

О НАИЛУЧШЕМ ВЫБОРЕ ИНФОРМАЦИИ В ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ ПО СПЕКТРУ

Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко

В работе рассматривается следующая задача. Пусть имеется возможность измерить (вообще говоря, приближенно) преобразование Фурье функции на конечном интервале заданной длины. Как по этой информации наилучшим образом восстановить саму функцию и ее производные и как наилучшим образом выбрать интервал? Перейдем к точным постановкам.

Положим

$$\mathcal{W}_2^r(\mathbb{R}) = \{ x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}) : x^{(r-1)}(\cdot) \in \text{LAC}(\mathbb{R}), x^{(r)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}) \},$$

где r — натуральное число и $\text{LAC}(\mathbb{R})$ — совокупность всех локально абсолютно непрерывных функций на \mathbb{R} . Это стандартное соболевское пространство функций \mathbb{R} . Обозначим через $W_2^r(\mathbb{R})$ соответствующий соболевский класс, т. е. совокупность функций $x(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{R})$, для которых $\|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq 1$.

Пусть для каждой функции $x(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{R})$ известно приближенно ее преобразование Фурье на интервале $\Delta_\sigma^a = (a - \sigma, a + \sigma)$, где $\sigma > 0$ и $a \in \mathbb{R}$, т. е. известна функция $y(\cdot) \in L_2(\Delta_\sigma^a)$ такая, что

$$\|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\Delta_\sigma^a)} \leq \delta, \quad \delta \geq 0.$$

Погрешность оптимального восстановления производной $x^{(k)}(\cdot)$, $0 \leq k < r$ определяется следующим образом

$$E_\sigma^a(D^k, W_2^r(\mathbb{R}), \delta) = \inf_m \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{R}), y(\cdot) \in L_2(\Delta_\sigma^a) \\ \|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\Delta_\sigma^a)} \leq \delta}} \|x^{(k)}(\cdot) - m(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

где нижняя грань берется по всем отображениям (методам восстановления) $m: L_2(\Delta_\sigma^a) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$. Метод, на котором достигается нижняя грань называется *оптимальным*. Нас интересует оптимальный выбор интервала длины 2σ , т. е. задача о нахождении величины

$$E_\sigma(D^k, W_2^r(\mathbb{R}), \delta) = \inf_{a \in \mathbb{R}} E_\sigma^a(D^k, W_2^r(\mathbb{R}), \delta).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №07-01-90102, №06-01-00530, №08-01-00450) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (НШ-3233.2008.1).

Покажем сначала, что если $0 \notin \Delta_\sigma^a$, то $E_\sigma^a(D^k, W_2^r(\mathbb{R}), \delta) = \infty$. Действительно, нетрудно показать (см., например, лемму 1 из [1]), что

$$(1) \quad E_\sigma^a(D^k, W_2^r(\mathbb{R}), \delta) \geq \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{R}) \\ \|Fx(\cdot)\|_{L_2(\Delta_\sigma^a)} \leq \delta}} \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Пусть $a \leq -\sigma$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ рассмотрим функцию $\widehat{x}(\cdot)$ такую, что

$$F\widehat{x}(t) = \begin{cases} \sqrt{2\pi(2r+1)}\varepsilon^{-r-1/2}, & t \in (0, \varepsilon), \\ 0, & t \notin (0, \varepsilon). \end{cases}$$

Тогда, используя теорему Планшереля и свойства преобразования Фурье, будем иметь

$$\|\widehat{x}^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{2\pi} \|F\widehat{x}^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} t^{2r} |F\widehat{x}(t)|^2 dt = 1.$$

Поскольку $F\widehat{x}(\cdot) = 0$ на $L_2(\Delta_\sigma^a)$, то из (1) следует, что

$$\begin{aligned} E_\sigma^a(D^k, W_2^r(\mathbb{R}), \delta) &\geq \|\widehat{x}^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} t^{2k} |F\widehat{x}(t)|^2 dt \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{\frac{2r+1}{2k+1}} \frac{1}{\varepsilon^{r-k}}. \end{aligned}$$

В силу произвольности ε получаем

$$E_\sigma^a(D^k, W_2^r(\mathbb{R}), \delta) \geq \|\widehat{x}^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} = \infty.$$

Случай, когда $a \geq \sigma$ рассматривается аналогично.

