ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В КОЛЬЦЕ

Е. А. БАЛОВА

Аннотация. В работе рассматривается задача оптимального восстановления решения задачи Дирихле по конечному набору коэффициентов Фурье граничных функций, заданных с погрешностью в l_2 и l_∞-нормах, при условии, что граничные функции принадлежат соболевскому классу $W_2^r(\mathbb{T})$.

1. Постановка задачи

Применение теории оптимального восстановления к задачам математической физики на основе методов, разработанных в [1] и [2], было начато в работах [3] и [4]. В [4] изучалась задача оптимального восстановления решения задачи Дирихле для круга по конечному набору коэффициентов Фурье граничной функции, заданных с погрешностью, когда о самой граничной функции известна априорная информация о принадлежности ее соболевскому классу $W_2^r(\mathbb{T})$, являющимся множеством 2π-периодических функций $x(\cdot)$, определенных на $\mathbb{T}$, у которых $x^{(r-1)}(\cdot)$ — абсолютно непрерывна на $\mathbb{T}$, а $\|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \le 1$; здесь $\mathbb{T}$ — отрезок $[-\pi,\pi]$ с идентифицированными концами и

$$\|g(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} = \left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} |g(t)|\,dt\right)^{1/2}.$$

В данной работе изучается аналогичная задача для кольца

$$D = \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 : R^{-1} < x^2+y^2 < R,\ R>1\,\}.$$

Задача Дирихле для кольца D — это задача о нахождении функции $u(\cdot,\cdot)$ такой, что

$$\begin{gathered}\Delta u = 0,\\ u(R^{-1}\cos t, R^{-1}\sin t) = f_{-1}(t),\\ u(R\cos t, R\sin t) = f_1(t).\end{gathered} \tag{1}$$

Если $f_j(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$, $j = \pm 1$, то решение этой задачи может быть записано в виде

$$(2)\quad u(\rho\cos t, \rho\sin t) = \sum_{j=\pm 1}\left(\frac{F_{j0}(\rho)}{\sqrt{2}}a_0(f_j) + \sum_{n=1}^{\infty}F_{jn}(\rho)(a_n(f_j)\cos nt + b_n(f_j)\sin nt)\right),$$

где

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\,dt,$$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\cos nt\,dt, \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\sin nt\,dt, \quad n \in \mathbb{Z},$$

— коэффициенты Фурье функции $f(\cdot)$, а

$$F_{j0}(\rho) = \frac{\ln(R\rho^j)}{\sqrt{2}\ln R}, \quad F_{jn}(\rho) = \frac{(R\rho^j)^n - (R\rho^{-j})^{-n}}{R^{2n} - R^{-2n}},\ n \in \mathbb{Z},\ j = \pm 1.$$

Предположим, что для любых $f_{-1}(\cdot), f_1(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ известны вектора

$$a^{Nj} = (a_0^j, a_1^j, \ldots, a_N^j, b_1^j, \ldots, b_N^j), \quad j = \pm 1,$$

такие, что

$$\|a^N(f_j) - a^{Nj}\|_{l_p^{2N+1}} \le \delta_j, \quad j = \pm 1,$$

где $\delta_{-1}, \delta_1 > 0$,

$$a^N(f_j) = (a_0(f_j), a_1(f_j), \ldots, a_N(f_j), b_1(f_j), \ldots, b_N(f_j)), \quad j = \pm 1,$$

и для $x = (x_1, \ldots, x_{2n+1})$

$$\|x\|_{l_p^{2N+1}} = \begin{cases} \left(\sum_{n=1}^{2N+1}|x_n|^p\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \max_{1\le n\le 2N+1}|x_n|, & p = \infty, \end{cases}.$$

Требуется по информации о векторах a^{Nj}, $j = \pm 1$, восстановить решение задачи (1) в пространстве $L_2(D)$, где

$$\|u(\cdot,\cdot)\|_{L_2(D)} = \left(\frac{1}{\pi}\iint_D |u(x,y)|^2\,dx\,dy\right)^{1/2}.$$

