РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

На правах рукописи

Выск Наталия Дмитриевна

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ МУЛЬТИПЛИКАТОРНОГО ТИПА И РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ПО НЕТОЧНЫМ НАЧАЛЬНЫМ ДАННЫМ

01.01.01 — математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2009

Работа выполнена на кафедре "Высшая математика"МАТИ-РГТУ им. К.Э. Циолковского.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор К.Ю. Осипенко.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Г.Г. Магарил-Ильяев, кандидат физико-математических наук, доцент А.С. Кочуров.
Ведущая организация:	Московский государственный геологоразведочный университет им. Орджоникидзе.

Защита диссертации состоится 03 марта 2009 г. в 17 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д.212.203.27 в Российском университете дружбы народов по адресу: 117923, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, ауд. 495а.

С диссертацией можно ознакомиться в Учебно-научном информационном библиотечном центре (Научной библиотеке Российского университета дружбы народов) по адресу: 117419, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6.

Автореферат разослан 2009 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук, доцент Л.Е. Россовский.

Общая характеристика работы

Актуальность темы

При решении многих задач математической физики и особенно при их численной реализации естественным образом возникают задачи, связанные с дискретизацией функций, восстановлением функций, функционалов или операторов от них по некоторой неполной и неточной информации о функции. Такого рода задачи, интенсивно изучающиеся в последнее время (особенно в связи с развитием компьютерной техники) составляют новое направление, получившее название — оптимальное восстановление. Круг исследуемых в этой области проблем содержит такие важные задачи, как построение оптимальных методов восстановления функций, заданных точно или приближенно в конечном числе точек, построение оптимальных квадратурных формул, восстановление производных (численное дифференцирование), выбор оптимальным образом информации, которую необходимо знать о функции, чтобы с наименьшей погрешностью восстановить ее, аппроксимация функции по ее приближенным коэффициентам Фурье или преобразованию Фурье и др.

Если при классическом подходе, как правило, задаются средства приближения (алгебраические или тригонометрические полиномы, рациональные функции, сплайны, вейвлеты и др.), то в задачах оптимального восстановления вид метода восстановления заранее не фиксируется — он ищется среди всевозможных методов (алгоритмов), использующих значения аппроксимируемой функции. Важность такой постановки обусловлена тем, что при фиксированной информации выбирается наилучший способ приближения функции или функционала (в общем случае — оператора).

Цель работы

Цель диссертационной работы состояла в получении оптимальных методов восстановления решения для уравнений в частных производных гиперболического типа. Для достижения указанной цели необходимо было решить следующие задачи:

1. Найти способ построения оптимального метода восстановления линейного оператора $Q\colon X \to l_2$ мультипликаторного типа, заданного равенством
$$Qx = (\eta_1 x_1, \eta_2 x_2, \ldots),\ \ j \in \mathbb{N},$$
в случае, когда последовательность $\mu_j = \eta_j^2$ не является монотонной, по известным значениям N компонент, заданных в погрешностью в метрике l_2.
2. Решить ту же задачу, если погрешность задается в равномерной метрике.
3. Применить полученные результаты для определения оптимального метода восстановления решения однородного и неоднородного одномерного волнового уравнения с различными типами начальных условий.
4. Найти оптимальные методы восстановления решения обобщенного волнового уравнения на $(d-1)$-мерной сфере и в d-мерном шаре.

Научная новизна

Научная новизна работы заключается в том, что предложены оптимальные методы восстановления операторов мультипликаторного типа в случае, когда коэффициенты мультипликатора и коэффициенты в ограничениях не являются монотонными. Это потребовало построения новых методов поиска оптимального метода восстановления.

Практическая ценность

Практическая ценность работы состоит в том, что найдены оптимальные методы восстановления решения волнового уравнения по неточным начальным данным, заданным с погрешностью в метрике l_2 и в равномерной метрике. Кроме того, показано, что для построения оптимального метода восстановления решения достаточно знать ограниченное количество приближенных значений начальных данных. Установлена связь между погрешностью в исходных данных и объемом полезной информации, используемой в оптимальном методе восстановления.

Апробация работы и публикации

По материалам диссертации опубликовано 5 работ [1-5].

Основные положения работы докладывались на следующих конференциях и семинарах:

- Международной школе-семинаре по геометрии и анализу памяти Н.В.Ефимова, Абрау-Дюрсо, 2006 г.;
- Международной конференции EPCoRA2007, Москва, 2007 г.;
- 3-й Международной конференции "Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования", Москва, 2008 г.;
- научном семинаре кафедры "Высшая математика" МАТИ-РГТУ им. К.Э.Циолковского
- научном семинаре кафедры "Общие проблемы управления" механико-математического факультета МГУ;
- научном семинаре кафедры нелинейного анализа и оптимизации РУДН.

Структура и объем диссертации

Работа состоит из введения, трех глав и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 84 страницы. Список литературы содержит 19 наименований.

Краткое содержание работы

<u>В 1-й главе</u> рассматривается общая постановка задачи восстановления линейного оператора и приводится ряд предварительных сведений об обобщенном решении гиперболических уравнений.

<u>Во 2-й главе</u> строятся оптимальные методы восстановления решения обобщенного волнового уравнения и одномерного волнового уравнения по неточным начальным данным, заданным с погрешностью в метрике l_2 и в равномерной метрике.

<u>В 3-й главе</u> получены оптимальные методы восстановления решения обобщенного волнового уравнения на $(d-1)$-мерной сфере и в d-мерном шаре.

<u>В 1-й главе</u> рассматривается общая постановка задачи оптимального восстановления линейного оператора: для векторного пространства X, нормированного пространства Z и оператора T требуется восстановить значения T на некотором множестве $W \subset X$ по неточной информации о каждом элементе $x \in W$, задаваемой с помощью некоторого информационного отображения $I(x)$, вообще говоря, многозначного, из W в векторное пространство Y. Даются определения понятий погрешности восстановления для данного метода φ, погрешности оптимального восстановления и оптимального метода восстановления. Описывается метод построения оптимального восстановления линейного оператора по информации, заданной с погрешностью, разработанный в работах Г.Г.Магарил-Ильяева и К.Ю.Осипенко. Формулируются следствия из этих работ для задач восстановления некоторых линейных операторов.

