

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В КОЛЬЦЕ

Е. А. БАЛОВА

Аннотация. В работе рассматривается задача оптимального восстановления решения задачи Дирихле по конечному набору коэффициентов Фурье граничных функций, заданных с погрешностью в l_2 и l_∞ -нормах, при условии, что граничные функции принадлежат соболевскому классу $W_2^r(\mathbb{T})$.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Применение теории оптимального восстановления к задачам математической физики на основе методов, разработанных в [1] и [2], было начато в работах [3] и [4]. В [4] изучалась задача оптимального восстановления решения задачи Дирихле для круга по конечному набору коэффициентов Фурье граничной функции, заданных с погрешностью, когда о самой граничной функции известна априорная информация о принадлежности ее соболевскому классу $W_2^r(\mathbb{T})$, являющимся множеством 2π -периодических функций $x(\cdot)$, определенных на \mathbb{T} , у которых $x^{(r-1)}(\cdot)$ — абсолютно непрерывна на \mathbb{T} , а $\|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq 1$; здесь \mathbb{T} — отрезок $[-\pi, \pi]$ с идентифицированными концами и

$$\|g(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} = \left(\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} |g(t)| dt \right)^{1/2}.$$

В данной работе изучается аналогичная задача для кольца

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : R^{-1} < x^2 + y^2 < R, R > 1 \}.$$

Задача Дирихле для кольца D — это задача о нахождении функции $u(\cdot, \cdot)$ такой, что

$$(1) \quad \begin{aligned} \Delta u &= 0, \\ u(R^{-1} \cos t, R^{-1} \sin t) &= f_{-1}(t), \\ u(R \cos t, R \sin t) &= f_1(t). \end{aligned}$$

Если $f_j(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$, $j = \pm 1$, то решение этой задачи может быть записано в виде

$$(2) \quad u(\rho \cos t, \rho \sin t) = \sum_{j=\pm 1} \left(\frac{F_{j0}(\rho)}{\sqrt{2}} a_0(f_j) + \sum_{n=1}^{\infty} F_{jn}(\rho) (a_n(f_j) \cos nt + b_n(f_j) \sin nt) \right),$$

где

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) dt, \\ a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \cos nt dt, \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \sin nt dt, \quad n \in \mathbb{Z},$$

— коэффициенты Фурье функции $f(\cdot)$, а

$$F_{j0}(\rho) = \frac{\ln(R\rho^j)}{\sqrt{2} \ln R}, \quad F_{jn}(\rho) = \frac{(R\rho^j)^n - (R\rho^{-j})^{-n}}{R^{2n} - R^{-2n}}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad j = \pm 1.$$

Предположим, что для любых $f_{-1}(\cdot), f_1(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ известны вектора

$$a^{Nj} = (a_0^j, a_1^j, \dots, a_N^j, b_1^j, \dots, b_N^j), \quad j = \pm 1,$$

такие, что

$$\|a^N(f_j) - a^{Nj}\|_{l_p^{2N+1}} \leq \delta_j, \quad j = \pm 1,$$

где $\delta_{-1}, \delta_1 > 0$,

$$a^N(f_j) = (a_0(f_j), a_1(f_j), \dots, a_N(f_j), b_1(f_j), \dots, b_N(f_j)), \quad j = \pm 1,$$

и для $x = (x_1, \dots, x_{2N+1})$

$$\|x\|_{l_p^{2N+1}} = \begin{cases} \left(\sum_{n=1}^{2N+1} |x_n|^p \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \max_{1 \leq n \leq 2N+1} |x_n|, & p = \infty, \end{cases}.$$

Требуется по информации о векторах a^{Nj} , $j = \pm 1$, восстановить решение задачи (1) в пространстве $L_2(D)$, где

$$\|u(\cdot, \cdot)\|_{L_2(D)} = \left(\frac{1}{\pi} \iint_D |u(x, y)|^2 dx dy \right)^{1/2}.$$

В качестве методов восстановления будем рассматривать всевозможные операторы $\varphi: l_p^{2N+1} \times l_p^{2N+1} \rightarrow L_2(D)$. Погрешностью метода φ назовем величину

$$e_{Np}(W_2^r(\mathbb{T}), \delta_{-1}, \delta_1, \varphi) = \sup_{f_{-1}(\cdot), f_1(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{T})} \sup_{\substack{a^{Nj} \in l_p^{2N+1}, j=\pm 1 \\ \|a^N(f_j) - a^{Nj}\|_{l_p^{2N+1}} \leq \delta_j, j=\pm 1}} \|u(\cdot, \cdot) - \varphi(a^{N,-1}, a^{N1})(\cdot, \cdot)\|_{L_2(D)}.$$