Пусть теперь $|a| < \sigma$. Воспользуемся схемой построения оптимального метода и нахождения погрешности восстановления, изложенной в [2], но применительно к нашему случаю. Для этого надо рассмотреть экстремальную задачу

$$(2) \quad \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \rightarrow \max, \quad \|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \leq 1, \quad \|Fx(\cdot)\|_{L_2(\Delta_\sigma^a)}^2 \leq \delta^2.$$

Далее следует найти такие $\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2 \geq 0$, что значение задачи

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \rightarrow \max, \quad \widehat{\lambda}_1 \|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 + \widehat{\lambda}_2 \|Fx(\cdot)\|_{L_2(\Delta_\sigma^a)}^2 \leq \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 \delta^2$$

совпадает со значением задачи (2). Если при этом для любого $y(\cdot) \in L_2(\Delta_\sigma^a)$ существует функция $\widehat{x}_y(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, являющаяся решением экстремальной задачи

$$\widehat{\lambda}_1 \|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 + \widehat{\lambda}_2 \|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\Delta_\sigma^a)}^2 \rightarrow \min, \quad x(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{R}),$$

то метод

$$\widehat{m}(y)(\cdot) = \widehat{x}_y^{(k)}(\cdot)$$

является оптимальным, а сама погрешность оптимального восстановления равна $\sqrt{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 \delta^2}$.

Согласно теореме Планшереля, задача (2) в образах Фурье запишется в виде

$$(3) \quad \int_{\mathbb{R}} \tau^{2k} u(\tau) d\tau \rightarrow \max, \quad \int_{\mathbb{R}} \tau^{2r} u(\tau) d\tau \leq 1, \quad 2\pi \int_{\Delta_\sigma^a} u(\tau) d\tau \leq \delta^2,$$

где $u(\cdot) = (2\pi)^{-1}|Fx(\cdot)|^2$. Нетрудно показать, что в этой задаче решение не существует, поэтому рассмотрим следующее ее расширение:

$$(4) \quad \int_{\mathbb{R}} \tau^{2k} d\mu(\tau) \rightarrow \max, \quad \int_{\mathbb{R}} \tau^{2r} d\mu(\tau) \leq 1, \quad 2\pi \int_{\Delta_\sigma^a} d\mu(\tau) \leq \delta^2,$$

на множество всех неотрицательных мер $d\mu(\cdot)$ на прямой.

Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид

$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) = \int_{\mathbb{R}} (-\tau^{2k} + \lambda_1 \tau^{2r} + 2\pi \lambda_2 \chi_\sigma^a(t)) d\mu(\tau),$$

где $\chi_\sigma^a(\cdot)$ — характеристическая функция интервала Δ_σ^a . Достаточным условием для того, чтобы мера $d\hat{\mu}(\cdot)$ являлась решением задачи (4) (см. [2]) является существование таких $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2 \geq 0$, для которых

$$(a) \quad \min_{d\mu(\cdot) \geq 0} \mathcal{L}(d\mu(\cdot), \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) = \mathcal{L}(d\hat{\mu}(\cdot), \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2),$$

$$(b) \quad \hat{\lambda}_1 \left(\int_{\mathbb{R}} \tau^{2r} d\mu(\tau) - 1 \right) = 0, \quad \hat{\lambda}_2 \left(2\pi \int_{\Delta_\sigma^a} d\mu(\tau) - \delta^2 \right) = 0.$$

При этом значение задачи (4) совпадает со значением задачи

$$(5) \quad \int_{\mathbb{R}} \tau^{2k} d\mu(\tau) \rightarrow \max, \quad \hat{\lambda}_1 \int_{\mathbb{R}} \tau^{2r} d\mu(\tau) + \hat{\lambda}_2 2\pi \int_{\Delta_\sigma^a} d\mu(\tau) \leq \hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 \delta^2.$$

