УДК 517.51

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ГАРМОНИЧЕСКОМ СИНТЕЗЕ ПО НЕТОЧНО ЗАДАННОМУ СПЕКТРУ

Г. Г. МАГАРИЛ-ИЛЬЯЕВ, К. Ю. ОСИПЕНКО

Работа посвящена построению семейства оптимальных методов восстановления производных функций по неточно заданному на конечном отрезке преобразованию Фурье этих функций. Точная постановка задачи такова. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $W_2^n(\mathbb{R})$ — соболевский класс функций $x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, у которых $(n-1)$-ая производная локально абсолютно непрерывна и $\|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le 1$. Пусть далее $\sigma > 0$, $\Delta_\sigma = [-\sigma, \sigma]$, $1 \le k < n$ и $\delta > 0$. Допустим, что известно преобразование Фурье $Fx(\cdot)$ функции $x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R})$, заданное на Δ_σ с точностью до δ в метрике $L_2(\Delta_\sigma)$, т. е. известна функция $y(\cdot) \in L_2(\Delta_\sigma)$ такая, что $\|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\Delta_\sigma)} \le \delta$. Как наилучшим образом воспользоваться этой информацией, чтобы восстановить ее k-ую производную в метрике $L_2(\mathbb{R})$?

В качестве методов восстановления рассматриваются всевозможные отображения $\varphi\colon L_2(\Delta_\sigma) \to L_2(\mathbb{R})$. Погрешностью метода φ называется величина

$$e(\varphi) = \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R}),\ y \in L_2(\Delta_\sigma) \\ \|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\Delta_\sigma)} \le \delta}} \|x^{(k)}(\cdot) - \varphi(y(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Нас интересует величина

$$E = \inf_{m\colon L_2(\Delta_\sigma) \to L_2(\mathbb{R})} e(\varphi),$$

которая называется *погрешностью оптимального восстановления* и метод, на котором достигается нижняя грань, называемый *оптимальным методом восстановления*.

Теорема. *Пусть k, n — целые, $1 \le k < n$, $\sigma > 0$, $\delta > 0$,*

$$\widehat{\sigma} = \left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{1}{2(n-k)}} \left(\frac{2\pi}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{2n}}$$

и $\sigma_0 = \min\{\sigma, \widehat{\sigma}\}$. Тогда

$$E = \sigma_0^k \sqrt{\frac{n-k}{2\pi n} \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n-k}} \delta^2 + \sigma_0^{2(k-n)}}. \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №08-01-00450 и №09-01-90360).

Для всех ограниченных функций $m(\cdot)$ таких, что

$$(2)\qquad |m(\xi)-(i\xi)^k\alpha(\xi)|\le|\xi|^k\sqrt{\alpha^2(\xi)+\alpha(\xi)\left(\left(\frac{\xi}{\sigma_0}\right)^{2(n-k)}-1\right)},$$

где

$$\alpha(\xi)=\left(1+\frac{n}{n-k}\left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{k}{n-k}}\left(\frac{\xi}{\sigma_0}\right)^{2n}\right)^{-1},$$

методы

$$(3)\qquad \varphi(y(\cdot))(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Delta_\sigma}m(\xi)y(\xi)e^{i\xi t}\,d\xi$$

являются оптимальными.

Следствие. *При всех*

$$0\le\sigma'\le\left(\frac{n-k}{n}\right)^{\frac{1}{2k}}\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{2(n-k)}}\sigma_0,$$

методы

(4)

$$\varphi(y(\cdot))(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|\le\sigma'}(i\xi)^k y(\xi)e^{i\xi t}\,d\xi+\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma'\le|\xi|\le\sigma_0}(i\xi)^k\alpha(\xi)y(\xi)e^{i\xi t}\,d\xi$$

являются оптимальными.

Оптимальные методы (4) характеризуются тем, что на промежутке $\sigma'\le|\xi|\le\sigma_0$ неточные исходные данные “фильтруются” с помощью функции $\alpha(\cdot)$, а на промежутке $|\xi|\le\sigma'$ фильтрации не происходит.

Доказательство теоремы. Несложная оценка показывает, что E^2 не меньше значения следующей задачи

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\to\max,\quad \|Fx(\cdot)\|^2_{L_2(\Delta_\sigma)}\le\delta^2,\quad \|x^{(n)}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\le 1,$$

или в образах Фурье

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\xi^{2k}|Fx(\xi)|^2\,d\xi\to\max,\quad \int_{\Delta_\sigma}|Fx(\xi)|^2\,d\xi\le\delta^2,$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\xi^{2n}|Fx(\xi)|^2\,d\xi\le 1.$$

У этой задачи нет решения, но, тем не менее, ее значение можно найти (используя соображения двойственности, поскольку относительно переменной $|Fx(\cdot)|^2$ это задача линейного программирования, см. [5]) и оно равно квадрату величины, стоящей в правой части (1), что дает оценку снизу величины E.

Если φ — некоторый метод, то величина $e^2(\varphi)$ равна, по определению, значению задачи

$$(5)\quad \|x^{(k)}(\cdot)-\varphi(y(\cdot))(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\to\max,\quad \|Fx(\cdot)-y(\cdot)\|^2_{L_2(\Delta_\sigma)}\le\delta^2,$$
$$y(\cdot)\in L_2(\Delta_\sigma),\quad \|x^{(n)}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\le 1.$$

Покажем, что если метод φ в образах Фурье есть умножение на ограниченную функцию $m(\cdot)$, удовлетворяющую условию (2), то значение задачи (5) не превосходит E^2 и тем самым φ — оптимальный метод.