Погрешностью оптимального восстановления назовем величину

$$E_{Np}(W_2^r(\mathbb{T}), \delta_{-1}, \delta_1) = \inf_{\varphi: l_p^{2N+1} \times l_p^{2N+1} \rightarrow L_2(D)} e_{Np}(W_2^r(\mathbb{T}), \delta_{-1}, \delta_1, \varphi),$$

а метод, на котором достигается нижняя грань, будем называть оптимальным.

2. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Положим

$$\begin{aligned} \alpha_{jn} &= \int_{1/R}^R F_{jn}^2(\rho) \rho d\rho, \quad j = \pm 1, \\ \gamma_n &= 2 \int_{1/R}^R F_{-1,n}(\rho) F_{1n}(\rho) \rho d\rho, \quad n \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$

(мы не будем использовать явных выражений для этих величин, чтобы избежать громоздкости). Отметим, что $\alpha_{jn}, \gamma_n > 0$ при всех $j = \pm 1$ и $n \in \mathbb{Z}_+$.

Теорема 1. При всех $\delta_{-1}, \delta_1 > 0$

$$\begin{aligned} E_{N2}(W_2^r(\mathbb{T}), \delta_{-1}, \delta_1) \\ = \sqrt{\alpha_{-1,0}\delta_{-1}^2 + \alpha_{10}\delta_1^2 + \gamma_0\delta_{-1}\delta_1 + \frac{\alpha_{-1,N+1} + \alpha_{1,N+1} + \gamma_{N+1}}{(N+1)^{2r}}}, \end{aligned}$$

а метод

$$\begin{aligned} \varphi(a^{N,-1}, a^{N1})(\rho \cos t, \rho \sin t) \\ = \sum_{j=\pm 1} \left(\frac{F_{j0}(\rho)}{\sqrt{2}} a_0^j + \sum_{n=1}^N \varepsilon_{jn} F_{jn}(\rho) (a_n^j \cos nt + b_n^j \sin nt) \right), \end{aligned}$$

где

$$\varepsilon_{jn} = \left(1 + \delta_j \frac{2\alpha_{j,N+1} + \gamma_{N+1}}{2\alpha_{j0}\delta_j + \gamma_0\delta_{-j}} \left(\frac{n}{N+1} \right)^{2r} \right)^{-1},$$

является оптимальным.

Теорема 2. Пусть $p = \infty$ и $\delta_{-1} = \delta_1 = \delta > 0$. Положим

$$M = \max \left\{ m \in \mathbb{Z}_+ : 2\delta^2 \sum_{n=1}^m n^{2r} < 1, \quad 0 \leq m \leq N \right\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} (3) \quad E_{N\infty}(W_2^r(\mathbb{T}), \delta, \delta) \\ = \sqrt{\delta^2 \left(s_0 + 2 \sum_{n=1}^M s_n \right) + \frac{s_{M+1}}{(M+1)^{2r}} \left(1 - 2\delta^2 \sum_{n=1}^M n^{2r} \right)}, \end{aligned}$$

где $s_n = \alpha_{-1,n} + \alpha_{1n} + \gamma_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, а метод

$$(4) \quad \varphi(a^{N,-1}, a^{N1})(\rho \cos t, \rho \sin t) \\ = \sum_{j=\pm 1} \left(\frac{F_{j0}(\rho)}{\sqrt{2}} a_0^j + \sum_{n=1}^M \omega_{jn} F_{jn}(\rho) (a_n^j \cos nt + b_n^j \sin nt) \right),$$

где

$$\omega_{jn} = 1 - \frac{2\alpha_{j,M+1} + \gamma_{M+1}}{2\alpha_{jn} + \gamma_n} \left(\frac{n}{M+1} \right)^{2r},$$

является оптимальным.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Начнем с одного вспомогательного результата.

Лемма 1. Последовательности $\{\alpha_{jn}\}_{n=0}^\infty$, $j = \pm 1$, $\{\gamma_n\}_{n=0}^\infty$ являются монотонно убывающими.

