

# ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

Е. А. БАЛОВА

**АННОТАЦИЯ.** Рассматривается задача оптимального восстановления решения обобщённого уравнения Пуассона в ограниченной области  $Q$  с однородными граничными условиями, когда правая часть уравнения задана неточно. Предполагается, что правые части уравнений принадлежат обобщённым классам Соболева и известно конечное число коэффициентов Фурье правых частей уравнений, заданных с погрешностью в евклидовой метрике. Рассматривается случай произвольного набора известных коэффициентов. Найдены значения погрешности оптимального восстановления и построено семейство оптимальных методов восстановления. Решена задача о наилучшем выборе измеряемых коэффициентов.

Применение теории оптимального восстановления к задачам математической физики на основе методов, разработанных в [1], [2], было начато в работах [3] и [4]. В работах [5] и [6] были рассмотрены задачи о восстановлении решения задачи Дирихле в двумерном кольце и  $d$ -мерном шаре по неточной исходной информации в различных постановках. В настоящей работе рассматривается аналогичная задача оптимального восстановления для уравнения Пуассона в ограниченной области  $Q$ . Пользуясь техникой, подобной той, которая применялась в работах [7], [8], мы строим целое семейство оптимальных методов восстановления.

Пусть  $Q$  — область в пространстве  $\mathbb{R}^d$ , ограниченная замкнутой кусочно-гладкой  $(d - 1)$ -мерной поверхностью  $\partial Q$ ,  $x = (x_1, \dots, x_d) \in Q$ ,  $f(x) \in L_2(Q)$ ,  $a(x) \in C(\bar{Q})$ ,  $k(x) \in C^1(Q)$ . Рассмотрим уравнение Пуассона

$$(1) \quad -(\operatorname{div}(k(x)\nabla u(x)) - a(x)u(x)) = f(x),$$

с однородным граничным условием

$$(2) \quad u|_{\partial Q} = 0.$$

Известно (см., напр. [9]), что если  $k(x) \geq k_0 > 0$ ,  $a(x) \geq 0$ , то существует полная в  $L_2(Q)$  ортонормированная система из собственных функций первой краевой задачи для оператора

$$\mathcal{L} = -(\operatorname{div}(k(x)\nabla - a(x))).$$

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №10-01-00188 и №10-01-90002).

Собственные значения этой задачи обладают следующими свойствами: они положительны, стремятся к  $\infty$  и не имеют точек скопления. При этом различным собственным значениям соответствует конечное (равное кратности собственного значения) число линейно-независимых собственных функций. Обозначим через  $\lambda_k$  различные значения собственных значений, упорядочив их по возрастанию:

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < \dots .$$

Собственные функции, соответствующие  $\lambda_k$ , обозначим через  $\varphi_{kj}(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $j = 1, \dots, r_k$ , где  $r_k$  — кратность  $\lambda_k$ .

Если правая часть уравнения представлена в виде ряда Фурье, то есть

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{r_k} c_{kj} \varphi_{kj}(x),$$

где  $c_{kj} = \int_Q f(x) \varphi_{kj}(x) dx$ , то решение задачи (1),(2) может быть записано в виде

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} \sum_{j=1}^{r_k} c_{kj} \varphi_{kj}(x).$$

Пусть функция  $g(x) \in L_2(Q)$ ,

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{r_k} g_{kj} \varphi_{kj}(x),$$

где  $g_{kj}$  — коэффициенты Фурье функции  $g(x)$ . Положим по определению

$$\mathfrak{L}^{\alpha/2} g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{\alpha/2} \sum_{j=1}^{r_k} g_{kj} \varphi_{kj}(x),$$

где  $\alpha$  — произвольное положительное число. Рассмотрим так называемое обобщённое уравнение Пуассона

$$(3) \quad \mathfrak{L}^{\alpha/2} u(x) = f(x)$$

с однородным граничным условием

$$(4) \quad u|_{\partial Q} = 0.$$

Нетрудно увидеть, что решение задачи (3)—(4) можно записать в виде

$$(5) \quad u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-\alpha/2} \sum_{j=1}^{r_k} c_{kj} \varphi_{kj}(x).$$

Перейдем к задаче восстановления. Рассмотрим задачу (3)—(4). Требуется наилучшим образом восстановить функцию  $u(x)$ , когда известно конечное число измеренных с погрешностью коэффициентов Фурье правой части уравнения (3).

