



Общероссийский математический портал

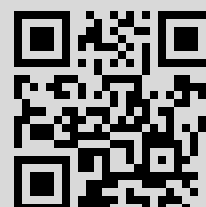
Е. Р. Аваков, Г. Г. Магарил-Ильяев, Микс управлений и принцип максимума  
Понтрягина, *Фундамент. и прикл. матем.*, 2014, том 19, выпуск 4, 5–20

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и  
согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 188.123.230.129

5 декабря 2016 г., 23:20:37



# Микс управлений и принцип максимума Понтрягина\*

**Е. Р. АВАКОВ**

*Институт проблем управления  
им. В. А. Трапезникова РАН  
e-mail: eramag@mail.ru*

**Г. Г. МАГАРИЛ-ИЛЬЯЕВ**

*Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова,  
Институт проблем передачи информации  
им. А. А. Харкевича РАН  
e-mail: magariil@mech.math.msu.su*

УДК 517.977.52

**Ключевые слова:** оптимальное управление, принцип максимума Понтрягина, микс, теорема о неявной функции.

## Аннотация

В работе приводится доказательство необходимых условий минимума — принципа максимума Понтрягина — для задачи оптимального управления на основе понятия микса, которое позволяет свести исследование исходной задачи к некоторому её линейному по управлению приближению, изучение которого уже достаточно просто.

## Abstract

*E. R. Avakov, G. G. Magaril-Ilyayev, Mix of controls and the Pontryagin maximum principle, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 19 (2014), no. 4, pp. 5–20.*

In this paper, necessary conditions for a minimum (the Pontryagin maximum principle) for an optimal control problem are proved on the basis of the concept of a mix, which enables one to reduce the study of the original problem to some approximation thereof, which is linear in the control. The study of the latter problem proves more simple.

## Введение

Принцип максимума Понтрягина — центральный результат теории оптимального управления. В работе приводится его доказательство для достаточно общей задачи оптимального управления с измеримыми управлениями. Доказательство основано на понятии микса управлений, которое впервые появилось в работе В. М. Тихомирова [5]. Суть дела состоит в том, что замыкания образов

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 13-01-12447, 14-01-00456, 14-01-00744).

произвольных множеств у возникающих в задаче интегральных операторов всегда выпуклы (хотя сами образы не обязательно таковы) и конструкция микса позволяет простым и естественным образом приблизиться к любой точке из замыкания допустимыми управлениями, что оказывается достаточным для вывода необходимых условий минимума. Этот замысел на абстрактном уровне, в нормированных пространствах, реализован в [1], где в качестве одного из следствий доказан принцип максимума Понтрягина в задаче оптимального управления с фазовыми ограничениями. Здесь же мы непосредственно доказываем принцип максимума, не апеллируя ни к каким общим конструкциям, и в этом смысле доказательство вполне элементарно. Мы опираемся лишь на теорему о неявной функции и некоторый вариант теоремы о разрешимости конечномерной системы нелинейных уравнений. Следует ещё сказать, что сама схема доказательства принципа максимума аналогична рассуждениям из [3], где вместо микса используются игольчатые вариации.

Статья состоит из двух разделов. В первом формулируется основной результат и приводится его доказательство, которое опирается на утверждения, собранные во втором разделе (приложении), где формулируется (в нужной нам форме) теорема о неявной функции, из неё выводятся необходимые для доказательства факты о свойствах решений дифференциальных уравнений и доказываемая упомянутая теорема о разрешимости системы уравнений.

## Постановка задачи и доказательство основного результата

Пусть  $[t_0, t_1]$  — отрезок прямой,  $G$  — открытое подмножество  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  ( $\mathbb{R}^n$  — совокупность вектор-столбцов,  $(\mathbb{R}^n)^*$  — пространство, сопряжённое к  $\mathbb{R}^n$ , отождествляемое с вектор-строками; если  $a = (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^n)^*$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ , то  $\langle a, x \rangle = \sum_{i=1}^n a_i x_i$  — значение линейного функционала  $a$  на элементе  $x$ ; через  $|x|$  обозначаем евклидову норму элемента из  $\mathbb{R}^n$  или  $(\mathbb{R}^n)^*$ ),  $U$  — непустое подмножество  $\mathbb{R}^r$ , функция  $f: G \times \text{cl}U \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\text{cl}U$  — замыкание  $U$ ) и отображение  $\varphi: G \times \text{cl}U \rightarrow \mathbb{R}^n$  непрерывны на  $G \times \text{cl}U$ ,  $\Omega$  — открытое подмножество  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ,  $h_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m_1$ , и  $l_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m_2$ , — непрерывные функции.

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \min, \quad \dot{x} = \varphi(t, x, u), \quad (1)$$

$$h_i(x(t_0), x(t_1)) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m_1,$$

$$l_i(x(t_0), x(t_1)) = 0, \quad i = 1, \dots, m_2, \quad u(t) \in U.$$

Пару  $(x(\cdot), u(\cdot)) \in AC([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times L_\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^r)$ , где  $AC([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$  — совокупность абсолютно непрерывных вектор-функций на  $[t_0, t_1]$ , назовём *допустимым процессом* в задаче (1), если  $\{(t, x(t)) \mid t \in [t_0, t_1]\} \subset G$ , равенство  $\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u(t))$  и включение  $u(t) \in U$  выполняются для почти всех  $t \in [t_0, t_1]$ ,  $h_i(x(t_0), x(t_1)) \leq 0$ ,  $i = 1, \dots, m_1$ , и  $l_i(x(t_0), x(t_1)) = 0$ ,  $i = 1, \dots, m_2$ .

Допустимый процесс  $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$  называется *оптимальным процессом* (или *сильным минимумом*), если существует такое  $\varepsilon > 0$ , что для всякого допустимого процесса  $(x(\cdot), u(\cdot))$ , для которого  $\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)} < \varepsilon$ , справедливо неравенство  $J(x(\cdot), u(\cdot)) \geq J(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ .

Обозначим через

$$H(t, x, u, \lambda_0, p(t)) = \langle p(t), \varphi(t, x, u) \rangle - \lambda_0 f(t, x, u)$$

функцию Понтрягина задачи (1), где  $p(\cdot): [t_0, t_1] \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ .

Отображения  $h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{m_1}$  и  $l: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}$ , действующее соответственно по формулам

$$h(x(t_0), x(t_1)) = \left( h_1(x(t_0), x(t_1)), \dots, h_{m_1}(x(t_0), x(t_1)) \right)^T$$

и

$$l(x(t_0), x(t_1)) = \left( l_1(x(t_0), x(t_1)), \dots, l_{m_2}(x(t_0), x(t_1)) \right)^T,$$

рассматриваем как функции двух переменных  $\zeta_1 \in \mathbb{R}^n$  и  $\zeta_2 \in \mathbb{R}^n$ . Если фиксирована пара  $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ , то для сокращения записи пишем  $\hat{h}_{\zeta_i} = h_{\zeta_i}(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1))$  и  $\hat{l}_{\zeta_i} = l_{\zeta_i}(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1))$ ,  $i = 1, 2$ , а также  $\hat{\varphi}(t) = \varphi(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))$ ,  $\hat{f}(t) = f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))$  и аналогично для производных по  $x$  этих функций.