Определяется такое понятие, как *обобщенное решение* гиперболического уравнения в частных производных.

<u>Во 2-й главе</u> строится метод оптимального восстановления решения обобщенного волнового уравнения для начальных данных, задаваемых функциями из L_2.

Пусть D — некоторая ограниченная область n-мерного пространства R_n. Рассмотрим в $(n+1)$-мерном пространстве $R_{n+1} = R_n \times \{-\infty < t < +\infty\}$ ограниченный цилиндр $Q_T = \{x \in D,\ 0 < t < T\}$ с боковой поверхностью $\Gamma_T = \{x \in \partial D,\ 0 < t < T\}$. Обозначим $D_\tau = \{x \in D,\ t = \tau\}$ сечение этого цилиндра плоскостью $t = \tau,\ 0 \le \tau \le T$. В частности, D_0— нижнее основание цилиндра, D_T— его верхнее основание.

Рассмотрим в цилиндре Q_T однородное гиперболическое уравнение

$$u_{tt} - \operatorname{div}(k(x)\nabla u) + a(x)u = 0, \tag{1}$$

где $k(x) \in C^1(\bar{D}),\ a(x) \in C(\bar{D}),\ k(x) \ge k_0 = const > 0$, с начальными условиями

$$u|_{t=0} = f, \tag{2}$$

где $f(x) \in L_2(D)$,

$$u_t|_{t=0} = 0 \tag{3}$$

и граничным условием

$$u|_{\Gamma_T} = 0. \tag{4}$$

Пусть $v_1(x), v_2(x), \dots$ — ортонормированная в $L_2(D)$ система обобщенных собственных функций первой краевой задачи

$$\operatorname{div}(k\nabla v) - av = \lambda v, \quad x \in D, \quad v|_D = 0, \tag{5}$$

а $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ — последовательность соответствующих собственных значений. Тогда $v_1(x), v_2(x), \dots$ — ортонормированный базис в $L_2(D)$, $\lambda_k \to -\infty$ при $k \to \infty$, и при $a(x) \equiv 0 \quad 0 > \lambda_1 > \lambda_2 \geq \dots$. Разложим $f(x)$ в ряд Фурье по системе $v_1(x), v_2(x), \dots$:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k v_k(x), \quad f_k = (f, v_k)_{L_2(D)}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \|f\|^2_{L_2(D)}.$$

Тогда обобщенное решение первой смешанной задачи (1) — (4) имеет вид:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(t) v_k(x), \tag{6}$$

где

$$U_k(t) = f_k \cos \sqrt{-\lambda_k} t,$$

$$U_1(t) = f_1.$$

При этом функция $u(x,t) \in H^1(Q_T)$. Предположим, что $f(x) \in W_2^\gamma(D)$, где

$$W_2^\gamma(D) = \{ f(x) \in L_2(D) : \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k |f_k|^2 \leq 1, \quad \gamma_k > 0\}.$$

Будем считать, что нам известны приближенные значения первых N коэффициентов Фурье функции f, причем погрешность задания этих коэффициентов определяется условием

$$\sum_{k=1}^{N} \|f_k - y_k\|^2_{L_2(D)} \leq \delta^2, \quad \delta > 0. \tag{7}$$

Поставим задачу поиска оптимального метода восстановления решения задачи (1) — (4) в момент времени T на классе $W_2^\gamma(D)$ по информационному оператору F_δ^N, который каждой функции $f(\cdot) \in W_2^\gamma(D)$ сопоставляет множество векторов $y = (y_1, \dots, y_N)$, удовлетворяющих условию (7).

В качестве методов восстановления будем рассматривать произвольные операторы $\varphi\colon \mathbb{R}^N \to L_2(D)$. *Погрешностью восстановления* для данного метода φ назовем величину

$$e(T, W_2^\gamma(D), F_\delta^N, \varphi) = \sup_{\substack{f(x)\in W_2^\gamma(D),\ y=(y_1,\dots,y)\in\mathbb{R}^N \\ \sum_{j=1}^N |a_j(f)-y_j|^2\leq\delta^2}} \|u(x,T) - \varphi(y)(x)\|_{L_2(D)}.$$

Величина

$$E(T, W_2^\gamma(D), F_\delta^N) = \inf_{\varphi\colon \mathbb{R}^N \to L_2(D)} e(T, W_2^\gamma(D), F_\delta^N, \varphi)$$

называется *погрешностью оптимального восстановления*, а метод, на котором достигается нижняя грань, называется *оптимальным методом восстановления.*

Рассмотрим вначале общую задачу оптимального восстановления некоторого линейного оператора мультипликаторного типа $Q\colon X \to l_2$, заданного равенством

$$Qx = (\eta_1 x_1, \eta_2 x_2, \ldots), \ j \in \mathbb{N},$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots) \in X$, а

$$X = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots) : \|x\|_X = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \nu_j |x_j|^2 \right)^{1/2} < \infty \right\},$$

$\nu_j > 0$, $j \in \mathbb{N}$. Положим $\mu_j = \eta_j^2$ и будем предполагать, что $\mu_j/\nu_j \to 0$ при $j \to \infty$. Тогда при всех $x \in X$ $Qx \in l_2$. Нас интересует задача восстановления оператора Q по приближенным значениям первых N компонент $x_1, \ldots, x_N$.

