

УДК 517.5

НЕРАВЕНСТВО ХАРДИ–ЛИТТЛВУДА–ПОЛИА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВ ХАРДИ–СОБОЛЕВА

К. Ю. ОСИПЕНКО

Аннотация. В работе найден экстремум нормы k -ой производной функции комплексного переменного, аналитической в полосе, в метрике $L_2(\mathbb{R})$ при ограничении на норму самой функции в $L_2(\mathbb{R})$ и норму ее n -ой производной в метрике пространства Харди–Соболева. Изучается также тесно связанная с этой задачей задача об оптимальном восстановлении k -ой производной функции из класса Харди–Соболева по неточно заданному следу этой функции на вещественной оси. Получен оптимальный метод восстановления.

1. ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ

В монографии [1] Харди, Литтлвуд и Полия доказали, что для всех целых $0 < k < r$ имеет место точное неравенство

$$(1) \quad \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{1-\frac{k}{r}} \|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{\frac{k}{r}},$$

справедливое для всех функций $x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, у которых $(r-1)$ -ая производная локально абсолютно непрерывна на \mathbb{R} и $x^{(r)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$. Неравенства типа (1) носят название *неравенств Ландау–Колмогорова*: Ландау [2] первый получил ряд точных результатов в подобных неравенствах, а Колмогоров [3] в 1939 г. получил один из самых ярких результатов в данной проблематике (им была найдена точная константа в неравенстве, подобном (1), когда все нормы задаются в пространстве $L_\infty(\mathbb{R})$). Более подробные сведения о неравенствах типа Ландау–Колмогорова для вещественных функций можно найти в работах [4] и [5].

Надо отметить, что уже в работе Колмогорова [3] был проявлен интерес к неравенствам такого вида для аналитических функций. Аналог неравенства Колмогорова для функций, аналитических в полосе $S_\beta = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \beta\}$, был получен в [6]. В настоящей работе получен аналог неравенства Харди–Литтлвуда–Полия для функций, аналитических в полосе S_β , а также рассмотрен ряд задач оптимального восстановления, тесно связанных с этим неравенством. Неравенства для производных функций, аналитических

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №05-01-00275, №05-01-00261) и программы “Университеты России” (УР.03.01.130, УР.04.02.536).

в полосе S_β , интересны еще и тем, что при предельном переходе, когда $\beta \rightarrow 0$, получаются точные неравенства для вещественного случая.

Перейдем к точной постановке задачи. *Пространством Харди* \mathcal{H}_2^β называется множество функций $f(\cdot)$, аналитических в полосе S_β , для которых

$$\|f(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^\beta} = \left(\sup_{0 \leq \eta < \beta} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (|f(t + i\eta)|^2 + |f(t - i\eta)|^2) dt \right)^{1/2} < \infty.$$

Через $\mathcal{H}_2^{r,\beta}$ (*пространство Харди–Соболева*) будем обозначать множество аналитических в полосе S_β функций, для которых $f^{(r)}(\cdot) \in \mathcal{H}_2^\beta$.

Под точным неравенством Харди–Литтлвуда–Полиа для функций из $\mathcal{H}_2^{r,\beta}$ будем понимать задачу о нахождении величины

$$(2) \quad \sup_{\substack{f(\cdot) \in \mathcal{H}_2^{r,\beta} \cap L_2(\mathbb{R}) \\ \|f^{(r)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^\beta} \leq \gamma_1 \\ \|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \gamma_2}} \|f^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}$$

для любых $\gamma_1, \gamma_2 > 0$. Мы будем рассматривать более общую задачу (об оптимальном восстановлении k -ой производной функции $f(\cdot) \in \mathcal{H}_2^{r,\beta}$ в метрике $L_2(\mathbb{R})$ по неточным значениям самой функции $f(\cdot)$ на \mathbb{R}), при решении которой будет найдена величина (2).

Обозначим через $H_2^{r,\beta}$ множество функций $f(\cdot) \in \mathcal{H}_2^{r,\beta}$, для которых $\|f^{(r)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^\beta} \leq 1$. Рассмотрим задачу оптимального восстановления k -ой производной функции $f(\cdot) \in H_2^{r,\beta} \cap L_2(\mathbb{R})$ по ее следу на \mathbb{R} , заданному с погрешностью в метрике $L_2(\mathbb{R})$, т.е. считается, что вместо следа на \mathbb{R} функции $f(\cdot)$ известна функция $y(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ такая, что

$$\|f(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta.$$

Требуется по функции $y(\cdot)$ восстановить на \mathbb{R} наилучшим образом функцию $f^{(k)}(\cdot)$.

В качестве *методов восстановления* будут рассматриваться произвольные операторы $\varphi: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$. Для данного метода восстановления φ его *погрешностью* назовем величину

$$e_k(H_2^{r,\beta}, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{f(\cdot) \in H_2^{r,\beta} \cap L_2(\mathbb{R}), y(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}) \\ \|f(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta}} \|f^{(k)}(\cdot) - \varphi(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E_k(H_2^{r,\beta}, \delta) = \inf_{\varphi: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})} e_k(H_2^{r,\beta}, \delta, \varphi),$$

а *оптимальным методом восстановления* — метод, на котором достигается нижняя грань.

Рассмотрим еще одну экстремальную задачу — об оценке $L_2(\mathbb{R})$ -нормы функции $f(\cdot) \in \mathcal{H}_2^\beta$ на прямой $\text{Im } z = \rho$, $-\beta < \rho < \beta$, через ее $L_2(\mathbb{R})$ -нормы граничных значений на прямых $\text{Im } z = \pm\beta$ (хорошо известно, что у функций из \mathcal{H}_2^β почти всюду существуют граничные значения на прямых $\text{Im } z = \pm\beta$, являющиеся функциями из $L_2(\mathbb{R})$). Тем самым речь идет об экстремальной задаче

$$(3) \quad \|f(\cdot + i\rho)\|_{L_2(\mathbb{R})} \rightarrow \max, \quad \|f(\cdot - i\beta)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta_1, \\ \|f(\cdot + i\beta)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta_2.$$

Результат подобного типа, когда нормы берутся в пространствах $L_\infty(\mathbb{R})$, а функции являются аналитическими и ограниченными в полосе, известен как теорема о трех прямых (см., например, [7]). Соответствующий результат для круга — теорема Адамара о трех кругах [8].