Пусть дано некоторое фиксированное натуральное число  $k_0 \geq 1$  и имеется набор множеств  $J_k$  и  $A_k$ , где  $J_k = \{1, \dots, r_k\}$ ,  $k = 1, \dots, k_0$ ,  $A_k \subseteq J_k$ ,  $k = 1, \dots, k_0$ , — произвольные подмножества  $J_k$ ,  $A = \{A_1, \dots, A_{k_0}\}$  и  $N = \text{card } A$  — число элементов множества  $A$ . Будем считать, что для любой функции  $f(x) \in L_2(Q)$  известен вектор

$$\tilde{f}^N = \{y_{kj}\}, \quad k = 1, \dots, k_0, \quad j \in A_k,$$

состоящий из приближенных значений коэффициентов Фурье этой функции. Точнее, предполагается, что

$$\|\tilde{f}^N - f^N\|_{l_2^N} \leq \delta,$$

где

$$f^N = \{c_{kj}\}, \quad k = 1, \dots, k_0, \quad j \in A_k,$$

а  $\|\cdot\|_{l_2^N}$  — стандартная евклидова норма.

Задача оптимального восстановления заключается в том, чтобы по информации о векторе  $\tilde{f}^N$  восстановить наилучшим образом решение задачи (3), (4) в метрике  $L_2(Q)$ . Будем предполагать, что функция  $f(x)$  принадлежит обобщённому соболевскому классу

$$W_2^\beta(Q) = \{f(x) \in L_2(Q) : \|\mathcal{L}^{\beta/2} f\|_{L_2(Q)} \leq 1\},$$

$\beta > 0$  — фиксированное действительное число. В качестве методов восстановления рассмотрим всевозможные операторы  $\psi: l_2^N \rightarrow L_2(Q)$ .

Назовем погрешностью восстановления метода  $\psi$  величину

$$e_A(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta, \psi) = \sup_{\substack{f \in W_2^\beta(Q), \tilde{f}^N \in l_2^N \\ \|f^N - \tilde{f}^N\|_{l_2^N} \leq \delta}} \|u - \psi(\tilde{f}^N)\|_{L_2(Q)}.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E_A(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta) = \inf_{\psi: l_2^N \rightarrow L_2(Q)} e_A(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta, \psi),$$

а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным.

Нас будет также интересовать задача об оптимальном выборе множеств  $A_k$ , т.е. задача о нахождении величины

$$E_N(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta) = \inf_{\substack{A = \{A_1, \dots, A_{k_0}\} \\ \text{card } A \leq N}} E_A(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta)$$

при фиксированном  $N$  и того множества  $A$ , на котором эта нижняя грань достигается. Теперь сформулируем две теоремы, соответствующие указанным задачам.

Положим

$$k^* = \begin{cases} \min(k : k \in \mathbb{N} \setminus \{k : A_k = J_k, 1 \leq k \leq k_0\}), & \delta^2 < \lambda_1^{-\beta}, \\ 1, & \delta^2 \geq \lambda_1^{-\beta}, \end{cases}$$

$$\hat{\eta}_1 = \frac{1}{\lambda_1^\alpha} \left[ 1 - \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_{k^*}} \right)^{(\alpha+\beta)} \right], \quad \hat{\eta}_2 = \frac{1}{\lambda_{k^*}^{\alpha+\beta}}.$$

**Теорема 1.** Пусть  $\delta, \alpha$  и  $\beta$  — произвольные положительные числа. Тогда

$$E_A(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta) = \sqrt{\hat{\eta}_1 \delta^2 + \hat{\eta}_2},$$

а любой из методов

$$(6) \quad \psi(\tilde{f}^N) = \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{j \in A_k} \omega_{kj} y_{kj} \varphi_{kj}(x),$$

где  $\omega_{kj}$  удовлетворяют условиям

$$(7) \quad \left| \omega_{kj} - \frac{\hat{\eta}_1}{\lambda_k^{\alpha/2} (\hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2 \lambda_k^\beta)} \right| \leq \frac{\sqrt{\hat{\eta}_1 \hat{\eta}_2 \lambda_k^\beta (-\lambda_k^{-\alpha} + \hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2 \lambda_k^\beta)}}{\hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2 \lambda_k^\beta},$$

является оптимальным.

