f](\xi)|^2\,d\xi$, $f(\cdot)\in\mathcal{W}_2^r(\mathbb{R})$. Рассмотрим более общую задачу, когда переменными являются все положительные борелевские меры $d\mu(\cdot)$ на прямой:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2a|\xi|}\,d\mu(\xi) \to \max, \quad \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2A|\xi|}\,d\mu(\xi) \le \delta^2, \quad \int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2r}\,d\mu(\xi) \le 1,$$
$$d\mu(\cdot) \ge 0. \quad (13)$$

Очевидно, что значение этой задачи не меньше значения задачи (12). Мы найдем значение задачи (13) (найдя ее решение) и покажем, что, на самом деле, оно совпадает со значением задачи (12). Тем самым будет найдено, очевидно, и значение задачи (11).

Сопоставим задаче (13) ее следующую модификацию

$$-\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2a|\xi|}\,d\mu(\xi) \to \min, \quad \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2A|\xi|}\,d\mu(\xi) \le \delta^2, \quad \int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2r}\,d\mu(\xi) \le 1,$$
$$d\mu(\cdot) \ge 0. \quad (14)$$

Это уже выпуклая задача (т. е. задача минимизации выпуклой функции на выпуклом множестве). Легко видеть, что значения задач (13) и (14) отличаются знаком, а множества их решений (если таковые существуют) совпадают.

Для нахождения решения задачи (14) воспользуемся достаточными условиями его существования в теореме Каруша–Куна–Таккера (см. [2]). Функция Лагранжа задачи (14) имеет вид

$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot),\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2) = -\lambda_0\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2a|\xi|}\,d\mu(\xi) +$$
$$\lambda_1\left(\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2A|\xi|}\,d\mu(\xi) - \delta^2\right) + \lambda_2\left(\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2r}\,d\mu(\xi) - 1\right).$$

Достаточные условия состоят в том, что если найдутся такие множители Лагранжа $\widehat{\lambda}_i$, $i = 0, 1, 2$ и допустимая в задаче (14) мера $d\widehat{\mu}(\cdot)$, удовлетворяющие условиям

1) $\widehat{\lambda}_0 > 0, \ \ \widehat{\lambda}_1 \geq 0, \ \ \widehat{\lambda}_2 \geq 0;$

2) $\widehat{\lambda}_1 \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-2A|\xi|}\, d\widehat{\mu}(\xi) - \delta^2 \right) = 0, \quad \widehat{\lambda}_2 \left( \int_{\mathbb{R}} \xi^{2r} d\widehat{\mu}(\xi) - 1 \right) = 0;$

3) $\min\limits_{d\mu(\cdot)\geq 0} \mathcal{L}\left( d\mu(\cdot), \widehat{\lambda}_0, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2, \right) = \mathcal{L}\left( d\widehat{\mu}(\cdot), \widehat{\lambda}_0, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2 \right),$

то $d\widehat{\mu}(\cdot)$ — решение задачи (14). Проверка этого совсем проста, и мы ее опускаем.

Предъявим теперь допустимую в задаче (14) меру $d\widehat{\mu}(\cdot)$ и множители Лагранжа $\widehat{\lambda}_i$, $i = 0, 1, 2$, такие, что выполняются условия 1) – 3).

Положим $d\widehat{\mu}(\cdot) = \xi_0^{-2r}\delta(\cdot - \xi_0)$, где $\delta(\cdot - \xi_0)$ — $\delta$-функций Дирака, сосредоточенная в точке $\xi_0$. Ясно, что $d\widehat{\mu}(\cdot)$ — положительная борелевская мера. Легко видеть, учитывая определение $\xi_0$, что

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2A|\xi|}\, d\widehat{\mu}(\xi) = \xi_0^{-2r} e^{-2A|\xi_0|} = \delta^2, \quad \int_{\mathbb{R}} \xi^{2r}\, d\widehat{\mu}(\xi) = \xi_0^{-2r}\xi_0^{2r} = 1 \quad (15)$$

и значит, мера $d\widehat{\mu}(\cdot)$ допустима в задаче (14).

