**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

КАФЕДРА ОБЩИХ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Дипломная работа
студентки 632 группы
Барнаговой А.А.

Наилучшее восстановление периодических функций на классе, задаваемым дифференциальным оператором

Научные руководители:
доцент Демидович В. Б.
профессор Магарил-Ильяев Г. Г.

Москва — 2017

1 Введение

Практичесткая деятельность человека зачастую связанна с тем, что он вынужден судить об изучаемых объектах по неточной и/или неполной информации о них. При восстановлении объекта по такой информации обычно возникает неопределенность. Однако при восстановлении объекта можно постараться максимально полно использовать доступную информацию, тем самым сужая границы неопределенности изучаемого объекта.

Классическая теория аппроксимации берет свое начало с работ П.Л. Чебышева второй половины 19 века. При построении численного метода обычно используются те или иные (достаточно естественные) идеи, а затем полученный алгоритм исследуется на сходимость, устойчивость по отношению к неточным данным и т.д. В шестидесятых годах 20 века возникла новая постановка - задача об оптимальном восстановлении линейного функционала или оператора на классе элементов по известной информации. При решении таких задач применяется иной подход. Пользуясь некоторой априорной информацией о принадлежности восстанавливаемой функции к некоторому классу элементов и перебирая все возможные отображения, находится наилучший (в некотором смысле) метод.

Информацию, которой мы распологаем можно разделить на два типа: "глобальная"и "локальная". Глобальная информация обыкновенно описывает класс функций, в то время как локальная информация содержит некоторые характеристики функции (такие как ее значения в отдельных точках, коэффициенты Тейлора или Фурье и т.д.) и может быть задана как точно, так и с ошибками. По данным двум типам информации и строится метод восстановления.

Впервые постановка задачи оптимального восстановления появилась в работе Смоляка С.А. [1]. Данная проблематика получила большое развитие, примерами которого могут служить задачи о восстановлении значения значения функции по её значениям в других точках или по её коэффициентам Фурье, задачи о восстановлении производной функции в точке по её приближенным значениям в других точках или по её приближенным коэффициентам Фурье и другие задачи, рассмотренные в статьях Магарил-Ильяева Г.Г., Осипенко К.Ю. и Тихомирова В.М. [2], [3], Арестова В.В. [4].

2 Постановка задачи

Пусть $\mathbb{T}$ - единичная окружность, реализованная как отрезок $[-\pi, \pi]$ с отождествленными концами.

Через $L_2(\mathbb{T})$ обозначим совокупность функций $x(\cdot)$ на $\mathbb{T}$ с нормой

$$\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} = \Big(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \mid x(\cdot) \mid^2 dt\Big)^{1/2}.$$

Обозначим через $W_2^P(\mathbb{T})$ - обобщенный соболевский класс функций на $\mathbb{T}$, задаваемый дифференциальным полиномом P степени 2

$$P(D) = D^2 + q, \quad D = \frac{d}{dt}, \quad q \in \mathbb{R}$$

т.е. $W_2^P(\mathbb{T})$ состоит из 2π- периодических функций $x(\cdot)$, у которых первая производная абсолютно непрерывна и $\|x''(\cdot) + qx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq 1$.

Рассмотрим задачу об оптимальном восстановлении первой производной функции на обобщенном соболевском классе $W_2^P(\mathbb{T})$ по конечному набору ее коэффициентов Фурье

$$x_j = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} x(t)e^{-ijt}dt, \quad \mid j \mid \leq N,$$

заданных без погрешности.

В качестве методов восстановления рассмотрим произвольные отображения $m\colon \mathbb{C}^{2N+1} \to L_2(\mathbb{T})$. Погрешность метода восстановления m определим равенством:

$$e_N(D, W_2^P(\mathbb{T}), m) = \sup_{x \in W_2^P(\mathbb{T})} \|x'(\cdot) - m(\overline{x})(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})},$$

где $\overline{x} = \overline{x}(x(\cdot)) = \{x_j\}_{j=-N}^N$.
Погрешностью оптимального восстановления назовем следующую величину:

$$E_N(D, W_2^P(\mathbb{T})) = \inf_{m\colon \mathbb{C}^{2N+1} \to L_2(\mathbb{T})} e_N(D, W_2^P(\mathbb{T}), m)$$

Метод $\widehat{m}$, на котором достигается нижняя грань назовем оптимальным методом восстановления.