**Теорема (принцип максимума Понтрягина).** Пусть  $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$  — оптимальный процесс в задаче (1). Если функция  $f: G \times \text{cl}U \rightarrow \mathbb{R}$  и отображение  $\varphi: G \times \text{cl}U \rightarrow \mathbb{R}^n$  непрерывны вместе со своими частными производными по  $x$  на  $G \times \text{cl}U$ , функции  $h_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m_1$ , и  $l_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m_2$ , непрерывны в окрестности точки  $(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1))$  и дифференцируемы в этой точке, то найдутся число  $\lambda_0$ , векторы  $\lambda_i \in (\mathbb{R}^{m_i})^*$ ,  $i = 1, 2$ , и функция  $p(\cdot) \in AC([t_0, t_1], (\mathbb{R}^n)^*)$ , такие что

$$\lambda_0 \geq 0, \quad \lambda_1 \geq 0 \quad \text{и} \quad \lambda_0 + |\lambda_1| + |\lambda_2| \neq 0,$$

функция  $p(\cdot)$  является решением уравнения

$$-\dot{p} = p \hat{\varphi}_x(t) - \lambda_0 \hat{f}_x(t)$$

с граничными условиями

$$p(t_0) = \lambda_1 \hat{h}_{\zeta_1} + \lambda_2 \hat{l}_{\zeta_1}, \quad p(t_1) = -\lambda_1 \hat{h}_{\zeta_2} - \lambda_2 \hat{l}_{\zeta_2}$$

и для почти всех  $t \in [t_0, t_1]$  выполняется равенство

$$\max_{u \in U} H(t, \hat{x}(t), u, \lambda_0, p(t)) = H(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \lambda_0, p(t)).$$

**Доказательство.** 1. Пусть  $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$  — оптимальный процесс в задаче (1). Обозначим

$$\mathcal{U} = \{u(\cdot) \in L_\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^r) : u(t) \in U \text{ для почти всех } t \in [t_0, t_1]\}$$

и зафиксируем некоторое  $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ . Для каждого  $\alpha \in \mathbb{R}$  и  $\xi \in \mathbb{R}^n$  рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = (1 - \alpha)\varphi(t, x, \hat{u}(t)) + \alpha\varphi(t, x, u(t)), & x(t_0) = \xi, \\ \dot{y} = (1 - \alpha)f(t, x, \hat{u}(t)) + \alpha f(t, x, u(t)), & y(t_0) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Несложная проверка показывает, что отображение

$$\begin{aligned} & ((x(\cdot), y(\cdot)), \alpha, \xi) \mapsto \\ & \mapsto \left( x(t) - \xi - (1 - \alpha) \int_{t_0}^t \varphi(\tau, x(\tau), \hat{u}(\tau)) d\tau - \alpha \int_{t_0}^t \varphi(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau, \right. \\ & \left. y(t) - (1 - \alpha) \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau), \hat{u}(\tau)) d\tau - \alpha \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau \right), \quad t \in [t_0, t_1], \end{aligned}$$

определённое в окрестности

$$((\hat{x}(\cdot), \hat{y}(\cdot), 0, \hat{x}(t_0)) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^{n+1}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,$$

где

$$\hat{y}(t) = \int_{t_0}^t f(\tau, \hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau)) d\tau, \quad t \in [t_0, t_1],$$

и действующее в  $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^{n+1})$ , удовлетворяет теореме о неявной функции, сформулированной в приложении. Из этой теоремы следует, что если  $\alpha$  достаточно мало по модулю, а  $\xi$  близко к  $\hat{x}(t_0)$ , то существует единственное решение  $(x(\cdot, \alpha, \xi; u(\cdot)), y(\cdot, \alpha, \xi; u(\cdot)))$  задачи Коши (2), определённое на  $[t_0, t_1]$  и дифференцируемое по  $(\alpha, \xi)$  (как отображение в  $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^{n+1})$ ) в точке  $(0, \hat{x}(t_0)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . Тогда для достаточно малых по модулю  $\alpha$  и  $\xi$ , близких к  $\hat{x}(t_0)$ , а также для любых  $v_0 \in \mathbb{R}$  и  $v \in \mathbb{R}^{m_1}$  определено отображение  $F$ , ставящее в соответствие четвёрке  $(\alpha, \xi, v_0, v)$  вектор из  $\mathbb{R}^{m_1+m_2+1}$  по правилу

$$\begin{aligned} & F(\alpha, \xi, v_0, v; u(\cdot)) = \\ & = \left( y(t_1, \alpha, \xi; u(\cdot)) + v_0, h(\xi, x(t_1, \alpha, \xi; u(\cdot))) + v, l(\xi, x(t_1, \alpha, \xi; u(\cdot))) \right)^T. \quad (3) \end{aligned}$$

Ввиду условий на  $h$  и  $l$  отображение  $F$  дифференцируемо в точке  $(0, \hat{x}(t_0), 0, 0)$ . Обозначим через  $F'(0, \hat{x}(t_0), 0, 0; u(\cdot))$  его производную в этой точке.

Рассмотрим множество

$$C = \text{conv}\{F'(0, \hat{x}(t_0), 0, 0; u(\cdot))(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^{m_1}): u(\cdot) \in \mathcal{U}\},$$

где  $\text{conv } A$  обозначает выпуклую коническую оболочку множества  $A$ . В следующем пункте мы покажем, что равенство  $C = \mathbb{R}^{m_1+m_2+1}$  противоречит оптимальности процесса  $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ . Затем мы покажем, что из условия  $C \neq \mathbb{R}^{m_1+m_2+1}$  практически сразу следуют все утверждения теоремы.

2. Итак, пусть  $C = \mathbb{R}^{m_1+m_2+1}$ . С помощью теоремы Каратеодори (см., например, [2]) нетрудно показать, что найдутся управления  $u_i(\cdot) \in \mathcal{U}$  и аргументы

$$(\hat{\alpha}_i, \hat{\xi}_i, \hat{v}_{0i}, \hat{v}_i) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^{m_1}, \quad i = 1, \dots, k,$$

такие что

$$\text{conv}\{F'(0, \hat{x}(t_0), 0, 0; u_i(\cdot))(\hat{\alpha}_i, \hat{\xi}_i, \hat{v}_{0i}, \hat{v}_i), i = 1, \dots, k\} = \mathbb{R}^{m_1+m_2+1}. \quad (4)$$

Фиксируем набор управлений  $\bar{u}(\cdot) = (u_1(\cdot), \dots, u_k(\cdot))$  и для каждого вектора  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)^T \in \mathbb{R}^k$  и каждого  $\xi \in \mathbb{R}^n$  рассмотрим задачу Коши, обозначая для краткости записи  $\alpha_0 = 1 - \sum_{i=1}^k \alpha_i$  и  $u_0(\cdot) = \hat{u}(\cdot)$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum_{i=0}^k \alpha_i \varphi(t, x, u_i(t)), & x(t_0) = \xi, \\ \dot{y} = \sum_{i=0}^k \alpha_i f(t, x, u_i(t)), & y(t_0) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Совершенно аналогично предыдущему отображение

$$\begin{aligned} ((x(\cdot), y(\cdot)), \alpha, \xi) &\mapsto \left( x(t) - \xi - \sum_{i=0}^k \alpha_i \int_{t_0}^t \varphi(\tau, x(\tau), u_i(\tau)) d\tau, \right. \\ &\left. y(t) - \sum_{i=0}^k \alpha_i \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau), u_i(\tau)) d\tau \right), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (6) \end{aligned}$$

определённое в окрестности

$$(\hat{x}(\cdot), \hat{y}(\cdot), 0, \hat{x}(t_0)) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^{n+1}) \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$$

( $\hat{y}(\cdot)$  то же, что и выше) и действующее в  $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^{n+1})$ , удовлетворяет теореме о неявной функции, сформулированной в приложении. Поэтому для  $\alpha$ , достаточно малых по норме, и  $\xi$ , близких к  $\hat{x}(t_0)$ , существует единственное решение  $x((\cdot, \alpha, \xi; \bar{u}(\cdot)), y(\cdot, \alpha, \xi; \bar{u}(\cdot)))$  задачи Коши (5), которое определено на  $[t_0, t_1]$  и дифференцируемо по  $(\alpha, \xi)$  (как отображение в  $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ ) в точке  $(0, \hat{x}(t_0)) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ .

Снова, как и выше, для достаточно малых по норме  $\alpha$  и  $\xi$ , близких к  $\hat{x}(t_0)$ , любых  $v_0 \in \mathbb{R}$  и  $v \in \mathbb{R}^{m_1}$  определим отображение  $F$ , ставящее в соответствие

четвёрке  $(\alpha, \xi, v_0, v)$  вектор из  $\mathbb{R}^{m_1+m_2+1}$  по формуле

$$F(\alpha, \xi, v_0, v; \bar{u}(\cdot)) = \left( y(t_1, \alpha, \xi; \bar{u}(\cdot)) + v_0, h(\xi, x(t_1, \alpha, \xi; \bar{u}(\cdot))) + v, l(\xi, x(t_1, \alpha, \xi; \bar{u}(\cdot))) \right)^T. \quad (7)$$

Это отображение дифференцируемо в точке  $(0, \hat{x}(t_0), 0, 0)$ . Обозначим через  $F'(0, \hat{x}(t_0), 0, 0; \bar{u}(\cdot))$  его производную в этой точке.

Из формулы (\*\*) для производной неявной функции (см. приложение) следует, что частная производная по  $\alpha$  отображения  $(\alpha, \xi) \mapsto x(\cdot, \alpha, \xi; u(\cdot))$  в точке  $(0, \hat{x}(t_0)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  (обозначим её  $y(\cdot; u(\cdot))$ ) удовлетворяет на  $[t_0, t_1]$  дифференциальному уравнению

$$\dot{y} = \hat{\varphi}_x(t)y + \varphi(t, \hat{x}(t), u(t)) - \hat{\varphi}(t), \quad y(t_0) = 0, \quad (8)$$

а частная производная по  $\xi$  (обозначим её  $w(\cdot)$ ) удовлетворяет на  $[t_0, t_1]$  матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{w} = \hat{\varphi}_x(t)w, \quad w(t_0) = E, \quad (9)$$

где  $E$  — единичная матрица.

Выписывая совершенно аналогично частную производную по  $\alpha_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , отображения  $(\alpha, \xi) \mapsto x(\cdot, \alpha, \xi; \bar{u}(\cdot))$  в точке  $(0, \hat{x}(t_0)) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ , видим, что она удовлетворяет тем же соотношениям (8), но с  $u(\cdot) = u_i(\cdot)$ , а частные производные по  $\xi$ ,  $v_0$  и  $v$  этих отображений просто совпадают.

Учитывая эти замечания, вернёмся к равенству (4). Оно означает, что для любого вектора  $y \in \mathbb{R}^{m_1+m_2+1}$  найдётся такой вектор  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)^T \in \mathbb{R}_+^k$ , что

$$\begin{aligned} y &= \sum_{i=1}^k F'(0, \hat{x}(t_0), 0, 0; u_i(\cdot))(\hat{\alpha}_i, \hat{\xi}_i, \hat{v}_{0i}, \hat{v}_i)\beta_i = \\ &= \sum_{i=1}^k F_\alpha(0, \hat{x}(t_0), 0, 0; u_i(\cdot))\hat{\alpha}_i\beta_i + \sum_{i=1}^k F_\xi(0, \hat{x}(t_0), 0, 0; u_i(\cdot))\hat{\xi}_i\beta_i + \\ &+ \sum_{i=1}^k F_{v_0}(0, \hat{x}(t_0), 0, 0; u_i(\cdot))\hat{v}_{0i}\beta_i + \sum_{i=1}^k F_v(0, \hat{x}(t_0), 0, 0; u_i(\cdot))\hat{v}_i\beta_i = \\ &= F_\alpha(0, \hat{x}(t_0), 0, 0; \bar{u}(\cdot))(\hat{\alpha}_1\beta_1, \dots, \hat{\alpha}_k\beta_k)^T + \\ &+ F_\xi(0, \hat{x}(t_0), 0, 0; \bar{u}(\cdot))(\beta_1\hat{\xi}_1 + \dots + \beta_k\hat{\xi}_k) + \\ &+ F_{v_0}(0, \hat{x}(t_0), 0, 0; \bar{u}(\cdot))(\hat{v}_{01}\beta_1 + \dots + \hat{v}_{0k}\beta_k) + \\ &+ F_v(0, \hat{x}(t_0), 0, 0; \bar{u}(\cdot))(\beta_1\hat{v}_1 + \dots + \beta_k\hat{v}_k). \end{aligned}$$

Отсюда, очевидно, следует, что

$$\begin{aligned} F_\alpha(0, \hat{x}(t_0), 0, 0; \bar{u}(\cdot))\mathbb{R}_+^k + F_\xi(0, \hat{x}(t_0), 0, 0; \bar{u}(\cdot))\mathbb{R}^n + \\ + F_{v_0}(0, \hat{x}(t_0), 0, 0; \bar{u}(\cdot))\mathbb{R}_+ + F_v(0, \hat{x}(t_0), 0, 0; \bar{u}(\cdot))\mathbb{R}_+^{m_1} = \mathbb{R}^{m_1+m_2+1}, \end{aligned}$$

или

$$F'(0, \hat{x}(t_0), 0, 0; \bar{u}(\cdot))(\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^{m_1}) = \mathbb{R}^{m_1+m_2+1}. \quad (10)$$

Теперь мы построим семейство непрерывных отображений, равномерно аппроксимирующих  $F$ , и, воспользовавшись леммами 1 и 2, придём к противоречию с тем, что  $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$  — оптимальный процесс. Для этого сначала построим микс управлений  $\hat{u}(\cdot), u_1(\cdot), \dots, u_k(\cdot)$ . Пусть вектор  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)^T$  принадлежит симплексу

$$\Sigma^k = \left\{ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)^T \in \mathbb{R}_+^k : \sum_{i=1}^k \alpha_i \leq 1 \right\}$$

и  $0 < \nu < t_1 - t_0$ . Разобьём отрезок  $[t_0, t_1]$  на подотрезки  $\Delta$  длины не больше  $\nu$  ( $|\Delta| \leq \nu$ ). Затем каждый из таких подотрезков разобьём на подподотрезки  $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_k$  соответственно длины  $\alpha_0|\Delta|, \dots, \alpha_k|\Delta|$ , где  $\alpha_0 = 1 - \sum_{i=1}^k \alpha_i$ , и определим (с точностью до меры нуль) функцию  $M(\cdot, \alpha, \nu; \bar{u}(\cdot))$ , где  $\bar{u}(\cdot) = (\hat{u}(\cdot), u_1(\cdot), \dots, u_k(\cdot))$ , следующим образом: на каждом подотрезке  $\Delta$   $M(t, \alpha, \nu; \bar{u}(\cdot)) = \hat{u}(t)$ , если  $t \in \Delta_0$ , и  $M(t, \alpha, \nu; \bar{u}(\cdot)) = u_i(t)$ , если  $t \in \Delta_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ . Ясно, что  $M(\cdot, 0, \nu; \bar{u}(\cdot)) = \hat{u}(\cdot)$  для любого  $\nu$  и что  $M(\cdot, \alpha, \nu; \bar{u}(\cdot)) \in \mathcal{U}$ . Нетрудно также проверить, что отображение  $\alpha \mapsto M(\cdot, 0, \nu; \bar{u}(\cdot))$  (как отображение из  $\Sigma^k$  в  $L_1([t_0, t_1], \mathbb{R}^r)$ ) непрерывно равномерно по  $\nu$ . Будем называть функцию  $M(\cdot, 0, \nu; \bar{u}(\cdot))$  *миксом* (управлений  $\hat{u}(\cdot), u_1(\cdot), \dots, u_k(\cdot)$  при данных  $\alpha$  и  $\nu$ ).