Свяжем с экстремальной задачей (3) задачу об оптимальном восстановлении функции $f(\cdot) \in \mathcal{H}_2^\beta$ на прямой $\text{Im } z = \rho$ по ее приближенным граничным значениям на прямых $\text{Im } z = \pm\beta$. Более точно, будем считать, что для каждой функции $f(\cdot) \in \mathcal{H}_2^\beta$ известны функции $y_1(\cdot), y_2(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ такие, что

$$\|f(\cdot - i\beta) - y_1(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta_1, \quad \|f(\cdot + i\beta) - y_2(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta_2.$$

Требуется по функциям $y_1(\cdot), y_2(\cdot)$ восстановить функцию $f(\cdot + i\rho)$.

В качестве методов восстановления рассматриваются всевозможные операторы $\varphi: L_2(\mathbb{R}) \times L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$. Для данного метода φ его погрешность определяется равенством

$$e_\rho(\mathcal{H}_2^\beta, \delta_1, \delta_2, \varphi) = \sup_{\substack{f(\cdot) \in \mathcal{H}_2^\beta, y_1(\cdot), y_2(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}) \\ \|f(\cdot + i\beta) - y_1(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta_1 \\ \|f(\cdot - i\beta) - y_2(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta_2}} \|f(\cdot + i\rho) - \varphi(y_1, y_2)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E_\rho(\mathcal{H}_2^\beta, \delta_1, \delta_2) = \inf_{\varphi: L_2(\mathbb{R}) \times L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})} e_\rho(\mathcal{H}_2^\beta, \delta_1, \delta_2, \varphi).$$

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $r \in \mathbb{N}$ и β — положительное вещественное число. Функция $t^r \sqrt{\text{ch } 2\beta t}$ монотонно возрастает при $t \in \mathbb{R}_+$ от 0 до $+\infty$. Поэтому для любого $x \in \mathbb{R}_+$ существует единственное решение уравнения

$$t^r \sqrt{\text{ch } 2\beta t} = x,$$

принадлежащее интервалу $[0, +\infty)$. Обозначим его через $\mu_{r\beta}(x)$.

Теорема 1. Пусть $r, k \in \mathbb{N}$ и $k \leq r$. При всех $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ имеет место равенство

$$\sup_{\substack{f(\cdot) \in \mathcal{H}_2^{r,\beta} \cap L_2(\mathbb{R}) \\ \|f^{(r)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^\beta} \leq \gamma_1 \\ \|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \gamma_2}} \|f^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} = \gamma_2 \mu_{r\beta}^k \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right).$$

Иными словами, теорема 1 утверждает, что для всех функций из пространства $\mathcal{H}_2^{r,\beta}$, отличных от тождественного нуля, имеет место точное неравенство

$$\|f^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \mu_{r\beta}^k \left(\frac{\|f^{(r)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^\beta}}{\|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}} \right).$$

Теорема 2. Пусть $r, k \in \mathbb{N}$, $k \leq r$ и $\delta > 0$. Тогда для погрешности оптимального восстановления k -ой производной имеет место равенство

$$E_k(H_2^{r,\beta}, \delta) = \delta \mu_{r\beta}^k (\delta^{-1}),$$

а метод

$$\varphi_0(y)(\cdot) = (\mathcal{K}_{k,\delta}^{r,\beta} * y)(\cdot),$$

где

$$(4) \quad \mathcal{K}_{k,\delta}^{r,\beta}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (it)^k \left(1 + \frac{k\delta^2 t^{2r} \operatorname{ch} 2\beta t}{r - k + \beta \mu_{r\beta}(\delta^{-1}) \operatorname{th}(2\beta \mu_{r\beta}(\delta^{-1}))} \right)^{-1} e^{ixt} dt,$$

является оптимальным методом восстановления.

Теорема 3. При всех $-\beta < \rho < \beta$ и $\delta_1, \delta_2 > 0$ имеют место равенства

$$E_\rho(\mathcal{H}_2^\beta, \delta_1, \delta_2) = \sup_{\substack{f(\cdot) \in \mathcal{H}_2^\beta \\ \|f(\cdot - i\beta)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta_1 \\ \|f(\cdot + i\beta)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta_2}} \|f(\cdot + i\rho)\|_{L_2(\mathbb{R})} = \delta_1^{\frac{\beta-\rho}{2\beta}} \delta_2^{\frac{\beta+\rho}{2\beta}},$$

а метод

$$\varphi_0(y_1, y_2)(x) = \delta_2^2 (\beta - \rho) (\mathcal{K}_{\delta_1, \delta_2}^{\rho, \beta} * y_1)(x - i(\beta - \rho)) + \delta_1^2 (\beta + \rho) (\mathcal{K}_{\delta_1, \delta_2}^{\rho, \beta} * y_2)(x + i(\beta + \rho)),$$

где

$$(5) \quad \mathcal{K}_{\delta_1, \delta_2}^{\rho, \beta}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ixt}}{\delta_2^2 (\beta - \rho) e^{2\beta t} + \delta_1^2 (\beta + \rho) e^{-2\beta t}} dt,$$

является оптимальным.

Из теоремы 3, в частности, вытекает, что при $-\beta < \rho < \beta$ для всех $f(\cdot) \in \mathcal{H}_2^\beta$ имеет место точное неравенство

$$\|f(\cdot + i\rho)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \|f(\cdot - i\beta)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{\frac{\beta-\rho}{2\beta}} \|f(\cdot + i\beta)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{\frac{\rho+\beta}{2\beta}}.$$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Для доказательства теорем 1 и 2 нам потребуется один общий результат об оптимальном восстановлении линейных операторов, основанный на методе, разработанном в [9], [10]. Начнем с постановки некоторой общей задачи об оптимальном восстановлении.