Докажем, что

$$E_N(D, W_2^P(\mathbb{T})) \geq \sup_{x \in W_2^P(\mathbb{T}), \overline{x}=0} \|Dx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \tag{1}$$

Возьмём $x_0(\cdot) \in W_2^P(\mathbb{T}), \overline{x}(x_0(\cdot)) = 0$. Ясно, что функция $-x(\cdot)$ тоже удовлетворяет этим условиям.

$$2\|x_0'(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} = \|x_0'(\cdot) - m(\overline{x}(x_0(\cdot))) - (-x_0'(\cdot) - m(\overline{x}(-x_0(\cdot))))\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq$$

$$\leq \|x_0'(\cdot) - m(\overline{x}(x_0(\cdot)))\|_{L_2(\mathbb{T})} + \|(-x_0'(\cdot) - m(\overline{x}(-x_0(\cdot))))\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq$$

$$\leq \sup_{x(\cdot)\in W_2^P(\mathbb{T})} \|x'(\cdot) - m(\overline{x}(x(\cdot)))\|_{L_2(\mathbb{T})} + \sup_{x(\cdot)\in W_2^P(\mathbb{T})} \|(-x'(\cdot) - m(\overline{x}(-x(\cdot))))\|_{L_2(\mathbb{T})} =$$

$$2 \sup_{x(\cdot)\in W_2^P(\mathbb{T})} \|(x'(\cdot) - m(\overline{x}(x(\cdot))))\|_{L_2(\mathbb{T})} = 2e_N(D, W_2^P(\mathbb{T}), m)$$

Таким образом,

$$\|x_0'(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq e_N(D, W_2^P(\mathbb{T}), m)$$

$$\sup_{\substack{x(\cdot)\,\in\, W_2^P(\mathbb{T}),\\ \overline{x}(x(\cdot))\,=\,0}} \|Dx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq e_N(D, W_2^P(\mathbb{T}), m)$$

А значит,

$$\sup_{x\in W_2^P(\mathbb{T}),\overline{x}=0} \|Dx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq E_N(D, W_2^P(\mathbb{T}))$$

Величина справа в (1) есть корень квадратный из значения следующей экстремальной задачи, т.е. верхней грани максимизируемого функционала при данных ограничениях:

$$\begin{cases} \|x'(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{T})} \to \max, \\ \|(D^2+q)x(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{T})} \leq 1, \quad x_j = 0, \quad \mid j \mid\leq N. \end{cases} \tag{2}$$

В силу равенства Парсеваля

$$\|x(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{T})} = \sum_{k\in\mathcal{Z}} \mid x_k \mid^2, \quad \|x'(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{T})} = \sum_{k\in\mathcal{Z}} k^2 \mid x_k \mid^2$$

данную систему можно записать в виде

$$\begin{cases} \sum_{|k|\geq N+1} k^2 u_k \to \max, \\ \sum_{|k|\geq N+1} (-k^2+q)^2 u_k \leq 1, \end{cases} \tag{3}$$

где $u_k =\mid x_k \mid^2$

Теорема 1: Пусть q не совпадает с квадратом целого числа, k^* - точка максимума функции $f(k) = \frac{k^2}{(-k^2+q)^2}$ при $|k| \geq N+1$, тогда решением задачи (3) является последовательность $\hat{u}_k$, определённая следующим образом:

$$\hat{u}_k = \begin{cases} \frac{1}{(k^2-q)^2}, & k = k^* \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Доказательство: Преобразуем выражение для максимизируемого функционала, учитывая ограничения в (3).