Положим теперь $\widehat{\lambda}_0 = 1$, а $\widehat{\lambda}_i = \widehat{\lambda}_i(\delta)$, $i = 1, 2$, где числа $\widehat{\lambda}_i(\delta)$ определены перед формулировкой теоремы и которые, очевидно, положительны. Таким образом, с определенными мерой $d\widehat{\mu}(\cdot)$ и множителями Лагранжа $\widehat{\lambda}_i$, $i = 0, 1, 2$, условия 1) и 2) выполняются.

Проверим выполнение условия 3). Для этого сначала рассмотрим функцию

$$h(z) = -1 + \widehat{\lambda}_1 e^{-2(A-a)z} + \widehat{\lambda}_2 z^{2r} e^{2az}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Эта функция дифференцируема на $\mathbb{R}$ и простая проверка показывает, что

$$h(\xi_0) = h'(\xi_0) = 0.$$

Отсюда следует, что $h(z) \geq 0$ для всех $z \in \mathbb{R}$.

Действительно, функция $h(\cdot)$ выпукла, как сумма выпуклых функций, или, что равносильно, выполняется неравенство Иенссена (см. [2])

$$h((1-\gamma)z_1 + \gamma z_2) \leq (1-\gamma)h(z_1) + \gamma h(z_2)$$

для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ и $\gamma \in (0, 1)$.

Пусть $z \in \mathbb{R}$. Согласно этому неравенству и так как $h(\xi_0) = 0$, будем иметь для любого $0 < \gamma < 1$

$$h(\xi_0 + \gamma(z - \xi_0)) = h((1-\gamma)\xi_0 + \gamma z) \le (1-\gamma)h(\xi_0) + \gamma h(z) = \gamma h(z).$$

Деля обе части этого неравенства на $\gamma$ и переходя к пределу при $\gamma \to 0$, приходим к тому, что $h(z) \ge h'(\xi_0)(z - \xi_0) = 0$, т. е. $h(z) \ge 0$ для всех $z \in \mathbb{R}$.

Запишем теперь функцию Лагранжа с данными $\widehat{\lambda}_i$, $i = 0, 1, 2$, в виде

$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot), 1, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2a|\xi|}(-1 + \widehat{\lambda}_1 e^{-2(A-a)|\xi|} + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2r} e^{2a|\xi|})\, d\mu(\xi) - (\widehat{\lambda}_1 \delta^2 + \widehat{\lambda}_2). \quad (16)$$

Функция под знаком интеграла неотрицательна для любого $\xi \in \mathbb{R}$ (поскольку она отличается от функции $h(\cdot)$ на положительный множитель) и обращается в ноль в точке $\xi_0$. Следовательно, для любой положительной меры $d\mu(\cdot)$ интеграл неотрицателен, а когда $d\mu(\cdot) = d\widehat{\mu}(\cdot)$ он равен нулю. Отсюда, очевидно, следует, что выполнено и условие 3) в достаточных условиях теоремы Каруша–Куна–Таккера.

Итак, мера $\widehat{d\mu}(\cdot)$ есть решение задачи (14), а значит, она является и решением задачи (13), Следовательно, значение последней таково

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2a|\xi|}\, d\widehat{\mu}(\xi) = \xi_0^{-2r} e^{-2a\xi_0}. \quad (17)$$

Покажем, что такое же значение имеет и задача (12). Для этого рассмотрим последовательность функций, $\psi_n(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, таких, что их преобразования Фурье имеют вид

$$F[\psi_n](\xi) = \begin{cases} \left(\xi_0 + \dfrac{1}{n}\right)^{-r} \sqrt{2\pi n}\,, & \xi \in [\xi_0,\, \xi_0 + 1/n], \\ 0, & \xi \notin [\xi_0,\, \xi_0 + 1/n]. \end{cases}$$

Покажем, что эта последовательность допустима в задаче (12).