Отметим, что в силу монотонного возрастания  $\lambda_k$  и определения  $\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2$  несложно убедиться в том, что подкоренное выражение в (7) неотрицательно.

**Теорема 2.** Пусть  $N$  — фиксированное натуральное число,  $\alpha, \beta$  и  $\delta$  — произвольные положительные числа. Тогда при  $r_1 \leq N$

$$E_N(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta) = \sqrt{\frac{1}{\lambda_{k_0}^{\alpha+\beta}} + \frac{\delta^2}{\lambda_1^\alpha} \left[ 1 - \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_{k_0}} \right)^{(\alpha+\beta)} \right]},$$

где

$$k_0 = \max \left( k : \sum_{i=1}^k r_i \leq N \right),$$

а  $A = \{J_1, \dots, J_{k_0}\}$ . При  $r_1 > N$

$$E_N(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta) = \lambda_1^{-(\alpha+\beta)/2},$$

а  $A = \emptyset$ .

Сначала докажем вспомогательную лемму, связанную с решением одной экстремальной задачи.

Пусть  $m$  — некоторое фиксированное натуральное число, и имеются две последовательности положительных чисел

$$\{\mu_k\}_1^\infty, \quad \mu_k \leq \mu_m, \quad k > m,$$

$$\{\gamma_k\}_1^\infty, \quad \gamma_m \leq \gamma_k, \quad k > m.$$

Если  $m > 1$  будем предполагать, что

$$\begin{aligned}\mu_{k+1} &\leq \mu_k, & 1 \leq k \leq m \\ \gamma_k &\leq \gamma_{k+1}, & 1 \leq k \leq m.\end{aligned}$$

Пусть  $u = \{u_k\}_1^\infty$ ,  $u_k \geq 0$ ,  $J = \{1, \dots, m\}$ , и  $B \subseteq J$ ,  $B \neq \emptyset$ . Рассмотрим следующую экстремальную задачу:

$$(8) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k u_k \rightarrow \max, \quad \sum_{k \in B} u_k \leq \delta^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k u_k \leq 1, \quad u_k \geq 0, \quad k \geq 1.$$

Для решения этой задачи применим метод Лагранжа. Функция Лагранжа для задачи (8) имеет вид

$$\mathcal{L}_1(u, \eta_1, \eta_2) = - \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k u_k + \eta_1 \sum_{k \in B} u_k + \eta_2 \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k u_k,$$

где  $\eta_1$  и  $\eta_2$  — множители Лагранжа. Будем использовать в дальнейшем несложно доказываемое

**Предложение 1.** *Если найдутся неотрицательные  $\hat{\eta}_1$  и  $\hat{\eta}_2$ , а также допустимая в задаче (8) последовательность  $\hat{u}$  такие, что выполняются условия*

$$\begin{aligned}(a) \quad &\mathcal{L}_1(\hat{u}, \hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) = \min_{u_k \geq 0} \mathcal{L}_1(u, \hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2), \\ (b) \quad &\hat{\eta}_1 \left( \sum_{k \in A} \hat{u}_k - \delta^2 \right) + \hat{\eta}_2 \left( \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \hat{u}_k - 1 \right) = 0,\end{aligned}$$

то  $\hat{u}$  — решение этой задачи.

*Доказательство.* Действительно, пусть  $\hat{u}$ ,  $\hat{\eta}_1$  и  $\hat{\eta}_2$  удовлетворяют условиям утверждения. Пусть  $u$  — любая допустимая в задаче (8) последовательность. Тогда, в силу допустимости  $u$  и неотрицательности  $\hat{\eta}_1$  и  $\hat{\eta}_2$  получим

$$\begin{aligned}- \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k u_k &\geq - \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k u_k + \hat{\eta}_1 \left( \sum_{k \in A} u_k - \delta^2 \right) + \hat{\eta}_2 \left( \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k u_k - 1 \right) \\ &= \mathcal{L}_1(u, \hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) - \hat{\eta}_1 \delta^2 - \hat{\eta}_2 \geq \mathcal{L}_1(\hat{u}, \hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) - \hat{\eta}_1 \delta^2 - \hat{\eta}_2 \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \hat{u}_k + \hat{\eta}_1 \left( \sum_{k \in A} \hat{u}_k - \delta^2 \right) + \hat{\eta}_2 \left( \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \hat{u}_k - 1 \right) = - \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \hat{u}_k,\end{aligned}$$