Пусть $0 < k < r$. Рассмотрим функцию, заданную параметрически

$$\begin{cases} y = \tau^{2k}, \\ x = \tau^{2r}. \end{cases}$$

Тогда $y = x^{k/r}$, $0 < k/r < 1$. Касательная к графику этой функции в точке $(\tau_0^{2r}, \tau_0^{2k})$, $\tau_0 > 0$, имеет вид

$$y - \tau_0^{2k} = \frac{k}{r} \tau_0^{2k-2r} (x - \tau_0^{2r}).$$

Так как функция $y = x^{k/r}$ вогнута, то для всех точек ее графика имеет место неравенство

$$-y + \frac{k}{r} \tau_0^{2k-2r} x + \tau_0^{2k} \frac{r-k}{r} \geq 0.$$

Положим

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{k}{r} \tau_0^{2k-2r}, \quad \hat{\lambda}_2 = \frac{1}{2\pi} \tau_0^{2k} \frac{r-k}{r}.$$

Тогда для всех τ

$$-\tau^{2k} + \widehat{\lambda}_1 \tau^{2r} + 2\pi \widehat{\lambda}_2 \geq 0.$$

Нетрудно убедиться, что

$$-\tau^{2k} + \widehat{\lambda}_1 \tau^{2r} \geq 0$$

при всех $|\tau| \geq \widehat{\sigma}$, где

$$\widehat{\sigma} = \widehat{\lambda}_1^{-\frac{1}{2(r-k)}} = \left(\frac{r}{k}\right)^{\frac{1}{2(r-k)}} \tau_0.$$

Предположим, что $\widehat{\sigma} \leq \sigma_a = \min(a - \sigma, a + \sigma)$. Тогда $\tau_0 \in \Delta_\sigma^a$ и для всех $d\mu(\cdot) \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(d\mu(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) &= \int_{\Delta_\sigma^a} (-\tau^{2k} + \widehat{\lambda}_1 \tau^{2r} + 2\pi \widehat{\lambda}_2) d\mu(\tau) + \\ &+ \int_{\mathbb{R} \setminus \Delta_\sigma^a} (-\tau^{2k} + \widehat{\lambda}_1 \tau^{2r}) d\mu(\tau) \geq 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим меру, сосредоточенную в точке τ_0 (т. е. δ -функцию в этой точке):

$$d\widehat{\mu}(\tau) = A\delta(\tau - \tau_0)$$

и выберем A и τ_0 из условий:

$$(6) \quad \int_{\mathbb{R}} \tau^{2r} d\widehat{\mu}(\tau) = 1, \quad 2\pi \int_{\Delta_\sigma^a} d\widehat{\mu}(\tau) = \delta^2.$$

Таким образом,

$$A = \frac{\delta^2}{2\pi}, \quad \tau_0 = \left(\frac{2\pi}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{2r}}.$$

Кроме того, ясно, что $\mathcal{L}(d\widehat{\mu}(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = 0$ (и тем самым это минимальное значение функции Лагранжа). Таким образом, условия (a) и (b) выполнены и для случая, когда

$$\sigma_a \geq \widehat{\sigma} = \left(\frac{r}{k}\right)^{\frac{1}{2(r-k)}} \tau_0 = \left(\frac{r}{k}\right)^{\frac{1}{2(r-k)}} \left(\frac{2\pi}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{2r}},$$

мера $\widehat{\mu}(\cdot)$ — решение задачи (4) и значение этой задачи совпадает со значением задачи (5).

Рассмотрим теперь случай, когда

$$\sigma_a < \widehat{\sigma} = \left(\frac{r}{k}\right)^{\frac{1}{2(r-k)}} \left(\frac{2\pi}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{2r}}.$$

Прямая $y = \sigma_a^{2(k-r)} x$ проходит через точки $(0, 0)$ и $(\sigma_a^{2k}, \sigma_a^{2r})$. Найдем точку $\widehat{\tau}$ такую, что касательная к кривой $y = x^{k/r}$ в точке $x = \widehat{\tau}^{2r}$ параллельна прямой $y = \sigma_a^{2(k-r)} x$. Имеем

$$\frac{k}{r} (\widehat{\tau}^{2r})^{k/r-1} = \sigma_a^{2(k-r)}.$$

Отсюда

$$\widehat{\tau} = \left(\frac{k}{r}\right)^{\frac{1}{2(r-k)}} \sigma_a.$$

Тем самым уравнение касательной имеет вид

$$(7) \quad y = \widehat{\lambda}_1 x + 2\pi \widehat{\lambda}_2,$$

где

$$\widehat{\lambda}_1 = \sigma_a^{2(k-r)}, \quad \widehat{\lambda}_2 = \frac{1}{2\pi} \frac{r-k}{r} \left(\frac{k}{r}\right)^{\frac{k}{r-k}} \sigma_a^{2k}.$$