Пусть X — линейное пространство, Y_1, \dots, Y_p — линейные пространства с полускалярными произведениями $(\cdot, \cdot)_{Y_j}$, $j = 1, \dots, p$, и соответствующими полунормами $\|\cdot\|_{Y_j}$, $j = 1, \dots, p$, $Y_s = L_\infty(\Delta_s)$, $\Delta_s \subseteq \mathbb{R}$, $s = p+1, \dots, m$, $I_j: X \rightarrow Y_j$, $j = 1, \dots, m$, — линейные операторы, а Z — линейное нормированное пространство. Рассмотрим задачу оптимального восстановления оператора $T: X \rightarrow Z$ на множестве

$$W = \{x \in X : \|I_j x\|_{Y_j} \leq \delta_j, j = 1, \dots, l, 0 \leq l \leq p\}$$

по значениям операторов I_{l+1}, \dots, I_m , заданным с погрешностью (при $l = 0$ полагаем $W = X$). Будем считать, что для каждого $x \in W$ нам известен вектор $y = (y_{l+1}, \dots, y_p, y_{p+1}(\cdot), \dots, y_m(\cdot)) \in Y_{l+1} \times \dots \times Y_m$ такой, что $\|I_j x - y_j\|_{Y_j} \leq \delta_j$, $j = l+1, \dots, p$, и $|I_s x(t) - y_s(t)| \leq \delta_s(t)$ для почти всех $t \in \Delta_s$, $s = p+1, \dots, m$ (в дальнейшем для функций из $L_\infty(\Delta_s)$ не будем отмечать каждый раз, что неравенства понимаются выполненными почти всюду на Δ_s).

В качестве *методов восстановления* оператора T рассматриваются всевозможные операторы $\varphi: Y_{l+1} \times \dots \times Y_m \rightarrow Z$. *Погрешностью восстановления* для данного метода φ называется величина

$$e(T, W, I, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x \in W, y \in Y_{l+1} \times \dots \times Y_m \\ \|I_j x - y_j\|_{Y_j} \leq \delta_j, j = l+1, \dots, p \\ |I_s x(t) - y_s(t)| \leq \delta_s(t), s = p+1, \dots, m}} \|Tx - \varphi(y)\|_Z$$

(здесь $I = (I_{l+1}, \dots, I_m)$, $\delta = (\delta_{l+1}, \dots, \delta_p, \delta_{p+1}(\cdot), \dots, \delta_m(\cdot))$). *Погрешностью оптимального восстановления* называется величина

$$E(T, W, I, \delta) = \inf_{\varphi: Y_{l+1} \times \dots \times Y_m \rightarrow Z} e(T, W, I, \delta, \varphi),$$

а метод, на котором достигается нижняя грань называется *оптимальным*.

С поставленной задачей восстановления тесно связана экстремальная задача

$$(6) \quad \|Tx\|_Z^2 \rightarrow \max, \quad \|I_j x\|_{Y_j}^2 \leq \delta_j^2, j = 1, \dots, p, \quad |I_s x(t)|^2 \leq \delta_s^2(t), \\ s = p+1, \dots, m.$$

Обозначим через $\mathcal{L}(x, \lambda)$ функцию Лагранжа для этой экстремальной задачи

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = -\|Tx\|_Z^2 + \sum_{j=1}^p \lambda_j \|I_j x\|_{Y_j}^2 + \sum_{s=p+1}^m \int_{\Delta_s} \lambda_s(t) |I_s x(t)|^2 dt,$$

где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda_{p+1}(\cdot), \dots, \lambda_m(\cdot))$, $\lambda_j \geq 0$, $j = 1, \dots, p$, а $\lambda_s(\cdot)$ — измеримые неотрицательные функции на Δ_s , $s = p+1, \dots, m$.

Теорема 4. Пусть существуют измеримые неотрицательные на Δ_s функции $\hat{\lambda}_s(\cdot)$, $s = p+1, \dots, m$ и $\hat{\lambda}_j \geq 0$, $j = 1, \dots, p$, такие, что для $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_p, \hat{\lambda}_{p+1}(\cdot), \dots, \hat{\lambda}_m(\cdot))$

$$(a) \quad \mathcal{L}(x, \hat{\lambda}) \geq 0 \quad \forall x \in X.$$

Пусть, кроме того, существует такая последовательность $\{x_n\}$ допустимых элементов в (6), что выполнены условия:

$$(b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}(x_n, \hat{\lambda}) = 0,$$

$$(c) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^p \hat{\lambda}_j \left(\|I_j x_n\|_{Y_j}^2 - \delta_j^2 \right) + \sum_{s=p+1}^m \int_{\Delta_s} \hat{\lambda}_s(t) \left(|I_s x_n(t)|^2 - \delta_s^2(t) \right) dt \right) = 0.$$

Тогда значение экстремальной задачи (6) равно

$$\sum_{j=1}^p \hat{\lambda}_j \delta_j^2 + \sum_{s=p+1}^m \int_{\Delta_s} \hat{\lambda}_s(t) \delta_s^2(t) dt.$$

Если при этом для всех $y = (y_{l+1}, \dots, y_p, y_{p+1}(\cdot), \dots, y_m(\cdot)) \in Y_{l+1} \times \dots \times Y_m$ существует x_y — решение экстремальной задачи

$$(7) \quad \sum_{j=1}^l \hat{\lambda}_j \|I_j x\|_{Y_j}^2 + \sum_{j=l+1}^p \hat{\lambda}_j \|I_j x - y_j\|_{Y_j}^2 + \sum_{s=p+1}^m \int_{\Delta_s} \hat{\lambda}_s(t) |I_s x(t) - y_s(t)|^2 dt \rightarrow \min, \quad x \in X,$$