Перейдем к точной постановке задачи. Положим

$$W = \{ x \in X : \|x\|_X \le 1 \}.$$

Будем считать, что для каждого $x \in W$ нам известен вектор $y = (y_1, \ldots, y_N)$ такой, что

$$\|I_N x - y\|_{l_2^N} = \left(\sum_{j=1}^{N} |x_j - y_j|^2 \right)^{1/2} \le \delta$$

(здесь $I_N x = (x_1, \ldots, x_N)$). В качестве методов восстановления рассматриваются всевозможные отображения $\varphi\colon l_2^N \to l_2$. Погрешность восстановления для данного метода φ определяется равенством

$$e(Q, W, I_N, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x \in W, \ y \in l_2^N \\ \|I_N x - y\|_{l_2^N} \le \delta}} \|Qx - \varphi(y)\|_{l_2}.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(Q, W, I_N, \delta) = \inf_{\varphi\colon l_2^N \to l_2} e(Q, W, I_N, \delta, \varphi),$$

а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным методом восстановления оператора Q на классе W по информации I_N, заданной с погрешностью в норме l_2^N.

Предположим, что $\nu_1 < \ldots < \nu_N$, $\nu_{N+1} < \nu_{N+2} < \ldots$ и $\lim_{j \to +\infty} \mu_j/\nu_j = 0$. Обозначим через e_j, $j = 1, 2, \ldots$, — стандартный базис в l_2

$$(e_j)_k = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \ne j, \end{cases} \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Введем следующие обозначения

$$A = \max_{1 \le j \le N} \frac{\mu_j}{\nu_j}, \quad B = \max_{j > N} \frac{\mu_j}{\nu_j}.$$

Пусть $1 \le p \le N$, $q > N$ и $p \le r \le N$ таковы, что

$$\frac{\mu_p}{\nu_p} = A, \quad \frac{\mu_q}{\nu_q} = B, \quad \mu_r - B\nu_r = \max_{p \le j \le N} (\mu_j - B\nu_j)$$

(для однозначности будем считать, что p — наибольшее, а q и r — наименьшие из чисел, обладающих соответствующим свойством). Пусть, кроме того, s_{k+1} — наибольшее из чисел таких, что $s_k < s_{k+1} \le r$ и

$$\frac{\mu_{s_{k+1}} - \mu_{s_k}}{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_k}} = \max_{s_k < j \le r} \frac{\mu_j - \mu_{s_k}}{\nu_j - \nu_{s_k}}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1,$$

где $s_0 = p$, $s_m = r$.

Начнем с одного вспомогательного результата, описывающего свойства последовательностей $\{\mu_{s_k}\}$ и $\{\nu_{s_k}\}$.

Лемма 1. Последовательности

$$\left\{ \frac{\mu_{s_k}}{\nu_{s_k}} \right\} \text{ и } \left\{ \frac{\mu_{s_{k+1}} - \mu_{s_k}}{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_k}} \right\}$$

строго монотонно убывают и при всех $1 \le j < s_k$

$$\frac{\mu_{s_k} - \mu_j}{\nu_{s_k} - \nu_j} \ge \frac{\mu_{s_k} - \mu_{s_{k-1}}}{\nu_{s_k} - \nu_{s_{k-1}}}. \tag{8}$$

Положим

$$J_k = \left\{ j \in \mathbb{N} \cap [1, N] : \frac{\mu_j}{\nu_j} > \frac{\mu_{s_{k+1}} - \mu_{s_k}}{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_k}} \right\}, \quad k = 0, \dots, m-1,$$

$$J_m = \left\{ j \in \mathbb{N} \cap [1, N] : \frac{\mu_j}{\nu_j} > B \right\}.$$

Теорема 1. При $B \ge A$ для всех $\delta > 0$

$$E(Q, W, I_N, \delta) = \sqrt{\frac{\mu_q}{\nu_q}},$$

а метод $\widehat{\varphi}(y) = 0$ — оптимальный. Если $B < A$, то

(i) при $\delta \ge \dfrac{1}{\sqrt{\nu_p}}$

$$E(Q, W, I_N, \delta) = \sqrt{\frac{\mu_p}{\nu_p}},$$

а метод $\widehat{\varphi}(y) = 0$ — оптимальный;

(ii) при $\dfrac{1}{\sqrt{\nu_{s_{k+1}}}} \le \delta < \dfrac{1}{\sqrt{\nu_{s_k}}}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$,

$$E(Q, W, I_N, \delta) = \sqrt{\mu_{s_k} \frac{\nu_{s_{k+1}}\delta^2 - 1}{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_k}} + \mu_{s_{k+1}} \frac{1 - \delta^2 \nu_{s_k}}{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_k}}},$$

а метод

$$\widehat{\varphi}(y) = \sum_{j \in J_k} \eta_j \left(1 + \frac{\mu_{s_{k+1}} - \mu_{s_k}}{\mu_{s_k}\nu_{s_{k+1}} - \mu_{s_{k+1}}\nu_{s_k}} \nu_j \right)^{-1} y_j e_j$$

— оптимальный;

(iii) при $\delta < \dfrac{1}{\sqrt{\nu_r}}$

$$E(Q, W, I_N, \delta) = \sqrt{\mu_r \delta^2 + \mu_q \frac{1 - \delta^2 \nu_r}{\nu_q}},$$

а метод

$$\widehat{\varphi}(y) = \sum_{j \in J_m} \eta_j \left(1 + \frac{\mu_q}{\mu_r \nu_q - \mu_q \nu_r} \nu_j \right)^{-1} y_j e_j$$

— оптимальный.

Далее полученный результат используется для поиска оптимального метода восстановления решения обобщенного волнового уравнения (1) — (4).

