

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ И ТЕОРИЯ ЭКСТРЕМУМА

Г. Г. МАГАРИЛ-ИЛЬЯЕВ, К. Ю. ОСИПЕНКО, В. М. ТИХОМИРОВ

Аннотация. В работе с общих позиций теории экстремума рассматриваются проблемы восстановления линейных функционалов на классах гладких и аналитических функций.

0. Постановка задачи о восстановлении линейных функционалов. Пусть в линейном пространстве X над $K = \mathbb{R}$ или \mathbb{C} задано множество (класс) $C \subset X$ и линейный функционал x' на X . Будем считать, что о каждом элементе $x \in C$ мы располагаем информацией $y = Fx$, где $F: C \rightarrow Y$ — линейный оператор из X в другое линейное пространство Y . Задача состоит в том, чтобы восстановить наилучшим образом значение линейного функционала x' на классе C по информации, задаваемой оператором F . В это вкладывается следующий смысл. Методом восстановления будем называть любую функцию $\varphi: F(C) \rightarrow K$. Погрешностью такого метода называется величина

$$e(x', C, F, \varphi) = \sup_{x \in C} |\langle x', x \rangle - \varphi(Fx)|,$$

где $\langle x', x \rangle$ — значение функционала x' на элементе x . Погрешностью оптимального восстановления (x' на C по F) называется величина

$$(1) \quad E(x', C, F) = \inf_{\varphi} e(x', C, F, \varphi),$$

где нижняя грань берется по всем функциям (методам) $\varphi: F(C) \rightarrow K$. Метод $\hat{\varphi}$, на котором достигается нижняя грань в (1), называется оптимальным методом восстановления.

В работе исследуются задачи восстановления значений функций на классах Соболева $W_p^K(\mathbb{T})$ и Харди–Соболева $W^r H_p(D)$ по коэффициентам Фурье, Тейлора и значениям в других точках с общих позиций теории экстремальных задач.

1. Принцип Лагранжа для задач оптимального восстановления. Решения упомянутых задач, равно как и многих других

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №99-01-01181 и №00-15-96109), INTAS-97-1050, Research Grant 12513 of the Royal Swedish Acad. of Sci.

задач об оптимальном восстановлении линейных функционалов, базирующихся на связи исходной задачи (1) со следующей выпуклой экстремальной задачей:

$$(2) \quad \operatorname{Re}\langle x', x \rangle \rightarrow \max, \quad Fx = 0, \quad x \in C.$$

Функция Лагранжа этой задачи имеет вид:

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \lambda_0) = \lambda_0 \operatorname{Re}\langle x', x \rangle + \operatorname{Re}\langle \lambda, Fx \rangle,$$

где $\lambda_0 \leq 0$ и $\lambda \in Y'$ (Y' — алгебраически сопряженное к Y) — множители Лагранжа. Принцип Лагранжа для выпуклых задач состоит в том, что если \hat{x} — решение задачи, то найдутся множители Лагранжа (не равные нулю одновременно) такие, что функция Лагранжа достигает минимума в точке \hat{x} на множестве тех ограничений, которые в нее не включены (в данном случае на C). Этот факт является центральным утверждением следующей теоремы (см. [1]).

Теорема 1 (Принцип Лагранжа для задач восстановления). Пусть X и Y линейные пространства над \mathbb{R} или \mathbb{C} , C — выпуклое уравновешенное подмножество X и $F: X \rightarrow Y$ — линейный оператор. Тогда для того чтобы допустимая в (2) точка \hat{x} была решением этой задачи необходимо и достаточно, чтобы нашелся такой множитель Лагранжа $\hat{\lambda} \in Y'$, что

$$(3) \quad \min_{x \in C} \mathcal{L}(x, \hat{\lambda}, -1) = \mathcal{L}(\hat{x}, \hat{\lambda}, -1).$$

При этом $\hat{\lambda}$ — оптимальный метод восстановления в (1) и $E(x', C, F) = \operatorname{Re}\langle x', \hat{x} \rangle$.

Доказательство всех приводимых ниже результатов опирается на сформулированный принцип. Используя равенство (3) как необходимое условие, мы находим соответствующие \hat{x} и $\hat{\lambda}$, а затем, пользуясь достаточностью этого соотношения или непосредственной проверкой, убеждаемся, что \hat{x} — решение задачи (2), а $\hat{\lambda}$ — оптимальный (причем линейный) метод восстановления.