то

$$(8) \quad \varphi_0(y) = Tx_y$$

— оптимальный метод восстановления и

$$(9) \quad E(T, W, I, \delta) = \sqrt{\sum_{j=1}^p \hat{\lambda}_j \delta_j^2 + \sum_{s=p+1}^m \int_{\Delta_s} \hat{\lambda}_s(t) \delta_s^2(t) dt}.$$

Доказательство. Покажем, что значения задачи (6) и задачи

$$(10) \quad \|Tx\|_Z^2 \rightarrow \max, \quad \sum_{j=1}^p \widehat{\lambda}_j \|I_j x\|_{Y_j}^2 + \sum_{s=p+1}^m \int_{\Delta_s} \widehat{\lambda}_s(t) |I_s x(t)|^2 dt \leq S,$$

где

$$S = \sum_{j=1}^p \widehat{\lambda}_j \delta_j^2 + \sum_{s=p+1}^m \int_{\Delta_s} \widehat{\lambda}_s(t) \delta_s^2(t) dt,$$

совпадают и равны S . Действительно, для любого допустимого в (6) или в (10) элемента $x \in X$ имеем с учетом (a)

$$\begin{aligned} -\|Tx\|_Z^2 &\geq -\|Tx\|_Z^2 + \sum_{j=1}^p \widehat{\lambda}_j \left(\|I_j x\|_{Y_j}^2 - \delta_j^2 \right) \\ &\quad + \sum_{s=p+1}^m \int_{\Delta_s} \widehat{\lambda}_s(t) \left(|I_s x(t)|^2 - \delta_s^2(t) \right) dt \geq -S. \end{aligned}$$

С другой стороны, используя последовательно (c) и (b), получаем, что

$$\begin{aligned} -\lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n\|^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\|Tx_n\|_Z^2 + \sum_{j=1}^p \widehat{\lambda}_j \left(\|I_j x_n\|_{Y_j}^2 - \delta_j^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{s=p+1}^m \int_{\Delta_s} \widehat{\lambda}_s(t) \left(|I_s x_n(t)|^2 - \delta_s^2(t) \right) dt \right) = -S, \end{aligned}$$

т. е. S — значение задач (6) и (10).

Оценка снизу. Для любого метода φ при всех $x \in W$ таких, что $\|I_j x\|_{Y_j} \leq \delta_j$, $j = l+1, \dots, p$ и $|I_s x(t)| \leq \delta_s(t)$, $s = p+1, \dots, m$, имеем

$$2\|Tx\|_Z \leq \|Tx - \varphi(0)\|_Z + \|T(-x) - \varphi(0)\|_Z \leq 2e(T, W, I, \delta, \varphi).$$

Следовательно, для любого метода φ

$$e(T, W, I, \delta, \varphi) \geq \sup_{\substack{x \in W \\ \|I_j x\|_{Y_j} \leq \delta_j, \quad j=l+1, \dots, p \\ |I_s x(t)| \leq \delta_s(t), \quad s=p+1, \dots, m}} \|Tx\|_Z = \sqrt{S}.$$

Таким образом,

$$(11) \quad E(T, W, I, \delta) \geq \sqrt{S}.$$

Оценка сверху. Рассмотрим линейное пространство $E = Y_1 \times \dots \times Y_m$ с полускалярным произведением

$$(y^1, y^2)_E = \sum_{j=1}^p \widehat{\lambda}_j (y_j^1, y_j^2)_{Y_j} + \sum_{s=p+1}^m \int_{\Delta_s} \widehat{\lambda}_s(t) y_j^1(t) \overline{y_j^2(t)} dt.$$

Тогда экстремальная задача (7) может быть переписана в виде

$$\|\tilde{I}x - \widehat{y}\|_E^2 \rightarrow \min, \quad x \in X,$$

где $\tilde{I} = (I_1, \dots, I_m)$, а $\hat{y} = (0, \dots, 0, y_{l+1}, \dots, y_p, y_{p+1}(\cdot), \dots, y_m(\cdot))$. Если x_y — решение этой задачи, то нетрудно показать, что для всех $x \in X$ выполняется равенство

$$(\tilde{I}x_y - \hat{y}, \tilde{I}x)_E = 0.$$

Отсюда следует, что

$$(12) \quad \|\tilde{I}x - \hat{y}\|_E^2 = \|\tilde{I}x - \tilde{I}x_y\|_E^2 + \|\tilde{I}x_y - \hat{y}\|_E^2.$$

Если $x \in W$, а \hat{y} таков, что $\|I_j x - y_j\|_{Y_j} \leq \delta_j$, $j = l+1, \dots, p$, $|I_s x(t) - y_s(t)| \leq \delta_s(t)$ почти всюду на Δ_s , $s = p+1, \dots, m$, то из (12) вытекает, что

$$\begin{aligned} \|\tilde{I}x - \tilde{I}x_y\|_E^2 &\leq \|\tilde{I}x - \hat{y}\|_E^2 = \sum_{j=1}^l \hat{\lambda}_j \|I_j x\|_{Y_j}^2 + \sum_{j=l+1}^p \hat{\lambda}_j \|I_j x - y_j\|_{Y_j}^2 \\ &\quad + \sum_{s=p+1}^m \int_{\Delta_s} \hat{\lambda}_s(t) |I_s x(t) - y_s(t)|^2 dt \leq S. \end{aligned}$$

Полагая $z = x - x_y$, приходим к неравенству

$$\sum_{j=1}^p \hat{\lambda}_j \|I_j z\|_{Y_j}^2 + \sum_{s=p+1}^m \int_{\Delta_s} \hat{\lambda}_s(t) |I_s z(t)|^2 dt \leq S.$$