В качестве методов восстановления будем рассматривать всевозможные операторы $\varphi\colon l_p^{2N+1} \times l_p^{2N+1} \to L_2(D)$. Погрешностью метода φ назовем величину

$$e_{Np}(W_2^r(\mathbb{T}), \delta_{-1}, \delta_1, \varphi) = \sup_{f_{-1}(\cdot), f_1(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{T})} \sup_{\substack{a^{Nj} \in l_p^{2N+1},\ j=\pm 1 \\ \|a^N(f_j) - a^{Nj}\|_{l_p^{2N+1}} \le \delta_j,\ j=\pm 1}} \|u(\cdot,\cdot) - \varphi(a^{N,-1}, a^{N1})(\cdot,\cdot)\|_{L_2(D)}.$$

Погрешностью оптимального восстановления назовем величину

$$E_{Np}(W_2^r(\mathbb{T}),\delta_{-1},\delta_1)=\inf_{\varphi\colon l_p^{2N+1}\times l_p^{2N+1}\to L_2(D)} e_{Np}(W_2^r(\mathbb{T}),\delta_{-1},\delta_1,\varphi),$$

а метод, на котором достигается нижняя грань, будем называть оптимальным.

2. Формулировка основных результатов

Положим

$$\alpha_{jn}=\int_{1/R}^R F_{jn}^2(\rho)\rho\,d\rho,\ \ j=\pm1,$$
$$\gamma_n=2\int_{1/R}^R F_{-1,n}(\rho)F_{1n}(\rho)\rho\,d\rho,\quad n\in\mathbb{Z}_+$$

(мы не будем использовать явных выражений для этих величин, чтобы избежать громоздкости). Отметим, что $\alpha_{jn},\gamma_n>0$ при всех $j=\pm1$ и $n\in\mathbb{Z}_+$.

Теорема 1. *При всех $\delta_{-1},\delta_1>0$*

$$E_{N2}(W_2^r(\mathbb{T}),\delta_{-1},\delta_1)=\sqrt{\alpha_{-1,0}\delta_{-1}^2+\alpha_{10}\delta_1^2+\gamma_0\delta_{-1}\delta_1+\frac{\alpha_{-1,N+1}+\alpha_{1,N+1}+\gamma_{N+1}}{(N+1)^{2r}}},$$

а метод

$$\varphi(a^{N,-1},a^{N1})(\rho\cos t,\rho\sin t)=\sum_{j=\pm1}\left(\frac{F_{j0}(\rho)}{\sqrt2}a_0^j+\sum_{n=1}^N\varepsilon_{jn}F_{jn}(\rho)(a_n^j\cos nt+b_n^j\sin nt)\right),$$

где

$$\varepsilon_{jn}=\left(1+\delta_j\frac{2\alpha_{j,N+1}+\gamma_{N+1}}{2\alpha_{j0}\delta_j+\gamma_0\delta_{-j}}\left(\frac{n}{N+1}\right)^{2r}\right)^{-1},$$

является оптимальным.

Теорема 2. *Пусть $p=\infty$ и $\delta_{-1}=\delta_1=\delta>0$. Положим*

$$M=\max\left\{m\in\mathbb{Z}_+:2\delta^2\sum_{n=1}^m n^{2r}<1,\ 0\le m\le N\right\}.$$

Тогда

$$E_{N\infty}(W_2^r(\mathbb{T}),\delta,\delta)=\sqrt{\delta^2\left(s_0+2\sum_{n=1}^M s_n\right)+\frac{s_{M+1}}{(M+1)^{2r}}\left(1-2\delta^2\sum_{n=1}^M n^{2r}\right)}, \tag{3}$$

где $s_n = \alpha_{-1,n} + \alpha_{1n} + \gamma_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, *а метод*

$$(4)\quad \varphi(a^{N,-1}, a^{N1})(\rho\cos t, \rho\sin t) = \sum_{j=\pm1}\left(\frac{F_{j0}(\rho)}{\sqrt{2}}a_0^j + \sum_{n=1}^{M}\omega_{jn}F_{jn}(\rho)(a_n^j\cos nt + b_n^j\sin nt)\right),$$

где

$$\omega_{jn} = 1 - \frac{2\alpha_{j,M+1} + \gamma_{M+1}}{2\alpha_{jn} + \gamma_n}\left(\frac{n}{M+1}\right)^{2r},$$

является оптимальным.