Вводятся обозначения:

$$A = \max_{1 \le k \le N} \frac{\cos^2 \sqrt{-\lambda_k} t}{\gamma_k} = \frac{\cos^2 \sqrt{-\lambda_p} t}{\gamma_p},$$

$$B = \max_{k > N} \frac{\cos^2 \sqrt{-\lambda_k} t}{\gamma_k} = \frac{\cos^2 \sqrt{-\lambda_q} t}{\gamma_q},$$

$$r: \quad \cos^2 \sqrt{-\lambda_r} t - B\gamma_r = \max_{p \le k \le N} (\cos^2 \sqrt{-\lambda_k} t - B\gamma_k),$$

и доказывается

Теорема 2. При $B \ge A$ для всех $\delta > 0$

$$E(T, W_2^\gamma(D), F_\delta^N) = \frac{|\cos \sqrt{-\lambda_q} t|}{\sqrt{\gamma_q}},$$

а метод $\widehat{\varphi}(y) = 0$ — оптимальный. Если $B < A$, то

(i) при $\delta \ge \dfrac{1}{\sqrt{\gamma_{s_p}}}$

$$E(T, W_2^\gamma(D), F_\delta^N) = \frac{|\cos \sqrt{-\lambda_p} t|}{\gamma_p},$$

а метод $\widehat{\varphi}(y) = 0$ — оптимальный;

(ii) при $\dfrac{1}{\sqrt{\gamma_{s_{l+1}}}} \le \delta < \dfrac{1}{\sqrt{\gamma_{s_l}}}$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$,

$$E(T, W_2^\gamma(D), F_\delta^N) =$$

$$\sqrt{\cos^2 \sqrt{-\lambda_{s_l}} t \frac{1 - \gamma_{s_{l+1}} \delta^2}{\gamma_{s_{l+1}} - \gamma_{s_l}} + \cos^2 \sqrt{-\lambda_{s_{l+1}}} t \frac{1 - \delta^2 \gamma_{s_l}}{\gamma_{s_{l+1}} - \gamma_{s_l}}},$$

а метод

$$\widehat{\varphi}(y) =$$

$$\sum_{k \in J_l} \cos \sqrt{-\lambda_k} t \left(1 + \frac{\cos^2 \sqrt{\lambda_{s_{l+1}}} t - \cos^2 \sqrt{\lambda_{s_l}} t}{\gamma_{s_{l+1}} \cos \sqrt{-\lambda_l} t - \gamma_{s_l} \cos^2 \sqrt{\lambda_{s_{l+1}}} t} \gamma_k \right)^{-1} y_k v_k(x)$$

— оптимальный;

(iii) при $\delta < \dfrac{1}{\sqrt{\gamma_{s_r}}}$

$$E(T, W_2^\gamma(D), F_\delta^N) = \sqrt{\delta^2 \cos^2 \sqrt{-\lambda_r} t + \cos^2 \sqrt{-\lambda_q} t \frac{1 - \delta^2 \gamma_r}{\gamma_q}},$$

а метод

$$\widehat{\varphi}(y) = \sum_{k \in J_m} \cos \sqrt{-\lambda_k} t \left(1 + \frac{\gamma_k \cos^2 \sqrt{-\lambda_q} t}{\gamma_q \cos^2 \sqrt{-\lambda_r} t - \gamma_r \cos^2 \sqrt{-\lambda_q} t}\right)^{-1} y_k v_k(x)$$

— оптимальный.

Полученные результаты применяются к решению задач оптимального восстановления решения волнового уравнения с нулевыми граничными условиями и нулевой начальной скоростью

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) &= f(x), \\ u_t(x,0) &= 0; \end{aligned} \tag{9}$$

волнового уравнения с нулевыми граничными условиями, нулевой начальной формой струны и ненулевой начальной скоростью:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) &= 0, \\ u_t(x,0) &= f(x); \end{aligned} \tag{10}$$

неоднородного волнового уравнения с нулевыми начальными и граничными условиями и стационарной неоднородностью:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + g(x), \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) &= 0, \\ u_t(x,0) &= 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Далее рассматривается задача оптимального восстановления решения волнового уравнения с погрешностью, заданной в равномерной метрике. Предполагается, что для каждого $x \in W$ нам известен вектор $y = (y_1, \ldots, y_N)$ такой, что

$$|x_j - y_j| \le \delta_j, \quad j = 1, ..., N.$$

В качестве методов восстановления рассматриваются всевозможные отображения $\varphi\colon l_\infty^N \to l_2$. Погрешность восстановления для данного метода φ определяется равенством

$$e(Q, W, I_N, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x \in W,\ y \in l_\infty^N \\ |x_j - y_j| \le \delta_j,\ j=1,\ldots,N}} \|Qx - \varphi(y)\|_{l_2}$$

(здесь $\delta=(\delta_1,...,\delta_N), I_Nx=(x_1,\dots,x_N)$).

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(Q,W,I_N,\delta)=\inf_{\varphi:\, l_\infty^N\to l_2} e(Q,W,I_N,\delta,\varphi), \tag{12}$$

а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным методом восстановления оператора Q на классе W по информации I_N, заданной с погрешностью в норме l_∞^N.

Пусть ν_j монотонно возрастает,

$$\lim_{j\to+\infty}\nu_j=+\infty, \quad \lim_{j\to+\infty}\mu_j/\nu_j=0.$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$\frac{\mu_1}{\nu_1}\geq\frac{\mu_2}{\nu_2}\geq ...\geq\frac{\mu_N}{\nu_N}$$

(этого можно добиться соответствующей перенумеровкой). Пусть $q>N$ таково, что

$$\frac{\mu_q}{\nu_q}=\max_{j>N}\frac{\mu_j}{\nu_j}.$$

Если $\nu_1\delta_1^2<1$ и $\dfrac{\mu_1}{\nu_1}>\dfrac{\mu_q}{\nu_q}$,
положим

$$p_0=p_0(\delta)=\max\left\{p: \sum_{j=1}^{p}\nu_j\delta_j^2<1,\ \frac{\mu_p}{\nu_p}>\frac{\mu_q}{\nu_q},\ 1\leq p\leq N\right\},$$