то есть

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \hat{u}_k \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k u_k.$$

□

Перейдём к формулировке леммы. Положим

$$k^* = \begin{cases} \min(k : k \in \mathbb{N} \setminus B), & \delta^2 < \gamma_1^{-1}, \\ 1, & \delta^2 \geq \gamma_1^{-1}. \end{cases}$$

**Лемма 1.** Пусть  $\delta > 0$ . Тогда значение задачи (8) равно  $\hat{\eta}_1 \delta^2 + \hat{\eta}_2$ , где

$$\hat{\eta}_1 = \mu_1 - \frac{\gamma_1 \mu_{k^*}}{\gamma_{k^*}}, \quad \hat{\eta}_2 = \frac{\mu_{k^*}}{\gamma_{k^*}}.$$

*Доказательство.* Пусть  $k^* = 1$ . Тогда для последовательности  $\hat{u}_1 = \gamma_1^{-1}$ ,  $\hat{u}_k = 0$ ,  $k > 1$ , имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \hat{u}_k = 1.$$

Условие

$$\sum_{k \in B} \hat{u}_k \leq \delta^2$$

тоже выполняется, так как или  $\hat{u}_1 = \gamma_1^{-1} \leq \delta^2$ , или 1 не принадлежит множеству  $B$  и  $\hat{u}_1$  не входит в эту сумму, следовательно, последовательность  $\hat{u}$  допустима в (8) и условие (b) выполнено. Покажем, что условие (a) также выполнено. В силу того, что  $\mu_k \leq \mu_1$  и  $\gamma_k \geq \gamma_1$  при  $k > 1$ , получаем, что

$$\mathcal{L}_1(u, \hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( -\mu_k + \frac{\mu_1}{\gamma_1} \gamma_k \right) u_k \geq 0$$

для произвольных неотрицательных  $u_k$ . Легко убедиться в том, что  $\mathcal{L}_1(\hat{u}, \hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) = 0$ , то есть условие (a) выполнено. Таким образом, получаем, что последовательность  $\hat{u}$  является решением задачи (8).

Пусть теперь  $k^* > 1$ . Рассмотрим последовательность

$$\hat{u}_1 = \delta^2, \quad \hat{u}_{k^*} = \frac{1 - \delta^2 \gamma_1}{\gamma_{k^*}}, \quad \hat{u}_k = 0, \quad k \geq 2, \quad k \neq k^*.$$

Допустимость последовательности  $\hat{u}$  следует из определения  $k^*$ , так как  $k^* \notin B$ . Условие (b) легко проверяется. Остается показать, что выполнено условие (a). Подставив в функцию Лагранжа  $\hat{\eta}_1$  и  $\hat{\eta}_2$ , получим, что

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(u, \hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) &= \sum_{k \in B} \left( \mu_1 - \frac{\mu_{k^*}}{\gamma_{k^*}} \gamma_1 \right) u_k + \sum_{k=1}^{\infty} \left( -\mu_k + \frac{\mu_{k^*}}{\gamma_{k^*}} \gamma_k \right) u_k \\ &= \sum_{k \in B} \left( -\mu_k + \mu_1 - \frac{\mu_{k^*}}{\gamma_{k^*}} \gamma_1 + \frac{\mu_{k^*}}{\gamma_{k^*}} \gamma_k \right) u_k + \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus B} \left( -\mu_k + \frac{\mu_{k^*}}{\gamma_{k^*}} \gamma_k \right) u_k \geq 0 \end{aligned}$$

для всех неотрицательных  $u_k$ , так как в первой сумме  $\mu_k$  и  $\gamma_k$  убывают и возрастают соответственно, а во второй сумме  $k \geq k^*$  в силу