3. Доказательства

Начнем с одного вспомогательного результата.

Лемма 1. *Последовательности* $\{\alpha_{jn}\}_{n=0}^{\infty}$, $j = \pm1$, $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$ *являются монотонно убывающими.*

Доказательство. Достаточно доказать, что при всех $\rho \in (R^{-1}, R)$

$$F_{1n}(\rho) \ge F_{1,n+1}(\rho), \quad n = 0, 1, \dots$$

(случай $j = -1$ получается из случая $j = 1$ с помощью замены $\rho = 1/t$). Докажем сначала, что $F_{10}(\rho) \ge F_{11}(\rho)$. Положим

$$\psi(\rho) = F_{10}(\rho) - F_{11}(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{\ln\rho}{\ln R}\right) - \frac{R\rho - (R\rho)^{-1}}{R^2 - R^{-2}}.$$

Имеем $\psi(R^{-1}) = 0$, $\psi(R) = \sqrt{2} - 1 > 0$,

$$\psi'(\rho) = -\frac{R^2}{\rho^2(R^2 - R^{-2})}\left(\rho^2 - \frac{R^2 - R^{-2}}{\sqrt{2}R\ln R}\rho + \frac{1}{R^2}\right).$$

Если бы в какой-нибудь точке из интервала (R^{-1}, R) функция $\psi(\cdot)$ принимала отрицательное значение, то у нее существовал бы локальный минимум на этом интервале. Но из вида $\psi'(\cdot)$ видно, что если у $\psi(\cdot)$ существует локальный минимум при $\rho > 0$, то он находится левее точки R^{-1}.

Положим $a = \ln R\rho$, $b = 2\ln R$. Тогда

$$F_{1n}(\rho) = \frac{\operatorname{sh} na}{\operatorname{sh} nb}.$$

Для доказательства монотонного убывания последовательности $F_{1n}(\rho)$, $n \in \mathbb{Z}$, достаточно доказать монотонное убывание функции

$$\psi_1(t) = \frac{\operatorname{sh} at}{\operatorname{sh} bt}$$

при $t \in [1, \infty)$ и $a < b$. Имеем

$$\psi_1'(t) = \frac{\psi_2(t)}{\operatorname{sh}^2 bt}, \quad \psi_2(t) = a\operatorname{ch} at\operatorname{sh} bt - b\operatorname{sh} at\operatorname{sh} bt.$$

Поскольку при всех $t \in [1, \infty)$

$$\psi_2'(t) = (a^2 - b^2)\operatorname{sh} at \operatorname{sh} bt \leq 0,$$

а $\psi_2(0) = 0$, то $\psi_2(t) \leq 0$ для всех $t \in [1, \infty)$. Поэтому $\psi_1'(t) \leq 0$ при $t \in [1, \infty)$. Отсюда следует монотонное убывание функции $\psi_1(\cdot)$. $\square$

Доказательство теоремы 1. С рассматриваемой задачей восстановления тесно связана следующая экстремальная задача

(5)
$$\|u(\cdot,\cdot)\|^2_{L_2(D)} \to \max, \quad \|a^N(f_j)\|^2_{l_2^{2N+1}} \leq \delta_j^2, \quad f_j(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{T}),\ j = \pm 1;$$

здесь $u(\cdot,\cdot)$ — решение задачи (1) с граничными значениями $f_{-1}(\cdot)$, $f_1(\cdot)$. Из равенства (2) вытекает, что

$$\|u(\cdot,\cdot)\|^2_{L_2(D)} = \sum_{n=0}^{\infty}\Bigg(\sum_{j=\pm1}\alpha_{jn}|v_{jn}|^2 + \gamma_n\langle v_{-1,n}, v_{1n}\rangle\Bigg), \tag{6}$$