Для каждого  $0 < \nu < t_1 - t_0$ ,  $\alpha \in \Sigma^k$  и  $\xi \in \mathbb{R}^n$  рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = \varphi(t, x, M(t, \alpha, \nu; \bar{u}(\cdot))), & x(t_0) = \xi, \\ \dot{y} = f(t, x, M(t, \alpha, \nu; \bar{u}(\cdot))), & y(t_0) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Отображение

$$\begin{aligned} ((x(\cdot), y(\cdot)), \alpha, \xi) &\mapsto \left( x(t) - \xi - \int_{t_0}^t \varphi(\tau, x(\tau), M(\tau, \alpha, \nu; \bar{u}(\cdot))) d\tau, \right. \\ &\left. y(t) - \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau), M(\tau, \alpha, \nu; \bar{u}(\cdot))) d\tau \right), \quad t \in [t_0, t_1], \end{aligned} \quad (12)$$

определённое в окрестности

$$((\hat{x}(\cdot), \hat{y}(\cdot), 0, \hat{x}(t_0)) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^{n+1}) \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$$

и действующее в  $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^{n+1})$ , удовлетворяет теореме о неявной функции, сформулированной в приложении. Этот факт детально проверен в [1]. Из этой теоремы следует, что найдутся окрестности нуля в  $\mathbb{R}^k$  и точки  $\hat{x}(t_0)$  в  $\mathbb{R}^n$ , такие что для всех  $\alpha \in \Sigma^k$  и  $\xi$ , принадлежащим этим



окрестностям, и всех  $0 < \nu < t_1 - t_0$  существует единственное решение  $(x_\nu(\cdot, \alpha, \xi; \bar{u}(\cdot)), y_\nu(\cdot, \alpha, \xi; \bar{u}(\cdot)))$  задачи Коши (11), определённое на  $[t_0, t_1]$  и непрерывное по  $(\alpha, \xi)$  (как отображение в  $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ ) равномерно по  $\nu$ .

Теперь для каждого  $0 < \nu < t_1 - t_0$ , для указанных  $\alpha, \xi$ , а также для любых  $v_0 \in \mathbb{R}$  и  $v \in \mathbb{R}^{m_1}$  определим отображение  $\Phi_\nu$ , ставящее в соответствие четвёрке  $(\alpha, \xi, v_0, v)$  вектор из  $\mathbb{R}^{m_1+m_2+1}$  по правилу

$$\begin{aligned} \Phi_\nu(\alpha, \xi, v_0, v; \bar{u}(\cdot)) &= \\ &= \left( y_\nu(t_1, \alpha, \xi; \bar{u}(\cdot)) + v_0, h(\xi, x_\nu(t_1, \alpha, \xi; \bar{u}(\cdot))) + v, l(\xi, x_\nu(t_1, \alpha, \xi; \bar{u}(\cdot))) \right)^T. \end{aligned} \quad (13)$$

Из сказанного выше и условий на  $h$  и  $l$  следует, что это непрерывная функция по совокупности переменных  $\alpha, \xi, v_0$  и  $v$ .

Теперь воспользуемся леммами 1 и 2. Обозначим производную отображения  $F$  (определённого формулой (7)) в точке  $(0, \hat{x}(t_0), 0, 0)$  через  $\Lambda$ . Согласно (10) справедливо равенство  $\Lambda K = \mathbb{R}^{m_1+m_2+1}$ , где  $K = \mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{m_1}$  — выпуклый конус. Из леммы 1 и гладкости отображений  $h$  и  $l$  следует, что  $\Phi_\nu(\alpha, \xi, v_0, v; \bar{u}(\cdot)) \mapsto F(\alpha, \xi, v_0, v; \bar{u}(\cdot))$  при  $\nu \rightarrow 0$  равномерно по  $(\alpha, \xi, v_0, v) \in V \cap K$ , где  $V$  — некоторая окрестность точки  $(0, \hat{x}(t_0), 0, 0)$ . Кроме того, ясно, что  $\Phi_\nu(0, \hat{x}(t_0), 0, 0; \bar{u}(\cdot)) = F(0, \hat{x}(t_0), 0, 0; \bar{u}(\cdot))$  для всех  $0 < \nu < t_1 - t_0$ . Можно считать, что  $V = \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \times \mathcal{O}_3 \times \mathcal{O}_4$ , где  $\mathcal{O}_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , — окрестности соответственно  $0 \in \mathbb{R}^k$ ,  $\hat{x}(t_0) \in \mathbb{R}^n$ ,  $0 \in \mathbb{R}$  и  $0 \in \mathbb{R}^{m_1}$ . Тогда

$$V \cap K = (\mathcal{O}_1 \cap \mathbb{R}_+^k) \times \mathcal{O}_2 \times (\mathcal{O}_3 \cap \mathbb{R}_+) \times (\mathcal{O}_4 \cap \mathbb{R}^{m_1}).$$

По лемме 2 существует окрестность  $W$  точки  $F(0, \hat{x}(t_0), 0, 0; \bar{u}(\cdot))$ , такая что для любого  $y \in W$  найдётся набор  $(\alpha(y), \xi(y), v_0(y), v(y))$  из  $V \cap K$ , для которого выполнены соотношения

$$\Phi_{\nu(y)}(\alpha(y), \xi(y), v_0(y), v(y); \bar{u}(\cdot)) = y \quad (14)$$

и

$$|(\alpha(y), \xi(y), v_0(y), v(y)) - (0, \hat{x}(t_0), 0, 0)| \leq \varkappa |y - F(0, \hat{x}(t_0), 0, 0; \bar{u}(\cdot))|. \quad (15)$$

Отсюда уже легко прийти к противоречию с тем, что  $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$  — оптимальный процесс. Действительно, так как, очевидно,  $F(0, \hat{x}(t_0), 0, 0; \bar{u}(\cdot)) = (J(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)), 0, 0)$ , то для всех достаточно малых  $\varepsilon > 0$  вектор  $y_\varepsilon = (J(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)) - \varepsilon, 0, 0)$  принадлежит  $W$ . Согласно (13) найдётся четвёрка  $(\alpha(y_\varepsilon), \xi(y_\varepsilon), v_0(y_\varepsilon), v(y_\varepsilon)) \in V \cap K$ , такая что

$$v_0(y_\varepsilon) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, x_{\nu(y_\varepsilon)}(t, \alpha(y_\varepsilon), \xi(y_\varepsilon); M(t, \alpha(y_\varepsilon), \nu(y_\varepsilon))) dt = J(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)) - \varepsilon, \quad (16)$$