Доказательство. Достаточно доказать, что при всех $\rho \in (R^{-1}, R)$

$$F_{1n}(\rho) \geq F_{1,n+1}(\rho), \quad n = 0, 1, \dots$$

(случай $j = -1$ получается из случая $j = 1$ с помощью замены $\rho = 1/t$). Докажем сначала, что $F_{10}(\rho) \geq F_{11}(\rho)$. Положим

$$\psi(\rho) = F_{10}(\rho) - F_{11}(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{\ln \rho}{\ln R} \right) - \frac{R\rho - (R\rho)^{-1}}{R^2 - R^{-2}}.$$

Имеем $\psi(R^{-1}) = 0$, $\psi(R) = \sqrt{2} - 1 > 0$,

$$\psi'(\rho) = -\frac{R^2}{\rho^2(R^2 - R^{-2})} \left(\rho^2 - \frac{R^2 - R^{-2}}{\sqrt{2}R \ln R} \rho + \frac{1}{R^2} \right).$$

Если бы в какой-нибудь точке из интервала (R^{-1}, R) функция $\psi(\cdot)$ принимала отрицательное значение, то у нее существовал бы локальный минимум на этом интервале. Но из вида $\psi'(\cdot)$ видно, что если у $\psi(\cdot)$ существует локальный минимум при $\rho > 0$, то он находится левее точки R^{-1} .

Положим $a = \ln R\rho$, $b = 2 \ln R$. Тогда

$$F_{1n}(\rho) = \frac{\operatorname{sh} na}{\operatorname{sh} nb}.$$

Для доказательства монотонного убывания последовательности $F_{1n}(\rho)$, $n \in \mathbb{Z}$, достаточно доказать монотонное убывание функции

$$\psi_1(t) = \frac{\operatorname{sh} at}{\operatorname{sh} bt}$$

при $t \in [1, \infty)$ и $a < b$. Имеем

$$\psi_1'(t) = \frac{\psi_2(t)}{\operatorname{sh}^2 bt}, \quad \psi_2(t) = a \operatorname{ch} at \operatorname{sh} bt - b \operatorname{sh} at \operatorname{sh} bt.$$

Поскольку при всех $t \in [1, \infty)$

$$\psi_2'(t) = (a^2 - b^2) \operatorname{sh} at \operatorname{sh} bt \leq 0,$$

а $\psi_2(0) = 0$, то $\psi_2(t) \leq 0$ для всех $t \in [1, \infty)$. Поэтому $\psi_1'(t) \leq 0$ при $t \in [1, \infty)$. Отсюда следует монотонное убывание функции $\psi_1(\cdot)$. \square

Доказательство теоремы 1. С рассматриваемой задачей восстановления тесно связана следующая экстремальная задача

$$(5) \quad \|u(\cdot, \cdot)\|_{L_2(D)}^2 \rightarrow \max, \quad \|a^N(f_j)\|_{l_2^{2N+1}}^2 \leq \delta_j^2, \quad f_j(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{T}), \quad j = \pm 1;$$

здесь $u(\cdot, \cdot)$ — решение задачи (1) с граничными значениями $f_{-1}(\cdot)$, $f_1(\cdot)$. Из равенства (2) вытекает, что

$$(6) \quad \|u(\cdot, \cdot)\|_{L_2(D)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=\pm 1} \alpha_{jn} |v_{jn}|^2 + \gamma_n \langle v_{-1,n}, v_{1n} \rangle \right),$$

где $v_{j0} = (a_0(f_j), 0)$, $v_{jn} = (a_n(f_j), b_n(f_j))$, $n \in \mathbb{Z}$, $j = \pm 1$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — стандартное скалярное произведение в \mathbb{R}^2 , а $|v_{jn}|^2 = \langle v_{jn}, v_{jn} \rangle$. Таким образом, экстремальная задача (5) может быть записана в виде

$$(7) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=\pm 1} \alpha_{jn} |v_{jn}|^2 + \gamma_n \langle v_{-1,n}, v_{1n} \rangle \right) \rightarrow \max, \quad \sum_{n=0}^N |v_{jn}|^2 \leq \delta_j^2, \\ \sum_{n=1}^{\infty} n^{2r} |v_{jn}|^2 \leq 1, \quad j = \pm 1.$$

Введем функцию Лагранжа для этой задачи

$$\mathcal{L}(v, \lambda) = - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=\pm 1} \alpha_{jn} |v_{jn}|^2 + \gamma_n \langle v_{-1,n}, v_{1n} \rangle \right) \\ + \sum_{j=\pm 1} \left(\lambda_j \sum_{n=0}^N |v_{jn}|^2 + \mu_j \sum_{n=1}^{\infty} n^{2r} |v_{jn}|^2 \right),$$