Поскольку преобразования Фурье функций $\psi_n(\cdot)$ имеют компактный носитель, то эти функции имеют производные всех порядков и они принадлежат $L_2(\mathbb{R})$, так что заведомо $\psi_n(\cdot) \in \mathcal{W}_2^r(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$.

Далее, в силу определения $\xi_0$,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2A|\xi|}|F[\psi_n](\xi)|^2\,d\xi = \left(\xi_0+\frac{1}{n}\right)^{-2r} n\int\limits_{\xi_0}^{\xi_0+1/n} e^{-2A\xi}\,d\xi$$
$$\le \left(\xi_0+\frac{1}{n}\right)^{-2r} e^{-2A\xi_0} = \left(\xi_0+\frac{1}{n}\right)^{-2r}\delta^2\,\xi_0^{2r} < \delta^2$$

и

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2r}|F[\psi_n](\xi)|^2\,d\xi = \left(\xi_0+\frac{1}{n}\right)^{-2r} n\int\limits_{\xi_0}^{\xi_0+1/n} \xi^{2r}\,d\xi$$
$$\le \left(\xi_0+\frac{1}{n}\right)^{-2r}\left(\xi_0+\frac{1}{n}\right)^{2r} = 1$$

и таким образом, последовательность $\psi_n(\cdot)$ допустима в задаче (12).

Оценим значения максимизируемого функционала в этой задаче на этих функциях:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2a|\xi|}|F\left[\psi_n\right](\xi)|^2\,d\xi = \left(\xi_0+\frac{1}{n}\right)^{-2r} n\int\limits_{\xi_0}^{\xi_0+1/n} e^{-2a\xi}\,d\xi$$
$$\ge \left(\xi_0+\frac{1}{n}\right)^{-2r} e^{-2a(\xi_0+1/n)}. \qquad (18)$$

Выражение справа стремится к значению задачи (13) (см. (17)). Отсюда следует, что значение задачи (12) не меньше значения задачи (13). Но поскольку, как было отмечено, значение задачи (12) не больше значения задачи (13), то, на самом деле, эти значения совпадают. Следовательно, значение задачи (11) (которое совпадает с величиной справа в (10)) равно $\xi_0^{-r}e^{-a\xi_0}$ и этим доказано неравенство (9).

Перейдем к доказательству того, множество функций $\omega(\cdot)$, удовлетворяющих неравенству (7), не пусто.

Выделяя полный квадрат, нетрудно убедиться, что соотношение (11) равносильно следующему неравенству

$$\left|\omega(\xi)-\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2\xi^{2r}e^{2A|\xi|}}\right| \le \frac{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\,e^{-(A-a)|\xi|}\,|\xi|^r}{\lambda_1 e^{-2A|\xi|}+\lambda_2\xi^{2r}}\times$$
$$\times\sqrt{\lambda_1 e^{-2A|\xi|}+\lambda_2\xi^{2r}-e^{-2a|\xi|}}$$

для п. в. $\xi \in D$, причем, как уже было отмечено (см. (16)), выражение под знаком корня неотрицательно. Отсюда, очевидно, следует, что множество измеримых функций $\omega(\cdot)$, удовлетворяет неравенству (7), не пусто.

Докажем теперь оптимальность методов (8). Пусть измеримая функция $\omega(\cdot)$ удовлетворяет неравенству (7) для п. в. $\xi \in D$ и равна нулю вне $D$. Оценим погрешность метода $\widehat{m}_\omega$.

