Восстановление функции и ее производной по ее приближенным коэффициентам Фурье.

Обозначим через $\mathbb{T}$ единичную окружность, реализованную как отрезок $[-\pi,\pi]$ с идентифицированными концами. Через $L_2(\mathbb{T})$ обозначим совокупность функций $x(\cdot)$ на $\mathbb{T}$, суммируемых с квадратом, с нормой

$$\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |x(t)|^2 dt\right)^{1/2}.$$

Класс $W_2^2(\mathbb{T})$ — это совокупность 2π-периодических функций $x(\cdot)$, у которых первая производная абсолютно непрерывна и $\|x''(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leqslant 1$.

На этом классе рассмотрим задачу восстановления функции $x(\cdot)$ и ее первой производной в метрике $L_2(\mathbb{T})$ по конечному набору ее коэффициентов Фурье

$$x_j = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} x(t)e^{-ijt}dt, \tag{1}$$

заданных с погрешностью. Точнее говоря, будем предполагать, что для каждой функции $x(\cdot) \in W_2^2(\mathbb{T})$ нам известны числа y_j, $|j| \leqslant N$, такие, что

$$|x_j - y_j| \leqslant \delta,\ |j| \leqslant N,\ \delta > 0.$$

Здесь информационным оператором является многозначное отображение F_δ^N, ставящее в соответствие каждой функции $x(\cdot) \in W_2^2(\mathbb{T})$ множество $F_\delta^N x(\cdot) = \{y_j\}_{|j|\leqslant N}$, где y_j удовлетворяют условию (1). Задача заключается в нахождении величины

$$E((x(\cdot),x'(\cdot)),W_2^2(\mathbb{T}),F_\delta^N) =$$

$$= \inf_{m:\mathbb{C}^{2N+1}\to L_2(\mathbb{T})^2} \sup_{\substack{x(\cdot)\in W_2^2(\mathbb{T})\\ y\in F_\delta^N x(\cdot)}} \sqrt{\alpha_1\|x(\cdot)-m_1(y)(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{T})} + \alpha_2\|x'(\cdot)-m_2(y)(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{T})}}$$

и соответствующего оптимального метода, то есть метода в котором достигается нижняя грань. Здесь α_1 и α_2 неотрицательные весовые коэффициенты, выбирая которые можно отдавать предпочтение либо более точному восстановлению самой функции либо ее производной.

Теорема. Погрешность оптимального восстановления

$$E((x(\cdot),x'(\cdot)),W_2^2(\mathbb{T}),F_\delta^N) =$$

$$= \frac{\left(\alpha_1 + \alpha_2(p_0+1)^2 + \delta^2 \sum_{|j|\leqslant p_0} ((p_0+1)^4(\alpha_1 + j^2\alpha_2) - j^4\alpha_1 - j^4\alpha_2(p_0+1)^2)\right)^{1/2}}{(p_0+1)^2}$$

где

$$p_0 = \max\left\{p \in \mathbb{Z}_+ : \delta^2 \sum_{|j|\leqslant p} j^4 < 1, 0 \leqslant p \leqslant N\right\}.$$

Метод

$$\alpha_1 x(\cdot) + \alpha_2 x'(\cdot) \approx \sum_{|j|\leqslant N} \hat{x}_j e^{ijt}(\alpha_1 + \alpha_2 ij),$$

где

$$\hat{x}_j = \begin{cases} y_0, & j=0, \\ \frac{\hat{\lambda}_j}{\hat{\lambda} j^4 + \hat{\lambda}_j} y_j, & 1 \leqslant |j| \leqslant p_0, \\ 0, & |j| > p_0, \end{cases}$$

$$\hat{\lambda} = \frac{\alpha_1}{(p_0+1)^4} + \frac{\alpha_2}{(p_0+1)^2},$$

$$\hat{\lambda}_j = \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 j^2 - \frac{j^4 \alpha_1}{(p_0+1)^4} - \frac{j^4 \alpha_2}{(p_0+1)^2}, & |j| \leqslant p_0, \\ 0, & p_0 + 1 \leqslant |j| \leqslant N, \end{cases}$$

является оптимальным.

Доказательство:

Для любого метода $m = (m_1, m_2)$ имеем

$$2\alpha_1 \|x(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{T})} + \alpha_2 \|x'(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{T})} \leqslant$$

$$\leqslant \alpha_1 \|x(\cdot) - m_1(y)(0)\|^2_{L_2(\mathbb{T})} + \alpha_2 \|x'(\cdot) - m_2(y)(0)\|^2_{L_2(\mathbb{T})} +$$

$$+\alpha_1 \| - x(\cdot) - m_1(y)(0)\|^2_{L_2(\mathbb{T})} + \alpha_2 \| - x'(\cdot) - m_2(y)(0)\|^2_{L_2(\mathbb{T})} \leqslant$$

$$\leqslant 2e^2((x(\cdot), x'(\cdot)), W_2^2(\mathbb{T}), F_\delta^N, (m_1, m_2))$$