где $v = (\{v_{-1,n}\}_{n=0}^{\infty}, \{v_{1n}\}_{n=0}^{\infty})$, $\lambda = (\lambda_{-1}, \lambda_1, \mu_{-1}, \mu_1)$. Из работы [2] вытекает, что если найдутся такие множители Лагранжа $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_{-1}, \hat{\lambda}_1, \hat{\mu}_{-1}, \hat{\mu}_1)$, $\hat{\lambda}_j, \hat{\mu}_j \geq 0$, $j = \pm 1$, что для допустимых в (7) последовательностей $\hat{v} = (\{\hat{v}_{-1,n}\}_{n=0}^{\infty}, \{\hat{v}_{1n}\}_{n=0}^{\infty})$ выполнены условия

$$(a) \quad \min_v \mathcal{L}(v, \hat{\lambda}) = \mathcal{L}(\hat{v}, \hat{\lambda}),$$

$$(b) \quad \sum_{j=\pm 1} \hat{\lambda}_j \left(\sum_{n=0}^N |v_{jn}|^2 - \delta_j^2 \right) = 0, \quad \sum_{j=\pm 1} \hat{\mu}_j \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{2r} |v_{jn}|^2 - 1 \right) = 0,$$

то $\{\widehat{v}_{-1,n}\}, \{\widehat{v}_{1n}\}$ — решения задачи (7). Если при этом для всех $a^{Nj} \in l_2^{2N+1}$, $j = \pm 1$, существуют решения $\widehat{f}_{-1}(\cdot), \widehat{f}_1(\cdot)$ экстремальной задачи

$$(8) \quad \sum_{j=\pm 1} \left(\widehat{\lambda}_j \|a^N(f_j) - a^{Nj}\|_{l_2^{2N+1}}^2 + \widehat{\mu}_j \|f_j^{(r)}(\cdot)\|_{W_2^r(\mathbb{T})}^2 \right) \rightarrow \min,$$

$$f_j(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{T}), \quad j = \pm 1,$$

то

$$E_{N2}(W_2^r(\mathbb{T}), \delta_{-1}, \delta_1) = \sqrt{\sum_{j=\pm 1} (\widehat{\lambda}_j \delta_j^2 + \widehat{\mu}_j)},$$

а метод, определенный равенствами (2) для $f_j(\cdot) = \widehat{f}_j(\cdot)$, $j = \pm 1$, является оптимальным.

Пользуясь неравенствами

$$\langle v_{-1,n}, v_{1n} \rangle \leq |v_{-1,n}| |v_{1n}| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\delta_1}{\delta_{-1}} |v_{-1,n}|^2 + \frac{\delta_{-1}}{\delta_1} |v_{1n}|^2 \right)$$

при $0 \leq n \leq N$ и

$$(9) \quad \langle v_{-1,n}, v_{1n} \rangle \leq |v_{-1,n}| |v_{1n}| \leq \frac{1}{2} (|v_{-1,n}|^2 + |v_{1n}|^2)$$

при $n > N$, будем иметь

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(v, \lambda) \geq \sum_{j=\pm 1} \left(\sum_{n=0}^N (\lambda_j - \widetilde{\alpha}_{jn} + \mu_j n^{2r}) |v_{jn}|^2 \right. \\ \left. + \sum_{n=N+1}^{\infty} (-\widetilde{\alpha}_{jn} + \mu_j n^{2r}) |v_{jn}|^2 \right) = \widetilde{\mathcal{L}}(v, \lambda), \end{aligned}$$

где

$$\widetilde{\alpha}_{jn} = \begin{cases} \alpha_{jn} + \frac{\gamma_n \delta_{-j}}{2 \delta_j}, & 0 \leq n \leq N, \\ \alpha_{jn} + \frac{\gamma_n}{2}, & n \geq N+1, \end{cases} \quad j = \pm 1.$$

Положим

$$\widehat{\lambda}_j = \widetilde{\alpha}_{j0}, \quad \widehat{\mu}_j = \frac{\widetilde{\alpha}_{j,N+1}}{(N+1)^{2r}}, \quad j = \pm 1,$$