2. Оптимальное восстановление значений функций из обобщенных соболевских классов по коэффициентам Фурье. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, функция $K(\cdot) \in L_{p'}(\mathbb{T})$ ($1/p + 1/p' = 1$, \mathbb{T} — окружность, реализованная как $[-\pi, \pi]$ с идентифицированными концами) и α_k, β_k — коэффициенты Фурье функции $K(\cdot)$. Предположим, что $\alpha_k^2 + \beta_k^2 \neq 0$ ($\beta_0 = 0$) за исключением конечного (возможно пустого) множества $Q \subset \mathbb{Z}_+$. Обозначим $\mathcal{T}_Q = \operatorname{span}\{\cos k\cdot, \sin k\cdot\}_{k \in Q}$ и положим

$$\mathcal{W}_p^K(\mathbb{T}, Q) = \left\{ x(\cdot) \mid x(\cdot) = y(\cdot) + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} K(\cdot - t)u(t) dt, y(\cdot) \in \mathcal{T}_Q, \right. \\ \left. u(\cdot) \in \mathcal{T}_Q^\perp, u(\cdot) \in L_p(\mathbb{T}) \right\},$$

где \mathcal{T}_Q^\perp — аннулятор \mathcal{T}_Q .

Обобщенным соболевским классом $W_p^K(\mathbb{T}, Q)$ назовем множество тех функций из $\mathcal{W}_p^K(\mathbb{T}, Q)$, для которых $\|u(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{T})} \leq 1$. Если $Q = \{0\}$ и $K(\cdot) = B_r(\cdot)$, где $B_r(\cdot) = \sum_{k \in \mathbb{N}} k^{\perp r} \cos(kt - \pi r/2)$ (ядро Бернулли), то $W_p^{B_r}(\mathbb{T}, \{0\})$ совпадает с соболевским классом $W_p^r(\mathbb{T})$.

Поставим задачу о восстановлении функции $x(\cdot)$ в точке $\theta \in \mathbb{T}$ на классе $W_p^K(\mathbb{T}, Q)$ по значениям ее коэффициентов Фурье $\{(a_k, b_k)\}_{k=0}^{n \perp 1}$ ($b_0 = 0$). Через Four_n обозначим отображение $x(\cdot) \mapsto (a_0, \dots, a_{n \perp 1}, b_1, \dots, b_{n \perp 1})$. Будем считать, что $Q \subset \{0, 1, \dots, n-1\}$, т.к. в противном случае погрешность оптимального восстановления равна $+\infty$ и тем самым любой метод оптимален.

Теорема 2 (об оптимальном восстановлении по коэффициентам Фурье). Пусть $1 < p \leq \infty$ и

$$\widehat{p}(t) = A_0/2 + \sum_{k=1}^{n \perp 1} (A_k \cos kt + B_k \sin kt)$$

— полином наилучшего приближения функции $K(\cdot)$ подпространством $\mathcal{T}_{n \perp 1}$ тригонометрических полиномов в метрике $L_{p'}(\mathbb{T})$. Тогда метод

$$x(\theta) \approx \widehat{\mu}_0 a_0 + \sum_{k=1}^{n \perp 1} (\widehat{\mu}_k(\theta) a_k + \widehat{\nu}_k(\theta) b_k),$$

где $\widehat{\mu}_0 = 1/2$, если $0 \in Q$, и $\widehat{\mu}_0 = A_0/(2\alpha_0)$, если $0 \notin Q$; $\widehat{\mu}_k(\theta) = \cos k\theta$, $\widehat{\nu}_k(\theta) = \sin k\theta$, если $k \in Q \setminus \{0\}$, и

$$\widehat{\mu}_k(\theta) = \frac{(\alpha_k A_k + \beta_k B_k) \cos k\theta + (\alpha_k B_k - \beta_k A_k) \sin k\theta}{\alpha_k^2 + \beta_k^2},$$

$$\widehat{\nu}_k(\theta) = \frac{(\beta_k A_k - \alpha_k B_k) \cos k\theta + (\alpha_k A_k + \beta_k B_k) \sin k\theta}{\alpha_k^2 + \beta_k^2},$$

если $k \in \{1, \dots, n-1\} \setminus Q$, является оптимальным методом восстановления $x(\theta)$ на $W_p^K(\mathbb{T}, Q)$ по коэффициентам Фурье $\{(a_k, b_k)\}_{k=0}^{n \perp 1}$.