В силу вогнутости кривой $y = x^{k/r}$ ее точки лежат не выше прямой (7) и тем самым для них выполняется неравенство

$$-y + \widehat{\lambda}_1 x + 2\pi \widehat{\lambda}_2 \geq 0.$$

Кроме того, $-t^{2k} + \widehat{\lambda}_1 t^{2r} \geq 0$ при $t \geq \sigma_a$. Таким образом, для всех $d\mu(\cdot) \geq 0$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(d\mu(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) &= \int_{\Delta_\sigma^a} (-\tau^{2k} + \widehat{\lambda}_1 \tau^{2r} + 2\pi \widehat{\lambda}_2) d\mu(\tau) + \\ &+ \int_{\mathbb{R} \setminus \Delta_\sigma^a} (-\tau^{2k} + \widehat{\lambda}_1 \tau^{2r}) d\mu(\tau) \geq 0. \end{aligned}$$

Положим теперь

$$d\widehat{\mu}(t) = A\delta(t - \widehat{\tau}) + B\delta(t + \sigma_a \operatorname{sign} a),$$

где $A > 0$ и $B > 0$ определим из тех же условий (6). Имеем

$$A\widehat{\tau}^{2r} + B\sigma_a^{2r} = 1, \quad A = \frac{\delta^2}{2\pi}.$$

Отсюда

$$B = \frac{1}{\sigma_a^{2r}} - \frac{\delta^2}{2\pi} \left(\frac{k}{r}\right)^{\frac{r}{r-k}}.$$

Легко убедиться, что из условия $\sigma_a < \widehat{\sigma}$ вытекает, что $B > 0$. Остается заметить, что $\mathcal{L}(d\widehat{\mu}(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = 0$. Следовательно, задача (4) решена при всех $\sigma > 0$ и $0 < a < \sigma$. И, кроме того, доказано, что ее значение совпадает со значением задачи (5).

Аппроксимируя (стандартным образом) меру, сосредоточенную в точке, δ -образной последовательностью, получаем, что значения задачи (3) и задачи

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \tau^{2k} u(\tau) d\tau \rightarrow \max, \quad \int_{\mathbb{R}} (\widehat{\lambda}_1 \tau^{2r} + 2\pi \widehat{\lambda}_2 \chi_\sigma(\tau) u(\tau)) d\tau \leq \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 \delta^2, \\ u(\cdot) \in L_1(\mathbb{R}), \quad u(\tau) \geq 0 \text{ почти всюду на } \mathbb{R}, \end{aligned}$$

совпадают.

Рассмотрим теперь для $y(\cdot) \in L_2(\Delta_\sigma^a)$ экстремальную задачу

$$\widehat{\lambda}_1 \|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 + \widehat{\lambda}_2 \|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\Delta_\sigma^a)}^2 \rightarrow \min.$$

Переходя к преобразованию Фурье и используя теорему Планшереля, нетрудно получить решение этой задачи и построить оптимальный метод восстановления. При этом погрешность оптимального метода выражается равенством

$$E_\sigma^a(D^k, W_2^r(\mathbb{R}), \delta) = \sqrt{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 \delta^2}.$$

Отсюда получаем, что

$$E_\sigma^a(D^k, W_2^r(\mathbb{R}), \delta) = \begin{cases} \sigma_a^k \sqrt{\frac{r-k}{2\pi r} \left(\frac{k}{r}\right)^{\frac{k}{r-k}} \delta^2 + \frac{1}{\sigma_a^{2r}}}, & \sigma_a < \widehat{\sigma}, \\ \left(\frac{\delta}{\sqrt{2\pi}}\right)^{1-k/r}, & \sigma_a \geq \widehat{\sigma}, \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что минимальное значение этой величины достигается при $a = 0$.