и покажем, что для последовательностей $\{\widehat{v}_{jn}\}$, $j = \pm 1$, определенных равенствами

$$\begin{aligned} \widehat{v}_{j0} = (\delta_j, 0), \quad \widehat{v}_{j,N+1} = ((N+1)^{-r}, 0), \\ \widehat{v}_{jk} = (0, 0) \quad k \neq 0, N+1, \quad j = \pm 1, \end{aligned}$$

выполнены условия (a) и (b). В силу леммы 1 последовательности $\{\tilde{\alpha}_{jn}\}_{n=0}^{\infty}$, $j = \pm 1$, являются монотонно убывающими. Тем самым

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(v, \hat{\lambda}) \geq \tilde{\mathcal{L}}(v, \hat{\lambda}) &= \sum_{j=\pm 1} \left(\sum_{n=1}^N \left(\tilde{\alpha}_{j0} - \tilde{\alpha}_{jn} + \tilde{\alpha}_{j,N+1} \left(\frac{n}{N+1} \right)^{2r} \right) |v_{jn}|^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(-\tilde{\alpha}_{jn} + \tilde{\alpha}_{j,N+1} \left(\frac{n}{N+1} \right)^{2r} \right) |v_{jn}|^2 \right) \geq 0. \end{aligned}$$

С другой стороны, $\mathcal{L}(\hat{v}, \hat{\lambda}) = 0$. Следовательно, условие (a) выполнено. В справедливости условия (b) легко убедиться непосредственной проверкой.

Найдем теперь решение экстремальной задачи (8), которую можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sum_{j=\pm 1} \left(\hat{\lambda}_j \left(|a_0(f_j) - a_0^j|^2 + \sum_{n=1}^N (|a_n(f_j) - a_n^j|^2 + |b_n(f_j) - b_n^j|^2) \right) \right. \\ \left. + \hat{\mu}_j \sum_{n=1}^{\infty} n^{2r} (|a_n(f_j)|^2 + |b_n(f_j)|^2) \right) \rightarrow \min, \\ f_j(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{T}), \quad j = \pm 1. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что решением этой задачи являются функции

$$(10) \quad \hat{f}_j(t) = a_0^j + \sum_{n=1}^N \left(1 + \frac{\hat{\mu}_j}{\hat{\lambda}_j} n^{2r} \right)^{-1} (a_n^j \cos nt + b_n^j \sin nt), \quad j = \pm 1.$$

Таким образом,

$$E_{N2}(W_2^r(\mathbb{T}), \delta_{-1}, \delta_1) = \sqrt{\sum_{j=\pm 1} \left(\tilde{\alpha}_{j0} \delta_j^2 + \frac{\tilde{\alpha}_{j,N+1}}{(N+1)^{2r}} \right)},$$

а метод, определенный равенствами (2) для $f_j(\cdot) = \hat{f}_j(\cdot)$, $j = \pm 1$, где функции $\hat{f}_j(\cdot)$, $j = \pm 1$, заданы равенствами (10) является оптимальным. Для получения утверждения теоремы остается подставить выражения для $\tilde{\alpha}_{j0}$, $\tilde{\alpha}_{j,N+1}$, $\hat{\lambda}_j$ и $\hat{\mu}_j$, $j = \pm 1$. \square

Доказательство теоремы 2. Будем использовать тот же метод, что и в доказательстве предыдущей теоремы. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\|u(\cdot, \cdot)\|_{L_2(D)}^2 \rightarrow \max, \quad \|a^N(f_j)\|_{l_{\infty}^{2N+1}}^2 \leq \delta^2, \quad f_j(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{T}), \quad j = \pm 1.$$

Используя представление (6), перепишем эту задачу в виде

$$(11) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=\pm 1} \alpha_{jn} |v_{jn}|^2 + \gamma_n \langle v_{-1,n}, v_{1n} \rangle \right) \rightarrow \max,$$

$$\|v_{jn}\|_{l_{\infty}^2}^2 \leq \delta^2, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{2r} |v_{jn}|^2 \leq 1, \quad j = \pm 1.$$

Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид

$$\mathcal{L}(v, \lambda) = - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=\pm 1} \alpha_{jn} |v_{jn}|^2 + \gamma_n \langle v_{-1,n}, v_{1n} \rangle \right) + \sum_{j=\pm 1} \left(\lambda_0^j (v_{j0})_1^2 + \sum_{n=1}^N (\lambda_n^j (v_{jn})_1^2 + \nu_n^j (v_{jn})_2^2) + \mu_j \sum_{n=1}^{\infty} n^{2r} |v_{jn}|^2 \right),$$