Тем самым для метода (8) имеем

$$\begin{aligned} \|Tx - \varphi_0(y)\|_Z &= \|Tz\|_Z \\ &\leq \sup \left\{ \|Tx\|_Z : \sum_{j=1}^p \hat{\lambda}_j \|I_j x\|_{Y_j}^2 + \sum_{s=p+1}^m \int_{\Delta_s} \hat{\lambda}_s(t) |I_s x(t)|^2 dt \leq S \right\} \\ &= \sqrt{S}. \end{aligned}$$

Учитывая (11), получаем равенство (9) и оптимальность метода (8). \square

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим экстремальную задачу

$$(13) \quad \|f^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \rightarrow \max, \quad \|f^{(r)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^\beta}^2 \leq \gamma_1^2, \quad \|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \leq \gamma_2^2.$$

Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид

$$\mathcal{L}(f(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) = -\|f^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 + \lambda_1 \|f^{(r)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^\beta}^2 + \lambda_2 \|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2.$$

По основной теореме о представлении функций из пространств \mathcal{H}_2 над трубчатymi областями (см. [7]) следует, что $f(\cdot) \in \mathcal{H}_2^\beta$ в том и только в том случае, если она имеет вид

$$(14) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{izt} dt,$$

где $\widehat{f}(\cdot)$ — функция, удовлетворяющая условию

$$\sup_{|y|<\beta} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(t)|^2 e^{-2yt} dt < \infty$$

($\widehat{f}(\cdot)$) — преобразование Фурье функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$). Из теоремы Планшереля вытекает тогда, что

$$\|f(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^\beta}^2 = \frac{1}{2\pi} \sup_{0 \leq y < \beta} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(t)|^2 \operatorname{ch} 2yt dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(t)|^2 \operatorname{ch} 2\beta t dt.$$

Переходя к образам Фурье и обозначая $(2\pi)^{-1} |\widehat{f}(\cdot)|^2 = u(\cdot)$, будем иметь

$$\mathcal{L}(f(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) = \int_{\mathbb{R}} (-t^{2k} + \lambda_1 t^{2r} \operatorname{ch} 2\beta t + \lambda_2) u(t) dt.$$

Положим

$$\alpha(t) = -1 + \lambda_1 t^{2(r-k)} \operatorname{ch} 2\beta t + \lambda_2 t^{-2k}.$$

Нетрудно убедиться, что $\alpha(t)$ — выпуклая функция при $t > 0$. Поэтому если в некоторой точке $t_0 > 0$ выполняются равенства

$$(15) \quad \alpha(t_0) = \alpha'(t_0) = 0,$$

то $\alpha(t) \geq 0$ при всех $t \geq 0$. Пусть t_0 — положительное решение уравнения

$$(16) \quad \gamma_2^2 t^{2r} \operatorname{ch} 2\beta t = \gamma_1^2,$$

т. е. $t_0 = \mu_{r\beta}(\gamma_1/\gamma_2)$. Выберем $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ так, чтобы выполнялись равенства (15). Имеем

$$\begin{aligned} \widehat{\lambda}_1 &= \frac{kt_0^{2(k-r)}}{r \operatorname{ch} 2\beta t_0 + t_0 \beta \operatorname{sh} 2\beta t_0}, \\ \widehat{\lambda}_2 &= \frac{(r-k)t_0^{2k} \operatorname{ch} 2\beta t_0 + t_0^{2k+1} \beta \operatorname{sh} 2\beta t_0}{r \operatorname{ch} 2\beta t_0 + t_0 \beta \operatorname{sh} 2\beta t_0}. \end{aligned}$$

Таким образом, для так выбранных $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ для всех $t \in \mathbb{R}$

$$-t^{2k} + \widehat{\lambda}_1 t^{2r} \operatorname{ch} 2\beta t + \widehat{\lambda}_2 \geq 0.$$

Следовательно, для всех $f(\cdot) \in \mathcal{H}_2^{r,\beta} \cap L_2(\mathbb{R})$

$$\mathcal{L}(f(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) \geq 0.$$

Положим для достаточно больших n (таких, что $t_0 - 1/n > 0$)

$$u_n(t) = \begin{cases} \gamma_2^2 n, & t \in (t_0 - 1/n, t_0), \\ 0, & t \notin (t_0 - 1/n, t_0). \end{cases}$$

Обозначим через $f_n(\cdot)$ последовательность функций, получаемую по формуле (14) для $\widehat{f}(\cdot) = \sqrt{2\pi u_n(\cdot)}$. Имеем

$$\|f_n(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 = \|u_n(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 = \gamma_2^2,$$

а

$$\|f_n^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 = \gamma_2^2 n \int_{t_0-1/n}^{t_0} t^{2r} \operatorname{ch} 2\beta t \, dt \leq \gamma_2^2 t_0^{2r} \operatorname{ch} 2\beta t_0 = \gamma_1^2,$$

т. е. функции $f_n(\cdot)$ являются допустимыми в задаче (13). Нетрудно убедиться, что

$$(17) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}(f_n(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = 0,$$

$$(18) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 = \gamma_1^2.$$

Из теоремы 4 следует, что значение экстремальной задачи (13) равно

$$\widehat{\lambda}_1 \gamma_1^2 + \widehat{\lambda}_2 \gamma_2^2 = \gamma_2^2 \mu_{r\beta}^{2k} \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right).$$

□

Доказательство теоремы 2. Положим $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = \delta$ и для соответствующих $\widehat{\lambda}_1$, $\widehat{\lambda}_2$ при некотором $y(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ рассмотрим экстремальную задачу

$$\widehat{\lambda}_1 \|f^{(r)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^\beta}^2 + \widehat{\lambda}_2 \|f(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \rightarrow \min, \quad f(\cdot) \in \mathcal{H}_2^{r,\beta} \cap L_2(\mathbb{R}).$$