определения  $k^*$ . Подставляя  $\widehat{u}$  в функцию Лагранжа, убеждаемся, что

$$\mathcal{L}_1(\widehat{u}, \widehat{\eta}_1, \widehat{\eta}_2) = 0,$$

то есть условие (a) выполнено. Значение задачи находится подстановкой экстремальной последовательности  $\widehat{u}$  в максимизируемую сумму.  $\square$

*Доказательство теоремы 1.* Сначала получим снизу для величины  $E_A(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta)$ . Пусть  $\psi$  — произвольный метод восстановления,  $f \in W_2^\beta(Q)$  и  $\|f^N\|_{l_2^N} \leq \delta$ . Тогда имеем

$$\begin{aligned} 2\|u(x)\|_{L_2(Q)} &\leq \|u(x) - \psi(0) + u(x) + \psi(0)\|_{L_2(Q)} \\ &\leq \|u(x) - \psi(0)\|_{L_2(Q)} + \|u(-x) - \psi(0)\|_{L_2(Q)} \leq 2e_{N,2}(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta, \psi). \end{aligned}$$

Для выбранного метода  $\psi$ , после перехода к верхней грани, получим

$$e_A(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta, \psi) \geq \sup_{\substack{f(x) \in W_2^\beta(Q), \\ \|f^N\|_{l_2^N} \leq \delta}} \|u(x)\|_{L_2(Q)}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} (9) \quad E_A(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta) &= \inf_{\psi: l_2^N \rightarrow L_2(Q)} e_A(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta, \psi) \\ &\geq \sup_{\substack{f(x) \in W_2^\beta(Q), \\ \|f^N\|_{l_2^N} \leq \delta}} \|u(x)\|_{L_2(Q)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим экстремальную задачу

$$(10) \quad \|u(x)\|_{L_2(Q)}^2 \rightarrow \max, \quad \|f^N\|_{l_2^N}^2 \leq \delta^2, \quad \|\mathfrak{L}^{\beta/2} f(x)\|_{L_2(Q)}^2 \leq 1.$$

Используя равенство Парсеваля, перепишем задачу (10) в виде

$$(11) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^\alpha} \sum_{j=1}^{r_k} c_{kj}^2 \rightarrow \max, \quad \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{j \in A_k} c_{kj}^2 \leq \delta^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\beta \sum_{j=1}^{r_k} c_{kj}^2 \leq 1.$$

Введем обозначения

$$v_k = \sum_{j=1}^{r_k} c_{kj}^2, \quad k \geq 1, \quad v'_k = \sum_{j \in A_k} c_{kj}^2, \quad k = 1, \dots, k_0.$$

Из определения  $v'_k$  вытекает, что  $v'_k = v_k$ , если  $J_k = A_k$ . Теперь задачу (11) можно записать в виде

$$(12) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k}{\lambda_k^\alpha} \rightarrow \max, \quad \sum_{\substack{1 \leq k \leq k_0 \\ A_k = J_k}} v_k + \sum_{\substack{1 \leq k \leq k_0 \\ A_k \neq J_k}} v'_k \leq \delta^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\beta v_k \leq 1, \\ v_k \geq 0, \quad k \geq 1, \quad v_k \geq v'_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, k_0.$$

Нетрудно убедиться, что значение задачи (12) совпадает со значением задачи

$$(13) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k}{\lambda_k^\alpha} \rightarrow \max, \quad \sum_{\substack{1 \leq k \leq k_0 \\ A_k = J_k}} v_k \leq \delta^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\beta v_k \leq 1, \quad v_k \geq 0, \quad k \geq 1.$$

Из леммы 1 вытекает, что значение этой задачи равно  $\widehat{\eta}_1 \delta^2 + \widehat{\eta}_2$ . Из (9) получаем, что

$$E_A(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta) \geq \sqrt{\widehat{\eta}_1 \delta^2 + \widehat{\eta}_2}.$$

Теперь получим оценку сверху и найдем оптимальные методы. Для оценки погрешности методов (6) надо оценить значение следующей экстремальной задачи (для удобства мы переходим к квадрату оцениваемой величины)

$$\|u - \psi(\widetilde{f}^N)\|_{L_2(Q)}^2 \rightarrow \max, \quad \|f^N - \widetilde{f}^N\|_{l_2^N}^2 \leq \delta^2 \quad f \in W_2^\beta(Q).$$