Где

$$e((x(\cdot), x'(\cdot)), W_2^2(\mathbb{T}), F_\delta^N, (m_1, m_2)) =$$

$$= \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2^2(\mathbb{T}) \\ y \in F_\delta^N x(\cdot)}} \sqrt{\alpha_1 \|x(\cdot) - m_1(y)(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{T})} + \alpha_2 \|x'(\cdot) - m_2(y)(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{T})}}.$$

Откуда

$$E((x(\cdot), x'(\cdot)), W_2^2(\mathbb{T}), F_\delta^N) \geqslant \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2^2(\mathbb{T}) \\ |x_j| \leqslant \delta, \ |j| \leqslant N}} \sqrt{\alpha_1 \|x(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{T})} + \alpha_2 \|x'(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{T})}}.$$

Задача справа в силу равенства Парсеваля записывается в виде (для удобства переходим к квадрату нормы)

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} (\alpha_1 + \alpha_2 j^2) u_j \to max, \ \sum_{j \in \mathbb{Z}} j^2 u_j \leqslant 1, \ 0 \leqslant u_j \leqslant \delta^2, |j| \leqslant N, \tag{2}$$

где $u_j = |x_j|^2, j \in \mathbb{Z}$.

Эта задача линейного программирования. Для нахождения ее решения достаточно найти такие $\hat{\lambda} \geqslant 0, \hat{\lambda}_j \geqslant 0, |j| \leqslant N$, и допустимую последовательность $\{\hat{u}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, для которых при всех $u_j \geqslant 0, j \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} (-(\alpha_1 + \alpha_2 j^2) + \hat{\lambda} j^4 + \hat{\lambda}_j \chi_j) u_j \geqslant \sum_{j \in \mathbb{Z}} (-(\alpha_1 + \alpha_2 j^2) + \hat{\lambda} j^4 + \hat{\lambda}_j \chi_j) \hat{u}_j \quad (a)$$

и

$$\hat{\lambda} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} j^4 \hat{u}_j - 1 \right) = 0, \quad \hat{\lambda}_j (\hat{u}_j - \delta^2) = 0, |j| \leqslant N, \quad (b)$$

где $\chi_j = 1$, если $|j| \leqslant N$, и нулю в остальных случаях. Пусть

$$p_0 = \max \left\{ p \in \mathbb{Z}_+ : \delta^2 \sum_{|j| \leqslant p} j^4 < 1, 0 \leqslant p \leqslant N \right\}.$$

Положим

$$\hat{\lambda} = \frac{\alpha_1}{(p_0+1)^4} + \frac{\alpha_2}{(p_0+1)^2},$$

$$\hat{\lambda}_j = \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 j^2 - \frac{j^4 \alpha_1}{(p_0+1)^4} - \frac{j^4 \alpha_2}{(p_0+1)^2}, & |j| \leqslant p_0, \\ 0, & p_0 + 1 \leqslant |j| \leqslant N, \end{cases}$$

$$\hat{u}_j = \begin{cases} \delta^2, & |j| \leqslant p_0, \\ \frac{1 - \delta^2 \sum_{|k| \leqslant p_0} k^4}{2(p_0+1)^4}, & |j| = p_0 + 1, \\ 0, & |j| > p_0 + 1, \end{cases}$$

Покажем, что последовательность $\hat{u} = \{\hat{u}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ допустима и выполняются условия (a) и (b):

1. $$\sum_{j \in \mathbb{Z}} (-(\alpha_1 + \alpha_2 j^2) + \hat{\lambda} j^4 + \hat{\lambda}_j \chi_j) u_j =$$

$$= \sum_{|j| > p_0 + 1} \left(-\alpha_1 - \alpha_2 j^2 + \frac{j^4 \alpha_1}{(p_0+1)^4} + \frac{j^4 \alpha_2}{(p_0+1)^2} \right) \geqslant 0$$

2. Кроме того
$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} (-(\alpha_1 + \alpha_2 j^2) + \hat{\lambda} j^4 + \hat{\lambda}_j \chi_j) \hat{u}_j = 0.$$

3. $$\hat{\lambda} \left(\delta^2 \sum_{|j| \leqslant p_0} j^4 + 2(p_0+1)^4 \frac{1 - \delta^2 \sum_{|j| \leqslant p_0} j^4}{2(p_0+1)^4} - 1 \right) = 0.$$

4. Выражения из условия (b) очевидным образом выполняются для $|j| \leqslant p_0$. Остается проверить, что при $p_0 < N$ выполняется $\hat{u}_j \leqslant \delta^2$ при $|j| = p_0 + 1$. Предположим, что
$$\frac{1 - \delta^2 \sum_{|k| \leqslant p_0} k^4}{2(p_0+1)^4} > \delta^2.$$
Тогда
$$1 - \delta^2 \sum_{|k| \leqslant p_0} k^4 > 2\delta^2 (p_0+1)^4$$
и, следовательно, $1 > \delta^2 \sum_{|k| \leqslant p_0 + 1} k^4$, что противоречит определению p_0.