в противном случае считаем, что $p_0=0$.
Положим

$$q_0=\begin{cases} q, & \dfrac{\mu_q}{\nu_q}\geq\dfrac{\mu_{p_0+1}}{\nu_{p_0+1}} \\ p_0+1, & \dfrac{\mu_q}{\nu_q}<\dfrac{\mu_{p_0+1}}{\nu_{p_0+1}}. \end{cases}$$

Теорема 3. Имеет место равенство

$$E(Q,W,I_N,\delta)=\sqrt{\frac{\mu_{q_0}}{\nu_{q_0}}+\sum_{j=1}^{p_0}\left(\mu_j-\frac{\mu_{q_0}}{\nu_{q_0}}\nu_j\right)\delta_j^2}, \tag{13}$$

при этом метод

$$\widehat{\varphi}(y)=\sum_{j=1}^{p_0}\eta_j\left(1-\frac{\mu_{q_0}\nu_j}{\nu_{q_0}\mu_j}\right)y_je_j \tag{14}$$

является оптимальным.

Полученный результат применяется для построения оптимального метода восстановления решения уравнений (9)-(11).

Результат теоремы 1 используется для решения задачи оптимального восстановления k-й производной функции из следующих классов:

1) *Соболевский класс* $W_2^r(\mathbb{T})$, состоящий из 2π - периодических функций, у которых $(r-1)$-я производная абсолютно непрерывна и $\|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}\leq 1$.

2) *Класс Харди-Соболева* $H_2^{r,\beta}(\mathbb{T})$ — множество 2π - периодических функций $x(\cdot)$, аналитически продолжаемых в полосу $S_\beta = \{z \in \mathbb{C} : |\Im z| < \beta\}$ и удовлетворяющих условию

$$\|x^{(r)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^\beta(\mathbb{T})} \le 1,$$

где $\mathcal{H}_2^\beta(\mathbb{T})$ — пространство Харди 2π-периодических функций $x(\cdot)$, аналитически продолжаемых в полосу S_β и удовлетворяющих условию

$$\|x(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^\beta(\mathbb{T})} = \sup_{0<\rho<\beta} \left(\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{T}} (|x(t+i\rho)|^2 + |x(t-i\rho)|^2) dt \right)^{1/2} < \infty.$$

3) *Класс Бергмана-Соболева* $A_2^{r,\beta}(\mathbb{T})$— множество 2π - периодических функций $x(\cdot)$, аналитически продолжаемых в полосу S_β и удовлетворяющих условию

$$\|x^{(r)}(\cdot)\|_{\mathcal{A}_2^\beta(\mathbb{T})} \le 1.$$

Здесь $\mathcal{A}_2^\beta(\mathbb{T})$ — пространство Бергмана 2π-периодических функций $x(\cdot)$, аналитически продолжаемых в полосу S_β и удовлетворяющих условию

$$\|x(\cdot)\|_{\mathcal{A}_2^\beta(\mathbb{T})} = \left(\frac{1}{4\pi\beta} \int_{\mathbb{T}} dt \int_{-\beta}^{\beta} |x(t+i\rho)|^2 d\rho \right)^{1/2} < \infty.$$

Оптимальный метод восстановления строится по информации I_δ^{2N+1}, заключающейся в том, что нам известны числа $\{y_j\}_{|j|\le N}$ такие, что для коэффициентов Фурье $\{x_j\}_{|j|\le N}$ функции $x(\cdot)$

$$\sum_{|j|\le N} |x_j - y_j|^2 \le \delta^2, \quad \delta > 0,$$

или по информации I_δ, если мы располагаем числами $\{y_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ такими, что для коэффициентов Фурье $\{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ функции $x(\cdot)$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |x_j - y_j|^2 \le \delta^2, \quad \delta > 0.$$

Оператор дифференцирования обозначается через D^k. В качестве метода восстановления допускается любое отображение $\varphi : l_2 \to L_2(\mathbb{T})$.

Погрешностью этого метода назовем величину

$$e(D^k, W, I_\delta^{2N+1}, \varphi) = \sup_{\substack{x(\cdot)\in W,\ y\in l_2 \\ \sum_{|j|\le N} |x_j-y_j|^2 \le \delta^2}} \|D^k x(\cdot) - \varphi(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}$$

в случае, если задана информация I_δ^{2N+1}, или

$$e(D^k, W, I_\delta, \varphi) = \sup_{\substack{x(\cdot)\in W,\ y\in l_2 \\ \sum_{j\in\mathbb{Z}} |x_j-y_j|^2 \le \delta^2}} \|D^k x(\cdot) - \varphi(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})},$$

если задана информация I_δ.

Соответственно погрешность оптимального восстановления определяется как

$$E(D^k, W, I_\delta^{2N+1}) = \inf_{\varphi:\ l_2 \to L_2(\mathbb{T})} e(D^k, W, I_\delta^{2N+1}, \varphi)$$

или

$$E(D^k, W, I_\delta) = \inf_{\varphi:\, l_2 \to L_2(\mathbb{T})} e(D^k, W, I_\delta, \varphi).$$

Обозначим $\mu_j = j^{2k}$,

$$\nu_j(W) = \begin{cases} j^{2r}, & W = W_2^r(\mathbb{T}), \\ j^{2r} \operatorname{ch} 2j\beta, & W = H_2^{r,\beta}(\mathbb{T}), \\ j^{2r} \frac{\operatorname{sh} 2j\beta}{2j\beta}, & W = A_2^{r,\beta}(\mathbb{T}). \end{cases}$$

Найдем при $\nu_{s+1}^{-\frac{1}{2}}(W) \le \delta < \nu_s^{-\frac{1}{2}}(W),\ s \ge 1$, такое N_0, что

$$N_0 = \max\{k : \frac{\mu_k}{\nu_k} \ge \frac{\mu_{s+1} - \mu_s}{\nu_{s+1} - \nu_s}\}.$$

Тогда справедлива следующая

Теорема 4. При $\nu_{s+1}^{-1/2}(W) \le \delta < \nu_s^{-1/2}(W),\ s \ge 1$, метод

$$\varphi(y) = \sum_{j \in [-N_0, N_0]} \gamma_j \left(1 + \nu_j \frac{\mu_{s+1} - \mu_s}{\mu_s \nu_{s+1} - \mu_{s+1}\nu_s}\right)^{-1} y_j e^{ij\cdot},$$

где $\{e^{ij\cdot}\}_{j \in \mathbb{Z}}$ — ортогональный базис в соответствующем функциональном пространстве, является оптимальным.