Эта задача переписывается в виде

$$(14) \quad \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{j \in A_k} (\lambda^{-\alpha/2} c_{kj} - \omega_{kj} y_{kj})^2 + \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{j \in J_k \setminus A_k} \lambda^{-\alpha} c_{kj}^2 + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{r_k} \lambda^{-\alpha} c_{kj}^2 \rightarrow \max, \\ \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{j \in A_k} (c_{kj} - y_{kj})^2 \leq \delta^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{r_k} \lambda_k^\beta c_{kj}^2 \leq 1.$$

После замены  $y_{kj} = c_{kj} - z_{kj}$  задача (14) примет вид

$$(15) \quad \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{j \in A_k} ((\lambda^{-\alpha/2} - \omega_{kj}) c_{kj} + \omega_{kj} z_{kj})^2 + \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{j \in J_k \setminus A_k} \lambda^{-\alpha} c_{kj}^2 + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{r_k} \lambda^{-\alpha} c_{kj}^2 \rightarrow \max, \\ \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{j \in A_k} z_{kj}^2 \leq \delta^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{r_k} \lambda_k^\beta c_{kj}^2 \leq 1.$$

Учитывая монотонное возрастание коэффициентов  $\lambda_k$ , значение  $\widehat{\eta}_2$  и определение  $k^*$ , имеем

$$(16) \quad \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{j \in J_k \setminus A_k} \lambda_k^{-\alpha} c_{kj}^2 + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{r_k} \lambda_k^{-\alpha} c_{kj}^2 \leq \widehat{\eta}_2 \left( \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{j \in J_k \setminus A_k} \lambda_k^\beta c_{kj}^2 + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{r_k} \lambda_k^\beta c_{kj}^2 \right).$$



Если  $k^* = 1$ , то из (7) следует, что  $\omega_{kj} = 0$  и значение задачи (15) оценивается величиной

$$\widehat{\eta}_2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{r_k} \lambda_k^\beta c_{kj}^2 \leq \widehat{\eta}_2.$$

Пусть  $k^* > 1$ . Тогда из неравенства Коши-Буняковского следует, что

$$((\lambda^{-\alpha/2} - \omega_{kj})c_{kj} + \omega_{kj}z_{kj})^2 \leq \left( \frac{(\lambda_k^{-\alpha/2} - \omega_{kj})^2}{\widehat{\eta}_2 \lambda_k^\beta} + \frac{\omega_{kj}^2}{\widehat{\eta}_1} \right) (\widehat{\eta}_2 \lambda_k^\beta c_{kj}^2 + \widehat{\eta}_1 z_{kj}^2).$$

Пользуясь этим неравенством и неравенством (16), получаем, что значение задачи (15) оценивается величиной

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{j \in A_k} \left( \frac{(\lambda_k^{-\alpha/2} - \omega_{kj})^2}{\widehat{\eta}_2 \lambda_k^\beta} + \frac{\omega_{kj}^2}{\widehat{\eta}_1} \right) (\widehat{\eta}_2 \lambda_k^\beta c_{kj}^2 + \widehat{\eta}_1 z_{kj}^2) \\ & + \widehat{\eta}_2 \left( \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{j \in J_k \setminus A_k} \lambda_k^\beta c_{kj}^2 + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{r_k} \lambda_k^\beta c_{kj}^2 \right). \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что условия (7) эквивалентны неравенствам

$$(17) \quad \frac{(\lambda_k^{-\alpha/2} - \omega_{kj})^2}{\widehat{\eta}_2 \lambda_k^\beta} + \frac{\omega_{kj}^2}{\widehat{\eta}_1} \leq 1.$$

Поэтому значение задачи (15) оценивается величиной

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{j \in A_k} (\widehat{\eta}_2 \lambda_k^\beta c_{kj}^2 + \widehat{\eta}_1 z_{kj}^2) + \widehat{\eta}_2 \left( \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{j \in J_k \setminus A_k} \lambda_k^\beta c_{kj}^2 + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{r_k} \lambda_k^\beta c_{kj}^2 \right) \\ & = \widehat{\eta}_1 \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{j \in A_k} z_{kj}^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{r_k} \lambda_k^\beta c_{kj}^2 \leq \widehat{\eta}_1 \delta^2 + \widehat{\eta}_2. \end{aligned}$$

