МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра общих проблем управления

Курсовая работа

Одновременное восстановление функции и ее производных по ее приближенным коэффициентам Фурье.

Выполнил студент 4 курса
Есипов С.В.

Научный руководитель
Осипенко К.Ю.

Москва 2011

Обозначим через $\mathbb{T}$ единичную окружность, реализованную как отрезок $[-\pi, \pi]$ с идентифицированными концами. Через $L_2(\mathbb{T})$ обозначим совокупность функций $x(\cdot)$ на $\mathbb{T}$, суммируемых с квадратом, с нормой

$$\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |x(t)|^2 dt\right)^{1/2}.$$

Класс $W_2^n(\mathbb{T})$ — это совокупность 2π-периодических функций $x(\cdot)$, у которых первые $n-1$ производных абсолютно непрерывны и $\|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leqslant 1$.

На этом классе рассмотрим задачу восстановления функции $x(\cdot)$ и ее первых $n-1$ производных в метрике $L_2(\mathbb{T})$ по конечному набору ее коэффициентов Фурье

$$x_j = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} x(t)e^{-ijt}dt,$$

заданных с погрешностью. Точнее говоря, будем предполагать, что для каждой функции $x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{T})$ нам известны числа y_j, $|j| \leqslant N$, такие, что

$$|x_j - y_j| \leqslant \delta, \ |j| \leqslant N, \ \delta > 0. \tag{1}$$

Здесь информационным оператором является многозначное отображение F_δ^N, ставящее в соответствие каждой функции $x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{T})$ множество $F_\delta^N x(\cdot) = \{y_j\}_{|j|\leqslant N}$, где y_j удовлетворяют условию (1). Задача заключается в нахождении величины

$$E_N(\alpha, W_2^n(\mathbb{T}), \delta) = \inf_{m\colon \mathbb{C}^{2N+1}\to (L_2(\mathbb{T}))^n} \sup_{\substack{x(\cdot)\in W_2^n(\mathbb{T}) \\ y\in F_\delta^N x(\cdot)}} \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \|x^{(k)}(\cdot) - m_k(y)(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{T})}}$$

и соответствующего оптимального метода, то есть метода на котором достигается нижняя грань. Здесь $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1})$ неотрицательные весовые коэффициенты, выбирая которые можно отдавать предпочтение либо более точному восстановлению самой функции, либо некоторых ее производных, а $m(y) = (m_0(y), \ldots, m_{n-1}(y))$.

Теорема. Погрешность оптимального восстановления

$$E_N(\alpha, W_2^n(\mathbb{T}), \delta) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(p_0+1)^{n-k}} \sqrt{\alpha_k \left(1 + \delta^2 \sum_{|j|\leqslant p_0} \left((p_0+1)^{2(n-k)} j^{2k} - j^{2n}\right)\right)},$$

где

$$p_0 = \max\left\{p \in \mathbb{Z}_+ : \delta^2 \sum_{|j|\leqslant p} j^{2n} < 1, 0 \leqslant p \leqslant N\right\}.$$

Методы

$$m_k(y)(t) = \sum_{|j|\leqslant N} (ij)^k a_j y_j e^{ijt}$$

являются оптимальными, где

$$a_j = \begin{cases} 1, & j=0, \\ \frac{\hat{\lambda}_j}{\hat{\lambda}_j + j^{2n}\hat{\lambda}}, & 0 < |j| \leqslant p_0, \\ 0, & |j| > p_0, \end{cases}$$

$$\hat{\lambda} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_k}{(p_0+1)^{2(n-k)}},$$

$$\hat{\lambda}_j = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left(\alpha_k j^{2k} - \frac{j^{2n}\alpha_k}{(p_0+1)^{2(n-k)}}\right), & |j| \leqslant p_0, \\ 0, & p_0+1 \leqslant |j| \leqslant N. \end{cases}$$

Доказательство: Для величины

$$e(\alpha, W_2^n(\mathbb{T}), \delta, m(y)) = \sup_{\substack{x(\cdot)\in W_2^n(\mathbb{T}) \\ y \in F_\delta^N x(\cdot)}} \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \|x^{(k)}(\cdot) - m_k(y)(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{T})}} \qquad (2)$$