где $v_{j0} = (a_0(f_j), 0)$, $v_{jn} = (a_n(f_j), b_n(f_j))$, $n \in \mathbb{Z}$, $j = \pm 1$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$, а $|v_{jn}|^2 = \langle v_{jn}, v_{jn}\rangle$. Таким образом, экстремальная задача (5) может быть записана в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Bigg(\sum_{j=\pm1}\alpha_{jn}|v_{jn}|^2 + \gamma_n\langle v_{-1,n}, v_{1n}\rangle\Bigg) \to \max, \quad \sum_{n=0}^{N}|v_{jn}|^2 \leq \delta_j^2, \tag{7}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2r}|v_{jn}|^2 \leq 1,\ j = \pm 1.$$

Введем функцию Лагранжа для этой задачи

$$\mathcal{L}(v,\lambda) = -\sum_{n=0}^{\infty}\Bigg(\sum_{j=\pm1}\alpha_{jn}|v_{jn}|^2 + \gamma_n\langle v_{-1,n}, v_{1n}\rangle\Bigg) + \sum_{j=\pm1}\Bigg(\lambda_j\sum_{n=0}^{N}|v_{jn}|^2 + \mu_j\sum_{n=1}^{\infty}n^{2r}|v_{jn}|^2\Bigg),$$

где $v = (\{v_{-1,n}\}_{n=0}^{\infty}, \{v_{1n}\}_{n=0}^{\infty})$, $\lambda = (\lambda_{-1}, \lambda_1, \mu_{-1}, \mu_1)$. Из работы [2] вытекает, что если найдутся такие множители Лагранжа $\widehat{\lambda} = (\widehat{\lambda}_{-1}, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\mu}_{-1}, \widehat{\mu}_1)$, $\widehat{\lambda}_j, \widehat{\mu}_j \geq 0$, $j = \pm 1$, что для допустимых в (7) последовательностей $\widehat{v} = (\{\widehat{v}_{-1,n}\}_{n=0}^{\infty}, \{\widehat{v}_{1n}\}_{n=0}^{\infty})$ выполнены условия

$$(a)\quad \min_v \mathcal{L}(v, \widehat{\lambda}) = \mathcal{L}(\widehat{v}, \widehat{\lambda}),$$

$$(b)\quad \sum_{j=\pm1}\widehat{\lambda}_j\Bigg(\sum_{n=0}^{N}|v_{jn}|^2 - \delta_j^2\Bigg) = 0, \quad \sum_{j=\pm1}\widehat{\mu}_j\Bigg(\sum_{n=1}^{\infty}n^{2r}|v_{jn}|^2 - 1\Bigg) = 0,$$

то $\{\widehat{v}_{-1,n}\},\{\widehat{v}_{1n}\}$ — решения задачи (7). Если при этом для всех $a^{Nj}\in l_2^{2N+1}$, $j=\pm1$, существуют решения $\widehat{f}_{-1}(\cdot),\widehat{f}_1(\cdot)$ экстремальной задачи

$$(8)\qquad \sum_{j=\pm1}\left(\widehat{\lambda}_j\|a^N(f_j)-a^{Nj}\|^2_{l_2^{2N+1}}+\widehat{\mu}_j\|f_j^{(r)}(\cdot)\|^2_{W_2^r(\mathbb{T})}\right)\to\min,\qquad f_j(\cdot)\in W_2^r(\mathbb{T}),\ j=\pm1,$$

то

$$E_{N2}(W_2^r(\mathbb{T}),\delta_{-1},\delta_1)=\sqrt{\sum_{j=\pm1}(\widehat{\lambda}_j\delta_j^2+\widehat{\mu}_j)},$$

а метод, определенный равенствами (2) для $f_j(\cdot)=\widehat{f}_j(\cdot)$, $j=\pm1$, является оптимальным.