Для любых $f(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{R})$ и $g(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ таких, что $\|u(\cdot, a; f) - g(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \delta$ имеем по теореме Планшереля (обозначая, для краткости, $z(\xi) = e^{-A|\xi|}F[f](\xi) - F[g](\xi)$)

$$
\begin{aligned}
\|u(\cdot, a; f) - \widehat{m}_\omega(g)(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} &= \|u(\cdot, a; f) - (K * g)(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} |e^{-a|\xi|}F[f](\xi) - \omega(\xi)e^{(A-a)|\xi|}F[g](\xi)|^2\,d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2a|\xi|}|(1-\omega(\xi))F[f](\xi) + \omega(\xi)e^{A|\xi|}z(\xi)|^2\,d\xi. \qquad (19)
\end{aligned}
$$

Оценим по неравенству Коши–Буняковского выражение под интегралом справа в (19). Имеем для п. в. $\xi \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
&e^{-2a|\xi|}|(1-\omega(\xi))F[f](\xi) + \omega(\xi)e^{A|\xi|}z(\xi)|^2 \\
&\quad= e^{-2a|\xi|}\left|\frac{1-\omega(\xi)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_2}\,\xi^r}\sqrt{\widehat{\lambda}_2}\,\xi^r\,F[f](\xi) + \frac{\omega(\xi)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_1}}\sqrt{\widehat{\lambda}_1}\,e^{A|\xi|}z(\xi)\right|^2 \\
&\le e^{-2a|\xi|}\left(\frac{|1-\omega(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_2\,\xi^{2r}} + \frac{|\omega(\xi)|^2e^{2A|\xi|}}{\widehat{\lambda}_1}\right)(\widehat{\lambda}_2\,\xi^{2r}|F[f](\xi)|^2 + \widehat{\lambda}_1|z(\xi)|^2)
\end{aligned}
\qquad (20)
$$

Согласно (11) произведение двух первых множителей в правой части этого неравенства не превосходит единицы для п. в. $\xi \in D$. Если же $\xi \notin D$, то $\omega(\cdot) = 0$, и тогда это произведение равно $\xi^{-2r}e^{-2a|\xi|}/\widehat{\lambda}_2$. Но так как $\xi \notin D$, то $\xi^{-2r}e^{-2a|\xi|}/\widehat{\lambda}_2 < 1$. Таким образом, произведение двух первых множителей в правой части (20) не превосходит единицы для п. в. $\xi \in \mathbb{R}$.

Учитывая это обстоятельство, будем иметь по теореме Планшереля

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}(\widehat{\lambda}_2\,\xi^{2r}|F[f](\xi)|^2+\widehat{\lambda}_1|z(\xi)|^2)\,d\xi=\widehat{\lambda}_2\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\xi^{2r}|F[f](\xi)|^2\,d\xi$$

$$+\,\widehat{\lambda}_1\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}|e^{-A|\xi|}F[f](\xi)-F[g](\xi)|^2\,d\xi$$

$$=\widehat{\lambda}_2\|f^{(r)}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}+\widehat{\lambda}_1\|u(\cdot,A;f)-g(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\le\widehat{\lambda}_2+\widehat{\lambda}_1\delta^2.$$

Элементарный подсчет показывает, что

$$\widehat{\lambda}_2+\widehat{\lambda}_1\delta^2=\xi_0^{-2r}e^{-2a\xi_0}.$$

Тогда из этого равенства, предыдущей оценки, (19) и (20) получаем, что

$$\|u(\cdot,a;f)-\widehat{m}_\omega(g)(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\le\xi_0^{-2r}e^{-2a\xi_0}.$$

Поскольку это верно для любых $f(\cdot)\in W_2^r(\mathbb{R})$ и $g(\cdot)\in L_2(\mathbb{R})$, для которых $\|u(\cdot,a;f)-g(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\delta$, то справедливо неравенство

$$e(W_2^r(\mathbb{R}),\delta,\widehat{m}_\omega)\le\xi_0^{-r}e^{-a\xi_0}.$$

Отсюда и из доказанной оценки (9) следует, что

$$\xi_0^{-r}e^{-a\xi_0}\le E(W_2^r(\mathbb{R}),\delta)\le e(W_2^r(\mathbb{R}),\delta,\widehat{m}_\omega)\le\xi_0^{-r}e^{-a\xi_0}.$$

Этим доказаны равенство (6) и оптимальность методов (8).