получим оценку снизу. Пусть $x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{T})$ и $|x_j| \leqslant \delta$, $|j| \leqslant N$. Тогда

$$2\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \|x^{(k)}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{T})} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \|x^{(k)}(\cdot) - m_k(y)(0) - (-x^{(k)}(\cdot) - m_k(y)(0))\|^2_{L_2(\mathbb{T})} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \|x^{(k)}(\cdot) - m_k(y)(0)\|^2_{L_2(\mathbb{T})} + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \| - x^{(k)}(\cdot) - m_k(y)(0)\|^2_{L_2(\mathbb{T})} \leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{k=0}^{n-1} \sup_{\substack{x(\cdot)\in W_2^n(\mathbb{T}) \\ |x_j|\leqslant\delta,\ |j|\leqslant N}} \alpha_k \|x^{(k)}(\cdot) - m_k(y)(0)\|^2_{L_2(\mathbb{T})} \leqslant 2e^2(\alpha, W_2^n(\mathbb{T}), \delta, m(y)).$$

Неравенство верно для любого метода $m = (m_0, \ldots, m_{n-1})$, а значит

$$E_N(\alpha, W_2^n(\mathbb{T}), \delta) \geqslant \sup_{\substack{x(\cdot)\in W_2^n(\mathbb{T}) \\ y \in F_\delta^N x(\cdot)}} \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \|x^{(k)}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{T})}}.$$

Правую часть при помощи равенства Парсеваля и возведения в квадрат можно переписать в виде следующей экстремальной задачи

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\alpha_k \sum_{j\in\mathbb{Z}} j^{2k} u_j\right) \to \max, \quad \sum_{j\in\mathbb{Z}} j^{2n} u_j \leqslant 1, \quad 0 \leqslant u_j \leqslant \delta^2,\ |j| \leqslant N, \qquad (3)$$

где $u_j = |x_j|^2,\ j \in \mathbb{Z}$.

Получили задачу линейного программирования, для ее решения достаточно найти такие $\hat{\lambda} \geqslant 0, \hat{\lambda}_j \geqslant 0, |j| \leqslant N$, и допустимую последовательность $\{\hat{u}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, для которых при всех $u_j \geqslant 0, j \in \mathbb{Z}$, справедливо

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(-\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k j^{2k} + \hat{\lambda} j^{2n} + \chi_j\right) u_j \geqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(-\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k j^{2k} + \hat{\lambda} j^{2n} + \chi_j\right) \hat{u}_j \quad (a)$$

и

$$\hat{\lambda}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} j^{2n}\hat{u}_j - 1\right) = 0, \quad \hat{\lambda}_j(\hat{u}_j - \delta^2) = 0, |j| \leqslant N, \tag{b}$$

где $\chi_j = \hat{\lambda}_j$, если $|j| \leqslant N$, и нулю в остальных случаях.

Пусть

$$p_0 = \max\left\{p \in \mathbb{Z}_+ : \delta^2 \sum_{|j|\leqslant p} j^{2n} < 1, 0 \leqslant p \leqslant N\right\}.$$

Положим

$$\hat{\lambda} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_k}{(p_0+1)^{2(n-k)}},$$

$$\hat{\lambda}_j = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(\alpha_k j^{2k} - \frac{j^{2n}\alpha_k}{(p_0+1)^{2(n-k)}}\right), & |j| \leqslant p_0, \\ 0, & p_0+1 \leqslant |j| \leqslant N, \end{cases}$$

$$\hat{u}_j = \begin{cases} \delta^2, & |j| \leqslant p_0, \\ \frac{1-\delta^2\sum_{|k|\leqslant p_0} k^{2n}}{2(p_0+1)^{2n}}, & |j| = p_0+1, \\ 0, & |j| > p_0+1. \end{cases}$$

Убедимся, что последовательность $\hat{u} = \{\hat{u}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ допустима и выполняются условия (a) и (b):