Переходя к образам Фурье, можем записать эту задачу в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (\widehat{\lambda}_1 t^{2r} |\widehat{f}(t)|^2 \operatorname{ch} 2\beta t + \widehat{\lambda}_2 |\widehat{f}(\cdot) - \widehat{y}(\cdot)|^2) \, dt \rightarrow \min, \\ f(\cdot) \in \mathcal{H}_2^{r,\beta} \cap L_2(\mathbb{R}).$$

Легко показать, что решением этой задачи является функция

$$\widehat{f}_y(t) = \frac{\widehat{\lambda}_2}{\widehat{\lambda}_2 + \widehat{\lambda}_1 t^{2r} \operatorname{ch} 2\beta t} \widehat{y}(t).$$

Из теоремы 4 вытекает, что метод

$$\varphi_0(y)(\cdot) = f_y^{(k)}(\cdot)$$

является оптимальным. Так как преобразование Фурье функции $f_y^{(k)}(\cdot)$ равно

$$(it)^k \frac{\widehat{\lambda}_2}{\widehat{\lambda}_2 + \widehat{\lambda}_1 t^{2r} \operatorname{ch} 2\beta t} \widehat{y}(t),$$

то ее можно записать в виде свертки функции $y(\cdot)$ и функции $\mathcal{K}_{k,\delta}^{r,\beta}(\cdot)$, определенной равенством (4). □

Доказательство теоремы 3. Перейдем для удобства к квадратам в экстремальной задаче (3)

$$(19) \quad \|f(\cdot + i\rho)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \rightarrow \max, \quad \|f(\cdot - i\beta)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \leq \delta_1^2, \\ \|f(\cdot + i\beta)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \leq \delta_2^2.$$

и запишем соответствующую функцию Лагранжа

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) = & -\|f(\cdot + i\rho)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 + \lambda_1 \|f(\cdot - i\beta)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \\ & + \lambda_2 \|f(\cdot + i\beta)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2. \end{aligned}$$

В силу представления (14), переходя к образам Фурье, по теореме Планшереля будем иметь

$$\mathcal{L}(f(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (-e^{-2\rho t} + \lambda_1 e^{2\beta t} + \lambda_2 e^{-2\beta t}) |\widehat{f}(t)|^2 dt.$$

Нетрудно убедиться, что функция

$$\gamma(t) = -1 + \lambda_1 e^{2(\beta+\rho)t} + \lambda_2 e^{-2(\beta-\rho)t}$$

является выпуклой на \mathbb{R} . Поэтому если для некоторой точки $t_0 \in \mathbb{R}$

$$(20) \quad \gamma(t_0) = \gamma'(t_0) = 0,$$

то $\gamma(t) \geq 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Положим

$$t_0 = \frac{\ln \delta_1 - \ln \delta_2}{2\beta}$$

и выберем $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ из условия (20). Имеем

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{\beta - \rho}{2\beta} e^{-2(\beta+\rho)t_0}, \quad \widehat{\lambda}_2 = \frac{\beta + \rho}{2\beta} e^{2(\beta-\rho)t_0}.$$

Тем самым для всех $f(\cdot) \in \mathcal{H}_2^\beta$

$$\mathcal{L}(f(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) \geq 0.$$

Обозначим для достаточно больших n через $f_n(\cdot)$ последовательность функций, получаемую по формуле (14) для

$$\widehat{f}_n(t) = \begin{cases} A_n, & t \in (t_0 - 1/n, t_0 + 1/n), \\ 0, & t \notin (t_0 - 1/n, t_0 + 1/n), \end{cases}$$

где

$$A_n = n \sqrt{\frac{\pi \delta_1 \delta_2}{n+1}}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} \|f_n(\cdot - i\beta)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}_n(t)|^2 e^{2\beta t} dt = \delta_1^2 \frac{n}{n+1} \frac{\text{sh } 2\beta/n}{2\beta/n}, \\ \|f_n(\cdot + i\beta)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}_n(t)|^2 e^{-2\beta t} dt = \delta_2^2 \frac{n}{n+1} \frac{\text{sh } 2\beta/n}{2\beta/n}. \end{aligned}$$

В силу того, что при достаточно больших n

$$\frac{\text{sh } 2\beta/n}{2\beta/n} < 1 + 1/n,$$

последовательность $\widehat{f}_n(\cdot)$ является при достаточно больших n допустимой в задаче (19), а кроме того,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(\cdot - i\beta)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 &= \delta_1^2, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(\cdot + i\beta)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 &= \delta_2^2.\end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}(f_n(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = 0.$$

Тем самым из теоремы 4 вытекает, что значение экстремальной задачи (19) равно

$$\widehat{\lambda}_1 \delta_1^2 + \widehat{\lambda}_2 \delta_2^2 = \delta_1^{\frac{\beta-\rho}{\beta}} \delta_2^{\frac{\beta+\rho}{\beta}}.$$

Рассмотрим теперь экстремальную задачу

$$\widehat{\lambda}_1 \|f(\cdot - i\beta) - y_1(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 + \widehat{\lambda}_2 \|f(\cdot + i\beta) - y_2(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \rightarrow \min, \quad f(\cdot) \in \mathcal{H}_2^\beta.$$

Переходя к образам Фурье и пользуясь равенством (14), перепишем эту задачу в виде

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\widehat{\lambda}_1 |\widehat{f}(t)e^{\beta t} - \widehat{y}_1(t)|^2 + \widehat{\lambda}_2 |\widehat{f}(t)e^{-\beta t} - \widehat{y}_2(t)|^2 \right) dt &\rightarrow \min, \\ f(\cdot) &\in \mathcal{H}_2^\beta.\end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что решением этой задачи является функция $f_{y_1, y_2}(\cdot)$ такая, что

$$\widehat{f}_{y_1, y_2}(t) = \frac{\widehat{\lambda}_1 e^{\beta t} \widehat{y}_1(t) + \widehat{\lambda}_2 e^{-\beta t} \widehat{y}_2(t)}{\widehat{\lambda}_1 e^{2\beta t} + \widehat{\lambda}_2 e^{-2\beta t}}.$$