Подставляя $\hat{u}$ в максимизируемый функционал и извлекая квадратный корень, получаем

$$E((x(\cdot),x'(\cdot)),W_2^2(\mathbb{T}),F_\delta^N)\geqslant$$

$$\geqslant\frac{\left(\alpha_1+\alpha_2(p_0+1)^2+\delta^2\sum\limits_{|j|\leqslant p_0}((p_0+1)^4(\alpha_1+j^2\alpha_2)-j^4\alpha_1-j^4\alpha_2(p_0+1)^2)\right)^{1/2}}{(p_0+1)^2}. \quad (3)$$

Исходя из аналогичных соображений достаточности можно убедиться, что $\hat{u}$ является также решением и такой задачи

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}(\alpha_1+\alpha_2j^2)u_j\to max,\ \hat{\lambda}\sum_{j\in\mathbb{Z}}j^4u_j+\sum_{|j|\leqslant N}\hat{\lambda}_ju_j\leqslant\hat{\lambda}+\delta^2\sum_{|j|\leqslant N}\hat{\lambda}_j,u_j\geqslant 0. \quad (4)$$

Положим

$$\hat{x}_j=\begin{cases}y_0, & j=0,\\ \frac{\hat{\lambda}_j}{\hat{\lambda}j^4+\hat{\lambda}_j}y_j, & 1\leqslant|j|\leqslant p_0,\\ 0, & |j|>p_0.\end{cases}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что для всех $x(\cdot)\in W_2^2(\mathbb{T})$ имеет место равенство

$$\hat{\lambda}\sum_{j\in\mathbb{Z}}j^4|x_j-\hat{x}_j|^2+\sum_{|j|\leqslant N}\hat{\lambda}_j|x_j-\hat{x}_j|^2+\hat{\lambda}\sum_{j\in\mathbb{Z}}j^4|\hat{x}_j|^2+\sum_{|j|\leqslant N}\hat{\lambda}_j|\hat{x}_j-y_j|^2=$$

$$=\hat{\lambda}\sum_{j\in\mathbb{Z}}j^4|x_j|^2+\sum_{|j|\leqslant N}\hat{\lambda}_j|x_j-y_j|^2.$$

Если $x(\cdot)\in W_2^2(\mathbb{T})$ и $|x_j-y_j|\leqslant\delta$, то, положив $v_j=|x_j-\hat{x}_j|^2$, будем иметь

$$\hat{\lambda}\sum_{j\in\mathbb{Z}}j^4v_j+\sum_{|j|\leqslant N}\hat{\lambda}_jv_j\leqslant\hat{\lambda}\sum_{j\in\mathbb{Z}}j^4|x_j|^2+\sum_{|j|\leqslant N}\hat{\lambda}_j|x_j-y_j|^2\leqslant\hat{\lambda}+\delta\sum_{|j|\leqslant N}\hat{\lambda}_j.$$

Оценим метод $\alpha_1\sum_{|j|\leqslant N}\hat{x}_je^{ijt}+\alpha_2\sum_{|j|\leqslant N}ij\hat{x}_je^{ijt}$. Имеем

$$\alpha_1\|x(t)-\sum_{|j|\leqslant N}\hat{x}_je^{ijt}\|^2_{L_2(\mathbb{T})}+\alpha_2\|x'(t)-\sum_{|j|\leqslant N}ij\hat{x}_je^{ijt}\|^2_{L_2(\mathbb{T})}=\alpha_1\sum_{j\in\mathbb{Z}}v_j+\alpha_2\sum_{j\in\mathbb{Z}}j^2v_j\leqslant$$

$$\leqslant sup\left\{\alpha_1\sum_{j\in\mathbb{Z}}u_j+\alpha_2\sum_{j\in\mathbb{Z}}j^2u_j:\hat{\lambda}\sum_{j\in\mathbb{Z}}j^4u_j+\sum_{|j|\leqslant N}\hat{\lambda}_ju_j\leqslant\hat{\lambda}+\delta^2\sum_{|j|\leqslant N}\hat{\lambda}_j,u_j\geqslant 0\right\}.$$

Поскольку значение экстремальной задачи в правой части, являющейся задачей (4), совпадает со значением задачи (2), то для погрешности оптимального восстановления рассматриваемого метода получаем оценку сверху, совпадающую с оценкой снизу (3). Таким образом,

$$E((x(\cdot),x'(\cdot)),W_2^2(\mathbb{T}),F_\delta^N)=$$

$$=\frac{\left(\alpha_1+\alpha_2(p_0+1)^2+\delta^2\sum\limits_{|j|\leqslant p_0}((p_0+1)^4(\alpha_1+j^2\alpha_2)-j^4\alpha_1-j^4\alpha_2(p_0+1)^2)\right)^{1/2}}{(p_0+1)^2}$$

а метод

$$\alpha_1 x(\cdot) + \alpha_2 x'(\cdot) \approx \alpha_1 \sum_{|j| \leqslant N} \hat{x}_j e^{ijt} + \alpha_2 \sum_{|j| \leqslant N} ij\hat{x}_j e^{ijt}$$

является оптимальным.