Пользуясь неравенствами

$$\langle v_{-1,n},v_{1n}\rangle\le|v_{-1,n}||v_{1n}|\le\frac12\left(\frac{\delta_1}{\delta_{-1}}|v_{-1,n}|^2+\frac{\delta_{-1}}{\delta_1}|v_{1n}|^2\right)$$

при $0\le n\le N$ и

$$(9)\qquad \langle v_{-1,n},v_{1n}\rangle\le|v_{-1,n}||v_{1n}|\le\frac12\left(|v_{-1,n}|^2+|v_{1n}|^2\right)$$

при $n>N$, будем иметь

$$\mathcal{L}(v,\lambda)\ge\sum_{j=\pm1}\left(\sum_{n=0}^{N}(\lambda_j-\widetilde{\alpha}_{jn}+\mu_jn^{2r})|v_{jn}|^2+\sum_{n=N+1}^{\infty}(-\widetilde{\alpha}_{jn}+\mu_jn^{2r})|v_{jn}|^2\right)=\widetilde{\mathcal{L}}(v,\lambda),$$

где

$$\widetilde{\alpha}_{jn}=\begin{cases}\alpha_{jn}+\dfrac{\gamma_n}{2}\dfrac{\delta_{-j}}{\delta_j}, & 0\le n\le N,\\ \alpha_{jn}+\dfrac{\gamma_n}{2}, & n\ge N+1,\end{cases}\qquad j=\pm1.$$

Положим

$$\widehat{\lambda}_j=\widetilde{\alpha}_{j0},\quad \widehat{\mu}_j=\frac{\widetilde{\alpha}_{j,N+1}}{(N+1)^{2r}},\quad j=\pm1,$$

и покажем, что для последовательностей $\{\widehat{v}_{jn}\}$, $j=\pm1$, определенных равенствами

$$\widehat{v}_{j0}=(\delta_j,0),\quad \widehat{v}_{j,N+1}=((N+1)^{-r},0),\qquad \widehat{v}_{jk}=(0,0)\quad k\ne0,N+1,\quad j=\pm1,$$

выполнены условия (a) и (b). В силу леммы 1 последовательности $\{\widetilde{\alpha}_{jn}\}_{n=0}^{\infty}$, $j=\pm1$, являются монотонно убывающими. Тем самым

$$\mathcal{L}(v,\widehat{\lambda})\ge\widetilde{\mathcal{L}}(v,\widehat{\lambda})=\sum_{j=\pm1}\left(\sum_{n=1}^{N}\left(\widetilde{\alpha}_{j0}-\widetilde{\alpha}_{jn}+\widetilde{\alpha}_{j,N+1}\left(\frac{n}{N+1}\right)^{2r}\right)|v_{jn}|^2\right.$$
$$\left.+\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(-\widetilde{\alpha}_{jn}+\widetilde{\alpha}_{j,N+1}\left(\frac{n}{N+1}\right)^{2r}\right)|v_{jn}|^2\right)\ge0.$$

С другой стороны, $\mathcal{L}(\widehat{v},\widehat{\lambda})=0$. Следовательно, условие (a) выполнено. В справедливости условия (b) легко убедиться непосредственной проверкой.

Найдем теперь решение экстремальной задачи (8), которую можно записать в виде

$$\sum_{j=\pm1}\left(\widehat{\lambda}_j\left(|a_0(f_j)-a_0^j|^2+\sum_{n=1}^{N}\left(|a_n(f_j)-a_n^j|^2+|b_n(f_j)-b_n^j|^2\right)\right)\right.$$
$$\left.+\widehat{\mu}_j\sum_{n=1}^{\infty}n^{2r}\left(|a_n(f_j)|^2+|b_n(f_j)|^2\right)\right)\to\min,$$
$$f_j(\cdot)\in W_2^r(\mathbb{T}),\ j=\pm1.$$