Рассмотренная в данной статье задача относится к тому разделу теории приближений, который занимается задачами оптимального восстановления значений линейных функционалов и операторов на классах множеств, элементы которых известны приближенно. Эта тематика возникла в шестидесятые годы прошлого века, начиная с работы С. А. Смоляка [3], и с тех пор активно развивается (см. обзоры [4]–[6] и монографию [7]). Что касается решения конкретных задач оптимального восстановления то они связаны, в основном, с вопросами оптимального восстановления функций по неточно заданному спектру (см., например, [8], [9]) и решений уравнений математической физики по неточным их измерениям или по неточным начальным данным. Данная работа относится ко второму направлению. В работах [10]–[17] исследуются вопросы, близкие к тематике данной статьи

Авторы благодарны Г. Г. Магарил-Ильяеву за полезные обсуждения.

## Список литературы


[1] *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, М.: Мир, 1974.

[2] *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ и его приложения. М.: УРСС, изд 5-ое, доп., 2020.

[3] *Смоляк С. А.* Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них. Канд. дисс. Москва: МГУ, 1965.

[4] *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* A survey of optimal recovery. In: Optimal Estimation in Approximation Theory (C. A. Micchelli and T. J. Rivlin, Eds.). P. 1–54. New York: Plenum Press, 1977.

[5] Melkman A. A., Micchelli C. A. “Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **16** (1979) 87–105.

[6] *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* Lectures on Optimal Recovery. Lecture Notes in Mathematics. V. 1129. P. 21–93. Berlin: Springer–Verlag, 1985.

[7] *Traub J. F., Woźniakowski H.* A General Theory of Optimal Algorithms. New York: Academic Press, 1980.

[8] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функц. анализ и его прил. 2003. Т. 37. С. 51-64.

[9] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру // Функц. анализ и его прил. 2010. Т. 44. С. 76–79.

[10] *Magaril-Il'yaev G. G., Osipenko K. Yu., Tikhomirov V. M.* On optimal recovery of heat equation solutions. In: Approximation Theory: A volume dedicated to B. Bojanov (D. K. Dimitrov, G. Nikolov, and R. Uluchev, Eds.), 163-175, Sofia: Marin Drinov Academic Publishing House, 2004.

[11] *Осипенко К. Ю.* О восстановлении решения задачи Дирихле по неточным исходным данным // Владикавказский мат. журн. 2004, т. 6, вып. 4, 55-62.

[12] *Балова Е. А.* Об оптимальном восстановлении решений задачи Дирихле по неточным исходным данным // Матем. заметки. 2007, 82:3 (2007), 323–334.

[13] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измеренияи // Матем. сб. 2009, 200:5, 37-54.

[14] *Абрамова Е. В.* Наилучшее восстановление решения задачи Дирихле по неточно заданному спектру граничной функции // Владикавк. матем. журн. 2017, 19:4, 3–12.

[15] *Балова Е. А., Осипенко К. Ю.* Оптимальные методы восстановления решений задачи Дирихле, точные на подпространствах сферических гармоник // Матем. заметки, 2018, 104:6, 803–811.

[16] *G. G. Magaril-Il'yaev, E. O. Sivkova.* Optimal recovery of the semi-group operators from inaccurate data // Eurasian Mathematical Journal, 10:4 (2019), 75-84.

[17] *Абрамова Е. В., Магарил-Ильяев Г. Г., Сивкова Е. О.* Наилучшее восстановление решения задачи Дирихле для полупространства по неточным измерениям // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 2020, 60:10, 1711–1720.