При этом

$$E(x(\theta), W_p^K(\mathbb{T}, Q), \text{Four}_n) = \frac{1}{\pi} \|K(\cdot) - \widehat{p}(\cdot)\|_{L_{p'}(\mathbb{T})}.$$

Скажем, что функция $K(\cdot) \in L_1(\mathbb{T})$ обладает γ -свойством Фавара (при данном $n \in \mathbb{N}$), если найдется такой полином $\widehat{q}(\cdot) \in \mathcal{T}_{n \perp 1}$ и $\gamma \in [0, \pi/n)$, что функция $(K(t) - \widehat{q}(t)) \sin n(t + \gamma)$ неотрицательна или неположительна для п.в. $t \in \mathbb{T}$. Нетрудно убедиться, что в этом случае $\widehat{q}(\cdot)$ — полином наилучшего приближения для $K(\cdot)$ в $L_1(\mathbb{T})$ и имеет место равенство

$$\|K(\cdot) - \widehat{q}(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T})} = \left| \int_{\mathbb{T}} K(t) \text{sign} \sin n(t + \gamma) dt \right|.$$

Если $K(\cdot)$ непрерывно, то $\widehat{q}(\cdot)$ находится как полином, интерполирующий $K(\cdot)$ в нулях $\sin n(\cdot + \gamma)$, и тем самым из теоремы 2 определяется оптимальный метод восстановления и его погрешность.

Среди ядер, удовлетворяющих γ -свойству Фавара, выделяется класс ядер, не повышающих осцилляции.

Примером ядер такого вида может служить ядро

$$K_\beta(t) = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos mt}{\operatorname{ch} m\beta}.$$

Класс $W_\infty^{K_\beta}(\mathbb{T}, \emptyset)$ совпадает с классом $h_{\infty, \beta}$, являющимся множеством вещественных 2π -периодических функций $f(\cdot)$, аналитически продолжаемых в полосу $S_\beta = \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} z| < \beta\}$ и удовлетворяющих в ней условию $|\operatorname{Re} f(z)| \leq 1$.

Пусть $P(D)$ — дифференциальный полином с постоянными вещественными коэффициентами степени r

$$P(D) = D^r + a_{r-1}D^{r-1} + \dots + a_0, \quad D = \frac{d}{dt}.$$

Через $h_{\infty, \beta}^P$ обозначим класс вещественных 2π -периодических функций $f(\cdot)$, аналитически продолжаемых в полосу S_β и удовлетворяющих в ней условию $|\operatorname{Re}(P(D)f)(z)| \leq 1$. Тогда $h_{\infty, \beta}^P = W_\infty^{K_{P, \beta}}(\mathbb{T}, Q)$, где $K_{P, \beta}(\cdot) = (K_P * K_\beta)(\cdot)$,

$$K_P(t) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ P(im) \neq 0}} \frac{e^{imt}}{P(im)}, \quad Q = \{m \in \mathbb{Z}_+ : P(im) = 0\}.$$

Положим

$$h_n(t) = \operatorname{sign} \sin nt, \quad \delta = \pi/h(P(\cdot)),$$

где $h(P(\cdot))$ — максимум мнимой части нулей полинома $P(\cdot)$.

Лемма. Ядро $K_{P, \beta}(\cdot)$ при $n > \max\{\sup_{j \in Q} j, 2\pi/\delta\}$ обладает γ -свойством Фавара для γ , определяемого из условия

$$(K_{P, \beta} * h_n)(\gamma) = -\|(K_{P, \beta} * h_n)(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{T})}.$$

Эта лемма вместе с теоремой 2 позволяет выписать формулы для оптимального метода восстановления значений функций из классов $h_{\infty, \beta}^P$ по коэффициентам Фурье.

3. Восстановление значений функций на классах Харди.

Пространством Харди $\mathcal{H}_p(D)$, $1 \leq p \leq \infty$, называется множество аналитических в единичном диске $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ функций $f(\cdot)$, для которых

$$\|f(\cdot)\|_{\mathcal{H}_p(D)} = \begin{cases} \sup_{0 < r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(re^{it})|^p dt \right)^{1/p} < \infty, & 1 \leq p < \infty, \\ \sup_{z \in D} |f(z)| < \infty, & p = \infty. \end{cases}$$

Классом Харди назовем следующее множество

$$H_p(D) = \{f(\cdot) \in \mathcal{H}_p(D) \mid \|f(\cdot)\|_{\mathcal{H}_p(D)} \leq 1\}.$$

Теорема 3. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $C = H_p(D)$, $\tau, z_1, \dots, z_n \in D$, $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$,

$$Ff(\cdot) = (f(z_1), \dots, f^{(k_1+1)}(z_1), \dots, f(z_n), \dots, f^{(k_n+1)}(z_n)).$$