где $v = (\{v_{-1,n}\}_{n=0}^{\infty}, \{v_{1n}\}_{n=0}^{\infty})$,

$$\lambda = (\{\lambda_n^{-1}\}_{n=0}^N, \{\nu_n^{-1}\}_{n=1}^N, \{\lambda_n^1\}_{n=0}^N, \{\nu_n^1\}_{n=1}^N, \mu_{-1}, \mu_1), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad j = \pm 1.$$

Из работы [2] вытекает, что если найдутся такие неотрицательные множители Лагранжа $\hat{\lambda}$, что для допустимых в (11) последовательностей $\hat{v} = (\{\hat{v}_{-1,n}\}_{n=0}^{\infty}, \{\hat{v}_{1n}\}_{n=0}^{\infty})$ выполнены условия

$$(a) \quad \min_v \mathcal{L}(v, \hat{\lambda}) = \mathcal{L}(\hat{v}, \hat{\lambda}),$$

$$(b) \quad \sum_{n=0}^N \hat{\lambda}_n^j ((\hat{v}_{jn})_1^2 - \delta^2) + \sum_{n=0}^N \hat{\nu}_n^j ((\hat{v}_{jn})_2^2 - \delta^2) = 0,$$

$$\hat{\mu}_j \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{2r} |\hat{v}_{jn}|^2 - 1 \right) = 0, \quad j = \pm 1,$$

то $\{\hat{v}_{-1,n}\}, \{\hat{v}_{1n}\}$ — решения задачи (11). Если при этом для всех $a^{Nj} \in l_{\infty}^{2N+1}$, $j = \pm 1$, существуют решения $\hat{f}_{-1}(\cdot), \hat{f}_1(\cdot)$ экстремальной задачи

$$(12) \quad \sum_{j=\pm 1} \left(\hat{\lambda}_0^j |a_0(f_j) - a_0^j|^2 + \sum_{n=1}^N \left(\hat{\lambda}_n^j |a_n(f_j) - a_n^j|^2 + \hat{\nu}_n^j |b_n(f_j) - b_n^j|^2 \right) + \hat{\mu}_j \|f_j^{(r)}(\cdot)\|_{W_2^r(\mathbb{T})}^2 \right) \rightarrow \min, \quad f_j(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{T}), \quad j = \pm 1,$$

то

$$(13) \quad E_{N\infty}(W_2^r(\mathbb{T}), \delta_{-1}, \delta_1) = \sqrt{\sum_{j=\pm 1} \left(\delta^2 \left(\hat{\lambda}_0^j + \sum_{n=1}^N (\hat{\lambda}_n^j + \hat{\nu}_n^j) \right) + \hat{\mu}_j \right)},$$

а метод, определенный равенствами (2) для $f_j(\cdot) = \hat{f}_j(\cdot)$, $j = \pm 1$, является оптимальным.

Пользуясь неравенством (9), будем иметь

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(v, \lambda) &\geq \sum_{j=\pm 1} \left(\sum_{n=0}^N (-\tilde{\alpha}_{jn} + \mu_j n^{2r} + \lambda_n^j) (v_{jn})_1^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^N (-\tilde{\alpha}_{jn} + \mu_j n^{2r} + \nu_n^j) (v_{jn})_2^2 \right) + \sum_{n=N+1}^{\infty} (-\tilde{\alpha}_{jn} + \mu_j n^{2r}) |v_{jn}|^2 \\ &= \tilde{\mathcal{L}}(v, \lambda), \end{aligned}$$

где

$$\tilde{\alpha}_{jn} = \alpha_{jn} + \frac{\gamma_n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad j = \pm 1.$$

Положим

$$\begin{aligned} \hat{v}_{j0} &= (\delta, 0), \quad \hat{v}_{jn} = (\delta, \delta), \quad 1 \leq n \leq M, \quad \hat{v}_{jn} = (0, 0), \quad n \geq M+2, \\ (\hat{v}_{j,M+1})_1 &= (\hat{v}_{j,M+1})_2 = \frac{1}{\sqrt{2}(M+1)^r} \left(1 - 2\delta^2 \sum_{n=1}^M n^{2r} \right)^{1/2}, \quad j = \pm 1. \end{aligned}$$