Итак, пусть φ — метод указанного вида. Тогда в образах Фурье задача (5), обозначая $h=(2\pi)^{-1}\int_{|t|>\sigma}\xi^{2n}|Fx(\xi)|^2\,d\xi$, $z(\xi)=Fx(\xi)-y(\xi)$ и $b(\xi)=(i\xi)^k-m(\xi)$ и учитывая, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|t|>\sigma}\xi^{2k}|Fx(\xi)|^2\,d\xi\le\sigma^{2(k-n)}\frac{1}{2\pi}\int_{|t|>\sigma}\xi^{2n}|Fx(\xi)|^2\,d\xi=h\sigma^{2(k-n)},$$

может быть переписана в виде

$$(6)\quad \frac{1}{2\pi}\int_{\Delta_\sigma}|m(\xi)z(\xi)+b(\xi)Fx(\xi)|^2\,d\xi+h\sigma^{2(k-n)}\to\max,$$
$$\int_{\Delta_\sigma}|z(\xi)|^2\,d\xi\le\delta^2,\quad \frac{1}{2\pi}\int_{\Delta_\sigma}\xi^{2n}|Fx(\xi)|^2\,d\xi+h\le 1.$$

Из неравенства Коши–Буняковского $|m(\xi)z(\xi)+b(\xi)Fx(\xi)|^2\le(s^{-1}|a(\xi)|^2+2\pi\xi^{-2n}|b(\xi)|^2)(s|z(\xi)|^2+(2\pi)^{-1}\xi^{2n}|Fx(\xi)|^2)$, справедливого для любого $s>0$, вытекает, что значение задачи (6) оценивается величиной

$$(7)\quad \max_{h\in[0,1]}\left(A_s(s\delta^2+1-h)+h\sigma^{2(k-n)}\right)=A_s s\delta^2+\max(A_s,\sigma^{2(k-n)})$$

где

$$A_s=A_s(m(\cdot))=\frac{1}{2\pi}\sup_{\xi\in\Delta_\sigma}\left(\frac{|m(\xi)|^2}{s}+\frac{2\pi}{\xi^{2n}}|b(\xi)|^2\right)=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\sup_{\xi\in\Delta_\sigma}\left(\frac{\xi^{2n}+2\pi s}{s\xi^{2n}}\left|m(\xi)-\frac{2\pi s(i\xi)^k}{\xi^{2n}+2\pi s}\right|^2+\frac{2\pi\xi^{2k}}{\xi^{2n}+2\pi s}\right).$$

Если $m(\xi)=\widehat{m}(\xi)=2\pi s(i\xi)^k/(\xi^{2n}+2\pi s)$, то легко найти, что

$$A_s(\widehat{m}(\cdot))=\begin{cases}\dfrac{k}{n}\left(\dfrac{n-k}{2\pi ks}\right)^{1-k/n}, & s\le\dfrac{n-k}{2\pi k}\sigma^{2n},\\[2ex] \dfrac{\sigma^{2k}}{\sigma^{2n}+2\pi s}, & s>\dfrac{n-k}{2\pi k}\sigma^{2n}.\end{cases}$$

Отсюда и (7), обозначая через $\widehat{\varphi}$ метод, соответствующий функции $\widehat{m}(\cdot)$, получаем, что для всех $s>0$

$$e^2(\widehat{\varphi}) \le \begin{cases} A_s(\widehat{m}(\cdot))(s\delta^2+1), & s \le \dfrac{n-k}{2\pi k}\left(\dfrac{k}{n}\right)^{\frac{n}{n-k}}\sigma^{2n}, \\ A_s(\widehat{m}(\cdot))s\delta^2+\sigma^{2(n-k)}, & s > \dfrac{n-k}{2\pi k}\left(\dfrac{k}{n}\right)^{\frac{n}{n-k}}\sigma^{2n}. \end{cases}$$

Минимум величины справа по s совпадает с квадратом величины, стоящей в правой части (1) и достигается в точке

$$\widehat{s} = \frac{n-k}{2\pi k}\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{n-k}}\sigma_0^{2n}.$$

При этом, $A_{\widehat{s}}(\widehat{m}(\cdot)) = \sigma_0^{2(k-n)}$. Таким образом, если ограниченная функция $m(\cdot)$ такова, что выполняется равенство $A_{\widehat{s}}(m(\cdot)) = \sigma_0^{2(k-n)}$, то соответствующий метод оптимален. Но это равенство, как нетрудно проверить, равносильно условию (2). $\square$

Следствие непосредственно вытекает из доказанной теоремы.

Первые результаты, касающиеся оптимального восстановления линейных операторов по неточной информации, были получены в работе [1]. Дальнейшее развитие эта тематика получила в работах авторов [2], [3] и [4].

Авторы благодарны рецензенту за полезные замечания.

Список литературы

[1] Melkman A. A., Micchelli C. A., “Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **16** (1979) 87–105.

[2] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., “Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью”, *Матем. сб.*, **193**:3 (2002), 79–100.

[3] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., “Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных”, *Функц. анализ и его прилож.*, **37** (2003), 51–64.

[4] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., “Оптимальное восстановление операторов по неточной информации”, Математический форум. Т. 2. Исследования по выпуклому анализу. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2009, 158–192.

[5] *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ и его приложения. Эдиториал УРСС, М., 2003 (2-ое изд).

Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет)

МАТИ — Российский государственный технологический университет им. К. Э. Циолковского