Тем самым доказано, что

$$E_A(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta) \leq \sqrt{\widehat{\eta}_1 \delta^2 + \widehat{\eta}_2}$$

и методы (6) оптимальны.  $\square$

Рассмотрим теперь вопрос о минимизации информации, необходимой для построения оптимального метода. Если какие-либо из коэффициентов  $\omega_{kj}$  равны нулю, то информация, связанная с этими коэффициентами не используется в соответствующем методе. Другими словами, для построения оптимального метода измерять данные коэффициенты нет необходимости. Выясним, какие из коэффициентов  $\omega_{kj}$  можно положить равными нулю при построении

оптимальных методов. Для этого подставим  $\omega_{kj} = 0$  в неравенства (17). Тогда, с учётом вида  $\widehat{\eta}_2$ , получим, что

$$\frac{1}{\widehat{\eta}_2 \lambda_k^{\alpha+\beta}} = \frac{\lambda_{k^*}^{\alpha+\beta}}{\lambda_k^{\alpha+\beta}} \leq 1.$$

Отсюда следует, в силу монотонного возрастания  $\lambda_k$ , что при  $k \geq k^*$  можно положить  $\omega_{kj} = 0$ .

Пусть

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{r_k} c_{kj} \varphi_{kj}(x).$$

Назовем  $k$ -пачкой группу коэффициентов  $c_{kj}$ ,  $j = 1, \dots, r_k$ , где  $r_k$  — размерность подпространства  $\Phi_k \in L_2(Q)$ , базисом которого являются функции  $\varphi_{k1}(x), \dots, \varphi_{kr_k}(x)$ , соответствующие собственному значению  $\lambda_k$ .

Пусть  $\widetilde{f}^N = \{y_{kj}\}$ ,  $k = 1, \dots, k_0$ ,  $j \in A_k$  — вектор, приближённо описывающий функцию  $f(x)$  из правой части уравнения (3). Из теоремы 1 получаем следующий результат: если в  $k$ -пачке среди коэффициентов  $y_{kj}$ ,  $1 \leq k \leq k_0$ ,  $j \in A_k$ , отсутствует хотя бы один коэффициент  $y_{kj}$  (что соответствует выполнению условия  $A_k \neq J_k$ ), то ни один из коэффициентов этой пачки, равно как и ни один из коэффициентов всех следующих пачек (по возрастанию  $k$ ), входящих в вектор  $\widetilde{f}^N$ , при построении оптимального метода можно не использовать.

Отсюда непосредственно вытекает утверждение теоремы 2.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью // Матем. сб. 2002. Т. 193. №3. С. 79–100.
- [2] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функ. анализ и его прил. 2003. Т. 37. С. 51–64.
- [3] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., Тихомиров В. М. On optimal recovery of heat equation solutions. In: Approximation Theory: A volume dedicated to B. Vojanov (D. K. Dimitrov, G. Nikolov, and R. Uluhev, Eds.), 163–175, Sofia: Marin Drinov Academic Publishing House, 2004.
- [4] Осипенко К. Ю. О восстановлении решения задачи Дирихле по неточным исходным данным // Владикавказский мат. журн. 2004. Т. 6, вып. 4. С. 55–62.
- [5] Балова Е. А. Об оптимальном восстановлении решения задачи Дирихле в кольце // Владикавказский мат. журн. 2006. Т. 8, вып. 2, С. 15–23.
- [6] Балова Е. А. Об оптимальном восстановлении решений задачи Дирихле по неточным исходным данным // Математические заметки, 2007. Т. 82, вып. 3. С. 323–334.

- [7] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру // Функ. анализ и его прил. 2010. Т. 44. С. 76–79.
- [8] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Неравенство Харди–Литтлвуда–Поля и восстановление производных по неточной информации // Докл. РАН, 2011, Т. 438. С. 300–302.
- [9] *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных, М., Наука, 1983г.

МАТИ — РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. К. Э. ЦИОЛКОВСКОГО