а также

$$h(\xi(y_\varepsilon), x_{\nu(y_\varepsilon)}(t_1, \alpha(y_\varepsilon), \xi(y_\varepsilon); \bar{u}(\cdot))) + v(y_\varepsilon) = 0$$

и

$$l\left(\xi(y_\varepsilon), x_{\nu(y_\varepsilon)}(t_1, \alpha(y_\varepsilon), \xi(y_\varepsilon); \bar{u}(\cdot))\right) = 0.$$

Так как  $\xi(y_\varepsilon) = x_{\nu(y_\varepsilon)}(t_0, \alpha(y_\varepsilon), \xi(y_\varepsilon); \bar{u}(\cdot))$  (см. (11)), то из последних двух соотношений (с учётом того, что  $v(y_\varepsilon) \geq 0$ ) вытекает, что пара  $(x_{\nu(y_\varepsilon)}(\cdot, \alpha(y_\varepsilon), \xi(y_\varepsilon); \bar{u}(\cdot)), M(\cdot, \alpha(y_\varepsilon), \nu(y_\varepsilon)))$  допустима в задаче (1), а из (16) следует ( $v_0(y_\varepsilon) \geq 0$ ), что на этой паре минимизируемый функционал в (1) меньше, чем на  $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ .

Далее, из неравенства (14) следует, что  $|(\alpha(y_\varepsilon), \xi(y_\varepsilon) - \hat{x}(t_0))| \leq \varkappa\varepsilon$ , т. е.  $\alpha(y_\varepsilon) \rightarrow 0$  и  $\xi(y_\varepsilon) \rightarrow \hat{x}(t_0)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Тогда в силу отмеченной выше непрерывности отображения  $(\alpha, \xi) \mapsto x_\nu(\cdot, \alpha, \xi; \bar{x}(\cdot))$  равномерно по  $\nu$  получаем, что  $x_{\nu(y_\varepsilon)}(\cdot, \alpha(y_\varepsilon), \xi(y_\varepsilon); \bar{x}(\cdot)) \rightarrow \hat{x}(\cdot)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Тем самым мы приходим к противоречию с тем, что  $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$  — локальный минимум в (1).

Итак, случай  $C = \mathbb{R}^{m_1+m_2+1}$  невозможен.

3. Пусть  $C \neq \mathbb{R}^{m_1+m_2+1}$ . Отделяя выпуклый конус  $C$  от любой точки, ему не принадлежащей, получаем, что существует ненулевой вектор  $\bar{\lambda} = (\mathbb{R}^{m_1+m_2+1})^*$ , такой что

$$\langle \bar{\lambda}, F'(0, \hat{x}(t_0), 0, 0; u(\cdot))(\alpha, \xi, v_0, v) \rangle \geq 0$$

для всех  $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ ,  $\alpha \geq 0$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,  $v_0 \geq 0$ ,  $v \in \mathbb{R}_+^{m_1}$ . (17)

Учитывая формулы (8) и (9), получаем, что производная функции  $(\alpha, \xi) \mapsto y(t_1, \alpha, \xi; u(\cdot))$  в точке  $(0, \hat{x}(t_0))$  действует по правилу

$$(\alpha, \xi) \mapsto \int_{t_0}^{t_1} (\langle \hat{f}_x(t), y(t, u(\cdot)) \rangle + f(t, \hat{x}(t), u(t)) - \hat{f}(t)) dt \alpha + \left\langle \int_{t_0}^{t_1} \hat{f}_x(t) w(t) dt, \xi \right\rangle,$$

(18)

а производные отображений  $h$  и  $l$  в  $(0, \hat{x}(t_0))$  — по правилу

$$\begin{aligned} (\alpha, \xi) &\mapsto \hat{h}_{\zeta_2} y(t_1, u(\cdot)) \alpha + \hat{h}_{\zeta_1} \xi + \hat{h}_{\zeta_2} w(t_1) \xi, \\ (\alpha, \xi) &\mapsto \hat{l}_{\zeta_2} y(t_1, u(\cdot)) \alpha + \hat{l}_{\zeta_1} \xi + \hat{l}_{\zeta_2} w(t_1) \xi. \end{aligned}$$

(19)

Представляя вектор  $\bar{\lambda}$  в виде  $\bar{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ , где  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  и  $\lambda_i \in (\mathbb{R}^{m_i})^*$ ,  $i = 1, 2$ , запишем соотношение (17) следующим образом:

$$\begin{aligned} &\lambda_0 \int_{t_0}^{t_1} (\langle \hat{f}_x(t), y(t, u(\cdot)) \rangle + f(t, \hat{x}(t), u(t)) - \hat{f}(t)) dt \alpha + \lambda_0 \left\langle \int_{t_0}^{t_1} \hat{f}_x(t) w(t) dt, \xi \right\rangle + \\ &+ \lambda_0 v_0 + \langle \lambda_1, \hat{h}_{\zeta_2} y(t_1, u(\cdot)) \rangle \alpha + \langle \lambda_1, \hat{h}_{\zeta_1} \xi + \hat{h}_{\zeta_2} w(t_1) \xi \rangle + \\ &+ \langle \lambda_1, v \rangle + \langle \lambda_2, \hat{l}_{\zeta_2} y(t_1, u(\cdot)) \rangle \alpha + \langle \lambda_2, \hat{l}_{\zeta_1} \xi + \hat{l}_{\zeta_2} w(t_1) \xi \rangle \geq 0 \end{aligned}$$

(20)

для всех  $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ ,  $\alpha \geq 0$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,  $v_0 \geq 0$  и  $v \in \mathbb{R}_+^k$ .

Пусть  $\alpha = 0$ ,  $\xi = 0$  и  $v = 0$ . Тогда из (20) следует, что  $\lambda_0 \geq 0$ .

Если  $\alpha = 0$ ,  $\xi = 0$  и  $v_0 = 0$ , то из (20) получаем, что  $\lambda_1 \geq 0$ . Первое утверждение теоремы доказано.

Пусть  $\xi = 0$ ,  $v_0 = 0$  и  $v = 0$ . Тогда из (20) в силу произвольности  $\alpha \geq 0$  следует, что

$$\lambda_0 \int_{t_0}^{t_1} (\langle \hat{f}_x(t), y(t, u(\cdot)) \rangle + f(t, \hat{x}(t), u(t)) - \hat{f}(t)) dt + \\ + \langle \lambda_1, \hat{h}_{\zeta_2} y(t_1, u(\cdot)) \rangle + \langle \lambda_2, \hat{l}_{\zeta_2} y(t_1, u(\cdot)) \rangle \geq 0 \quad (21)$$

для всех  $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ .

Обозначим через  $p(\cdot)$  решение линейного уравнения

$$-\dot{p} = p \hat{\varphi}_x(t) - \lambda_0 \hat{f}_x(t), \quad p(t_1) = -\lambda_1 \hat{h}_{\zeta_2} - \lambda_2 \hat{l}_{\zeta_2}. \quad (22)$$

Подставляя в (21) вместо функции  $\lambda_0 \hat{f}_x(\cdot)$  её выражение из (22), а затем вместо функции  $\hat{\varphi}_x(\cdot) y(\cdot, u(\cdot))$  её выражение из (8) и учитывая начальные условия в (8) и (9), будем иметь

$$0 \leq \int_{t_0}^{t_1} (\langle (p(t) \hat{\varphi}_x(t) + \dot{p}(t)), y(t, u(\cdot)) \rangle + \lambda_0 (f(t, \hat{x}(t), u(t)) - \hat{f}(t))) dt + \\ + \langle \lambda_1, \hat{h}_{\zeta_2} y(t_1, u(\cdot)) \rangle + \langle \lambda_2, \hat{l}_{\zeta_2} y(t_1, u(\cdot)) \rangle = \\ = \int_{t_0}^{t_1} (\langle p(t), \dot{y}(t, u(\cdot)) \rangle + \langle \dot{p}(t), y(t, u(\cdot)) \rangle) dt + \\ + \int_{t_0}^{t_1} (H(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \lambda_0, p(t)) - H(t, \hat{x}(t), u(t), \lambda_0, p(t))) dt + \\ + \langle \lambda_1, \hat{h}_{\zeta_2} y(t_1, u(\cdot)) \rangle + \langle \lambda_2, \hat{l}_{\zeta_2} y(t_1, u(\cdot)) \rangle = \\ = \langle p(t), y(t, u(\cdot)) \rangle \Big|_{t_0}^{t_1} + \langle \lambda_1 \hat{h}_{\zeta_2}, y(t_1, u(\cdot)) \rangle + \langle \lambda_2 \hat{l}_{\zeta_2}, y(t_1, u(\cdot)) \rangle + \\ + \int_{t_0}^{t_1} (H(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \lambda_0, p(t)) - H(t, \hat{x}(t), u(t), \lambda_0, p(t))) dt = \\ = \int_{t_0}^{t_1} (H(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \lambda_0, p(t)) - H(t, \hat{x}(t), u(t), \lambda_0, p(t))) dt;$$

т. е.

$$\int_{t_0}^{t_1} H(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \lambda_0, p(t)) dt \geq \int_{t_0}^{t_1} H(t, \hat{x}(t), u(t), \lambda_0, p(t)) dt$$

для всех  $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ . Но это неравенство равносильно условию максимума в теореме, если в качестве множества полной меры из  $[t_0, t_1]$  взять множество, на котором функция  $\hat{u}(\cdot)$  аппроксимативно непрерывна (см. [1]).

Пусть, наконец,  $\alpha = 0$ ,  $v_0 = 0$  и  $v = 0$  в (20). Тогда в силу произвольности  $\xi \in \mathbb{R}^n$  получаем, что

$$\lambda_0 \int_{t_0}^{t_1} \hat{f}_x(t)w(t) dt + \lambda_1 \hat{h}_{\zeta_1} + \lambda_1 \hat{h}_{\zeta_2} w(t_1) + \lambda_2 \hat{l}_{\zeta_1} + \lambda_2 \hat{l}_{\zeta_2} w(t_1) = 0. \quad (23)$$

Подставим в интеграл вместо  $\lambda_0 \hat{f}_x(\cdot)$  его выражение из (22), а затем воспользуемся (9). Имеем

$$\begin{aligned} \lambda_0 \int_{t_0}^{t_1} \hat{f}_x(t)w(t) dt &= \int_{t_0}^{t_1} (\dot{p}(t)w(t) + p(t)\dot{w}(t)) dt = p(t)w(t)|_{t_0}^{t_1} = \\ &= p(t_1)w(t_1) - p(t_0)w(t_0) = p(t_1)w(t_1) - p(t_0) = \\ &= -\lambda_1 \hat{h}_{\zeta_2} w(t_1) - \lambda_2 \hat{l}_{\zeta_2} w(t_1) - p(t_0). \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (23), получаем, что

$$p(t_0) = \lambda_1 \hat{h}_{\zeta_1} + \lambda_2 \hat{l}_{\zeta_1}.$$

Отсюда и из (22) следуют второе и третье утверждения теоремы, и тем самым её доказательство завершено.  $\square$

## Приложение

### Теорема о неявной функции

Все необходимые нам свойства решений дифференциальных уравнений являются непосредственными следствиями теоремы о неявной функции. Здесь мы приводим её формулировку в той форме, которая нам нужна и которую можно найти, например, в [4]. Отметим, что доказательство теоремы несложно и основано на методе Ньютона решений нелинейных уравнений.

**Теорема (о неявной функции).** Пусть  $\Sigma$  — топологическое пространство,  $X$  и  $Y$  — банаховы пространства,  $\hat{\sigma} \in \Sigma$ ,  $V$  — окрестность точки  $\hat{x} \in X$  и  $F: V \times \Sigma \rightarrow Y$ . Если

- 1)  $F(\hat{x}, \hat{\sigma}) = 0$ ,
- 2)  $F$  непрерывно на  $V \times \Sigma$ ,
- 3)  $F$  дифференцируемо по  $x$  в точке  $(\hat{x}, \hat{\sigma})$  и для каждого  $\varepsilon > 0$  существуют окрестности  $V(\varepsilon) \subset V$  и  $U(\varepsilon)$  точек  $\hat{x}$  и  $\hat{\sigma}$ , такие что для всех  $x, x' \in V(\varepsilon)$  и  $\sigma \in U(\varepsilon)$  выполняется соотношение

$$\|F(x, \sigma) - F(x', \sigma) - F_x(\hat{x}, \hat{\sigma})(x - x')\|_Y \leq \varepsilon \|x - x'\|_X,$$

4)  $F_x(\hat{x}, \hat{\sigma})$  — обратимый оператор,

то найдутся окрестности  $V_0 \subset V$  и  $U_0$  точек  $\hat{x}$  и  $\hat{\sigma}$  и непрерывное отображение  $\varphi: U_0 \rightarrow V$ , такие что

$$F(\varphi(\sigma), \sigma) = 0 \quad \text{и} \quad \|\varphi(\sigma) - x\|_X \leq 2\|F_x^{-1}(\hat{x}, \hat{\sigma})\| \|F(x, \sigma)\|_Y \quad (*)$$

для всех  $(x, \sigma) \in V_0 \times U_0$ . При этом равенство  $F(x, \sigma) = 0$  на  $V_0 \times U_0$  возможно лишь тогда, когда  $x = \varphi(\sigma)$ . Кроме того, если  $\Sigma$  — окрестность  $\hat{\sigma}$  в нормированном пространстве и отображение  $F$  дифференцируемо по  $\sigma$  в точке  $(\hat{x}, \hat{\sigma})$ , то отображение  $\varphi$  дифференцируемо в точке  $\hat{\sigma}$  и

$$\varphi'(\hat{\sigma}) = -(F_x(\hat{x}, \hat{\sigma}))^{-1} F_\sigma(\hat{x}, \hat{\sigma}). \quad (**)$$

## Основное свойство микса управлений

Положим

$$G(x(\cdot), u(\cdot))(t) = \left( \int_{t_0}^t \varphi(t, x(t), u(t)) dt, \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau \right),$$

где  $t \in [t_0, t_1]$ . Это отображение определено на  $V \times \mathcal{U}$ , где  $V$  — некоторая окрестность  $\hat{x}(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ , и действует в  $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^{n+1})$ .

Выше для  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)^T \in \Sigma^k$  и  $0 < \nu < t_1 - t_0$  был построен микс  $M(\cdot, \alpha, \nu; \bar{u}(\cdot))$  управлений  $\bar{u}(\cdot) = (\hat{u}(\cdot), u_1(\cdot), \dots, u_k(\cdot))$ . Будем обозначать для краткости записи  $\alpha_0 = 1 - \sum_{i=1}^k \alpha_i$  и  $u_0(\cdot) = \hat{u}(\cdot)$ .