Докажем, что последовательность $\{\hat{v}_{jn}\}_{n=0}^{\infty}$, $j = \pm 1$, является допустимой в задаче (8). Для этого достаточно доказать, что при $M < N$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{2(M+1)^{2r}} \left(1 - 2\delta^2 \sum_{n=1}^M n^{2r} \right) \leq \delta^2.$$

Если предположить противное, то будем иметь

$$2\delta^2 \sum_{n=1}^{M+1} n^{2r} < 1,$$

что противоречит определению числа M . Положим

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_j &= \frac{\tilde{\alpha}_{j,M+1}}{(M+1)^{2r}}, \quad \hat{\lambda}_0^j = \tilde{\alpha}_{j0}, \quad \hat{\lambda}_n^j = \hat{\nu}_n^j = \tilde{\alpha}_{jn} - \hat{\mu}_j n^{2r}, \quad 1 \leq n \leq M, \\ \hat{\lambda}_n^j &= \hat{\nu}_n^j = 0, \quad M < n \leq N, \quad j = \pm 1. \end{aligned}$$

Тогда, учитывая монотонное убывание последовательностей $\{\tilde{\alpha}_{jn}\}$, $j = \pm 1$, имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(v, \hat{\lambda}) &\geq \tilde{\mathcal{L}}(v, \hat{\lambda}) \\ &= \sum_{j=\pm 1} \sum_{n=M+1}^{\infty} \left(-\tilde{\alpha}_{jn} + \tilde{\alpha}_{j,M+1} \left(\frac{n}{M+1} \right)^{2r} \right) |v_{jn}|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Поскольку $\mathcal{L}(\hat{v}, \hat{\lambda}) = 0$, то условие (a) выполнено. Легко убедиться, что условие (b) также выполнено.

Найдем теперь решение экстремальной задачи (12), которую можно записать в виде

$$\sum_{j=\pm 1} \left(\widehat{\lambda}_0^j |a_0(f_j) - a_0^j|^2 + \sum_{n=1}^M \left(\widehat{\lambda}_n^j |a_n(f_j) - a_n^j|^2 + \widehat{\nu}_n^j |b_n(f_j) - b_n^j|^2 \right) + \widehat{\mu}_j \sum_{n=1}^{\infty} n^{2r} (|a_n(f_j)|^2 + |b_n(f_j)|^2) \right) \rightarrow \min,$$

$$f_j(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{T}), \quad j = \pm 1,$$

Нетрудно убедиться, что решением этой задачи являются функции

$$(14) \quad \widehat{f}_j(t) = a_0^j + \sum_{n=1}^M \left(1 + \frac{\widehat{\mu}_j}{\widehat{\lambda}_n^j} n^{2r} \right)^{-1} (a_n^j \cos nt + b_n^j \sin nt), \quad j = \pm 1.$$

Таким образом, подставляя выражения для $\widehat{\lambda}_n^j$, $\widehat{\nu}_n^j$ и $\widehat{\mu}_j$ в (13) и в метод, определенный равенствами (2) для $f_j(\cdot) = \widehat{f}_j(\cdot)$, $j = \pm 1$, где функции $\widehat{f}_j(\cdot)$, $j = \pm 1$, заданы равенствами (14), получаем равенство (3) и оптимальность метода (4). \square

Отметим, что если $M < N$, то дальнейшее увеличение числа коэффициентов Фурье граничных функций, известных с той же погрешностью δ , не приводит к уменьшению погрешности оптимального восстановления. Тем самым при фиксированном δ набор из $2M(\delta) + 1$ коэффициентов Фурье каждой из граничных функций, где

$$M(\delta) = \max \left\{ M \in \mathbb{Z}_+ : 2\delta^2 \sum_{n=1}^M n^{2r} < 1 \right\},$$

позволяет максимально точно восстановить решение рассматриваемой задачи Дирихле.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью // Матем. сб. 2002. Т. 193. С. 79–100.
- [2] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функ. анализ и его прил. 2003. Т. 37. С. 51–64.
- [3] *Magaril-Plyuev G. G., Osipenko K. Yu., Tikhomirov V. M.* On optimal recovery of heat equation solutions // In: Approximation Theory / Eds. D. K. Dimitrov, G. Nikolov, and R. Uluchev. Sofia: Marin Drinov Academic Publishing House, 2004. P. 163–175.
- [4] *Осипенко К. Ю.* О восстановлении решения задачи Дирихле по неточным исходным данным // Владикавказский мат. журн. 2004. Т. 6. № 4. С. 55–62.