Из теоремы 4 следует, что метод

$$\varphi_0(y_1, y_2)(\cdot) = f_{y_1, y_2}(\cdot + i\rho)$$

является оптимальным. Имеем

$$\begin{aligned}\varphi_0(y_1, y_2)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\delta_2^2(\beta - \rho)e^{\beta t} y_1(t) + \delta_1^2(\beta + \rho)e^{-\beta t} y_2(t)}{\delta_2^2(\beta - \rho)e^{2\beta t} + \delta_1^2(\beta + \rho)e^{-2\beta t}} e^{i(x+i\rho)t} dt \\ &= \delta_2^2(\beta - \rho) (\mathcal{K}_{\delta_1, \delta_2}^{\rho, \beta} * y_1)(x - i(\beta - \rho)) + \delta_1^2(\beta + \rho) (\mathcal{K}_{\delta_1, \delta_2}^{\rho, \beta} * y_2)(x + i(\beta + \rho)),\end{aligned}$$

где ядро $\mathcal{K}_{\delta_1, \delta_2}^{\rho, \beta}(\cdot)$ определено равенством (5). \square

4. ДАЛЬНЕЙШИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

4.1. **Восстановление k -ой производной на всей полосе.** Неравенства для производных аналитических функций и связанные с ними задачи восстановления являются в определенном смысле промежуточным случаем между одномерными и многомерными задачами. Однако уже здесь имеется некоторое многообразие, связанное, в частности, с тем, что оптимальное восстановление может быть рассмотрено на различных областях (впрочем как и задание исходной информации о функции). В качестве примера рассмотрим задачу оптимального восстановления k -ой производной функции $f(\cdot) \in H_2^{r,\beta} \cap L_2(\mathbb{R})$ на всей полосе S_β по ее следу на \mathbb{R} , заданному с погрешностью в метрике $L_2(\mathbb{R})$.

В качестве методов восстановления будут рассматриваться произвольные операторы $\varphi: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{H}_2^\beta$. Для данного метода восстановления φ его погрешностью назовем величину

$$e_k(H_2^{r,\beta}, \delta, S_\beta, \varphi) = \sup_{\substack{f(\cdot) \in H_2^{r,\beta} \cap L_2(\mathbb{R}), y(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}) \\ \|f(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta}} \|f^{(k)}(\cdot) - \varphi(y)(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^\beta}.$$

Погрешностью оптимального восстановления назовем величину

$$E_k(H_2^{r,\beta}, \delta, S_\beta) = \inf_{\varphi: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{H}_2^\beta} e_k(H_2^{r,\beta}, \delta, S_\beta, \varphi),$$

а оптимальным методом восстановления — метод, на котором достигается нижняя грань.

Соответствующая задача о точном неравенстве будет иметь вид

$$(21) \quad \sup_{\substack{f(\cdot) \in \mathcal{H}_2^{r,\beta} \cap L_2(\mathbb{R}) \\ \|f^{(r)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^\beta} \leq \gamma_1 \\ \|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \gamma_2}} \|f^{(k)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^\beta}$$

где $\gamma_1, \gamma_2 > 0$.

Теорема 5. Пусть $r, k \in \mathbb{N}$, $k < r$ и $\gamma_1, \gamma_2, \delta > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{f(\cdot) \in \mathcal{H}_2^{r,\beta} \cap L_2(\mathbb{R}) \\ \|f^{(r)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^\beta} \leq \gamma_1 \\ \|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \gamma_2}} \|f^{(k)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^\beta} &= \gamma_1 \mu_{r,\beta}^{k-r} \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right), \\ E_k(H_2^{r,\beta}, \delta, S_\beta) &= \mu_{r,\beta}^{k-r} (\delta^{-1}), \end{aligned}$$

а метод

$$\varphi_0(y)(\cdot) = (\mathcal{M}_{k,\delta}^{r,\beta} * y)(\cdot),$$

где

$$(22) \quad \mathcal{M}_{k,\delta}^{r,\beta}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (it)^k \left(1 + \frac{\delta^2 t_0^{2(r-k)}}{r-k} (k + \beta t_0 \operatorname{th}(2\beta t_0)) t^{2r} \operatorname{ch} 2\beta t \right)^{-1} e^{ixt} dt,$$

$$t_0 = \mu_{r\beta}(\delta^{-1}),$$

является оптимальным методом восстановления.

Доказательство. Рассмотрим экстремальную задачу

$$(23) \quad \|f^{(k)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^\beta}^2 \rightarrow \max, \quad \|f^{(r)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^\beta}^2 \leq \gamma_1^2, \quad \|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \leq \gamma_2^2.$$

Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид

$$(24) \quad \mathcal{L}(f(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) = -\|f^{(k)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^\beta}^2 + \lambda_1 \|f^{(r)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^\beta}^2 + \lambda_2 \|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2.$$

Переходя к образам Фурье (пользуясь теоремой Планшереля и представлением (14)), имеем

$$\mathcal{L}(f(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) = \int_{\mathbb{R}} (-t^{2k} \operatorname{ch} 2\beta t + \lambda_1 t^{2r} \operatorname{ch} 2\beta t + \lambda_2) u(t) dt,$$

где $u(\cdot) = (2\pi)^{-1} |\widehat{f}(\cdot)|^2$.