Таким образом, для оптимального метода восстановления можно использовать только значения $y_j \in [-N_0, N_0]$, то есть ограничиться только частью исходной информации.

В 3-й главе получены оптимальные методы восстановления решения обобщенного волнового уравнения на единичной сфере в d-мерном пространстве:

$$\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}.$$

Рассмотрим обобщенное волновое уравнение с нулевой начальной скоростью

$$u_{tt} + (-\Delta_S)^{\alpha/2} u = 0, \qquad u|_{t=0} = f, \quad u_t|_{t=0} = 0, \tag{15}$$

где $f \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$.

Здесь $\Delta_S Y$ — *сферический лапласиан* или *оператор Лапласа-Бельтрами*:

$$\Delta_S Y(x\prime) = \Delta Y\left(\frac{x}{|x|}\right)_{|x = x\prime}, \quad x\prime \in \mathbb{S}^{d-1};$$

оператор $(-\Delta_S)^{\alpha/2}$ определяется следующим образом:

$$(-\Delta_S)^{\alpha/2} Y = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^{\alpha/2} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)},$$

$$Y = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)},$$

где $\Lambda_k = k(k+d-2)$ — собственные числа оператора Лапласа-Бельтрами на сфере, $Y_j^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots$, $j = 1, \dots, a_k$, — система однородных сферических гармоник (k — степень многочлена $Y_j^{(k)}$, a_k — размерность пространства сферических гармоник степени k), которая является ортонормированным базисом в $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$.

Начальное условие понимается здесь в следующем смысле:

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} |u(x', t) - f(x')|^2 dx' = 0.$$

Решение этой задачи имеет вид

$$u(x\prime, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} \cos \Lambda_k^{\alpha/4} t Y_j^{(k)}(x\prime), \tag{16}$$

где

$$f(x\prime) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x\prime).$$

Будем считать, что нам известны приближенные значения первых N коэффициентов Фурье функции $f(x)$ $y_1, \dots, y_N$, причем

$$\sum_{k=1}^{k_0-1} a_k < N \le \sum_{k=1}^{k_0} a_k, \quad \tilde{N} = N - \sum_{k=1}^{k_0-1} a_k.$$

При этом

$$\sum_{k=1}^{k_0-1} \sum_{j=1}^{a_k} |c_{kj}(f) - y_j|^2 + \sum_{j=1}^{\tilde{N}} |c_{k_0-1,j}(f) - y_j|^2 \le \delta^2, \quad \delta > 0. \tag{17}$$

Поставим задачу поиска оптимального метода восстановления решения задачи (15) в момент времени τ на классе

$$W_2^{\beta}(\mathbb{S}^{d-1}) = \{f \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}) : \quad ||(-\Delta_S)^{\beta/2} f||_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \le 1\}$$

по информационному оператору F_δ^N, который каждой функции $f(x) \in W_2^{\beta}(\mathbb{S}^{d-1})$ сопоставляет множество векторов $y = (y_1, \dots, y_N)$, удовлетворяющих условию (17).

В качестве методов восстановления будем рассматривать произвольные операторы $\varphi\colon l^N \to L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. *Погрешностью восстановления* для данного метода φ назовем величину

$$e(\tau, \alpha, W_2^{\beta}(\mathbb{S}^{d-1}), F_\delta^N, \varphi) = \sup_{\substack{f \in W_2^{\beta}(\mathbb{S}^{d-1}),\ y \in l_2^N \\ \sum_{k=1}^{k_0-1} \sum_{j=1}^{a_k} |c_{kj}(f) - y_j|^2 + \sum_{j=1}^{\tilde{N}} |c_{k_0-1,j}(f) - y_j|^2 \le \delta^2}} \|u(\cdot, \tau) - \varphi(y)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}.$$

Величина

$$E(\tau, \alpha, W_2^{\beta}(\mathbb{S}^{d-1}), F_\delta^N) = \inf_{\varphi\colon l_2^N \to L_2(\mathbb{S}^{d-1})} e(\tau, \alpha, W_2^{\beta}(\mathbb{S}^{d-1}), F_\delta^N, \varphi)$$

называется *погрешностью оптимального восстановления*, а метод, на котором достигается нижняя грань, называется *оптимальным методом восстановления*.

Положим

$$A = \max_{1\le k\le k_0} \frac{\cos^2 \Lambda_k^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_k^\beta} = \frac{\cos^2 \Lambda_p^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_p^\beta},$$

$$B = \max_{k\ge k_0} \frac{\cos^2 \Lambda_k^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_k^\beta} = \frac{\cos^2 \Lambda_q^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_q^\beta},$$

r определяется из условия

$$\cos^2 \Lambda_r^{\alpha/4}\tau - B\Lambda_r^\beta = \max_{p\le k\le k_0} (\cos^2 \Lambda_k^{\alpha/4}\tau - B\Lambda_k^\beta),$$

последовательность s_l определяется равенствами

$$\frac{\cos^2 \Lambda_{s_{l+1}}^{\alpha/4}\tau - \cos^2 \Lambda_{s_l}^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_{s_{l+1}}^\beta - \Lambda_{s_l}^\beta} = \max_{s_l<k\le r} \frac{\cos^2 \Lambda_k^{\alpha/4}\tau - \cos^2 \Lambda_{s_l}^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_k^\beta - \Lambda_{s_l}^\beta}, \qquad l = 0, 1, \ldots, m-1,$$