Нетрудно убедиться, что решением этой задачи являются функции

$$\widehat{f}_j(t)=a_0^j+\sum_{n=1}^{N}\left(1+\frac{\widehat{\mu}_j}{\widehat{\lambda}_j}n^{2r}\right)^{-1}(a_n^j\cos nt+b_n^j\sin nt),\quad j=\pm1. \tag{10}$$

Таким образом,

$$E_{N2}(W_2^r(\mathbb{T}),\delta_{-1},\delta_1)=\sqrt{\sum_{j=\pm1}\left(\widetilde{\alpha}_{j0}\delta_j^2+\frac{\widetilde{\alpha}_{j,N+1}}{(N+1)^{2r}}\right)},$$

а метод, определенный равенствами (2) для $f_j(\cdot)=\widehat{f}_j(\cdot)$, $j=\pm1$, где функции $\widehat{f}_j(\cdot)$, $j=\pm1$, заданы равенствами (10) является оптимальным. Для получения утверждения теоремы остается подставить выражения для $\widetilde{\alpha}_{j0}$, $\widetilde{\alpha}_{j,N+1}$, $\widehat{\lambda}_j$ и $\widehat{\mu}_j$, $j=\pm1$. □

Доказательство теоремы 2. Будем использовать тот же метод, что и в доказательстве предыдущей теоремы. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\|u(\cdot,\cdot)\|_{L_2(D)}^2\to\max,\quad\|a^N(f_j)\|_{l_\infty^{2N+1}}^2\le\delta^2,\quad f_j(\cdot)\in W_2^r(\mathbb{T}),\ j=\pm1.$$

Используя представление (6), перепишем эту задачу в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Bigg(\sum_{j=\pm1}\alpha_{jn}|v_{jn}|^2+\gamma_n\langle v_{-1,n},v_{1n}\rangle\Bigg)\to\max, \tag{11}$$

$$\|v_{jn}\|^2_{l^2_\infty}\le\delta^2,\ n\in\mathbb{Z}_+,\quad \sum_{n=1}^{\infty}n^{2r}|v_{jn}|^2\le 1,\ j=\pm1.$$

Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид

$$\mathcal{L}(v,\lambda)=-\sum_{n=0}^{\infty}\Bigg(\sum_{j=\pm1}\alpha_{jn}|v_{jn}|^2+\gamma_n\langle v_{-1,n},v_{1n}\rangle\Bigg)$$
$$+\sum_{j=\pm1}\Bigg(\lambda_0^j(v_{j0})_1^2+\sum_{n=1}^{N}\left(\lambda_n^j(v_{jn})_1^2+\nu_n^j(v_{jn})_2^2\right)+\mu_j\sum_{n=1}^{\infty}n^{2r}|v_{jn}|^2\Bigg),$$

где $v=(\{v_{-1,n}\}_{n=0}^{\infty},\{v_{1n}\}_{n=0}^{\infty})$,

$\lambda=\left(\{\lambda_n^{-1}\}_{n=0}^{N},\{\nu_n^{-1}\}_{n=1}^{N},\{\lambda_n^{1}\}_{n=0}^{N},\{\nu_n^{1}\}_{n=1}^{N},\mu_{-1},\mu_1\right),\quad n\in\mathbb{Z},\ j=\pm1.$

Из работы [2] вытекает, что если найдутся такие неотрицательные множители Лагранжа $\widehat{\lambda}$, что для допустимых в (11) последовательностей $\widehat{v}=(\{\widehat{v}_{-1,n}\}_{n=0}^{\infty},\{\widehat{v}_{1n}\}_{n=0}^{\infty})$ выполнены условия

$$(a)\quad \min_v\mathcal{L}(v,\widehat{\lambda})=\mathcal{L}(\widehat{v},\widehat{\lambda}),$$

$$(b)\quad \sum_{n=0}^{N}\widehat{\lambda}_n^j((\widehat{v}_{jn})_1^2-\delta^2)+\sum_{n=0}^{N}\widehat{\nu}_n^j((\widehat{v}_{jn})_2^2-\delta^2)=0,$$

$$\widehat{\mu}_j\Bigg(\sum_{n=1}^{\infty}n^{2r}|\widehat{v}_{jn}|^2-1\Bigg)=0,\quad j=\pm1,$$