Основное свойство микса состоит в том, что существует такая окрестность  $\mathcal{O}$  точки  $\hat{x}(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ , что при  $\nu \rightarrow 0$

$$G(x(\cdot), M(\cdot, \alpha, \nu; \bar{u}(\cdot))) (\cdot) \mapsto \sum_{i=0}^k \alpha_i G(x(\cdot), u_i(\cdot)) (\cdot) \quad (24)$$

в  $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^{n+1})$  равномерно по  $x(\cdot) \in \mathcal{O}$  и  $\alpha \in \Sigma^k$ .

Отсюда, в частности, следует, что для указанных  $x(\cdot)$  замыкание образа множества  $\mathcal{U}$  при отображении  $u(\cdot) \mapsto G(x(\cdot), u(\cdot)) (\cdot)$  выпукло в  $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^{n+1})$ .

Хотя основное свойство микса проверяется несложно, доказательство его мы опустим, отсылая читателя к работе [1].

Напомним, что функция  $(x_\nu(\cdot, \alpha, \xi; \bar{u}(\cdot)), y_\nu(\cdot, \alpha, \xi; \bar{u}(\cdot)))$  — решение задачи Коши (11), а функция  $(x(\cdot, \alpha, \xi; \bar{u}(\cdot)), y(\cdot, \alpha, \xi; \bar{u}(\cdot)))$  — решение задачи Коши (5).

**Лемма 1.** Существуют такие окрестности  $U_1$  и  $U_2$  точек  $0 \in \mathbb{R}^k$  и  $\hat{x}(t_0) \in \mathbb{R}^n$ , что для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся  $0 < \nu(\varepsilon) < t_1 - t_0$ , такое что для всех

$(\alpha, \xi) \in (U_1 \cap \Sigma^k) \times U_2$  справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \left\| \left( x_{\nu(\varepsilon)}(\cdot, \alpha, \xi; \bar{u}(\cdot)), y_{\nu(\varepsilon)}(\cdot, \alpha, \xi; \bar{u}(\cdot)) \right) - \right. \\ & \quad \left. - \left( x(\cdot, \alpha, \xi; \bar{u}(\cdot)), y(\cdot, \alpha, \xi; \bar{u}(\cdot)) \right) \right\|_{C([t_0, t_1], \mathbb{R}^{n+1})} < \varepsilon. \end{aligned} \quad (25)$$

**Доказательство.** Воспользуемся оценкой (\*) в теореме о неявной функции с отображением, определённым формулой (12), которое обозначим через  $F_2$ . Производную этого отображения по  $(x(\cdot), y(\cdot))$  в точке  $((\hat{x}(\cdot), \hat{y}(\cdot)), 0, \hat{x}(t_0))$  обозначим через  $A_2$ . В этой оценке в качестве  $\varphi(\sigma)$  выступает пара  $(x_\nu(\cdot, \alpha, \xi; \bar{u}(\cdot)), y_\nu(\cdot, \alpha, \xi; \bar{u}(\cdot)))$ , а в качестве  $x$  — пара  $(x(\cdot, \alpha, \xi; \bar{u}(\cdot)), y(\cdot, \alpha, \xi; \bar{u}(\cdot)))$  при  $\alpha$ , близких к нулю, и  $\xi$ , близких к  $\hat{x}(t_0)$ . Заметим ещё, что если через  $F_1$  обозначить отображение, определённое формулой (6), то ясно, что  $F_1((x(\cdot, \alpha, \xi; \bar{u}(\cdot)), y(\cdot, \alpha, \xi; \bar{u}(\cdot)), \alpha, \xi)(\cdot)) = 0$ .

Пусть  $\varepsilon > 0$ . Согласно основному свойству микса существует такое  $0 < \nu(\varepsilon) < t_1 - t_0$ , что

$$\left\| G(x(\cdot), M(\cdot, \alpha, \nu(\varepsilon); \bar{u}(\cdot)))(\cdot) - \sum_{i=0}^k \alpha_i G(x(\cdot), u_i(\cdot))(\cdot) \right\|_{C([t_0, t_1], \mathbb{R}^{n+1})} < \frac{\varepsilon}{2\|A_2^{-1}\|} \quad (26)$$

для всех  $x(\cdot) \in \mathcal{O}$  и  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)^T \in \Sigma^k$ .

Пусть окрестности  $U_1$  и  $U_2$  точек  $0 \in \mathbb{R}^k$  и  $\hat{x}(t_0) \in \mathbb{R}^n$  таковы, что для всех  $(\alpha, \xi) \in U_1 \times U_2$  функция  $x(\cdot, \alpha, \xi; \bar{u}(\cdot))$  принадлежит окрестности  $\mathcal{O}$ , и можно считать (уменьшая, если необходимо, эти окрестности), что для  $(U_1 \cap \Sigma^k) \times U_2$  справедливы утверждения теоремы о неявной функции с отображением  $F_2$ . Тогда согласно оценке (\*) имеем, учитывая сделанные выше замечания (для краткости зависимость от  $\bar{u}(\cdot)$  не отмечаем),

$$\begin{aligned} & \left\| \left( x_{\nu(\varepsilon)}(\cdot, \alpha, \xi), y_{\nu(\varepsilon)}(\cdot, \alpha, \xi) \right) - \left( x(\cdot, \alpha, \xi), y(\cdot, \alpha, \xi) \right) \right\|_{C([t_0, t_1], \mathbb{R}^{n+1})} \leq \\ & \leq 2\|A_2^{-1}\| \left\| F_2 \left( \left( x(\cdot, \alpha, \xi), y(\cdot, \alpha, \xi) \right), \alpha, \xi \right) (\cdot) \right\|_{C([t_0, t_1], \mathbb{R}^{n+1})} = \\ & = 2\|A_2^{-1}\| \left\| F_2 \left( \left( x(\cdot, \alpha, \xi), y(\cdot, \alpha, \xi) \right), \alpha, \xi \right) (\cdot) - \right. \\ & \quad \left. - F_1 \left( \left( x(\cdot, \alpha, \xi), y(\cdot, \alpha, \xi) \right), \alpha, \xi \right) (\cdot) \right\|_{C([t_0, t_1], \mathbb{R}^{n+1})} = \\ & = 2\|A_2^{-1}\| \times \\ & \quad \times \left\| G(x(\cdot, \alpha, \xi), M(\cdot, \alpha, \nu(\varepsilon)))(\cdot) - \sum_{i=0}^k \alpha_i G(x(\cdot, \alpha, \xi), u_i(\cdot))(\cdot) \right\|_{C([t_0, t_1], \mathbb{R}^{n+1})} < \\ & < 2\|A_2^{-1}\| \frac{\varepsilon}{2\|A_2^{-1}\|} = \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

### Лемма о разрешимости системы уравнений

Доказываемая здесь лемма о разрешимости опирается на теорему Брауэра о неподвижной точке.