Тогда метод

$$f(\tau) \approx \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{k_j+1} \hat{\mu}_{jk} f^{(k)}(z_j),$$

где

$$\hat{\mu}_{jk} = \frac{B(\tau)(1-|\tau|^2)^{(p+2)/p}}{k!(k_j-k-1)!} \left(\frac{(1-\bar{z}_j z)^{k_j}}{\omega_j(z)(\tau-z)(1-\bar{\tau}z)^{(p+2)/p}} \right) \Big|_{z=z_j}^{(k_j+1)},$$

$$B(z) = \prod_{j=1}^n \left(\frac{z-z_j}{1-\bar{z}_j z} \right)^{k_j}, \quad \omega_j(z) = \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^n \left(\frac{z-z_m}{1-\bar{z}_m z} \right)^{k_m},$$

является оптимальным на классе $H_p(D)$ по информации $Ff(\cdot)$.

При этом

$$E(f(\tau), H_p(D), F) = \frac{|B(\tau)|}{(1-|\tau|^2)^{1/p}}.$$

Следствие. При $p = \infty$ и

$$Ff(\cdot) = \text{Tay}_n f(\cdot) = (f(0), f'(0), \dots, f^{(n+1)}(0))$$

$$E(f(\tau), H_\infty(D), \text{Tay}_n) = \frac{|\tau|^n}{(1-|\tau|^2)^{1/p}},$$

а оптимальный метод восстановления доставляет формула

$$f(\tau) \approx \sum_{j=0}^{n+1} \tau^j (1-|\tau|^{2(n+1-j)}) \frac{f^{(j)}(0)}{j!}.$$

Оптимальность приведенных методов иным путем была доказана в работах [2], [3] ($p = \infty$) и [4] ($1 \leq p < \infty$).

4. Восстановление значений функций на классах Харди–Соболева. Обозначим через $W^r H_\infty(D)$ класс Харди–Соболева — множество аналитических в D функций, для которых $|f^{(r)}(z)| \leq 1$, $z \in D$.

Теорема 4. Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$ и $\tau \in D$. Тогда метод

$$f(\tau) \approx \sum_{k=0}^{r+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \tau^k + \sum_{k=r}^{n+r+1} \left(1 - \frac{k!}{(k-r)!} \frac{(2n+r-k)!}{(2n+2r-k)!} |\tau|^{2(n+r-k)} \right) \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \tau^k$$

является оптимальным на классе $W^r H_\infty(D)$ по информации $\text{Tay}_{n+r} f(\cdot) = (f(0), f'(0), \dots, f^{(n+r+1)}(0))$. При этом

$$E(f(\tau), W^r H_\infty, \text{Tay}_{n+r}) = \frac{n!}{(n+r)!} |\tau|^{n+r}.$$

5. Восстановление по значениям в равномерной сетке на окружности на классе $W^1 H_\infty(D)$.

Теорема 5. Пусть $0 < \rho < 1$ и $\tau \in (-1, 1)$. Тогда метод

$$f(\tau) \approx \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n+1} \hat{\mu}_j f(\rho e^{ij2\pi/n}),$$

где

$$\hat{\mu}_j = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\alpha^{n+k} (1 - q_k \alpha^n \rho^{2n}) - p_k \alpha^k \rho^{2k} (1 - \alpha^n)}{1 - q_k \rho^{2n}} e^{ikj2\pi/n},$$

$$\alpha = \frac{\tau}{\rho}, \quad p_k = \frac{n-k}{n+k}, \quad q_k = \frac{k}{2n-k} p_k,$$

является оптимальным на классе $W^1 H_\infty(D)$ и для его погрешности имеет место равенство

$$E(f(\tau), W^1 H_\infty, F) = \frac{|\tau^n - \rho^n|}{n}.$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Выпуклый анализ и его приложения. Москва: Эдиториал УРСС, 2000.
- [2] Осипенко К. Ю. Оптимальная интерполяция аналитических функций // Мат. заметки. 1972. Т. 12, №4. С. 465–476.
- [3] Осипенко К. Ю. Наилучшее приближение аналитических функций по информации об их значениях в конечном числе точек // Мат. заметки. 1976. Т. 19, №1. С. 29–40.
- [4] Fisher, S. D., Michelli, C. A. The n -width of sets of analytic functions // Duke Math. J. 1980. V. 47. №4. P. 789–801.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ РАДИОТЕХНИКИ, ЭЛЕКТРОНИКИ И АВТОМАТИКИ (ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

МАТИ — РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. К. Э. ЦИОЛКОВСКОГО

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М. В. ЛОМОНОСОВА