то $\{\widehat{v}_{-1,n}\},\{\widehat{v}_{1n}\}$ — решения задачи (11). Если при этом для всех $a^{Nj}\in l_\infty^{2N+1}$, $j=\pm1$, существуют решения $\widehat{f}_{-1}(\cdot),\widehat{f}_1(\cdot)$ экстремальной задачи

$$\sum_{j=\pm1}\Bigg(\widehat{\lambda}_0^j|a_0(f_j)-a_0^j|^2+\sum_{n=1}^{N}\left(\widehat{\lambda}_n^j|a_n(f_j)-a_n^j|^2+\widehat{\nu}_n^j|b_n(f_j)-b_n^j|^2\right)$$
$$+\widehat{\mu}_j\|f_j^{(r)}(\cdot)\|^2_{W_2^r(\mathbb{T})}\Bigg)\to\min,\quad f_j(\cdot)\in W_2^r(\mathbb{T}),\ j=\pm1, \tag{12}$$

то

$$E_{N\infty}(W_2^r(\mathbb{T}),\delta_{-1},\delta_1)=\sqrt{\sum_{j=\pm1}\Bigg(\delta^2\Bigg(\widehat{\lambda}_0^j+\sum_{n=1}^{N}(\widehat{\lambda}_n^j+\widehat{\nu}_n^j)\Bigg)+\widehat{\mu}_j\Bigg)}, \tag{13}$$

а метод, определенный равенствами (2) для $f_j(\cdot)=\widehat{f}_j(\cdot)$, $j=\pm1$, является оптимальным.

Пользуясь неравенством (9), будем иметь

$$\mathcal{L}(v,\lambda) \geq \sum_{j=\pm1}\Bigg(\sum_{n=0}^{N}(-\widetilde{\alpha}_{jn}+\mu_j n^{2r}+\lambda_n^j)(v_{jn})_1^2 + \sum_{n=1}^{N}(-\widetilde{\alpha}_{jn}+\mu_j n^{2r}+\nu_n^j)(v_{jn})_2^2) + \sum_{n=N+1}^{\infty}(-\widetilde{\alpha}_{jn}+\mu_j n^{2r})|v_{jn}|^2\Bigg) = \widetilde{\mathcal{L}}(v,\lambda),$$

где

$$\widetilde{\alpha}_{jn} = \alpha_{jn} + \frac{\gamma_n}{2}, \quad n\in\mathbb{Z}_+,\ j=\pm1.$$

Положим

$$\widehat{v}_{j0} = (\delta,0), \quad \widehat{v}_{jn} = (\delta,\delta),\ 1\leq n\leq M, \quad \widehat{v}_{jn} = (0,0),\ n\geq M+2,$$

$$(\widehat{v}_{j,M+1})_1 = (\widehat{v}_{j,M+1})_2 = \frac{1}{\sqrt{2}(M+1)^r}\left(1-2\delta^2\sum_{n=1}^{M}n^{2r}\right)^{1/2}, \quad j=\pm1.$$

Докажем, что последовательность $\{\widehat{v}_{jn}\}_{n=0}^{\infty}$, $j=\pm1$, является допустимой в задаче (8). Для этого достаточно доказать, что при $M<N$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{2(M+1)^{2r}}\left(1-2\delta^2\sum_{n=1}^{M}n^{2r}\right) \leq \delta^2.$$

Если предположить противное, то будем иметь

$$2\delta^2\sum_{n=1}^{M+1}n^{2r} < 1,$$

что противоречит определению числа M. Положим

$$\widehat{\mu}_j = \frac{\widetilde{\alpha}_{j,M+1}}{(M+1)^{2r}}, \quad \widehat{\lambda}_0^j = \widetilde{\alpha}_{j0}, \quad \widehat{\lambda}_n^j = \widehat{\nu}_n^j = \widetilde{\alpha}_{jn} - \widehat{\mu}_j n^{2r},\ 1\leq n\leq M,$$
$$\widehat{\lambda}_n^j = \widehat{\nu}_n^j = 0,\ M<n\leq N, \quad j=\pm1.$$