1. $$\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(-\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k j^{2k} + \hat{\lambda} j^{2n} + \chi_j\right) u_j =$$
$$\sum_{|j|>p_0+1}\left(-\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k j^{2k} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\alpha_k j^{2n}}{(p_0+1)^{2(n-k)}}\right) u_j \geqslant 0.$$

2. $$\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(-\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k j^{2k} + \hat{\lambda} j^{2n} + \chi_j\right) \hat{u}_j = 0.$$

3. Покажем так же, что $\hat{u}_j \leqslant \delta^2$ при $p_0 < N$ и $|j| = p_0+1$. Предположим обратное, тогда
$$\frac{1-\delta^2\sum_{|k|\leqslant p_0} k^{2n}}{2(p_0+1)^{2n}} > \delta^2$$
$$1 - \delta^2\sum_{|k|\leqslant p_0} k^{2n} > 2\delta^2(p_0+1)^{2n}$$
и, следовательно, $1 > \delta^2\sum_{|k|\leqslant p_0+1} k^{2n}$, что противоречит определению p_0.

Подставляя $\hat{u}$ в максимизируемый функционал и извлекая квадратный корень, получаем

$$E_N(\alpha, W_2^n(\mathbb{T}), \delta) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(p_0+1)^{n-k}} \sqrt{\alpha_k \left(1 + \delta^2 \sum_{|j|\leqslant p_0} \left((p_0+1)^{2(n-k)} j^{2k} - j^{2n}\right)\right)} =$$

$$= \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\alpha_k}{(p_0+1)^{2(n-k)}} + \delta^2 \sum_{|j|\leqslant p_0} \left(\alpha_k j^{2k} - \frac{j^{2n}\alpha_k}{(p_0+1)^{2(n-k)}} \right) \right)} = \sqrt{\hat{\lambda} + \delta^2 \sum\nolimits_{|j|\leqslant p_0} \hat{\lambda}_j}.$$

Класс оптимальных методов будем искать в следующем виде

$$m_k(y)(t) = \sum_{|j|\leqslant N} (ij)^k a_{kj} y_j e^{ijt}.$$

Тогда с помощью равенства Парсеваля квадрат задачи, стоящий в правой части (2) можно записать в виде

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \left(\sum_{|j|\leqslant N} j^{2k} |x_j - a_{kj} y_j|^2 + \sum_{|j|>N} j^{2k} |x_j|^2 \right) \to \max,$$

$$|x_j - y_j|^2 \leqslant \delta^2, \quad \sum_{j\in\mathbb{Z}} j^{2n} |x_j|^2 \leqslant 1.$$

Положив $z_j = x_j - y_j$ и применив неравенство Коши-Буняковского, имеем для $0 < |j| \leqslant p_0$

$$\alpha_k j^{2k} |x_j(1-a_{kj}) + a_{kj} z_j|^2 = \alpha_k j^{2k} \left| \frac{x_j(1-a_{kj})\sqrt{\hat{\lambda}} j^n}{\sqrt{\hat{\lambda}} j^n} + \frac{a_{kj} z_j \sqrt{\hat{\lambda}_j}}{\sqrt{\hat{\lambda}_j}} \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \alpha_k j^{2k} \left(\frac{|1-a_{kj}|^2}{j^{2n}\hat{\lambda}} + \frac{|a_{kj}|^2}{\hat{\lambda}_j} \right) \left(|x_j|^2 \hat{\lambda} j^{2n} + |z_j|^2 \hat{\lambda}_j \right).$$

Отдельно рассмотрим случаи $j = 0$ и $j > p_0$. В них положим $a_{kj} = 1$ и $a_{kj} = 0$, соответственно.