где $s_0 = p$, $s_m = r$, а

$$J_l = \left\{ k \in \mathbb{N} \cap [1, k_0] : \frac{\cos^2 \Lambda_k^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_k^\beta} > \frac{\cos^2 \Lambda_{s_{l+1}}^{\alpha/4}\tau - \cos^2 \Lambda_{s_l}^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_{s_{l+1}}^\beta - \Lambda_{s_l}^\beta} \right\}, \qquad l = 0, \ldots, m-1,$$

$$J_m = \left\{ k \in \mathbb{N} \cap [1, k_0] : \frac{\cos^2 \Lambda_k^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_k^\beta} > B \right\}.$$

Тогда из теоремы 1 вытекает

Теорема 5. При $B \ge A$ для всех $\delta > 0$

$$E(\tau, \alpha, W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), F_\delta^N) = |\cos \Lambda_q^{\alpha/4}\tau| / \sqrt{\Lambda_q^\beta},$$

и $\widehat{\varphi}(y) = 0$.

Если $B < A$, то

(i) при $\delta \ge \dfrac{1}{\sqrt{\Lambda_p^\beta}}$

$$E(\tau, \alpha, W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), F_\delta^N) = |\cos \Lambda_p^{\alpha/4}\tau| / \sqrt{\Lambda_p^\beta},$$

и $\widehat{\varphi}(y) = 0$,

(ii) при $\dfrac{1}{\sqrt{\Lambda_{s_{l+1}}^\beta}} \le \delta < \dfrac{1}{\sqrt{\Lambda_{s_l}^\beta}}$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$, $E(\tau, \alpha, W_n^\beta(\mathbb{S}^{n-1}), F_\delta^N)$

$$= \sqrt{\cos^2 \Lambda_{s_l}^{\alpha/4} t \frac{\Lambda_{s_{l+1}}^\beta \delta^2 - 1}{\Lambda_{s_{l+1}}^\beta - \Lambda_{s_l}^\beta} + \cos^2 \Lambda_{s_{l+1}}^{\alpha/4} t \frac{1 - \delta^2 \Lambda_{s_l}^\beta}{\Lambda_{s_{l+1}}^\beta - \Lambda_{s_l}^\beta}},$$

$$\widehat{\varphi}(y) =$$

$$\sum_{k\in J_l}\sum_{j=1}^{a_k}\cos\Lambda_j^{\frac{\alpha}{4}}t\left(1+\frac{\cos^2\Lambda_{s_{l+1}}^{\frac{\alpha}{4}}t-\cos^2\Lambda_{s_l}^{\frac{\alpha}{4}}t}{\Lambda_{s_{l+1}}^{\beta}\cos^2\Lambda_{s_l}^{\frac{\alpha}{4}}t-\Lambda_{s_l}^{\beta}\cos^2\Lambda_{s_{l+1}}^{\frac{\alpha}{4}}t}\Lambda_j^{\beta}\right)^{-1}y_jY_j^{(k)}(x'),$$

(iii) при $\delta < \dfrac{1}{\sqrt{\Lambda_r^{\beta}}}$

$$E(\tau,\alpha,W_2^{\beta}(\mathbb{S}^{d-1}),F_\delta^N) = \sqrt{\cos^2\Lambda_r^{\alpha/4}t\ \delta^2+\cos^2\Lambda_q^{\alpha/4}t\frac{1-\delta^2\Lambda_r^{\beta}}{\Lambda_q^{\beta}}},$$

$$\widehat{\varphi}(y) =$$

$$\sum_{k\in J_m}\sum_{j=1}^{a_k}\cos\Lambda_j^{\alpha/4}t\left(1+\frac{\cos^2\Lambda_q^{\alpha/4}t}{\Lambda_q^{\beta}\cos^2\Lambda_r^{\alpha/4}t-\Lambda_r^{\beta}\cos^2\Lambda_q^{\alpha/4}t}\Lambda_j^{\beta}\right)^{-1}y_jY_j^{(k)}(x').$$

Аналогичным образом найдены оптимальные методы восстановления для обобщенного волнового уравнения с нулевым начальным значением u и ненулевой начальной скоростью

$$\begin{aligned} u_{tt}+(-\Delta_S)^{\alpha/2}u&=0,\\ u|_{t=0}&=0,\\ u_t|_{t=0}&=f; \end{aligned} \tag{18}$$

и для обобщенного волнового уравнения с погрешностью, заданной в равномерной метрике.

Получен оптимальный метод восстановления решения обобщенного волнового уравнения в d-мерном шаре $\mathbb{B}^d$. Функции Бесселя первого рода p-го порядка $J_p(x)$ являются собственными функциями оператора Лапласа, равными нулю на $\mathbb{S}^{d-1}$, отвечающими собственным значениям $-(\mu_s^{(p)})^2$, где $\mu_s^{(p)}$ —s-й корень функции Бесселя J_p. Тогда ортонормированным базисом в $L_2(\mathbb{B}^d)$ является система функций

$$Y_{ksj}(x) = \frac{1}{\|Z_{ksj}\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}}Z_{ksj}(x),$$

где

$$Z_{ksj}(x) = \frac{J_p(\mu_s^{(p)}r)}{r^{d/2-1}}Y_j^{(k)}(x\prime),\quad k=0,1,\dots,\ s=1,2,\dots,\ j=1,\dots,a_k.$$

Здесь $\mu_s^{(p)}$ — s-й корень функции Бесселя J_p.

Пусть $f\in L_2(\mathbb{B}^d)$. Требуется найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению

$$u_{tt}+(-\Delta)^{\alpha/2}u=0 \tag{19}$$

с начальными условиями

$$u_{|t=0}=f,\quad u_{t|t=0}=0 \tag{20}$$

и граничным условием

$$u_{|\mathbb{S}^{d-1}}=0.$$

Точное решение этой задачи имеет вид

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k} c_{ksj}\cos\left((\mu_s^{(p)})^{\alpha/2}t\right)Y_{ksj}(x), \tag{21}$$

где c_{ksj} — коэффициенты Фурье функции f.