$$\sum_{|k|\geq N+1} k^2 \frac{(-k^2+q)^2}{(-k^2+q)^2} u_k \leq$$

$$\leq \max_{|k|\geq N+1} \left(\frac{k^2}{(-k^2+q)^2} \right) \underbrace{\sum_{|k|\geq N+1} (-k^2+q)^2 u_k}_{\leq 1} \leq$$

$$\leq \max_{|k|\geq N+1} \left(\frac{k^2}{(-k^2+q)^2} \right).$$

Таким образом, нам необходимо найти максимум функциии $f(k)$ по целым $k :| k | \geq N+1$ в зависимости от значения параметра q.

$$f(k) = \frac{k^2}{(-k^2+q)^2}.$$

При $q > 0$ график данной функции выглядит следующим образом:

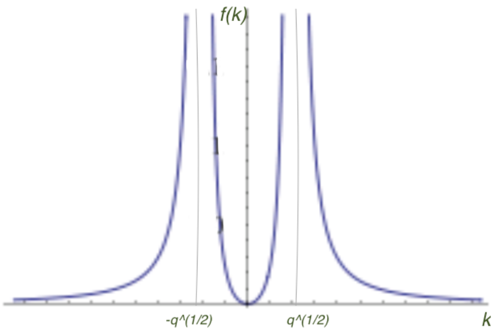

Рис. 1: $f(k)$

Из построения заметим, что: При $N > \sqrt{q}$ максимум $f(k)$ достигается при $k = N + 1$.

Рассмотрим случай $N < \sqrt{q}$. Пусть $k_1 \in \mathcal{Z}$ такое, что $k_1 \leq \sqrt{q} \leq k_1 + 1$.

Тогда

$$\begin{cases} f(k_1) \geq f(k_1+1), & \text{при } q \in (-k_1(k_1+1), k_1(k_1+1)), \\ f(k_1) \leq f(k_1+1), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Таким образом, при $N < \sqrt{q}, \quad \sqrt{q} \in (k_1, k_1+1)$ имеем

$$\max f(k) = \begin{cases} f(k_1), & \text{при } q \in (k_1^2, k_1(k_1+1)), k_1 \in \mathcal{Z}, \\ f(k_1+1), & \text{при } q \in (k_1(k_1+1); (k_1+1)^2), k_1 \in \mathcal{Z}. \end{cases}$$

Объединив полученные результаты, получим:

$$\max_{\substack{k \in \mathcal{Z}, |k| \geq N+1, q>0, \\ q \neq n^2, n \in \mathcal{Z}}} f(k) = \begin{cases} f(N+1), & N \geq \sqrt{q}, \quad q \notin \mathcal{Z}, \\ f(k_1), & N \leq \sqrt{q}, \quad k_1 \in \mathcal{Z}, \quad q \in (k_1^2, k_1(k_1+1)), \\ f(k_1+1), & N \leq \sqrt{q}, \quad k_1 \in \mathcal{Z}, \quad q \in (k_1(k_1+1); (k_1+1)^2). \end{cases}$$

Теперь найдем максимум $f(k)$ при $q < 0$. Запишем данную задачу в следующем виде: $f_1(k) = \frac{k^2}{(-k^2-q_1)^2}, q_1 = -q > 0$. График $f_1(k)$ выглядит следующим образом:

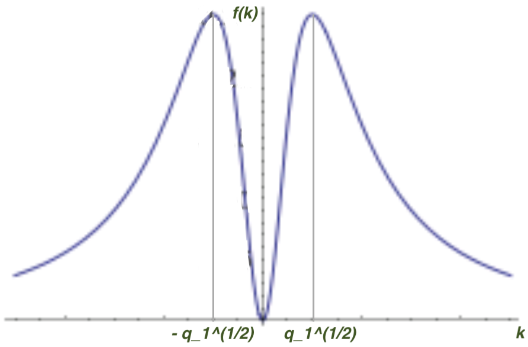

Рис. 2: $f_1(k)$

При $N > \sqrt{q_1}$ максимум $f_1(k)$ достигается при $k = N + 1$.