**Лемма 2.** Пусть  $V$  — окрестность точки  $\hat{x} \in \mathbb{R}^k$ ,  $K$  — выпуклый конус в  $\mathbb{R}^k$ , отображение  $F: V \rightarrow \mathbb{R}^m$  дифференцируемо в  $\hat{x}$  и  $F'(\hat{x})(K) = \mathbb{R}^m$ . Пусть, далее,  $\{\Phi_\nu\}_{\nu>0}$  — семейство отображений  $\Phi_\nu: V \cap (\hat{x} + K) \rightarrow \mathbb{R}^m$ , непрерывных на  $V \cap (\hat{x} + K)$ , и при этом  $\Phi_\nu(\hat{x}) = F(\hat{x})$  для любого  $\nu > 0$  и  $\Phi_\nu(x) \rightarrow F(x)$  при  $\nu \rightarrow 0$  равномерно по  $x \in V \cap (\hat{x} + K)$ . Тогда существует окрестность  $W$  точки  $F(\hat{x})$  и константа  $\varkappa > 0$ , такие что для любого  $y \in W$  найдутся  $\nu(y) > 0$  и  $x(y) \in V \cap (\hat{x} + K)$ , для которых справедливы соотношения

$$\Phi_{\nu(y)}(x(y)) = y \quad \text{и} \quad |x(y) - \hat{x}| \leq \varkappa |y - F(\hat{x})|. \quad (27)$$

**Доказательство.** Обозначим  $\Lambda = F'(\hat{x})$  и покажем сначала, что существуют непрерывное отображение  $R: \mathbb{R}^m \rightarrow K$  (правое обратное к  $\Lambda$ ) и константа  $\gamma > 0$ , такие что  $\Lambda R(z) = z$  и  $|R(z)| \leq \gamma |z|$  для всех  $z \in \mathbb{R}^m$ .

Действительно, пусть  $e_1, \dots, e_m$  — базис в  $\mathbb{R}^m$ . По предположению найдутся такие  $f_i \in K$ ,  $1 \leq i \leq 2m$ , что  $\Lambda f_i = e_i$  и  $\Lambda f_{m+i} = -e_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Для каждого  $z = \sum_{i=1}^m z_i e_i \in \mathbb{R}^m$  положим  $R(z) = \sum_{i=1}^m |z_i| g_i$ , где  $g_i = f_i$ , если  $z_i \geq 0$  и  $g_i = f_{m+i}$ , если  $z_i < 0$ . Ясно, что  $R$  непрерывно,  $R(z) \in K$ ,

$$\Lambda R(z) = \sum_{i=1}^m |z_i| \Lambda g_i = \sum_{i=1}^m z_i e_i = z$$

и

$$|R(z)| \leq \sum_{i=1}^m |z_i| |g_i| \leq \max_{1 \leq i \leq m} |z_i| \sum_{i=1}^{2m} |f_i| \leq \gamma |z|,$$

где  $\gamma = \sum_{i=1}^{2m} |f_i|$ .

В силу дифференцируемости  $F$  в  $\hat{x}$  существует такое  $\delta > 0$ , что  $U_{\mathbb{R}^k}(\hat{x}, \delta) \subset V$  и

$$|F(x) - F(\hat{x}) - \Lambda(x - \hat{x})| \leq \frac{1}{4\gamma} |x - \hat{x}| \quad (28)$$

для всех  $x \in U_{\mathbb{R}^k}(\hat{x}, \delta)$ .

Положим  $W = U_{\mathbb{R}^m}(F(\hat{x}), \delta/(2\gamma))$ , и пусть  $y \in W$ . Если  $y = F(\hat{x})$ , то соотношения (27) выполняются очевидным образом. Пусть  $y \neq F(\hat{x})$ . По условию существует  $\nu(y) > 0$ , такое что

$$|\Phi_{\nu(y)}(x) - F(x)| \leq \frac{1}{2} |y - F(\hat{x})| \quad (29)$$

для всех  $x \in V \cap (\hat{x} + K)$ .

Пусть  $B_X(x, r)$  обозначает замкнутый шар в нормированном пространстве  $X$  с центром в точке  $X$  радиуса  $r$ . Рассмотрим отображение

$$G_y: B_{\mathbb{R}^m}(F(\hat{x}), 2|y - F(\hat{x})|) \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

определённое формулой

$$G_y(z) = y + z - \Phi_{\nu(y)}(\hat{x} + R(z - F(\hat{x}))).$$

Определение корректно, так как, если  $z \in B_{\mathbb{R}^m}(F(\hat{x}), 2|y - F(\hat{x})|)$ , то

$$|R(z - F(\hat{x}))| \leq \gamma|z - F(\hat{x})| < 2\gamma|y - F(\hat{x})| < 2\gamma\left(\frac{\delta}{2\gamma}\right) = \delta,$$

и значит,

$$\hat{x} + R(z - F(\hat{x})) \subset U_{\mathbb{R}^k}(\hat{x}, \delta) \cap (\hat{x} + K) \subset V \cap (\hat{x} + K).$$

Покажем, что образ  $G_y$  содержится в шаре  $B_{\mathbb{R}^m}(F(\hat{x}), 2|y - F(\hat{x})|)$ . Действительно, после элементарных преобразований и применения неравенств (28) и (29) получаем

$$\begin{aligned} |G_y(z) - F(\hat{x})| &\leq |y - F(\hat{x})| + \\ &+ \left| \Phi_{\nu(y)}(\hat{x} + R(z - F(\hat{x}))) - F(\hat{x} + R(z - F(\hat{x}))) \right| + \\ &+ \left| F(\hat{x} + R(z - F(\hat{x}))) - F(\hat{x}) - \Lambda R(z - F(\hat{x})) \right| \leq \\ &\leq |y - F(\hat{x})| + \frac{1}{2}|y - F(\hat{x})| + \frac{1}{4\gamma}|R(z - F(\hat{x}))| \leq \\ &\leq \frac{3}{2}|y - F(\hat{x})| + \frac{1}{4\gamma}\gamma|z - F(\hat{x})| \leq \frac{3}{2}|y - F(\hat{x})| + \frac{1}{4}2|y - F(\hat{x})| = 2|y - F(\hat{x})|. \end{aligned}$$

Отображение  $G_y$  непрерывно в силу непрерывности отображений  $\Phi_{\nu(y)}$  и  $R$ . Поэтому по теореме Брауэра о неподвижной точке существует  $\bar{z} = \bar{z}(y) \in B_{\mathbb{R}^m}(F(\hat{x}), 2|y - F(\hat{x})|)$ , такое что  $G_y(\bar{z}) = \bar{z}$ , или  $\Phi_{\nu(y)}(\hat{x} + R(\bar{z} - F(\hat{x}))) = y$ . Положим  $x(y) = \hat{x} + R(\bar{z} - F(\hat{x}))$ . Тогда  $\Phi_{\nu(y)}(x(y)) = y$  и

$$|x(y) - \hat{x}| = |R(\bar{z} - F(\hat{x}))| \leq \gamma|\bar{z} - F(\hat{x})| \leq 2\gamma|y - F(\hat{x})|.$$

Осталось обозначить  $\varkappa = 2\gamma$ .  $\square$

## Литература

- [1] Аваков Е. Р., Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. О принципе Лагранжа в задачах на экстремум при наличии ограничений // УМН. — 2013. — Т. 68, № 3. — С. 5—38.
- [2] Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979.
- [3] Магарил-Ильяев Г. Г. Принцип максимума Понтрягина. Формулировка и доказательство // Докл. РАН. — 2012. — Т. 442, № 1. — С. 20—23.
- [4] Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Метод Ньютона, дифференциальные уравнения и принцип Лагранжа для необходимых условий экстремума // Тр. МИАН. — 2008. — Т. 262. — С. 156—177.



- [5] Тихомиров В. М. Теорема о касательном пространстве и некоторые её модификации // Оптим. управл. — 1977. — Вып. 7. — С. 22–30.