Тогда весь функционал можно оценить

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \left(\sum_{|j|\leqslant N} j^{2k} |x_j - a_{kj} y_j|^2 + \sum_{|j|>N} j^{2k} |x_j|^2 \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \left(\sum_{|j|\leqslant p_0} j^{2k} |x_j - a_{kj} y_j|^2 + \sum_{|j|>p_0} j^{2k} |x_j|^2 \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \left(\sum_{|j|\leqslant p_0} j^{2k} S_{a_{kj}} \left(|x_j|^2 \hat{\lambda} j^{2n} + |z_j|^2 \hat{\lambda}_j \right) + \sum_{|j|>p_0} j^{2k} S_{a_{kj}} \left(|x_j|^2 \hat{\lambda} j^{2n} \right) \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{j\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k j^{2k} S_{a_{kj}}\right) \left(\hat{\lambda} + \delta^2 \sum_{|j|\leqslant p_0} \hat{\lambda}_j\right),$$

где $S_{a_{kj}} = \left(\frac{|1-a_{kj}|^2}{\max\{j,1\}^{2n}\hat{\lambda}} + \frac{|a_{kj}|^2}{\overline{\chi}_j}\right)$, а $\overline{\chi}_j = \hat{\lambda}_j$, если $|j| \leqslant p_0$, и единице в остальных случаях.

Значит метод является оптимальным, если a_{kj} удовлетворяет неравенству

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k j^{2k} S_{a_{kj}} \leqslant 1, \quad \text{при} \quad \forall j. \tag{4}$$

Выбранные нами значений a_{kj} при $j = 0$ и $j > p_0$ удовлетворяют неравенству

$$j = 0: \qquad \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \frac{0^{2k}}{\hat{\lambda}_0} = \frac{\alpha_0}{\hat{\lambda}_0} = 1,$$

$$j > p_0: \qquad \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k j^{2k} \frac{1}{j^{2n}\hat{\lambda}} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k j^{2k}}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_k j^{2n}}{(p_0+1)^{2(n-k)}}},$$

$$(p_0+1)^{2(n-k)} \leqslant j^{2(n-k)}, \quad \text{при} \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1$$

$$\alpha_k j^{2k} \leqslant \frac{\alpha_k j^{2n}}{(p_0+1)^{2(n-k)}}, \quad \text{при} \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1$$

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k j^{2k}}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_k j^{2n}}{(p_0+1)^{2(n-k)}}} \leqslant 1.$$

Покажем, что множество a_{kj} непусто при $0 < |j| \leqslant p_0$. Для этого выделим полные квадраты

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k j^{2k} \left| a_{kj} - \frac{\hat{\lambda}_j}{\hat{\lambda}_j + j^{2n}\hat{\lambda}} \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{j^{2n}\hat{\lambda}\hat{\lambda}_j}{\hat{\lambda}_j + j^{2n}\hat{\lambda}} + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k j^{2k} \left(\left(\frac{\hat{\lambda}_j}{\hat{\lambda}_j + j^{2n}\hat{\lambda}} \right)^2 - \frac{\hat{\lambda}_j}{\hat{\lambda}_j + j^{2n}\hat{\lambda}} \right).$$

Слева неотрицательная величина, оценим выражение справа

$$\frac{\hat{\lambda}_j}{\hat{\lambda}_j + j^{2n}\hat{\lambda}} \left(j^{2n}\hat{\lambda} + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k j^{2k} \left(\frac{\hat{\lambda}_j}{\hat{\lambda}_j + j^{2n}\hat{\lambda}} - 1 \right) \right) =$$

$$= \frac{\hat{\lambda}_j}{(\hat{\lambda}_j + j^{2n}\hat{\lambda})^2} \left(\left(j^{2n}\hat{\lambda} \right) \left(\hat{\lambda}_j + j^{2n}\hat{\lambda} \right) + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k j^{2k} \left(\hat{\lambda}_j - \hat{\lambda}_j - j^{2n}\hat{\lambda} \right) \right) =$$

$$= \frac{j^{2n}\hat{\lambda}\hat{\lambda}_j}{(\hat{\lambda}_j + j^{2n}\hat{\lambda})^2} \left(-\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k j^{2k} + j^{2n}\hat{\lambda} + \hat{\lambda}_j \right) = 0.$$

Следовательно $a_{kj} = \frac{\hat{\lambda}_j}{\hat{\lambda}_j + j^{2n}\hat{\lambda}}$ при $0 < |j| \leqslant p_0$.