Рассмотрим случай $N < \sqrt{q_1}$. Пусть $k_2 \in \mathcal{Z}$ такое, что $k_2 \leq \sqrt{q_1} \leq k_2 + 1$.

Тогда:

$$\begin{cases} f(k_2) \geq f(k_2+1), & \text{при } q_1 \in (-k_2(k_2+1), k_2(k_2+1)), \\ f(k_2) \leq f(k_2+1), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Обозначим k^* такое k, на котором достигается максимум $f(k)$ при заданых N и q. Заметим, что точка максимума функции не зависит от знака q, таким образом:

$$\max_{\substack{k \in \mathcal{Z}, |\, k \,| \geq N+1, \\ q \neq n^2, n \in \mathcal{Z}}} f(k) = \begin{cases} f(N+1), & N \geq \sqrt{q}, q \notin \mathcal{Z}, \\ f(k^*), & N \leq \sqrt{q}, k^* \in \mathcal{Z}, q \in ({k^*}^2, k^*(k^*+1)), \\ f(k^*+1), & N \leq \sqrt{q}, k^* \in \mathcal{Z}, q \in (k^*(k^*+1); (k^*+1)^2). \end{cases}$$

Случай $\sqrt{q} \in \mathcal{Z}$ является вырожденным, если $\sqrt{q} \leq N + 1, q > 0$. В таком случае максимум $f(k)$ достигается в точке $\sqrt{q}$ и равен $+\infty$, а значит, $E_N = \infty$.

Положим

$$\hat{u}_k = \begin{cases} 1/(-k^2+q)^2, & \text{для } k = k^*, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Проверим, что для данной последовательности выполняются условия системы (3).

Действительно,

1. $\sum_{|k| \geq N+1} k^2 \hat{u}_k = \frac{{k^*}^2}{({k^*}^2 - q)^2} = f(k^*) \to \max$ (следует из определения k^*)

2. $\sum_{|k| \geq N+1} (-k^2+q)^2 \hat{u}_k = ({k^*}^2 - q)^2 \frac{1}{({k^*}^2-q)^2} = 1 \leq 1$

Сопоставим задаче (3) функцию Лагранжа.

$$L(\{u_k\},\lambda) = -\sum_{|k|\geq N+1} k^2 u_k + \lambda \sum_{|k|\geq N+1} (-k^2+q)^2 u_k = \sum_{|k|\geq N+1} (-k^2+\lambda(-k^2+q)^2) u_k$$

Предложение 1:
Если найдутся допустимая в задаче (3) последовательность $\{\hat{u}_k\}$ и число $\hat{\lambda} \geq 0$ такое, что
(a). $L(\{u_k\},\hat{\lambda}) \geq L(\{\hat{u}_k\},\hat{\lambda}) \quad \forall \{u_k\}$
(b). $\hat{\lambda}(\sum_{|k|\geq N+1} (k^2-q)^2 \hat{u}_k - 1) = 0$, то $\{\hat{u}_k\}$ - решение задачи (3).
Доказательство:
Пусть $\{u_k\}$ - допустимая последовательность в (3). Тогда, используя допустимость $\{u_k\}$, неотрицательность λ, а затем (a) и (b), получим:

$$-\sum_{|k|\geq N+1} k^2 u_k \geq -\sum_{|k|\geq N+1} k^2 u_k + \hat{\lambda}(\sum_{|k|\geq N+1} (k^2-q)^2 u_k - 1) \geq$$

$$\geq -\sum_{|k|\geq N+1} k^2 u_k + \hat{\lambda} \sum_{|k|\geq N+1} (k^2-q)^2 u_k - \hat{\lambda} =$$

$$= L(\{u_k\},\hat{\lambda}) - \hat{\lambda} \geq L(\{\hat{u}_k\},\hat{\lambda}) - \hat{\lambda} =$$

$$= -\sum_{|k|\geq N+1} k^2 \hat{u}_k + \hat{\lambda}(\sum_{|k|\geq N+1} (k^2-q)^2 \hat{u}_k - 1) = -\sum_{|k|\geq N+1} k^2 \hat{u}_k,$$