Рассмотрим теперь случай $k = 0$. Функция Лагранжа задачи (3) в этой ситуации имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(d\mu(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) &= \int_{\Delta_\sigma^a} (-1 + \lambda_1 \tau^{2r} + 2\pi \lambda_2) d\mu(\tau) + \\ &+ \int_{\mathbb{R} \setminus \Delta_\sigma^a} (-1 + \lambda_1 \tau^{2r}) d\mu(\tau). \end{aligned}$$

Положим

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{1}{\sigma_a^{2r}}, \quad \widehat{\lambda}_2 = \frac{1}{2\pi}.$$

Для всех $d\mu(\cdot) \geq 0$ справедливо неравенство

$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = \widehat{\lambda}_1 \int_{\Delta_\sigma^a} \tau^{2r} d\mu(\tau) + \int_{\mathbb{R} \setminus \Delta_\sigma^a} \left(-1 + \left(\frac{\tau}{\sigma_a}\right)^{2r}\right) d\mu(\tau) \geq 0.$$

Для

$$d\widehat{\mu}(t) = \frac{\delta^2}{2\pi} \delta(t) + \frac{1}{\sigma_a^{2r}} \delta(t + \sigma_a \operatorname{sign} a)$$

выполняются условия

$$\int_{\mathbb{R}} \tau^{2r} d\widehat{\mu}(\tau) = 1, \quad 2\pi \int_{\Delta_\sigma^a} d\widehat{\mu}(\tau) = \delta^2,$$

а кроме того, $\mathcal{L}(\widehat{\mu}(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = 0$. Рассуждая аналогично предыдущему, получаем, что

$$(8) \quad E_\sigma^a(D^0, W_2^r(\mathbb{R}), \delta) = \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi} + \frac{1}{\sigma_a^{2r}}}.$$

Минимальное значение этой величины также достигается при $a = 0$.

Тем самым доказана

Теорема 1. Пусть $r \in \mathbb{N}$, $0 < k < r$, $0 < \sigma < \infty$, $\delta > 0$ и

$$\hat{\sigma} = \left(\frac{r}{k}\right)^{\frac{1}{2(r-k)}} \left(\frac{2\pi}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{2r}}.$$

Тогда

$$E^\sigma(D^k, W_2^r(\mathbb{R}), \delta) = \begin{cases} \sigma^k \sqrt{\frac{r-k}{2\pi r} \left(\frac{k}{r}\right)^{\frac{k}{r-k}} \delta^2 + \frac{1}{\sigma^{2r}}}, & \sigma < \hat{\sigma}, \\ \left(\frac{\delta}{\sqrt{2\pi}}\right)^{1-k/r}, & \sigma \geq \hat{\sigma}. \end{cases}$$

Если $k = 0$, то

$$E_\sigma^a(D^0, W_2^r(\mathbb{R}), \delta) = \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi} + \frac{1}{\sigma_a^{2r}}}.$$

Из доказанного следует, что если приближенная информация о преобразовании Фурье задана на интервале $(a - \sigma, a + \sigma)$, то, во-первых, при $|a| \geq \sigma$ эта информация оказывается бесполезной, так как погрешность оптимального восстановления в этом случае равна ∞ , а, во-вторых, если $|a| < \sigma$, то погрешность оптимального восстановления такая же, как для случая задания преобразования Фурье на интервале $(-\sigma_a, \sigma_a)$ (то есть часть информации оказывается лишней). Таким образом, наилучшим интервалом длины 2σ является симметричный интервал $(-\sigma, \sigma)$. Но и в этом случае, если $\sigma \geq \hat{\sigma}$ его можно уменьшить до интервала $(-\hat{\sigma}, \hat{\sigma})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью. Матем. сб., **193**. №3. 79–100 (2002).
- [2] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление линейных операторов по неточной информации. Сб. трудов конференции "Выпуклый анализ". Владикавказ. 2008 (в печати).

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ РАДИОТЕХНИКИ, ЭЛЕКТРОНИКИ И АВТОМАТИКИ (ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

E-mail address: magaril@mirea.ru

“МАТИ” — РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. К. Э. ЦИОЛКОВСКОГО

E-mail address: kosipenko@yahoo.com