Поставим задачу оптимального восстановления решения уравнения (19) в момент времени τ по неточно заданному набору коэффициентов Фурье функции f на соболевском классе $W_2^{\beta}(\mathbb{B}^d)$, определяемом как множество функций $f\in L_2(\mathbb{B}^d)$, для которых

$$||(-\Delta_S)^{\beta/2}f||_{L_2(\mathbb{B}^d)}\le 1.$$

Будем считать, что нам известны приближенные значения N коэффициентов Фурье функции $f(x)$ $\quad y_{ksj}\in Y_N$ такие, что $s\le s_0,\ k\le k_0$. При этом для некоторых фиксированных s и k могут быть известны все приближенные значения коэффициентов Фурье для $j=1,\dots,a_k$, а для других s и k известна только часть приближенных значений коэффициентов.

Доказана следующая

Теорема 6. При $B\ge A$ для всех $\delta>0$

$$E(\tau,\alpha,W_2^{\beta}(\mathbb{B}^d),F_\delta^N)=\sqrt{\frac{\vartheta_{k_1s_1}}{\nu_{k_1s_1}}}$$

и $\widehat{\varphi}(y)=0$.

Если $B<A$, то

(i) при $\delta\ge\dfrac{1}{\sqrt{\nu_h}}$

$$E(\tau,\alpha,W_2^{\beta}(\mathbb{B}^d),F_\delta^N)=\sqrt{\frac{\vartheta_h}{\nu_h}},$$

и $\widehat{\varphi}(y)=0$,

(ii) при $\dfrac{1}{\sqrt{\nu_{m_{l+1}}}}\le\delta<\dfrac{1}{\sqrt{\nu_{m_l}}}$, $l=0,1,\dots,m-1$, $E(\tau,\alpha,W_n^{\beta}(\mathbb{B}^d),F_\delta^N)$

$$=\sqrt{\vartheta_{m_l}\frac{\nu_{m_{l+1}}\delta^2-1}{\nu_{m_{l+1}}-\nu_{m_l}}+\vartheta_{m_{l+1}}\frac{1-\delta^2\nu_{m_l}}{\nu_{m_{l+1}}-\nu_{m_l}}},$$

$\widehat{\varphi}(y)=$

$$\sum_{k,s\in M_l}\sum_{j=1}^{a_k}\cos((\mu_s^{(p)})^{\alpha/4}\tau)\left(1+\frac{\vartheta_{m_{l+1}}-\vartheta_{m_l}}{\vartheta_{m_l}\nu_{m_{l+1}}-\vartheta_{m_{l+1}}\nu_{m_l}}\nu_k\right)^{-1}y_{ksj}Y_{ksj}(x),$$

(iii) при $\delta<\dfrac{1}{\sqrt{\nu_r}}$

$$E(\tau,\alpha,W_2^{\beta}(\mathbb{B}^d),F_\delta^N)=\sqrt{\vartheta_r\delta^2+\vartheta_q\frac{1-\delta^2\nu_r}{\nu_q}},$$

$$\widehat{\varphi}(y) = \sum_{k,s\in M_q} \sum_{j=1}^{a_k} \cos((\mu_s^{(p)})^{\alpha/4}\tau) \left(1 + \frac{\vartheta_q}{\vartheta_r\nu_q - \vartheta_q\nu_r}\nu_k\right)^{-1} y_{ksj} Y_{ksj}(x).$$

Основные результаты работы

В данной диссертационной работе получены оптимальные методы восстановления решения для уравнений в частных производных гиперболического типа. Основные результаты работы:

1. Найден способ построения оптимального метода восстановления линейного оператора $Q\colon X \to l_2$, заданного равенством $Qx = (\eta_1 x_1, \eta_2 x_2, \ldots)$, $j \in \mathbb{N}$, где
$$X = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots) : \|x\|_X = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \nu_j |x_j|^2\right)^{1/2} < \infty \right\},$$
в случае, когда последовательности $\mu_j = \eta_j^2$ и ν_j не являются монотонными, по известным значениям N компонент, заданных с погрешностью в метрике l_2.
2. Решена та же задача, если погрешность задается в равномерной метрике.
3. Установлена связь между погрешностью в исходных данных и объемом полезной информации, используемой в оптимальном методе.
4. Полученные результаты использованы для определения оптимального метода восстановления решения однородного и неоднородного одномерного волнового уравнения с различными типами начальных условий.
5. Найдены оптимальные методы восстановления решения обобщенного волнового уравнения на $(d-1)$-мерной сфере и в d-мерном шаре.

Публикации

1. Выск Н.Д., Осипенко К.Ю. Оптимальное восстановление решения волнового уравнения по неточным начальным данным. Матем. заметки, 2007, 81, вып. 6, с. 803-815.

2. Выск Н.Д. О решении волнового уравнения при неточно заданных коэффициентах Фурье функции, задающей начальную форму струны. Владикавказский матем. журнал, 2006, 8, вып. 4, с. 12-17.

3. Выск Н.Д. Об оптимальном восстановлении решения волнового уравнения по неточным начальным данным. Труды участников Международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н.В.Ефимова, Ростов-на-Дону, 2006, с. 221-222.

4. Vysk N. Optimal recovery of solutions of the wave equation from inaccurate initial conditions, External Problems in Complex and Real Analysis, Albany, NY, 2007, 52 p.

5. Выск Н.Д. Оптимальное восстановление решения волнового уравнения по неточным начальным данным, заданным с погрешностью в равномерной норме. Тезисы докладов третьей международной конференции, посвященной 85-летию Л.Д. Кудрявцева, Москва, 2008, с.243-244.