т.е $\{\hat{u}_k\}$ - решение задачи (3).
Предложение 1 доказано

Покажем, используя Предложение 1, что определенная выше последовательность $\{\hat{u}_k\}$ есть решение задачи (3). Ясно, что $\{\hat{u}_k\}$ - допустимая последовательность в этой задаче. Положим

$$\hat{\lambda} = \frac{k^{*2}}{(-k^{*2}+q)^2}.$$

Очевидно, что $\hat{\lambda} \geq 0$. Также очевидно, что выполнено условие (b).
Далее, для любой последовательности $\{\hat{u}_k\}, \quad \hat{u}_k \geq 0$ имеем:

$$L(\{u_k\},\hat{\lambda}) = -\sum_{|k|\geq N+1} k^2 u_k + \hat{\lambda} \sum_{|k|\geq N+1} (-k^2+q)^2 u_k =$$

$$= -\sum_{|k|\geq N+1} (k^2 + \hat{\lambda}(-k^2+q)^2) u_k \geq 0,$$

так как k^* - максимум функции $\frac{k^2}{(-k^2+q)^2}$

Но

$$L(\{\hat{u}_k\},\hat{\lambda}) = -k^{*2} + \hat{\lambda}(-k^{*2}+q)^2 = 0$$

Следовательно, выполнено (a) и значит, $\{\hat{u}_k\}$ - решение задачи.

Теорема 1 доказана.

Из (1) и доказанной теоремы получаем оценку снизу погрешности оптимального метода восстановления. Подставляя $\hat{u}$ в максимизируемый функционал и извлекая квадратный корень, получаем

$$E_N(D, W_2^P(\mathbb{T})) \geq \frac{\mid k^* \mid}{\mid k^{*2} - q \mid} \tag{4}$$

Переходим к нахождению оптимального метода восстановления. Справедлива следующая теорема:

Теорема 2

Оптимальный метод $\widehat{m}$ имеет вид:

$$\widehat{m}(x_k)(t) = \sum_{|k|\leq N} ikx_k e^{ikt} \tag{5}$$

Доказательство: Оценим сверху погрешность метода восстановления (5). При переходе к квадрату нормы имеем:

$$\|x'(\cdot) - \widehat{m}(\overline{x})(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{T})} = \sum_{|k|\geq N+1} k^2 \mid x_k \mid^2$$

Тогда погрешность метода восстановления $\widehat{m}$:

$$e_N(D, W_2^P(\mathbb{T}), m) = \sup_{\substack{\{x_k\}, \\ \sum\limits_{|k|\geq N+1} (-k^2+q)^2 \mid x_k \mid^2 \leq 1}} \sum_{|k|\geq N+1} k^2 \mid x_k \mid^2$$

Что совпадает с уже решенной максимизационной задачей из системы (3). Значит, оценка снизу совпадает с оценкой сверху, и, следовательно метод $\widehat{m}$ является оптимальным методом восстановления.

Теорема 2 доказана.

Таким образом,

$$E_N(D, W_2^P(\mathbb{T})) = \frac{\mid k^* \mid}{\mid k^{*2} - q \mid}$$

а метод (5)

$$\widehat{m}(x_k)(t) = \sum_{|k|\leq N} ikx_k e^{ikt}$$

является оптимальным.

3 Список литературы

[1] Смоляк С.А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них. Дисс. канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1965

[2] Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю. , Тихомиров В.М. Неопределенность знания об объекте и точность методов его восстановления. // Пробл. передачи информ., 2003, том 39:1, 118–133

[3] Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью. // Мат. сб. 2002. Т. 193. С. 79-100.

[4] Арестов В.В. Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи // Труды МИАН СССР. МЮ:Наука, 1989. Т. 189. С. 3-10.