Тогда, учитывая монотонное убывание последовательностей $\{\widetilde{\alpha}_{jn}\}$, $j=\pm1$, имеем

$$\mathcal{L}(v,\widehat{\lambda}) \geq \widetilde{\mathcal{L}}(v,\widehat{\lambda}) = \sum_{j=\pm1}\sum_{n=M+1}^{\infty}\left(-\widetilde{\alpha}_{jn}+\widetilde{\alpha}_{j,M+1}\left(\frac{n}{M+1}\right)^{2r}\right)|v_{jn}|^2 \geq 0.$$

Поскольку $\mathcal{L}(\widehat{v},\widehat{\lambda}) = 0$, то условие (a) выполнено. Легко убедиться, что условие (b) также выполнено.

Найдем теперь решение экстремальной задачи (12), которую можно записать в виде

$$\sum_{j=\pm 1}\Bigg(\widehat{\lambda}_0^j|a_0(f_j)-a_0^j|^2+\sum_{n=1}^{M}\left(\widehat{\lambda}_n^j|a_n(f_j)-a_n^j|^2+\widehat{\nu}_n^j|b_n(f_j)-b_n^j|^2\right)$$
$$+\widehat{\mu}_j\sum_{n=1}^{\infty}n^{2r}\left(|a_n(f_j)|^2+|b_n(f_j)|^2\right)\Bigg)\to\min,$$
$$f_j(\cdot)\in W_2^r(\mathbb{T}),\ j=\pm 1,$$

Нетрудно убедиться, что решением этой задачи являются функции

$$\widehat{f}_j(t)=a_0^j+\sum_{n=1}^{M}\left(1+\frac{\widehat{\mu}_j}{\widehat{\lambda}_n^j}n^{2r}\right)^{-1}(a_n^j\cos nt+b_n^j\sin nt),\quad j=\pm 1. \tag{14}$$

Таким образом, подставляя выражения для $\widehat{\lambda}_n^j$, $\widehat{\nu}_n^j$ и $\widehat{\mu}_j$ в (13) и в метод, определенный равенствами (2) для $f_j(\cdot)=\widehat{f}_j(\cdot)$, $j=\pm 1$, где функции $\widehat{f}_j(\cdot)$, $j=\pm 1$, заданы равенствами (14), получаем равенство (3) и оптимальность метода (4). □

Отметим, что если $M<N$, то дальнейшее увеличение числа коэффициентов Фурье граничных функций, известных с той же погрешностью δ, не приводит к уменьшению погрешности оптимального восстановления. Тем самым при фиксированном δ набор из $2M(\delta)+1$ коэффициентов Фурье каждой из граничных функций, где

$$M(\delta)=\max\Big\{\,M\in\mathbb{Z}_+ : 2\delta^2\sum_{n=1}^{M}n^{2r}<1\,\Big\},$$

позволяет максимально точно восстановить решение рассматриваемой задачи Дирихле.

Список литературы

[1] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью // Матем. сб. 2002. Т. 193. С. 79–100.

[2] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функ. анализ и его прил. 2003. Т. 37. С. 51–64.

[3] *Magaril-Il'yaev G. G., Osipenko K. Yu., Tikhomirov V. M.* On optimal recovery of heat equation solutions // In: Approximation Theory / Eds. D. K. Dimitrov, G. Nikolov, and R. Uluchev. Sofia: Marin Drinov Academic Publishing House, 2004. P. 163–175.

[4] *Осипенко К. Ю.* О восстановлении решения задачи Дирихле по неточным исходным данным // Владикавказский мат. журн. 2004. Т. 6. № 4. С. 55–62.

МАТИ — Российский государственный технологический университет им. К. Э. Циолковского