Положим

$$\omega(t) = -1 + \lambda_1 t^{2(r-k)} + \lambda_2 t^{-2k} \operatorname{ch}^{-1} 2\beta t.$$

Нетрудно показать, что $\omega(t)$ — выпуклая функция при $t > 0$. Поэтому если в некоторой точке $t_0 > 0$ выполняются равенства

$$(25) \quad \omega(t_0) = \omega'(t_0) = 0,$$

то $\omega(t) \geq 0$ при всех $t \geq 0$. Пусть t_0 — положительное решение уравнения (16), т. е. $t_0 = \mu_{r\beta}(\gamma_1/\gamma_2)$. Выберем $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ так, чтобы выполнялись равенства (25). Имеем

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{k \operatorname{ch} 2\beta t_0 + t_0 \beta \operatorname{sh} 2\beta t_0}{t_0^{2(r-k)} (k \operatorname{ch} 2\beta t_0 + t_0 \beta \operatorname{sh} 2\beta t_0) + (r-k) \operatorname{ch} 2\beta t_0},$$

$$\widehat{\lambda}_2 = \frac{(r-k) t_0^{2k} \operatorname{ch}^2 2\beta t_0}{t_0^{2(r-k)} (k \operatorname{ch} 2\beta t_0 + t_0 \beta \operatorname{sh} 2\beta t_0) + (r-k) \operatorname{ch} 2\beta t_0}.$$

Таким образом, для так выбранных $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ для всех $t \in \mathbb{R}$

$$-t^{2k} \operatorname{ch} 2\beta t + \widehat{\lambda}_1 t^{2r} \operatorname{ch} 2\beta t + \widehat{\lambda}_2 \geq 0.$$

Следовательно, для всех $f(\cdot) \in \mathcal{H}_2^{r,\beta} \cap L_2(\mathbb{R})$

$$\mathcal{L}(f(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) \geq 0.$$

Функции $f_n(\cdot)$, определенные в доказательстве теоремы 1, являются допустимыми и в задаче (23). Из равенства (18) и равенства

(17), выполненного для функции Лагранжа (24), следует, что значение экстремальной задачи (23) равно

$$\widehat{\lambda}_1 \gamma_1^2 + \widehat{\lambda}_2 \gamma_2^2 = \gamma_1 \mu_{r\beta}^{2(k-r)} \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right).$$

Погрешность оптимального восстановления и оптимальный метод находятся по той же схеме, которая применялась в доказательстве теоремы 1. \square

В частности, из теоремы 5 следует, что для всех функций из пространства $\mathcal{H}_2^{r,\beta}$, отличных от тождественного нуля, имеет место точное неравенство

$$\|f^{(k)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^\beta} \leq \|f^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \mu_{r\beta}^{k-r} \left(\frac{\|f^{(r)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^\beta}}{\|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}} \right).$$

4.2. Восстановление k -ой производной по неточно заданному преобразованию Фурье. Обозначим через $\mathcal{H}_{2,\infty}^{r,\beta}$ множество функций $f(\cdot) \in \mathcal{H}_2^{r,\beta} \cap L_2(\mathbb{R})$, для которых $\widehat{f}(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R})$ (через $\widehat{f}(\cdot)$ по-прежнему обозначаем преобразование Фурье функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$). Через $H_{2,\infty}^{r,\beta}$ обозначим множество функций $\mathcal{H}_{2,\infty}^{r,\beta} \cap H_{2,\infty}^{r,\beta}$. Рассмотрим задачу оптимального восстановления k -ой производной функции $f(\cdot) \in H_{2,\infty}^{r,\beta}$ по ее преобразованию Фурье $\widehat{f}(\cdot)$, заданному с погрешностью в метрике $L_\infty(\Delta_\sigma)$, где $\Delta_\sigma = (-\sigma, \sigma)$, $0 < \sigma \leq \infty$, т.е. считается, что вместо функции $\widehat{f}(\cdot)$ известна функция $y(\cdot) \in L_\infty(\Delta_\sigma)$ такая, что

$$\|\widehat{f}(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_\infty(\Delta_\sigma)} \leq \delta.$$

Требуется по функции $y(\cdot)$ восстановить на \mathbb{R} наилучшим образом функцию $f^{(k)}(\cdot)$.

В соответствии с общей постановкой задачи восстановления операторов погрешностью метода восстановления $\varphi: L_\infty(\Delta_\sigma) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ является величина

$$e_k(H_{2,\infty}^{r,\beta}, \delta, \sigma, \varphi) = \sup_{\substack{f(\cdot) \in H_{2,\infty}^{r,\beta}, y(\cdot) \in L_\infty(\Delta_\sigma) \\ \|f(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_\infty(\Delta_\sigma)} \leq \delta}} \|f^{(k)}(\cdot) - \varphi(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

погрешностью оптимального восстановления — величина

$$E_k(H_{2,\infty}^{r,\beta}, \delta, \sigma) = \inf_{\varphi: L_\infty(\Delta_\sigma) \rightarrow L_2(\mathbb{R})} e_k(H_{2,\infty}^{r,\beta}, \delta, \sigma, \varphi),$$

а оптимальным методом восстановления — метод, на котором достигается эта нижняя грань.

Положим

$$I_{r,\beta}(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} t^{2r} \operatorname{ch} 2\beta t \, dt.$$

Из монотонного возрастания функции $I_{r,\beta}(\sigma)$, $\sigma \in (0, +\infty)$, и того, что $I_{r,\beta}(0) = 0$, а $I_{r,\beta}(\sigma) \rightarrow +\infty$ при $\sigma \rightarrow +\infty$, следует, что при всех $\delta > 0$ существует и единственно такое $\hat{\sigma} \in (0, +\infty)$, для которого

$$(26) \quad I_{r,\beta}(\hat{\sigma}) = \delta^{-2}.$$

Теорема 6. Пусть $r, k \in \mathbb{N}$, $k \leq r$, $\delta > 0$, а $\hat{\sigma}$ определено равенством (26). Тогда

$$E_k(H_{2,\infty}^{r,\beta}, \delta, \sigma) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\sigma^{-2(r-k)}}{\operatorname{ch} 2\beta\sigma} \left(1 - \delta^2 I_{r,\beta}(\sigma)\right) + \frac{\delta^2 \sigma^{2k+1}}{\pi(2k+1)}}, & \sigma < \hat{\sigma}, \\ \frac{\delta \hat{\sigma}^{k+1/2}}{\sqrt{\pi(2k+1)}}, & \sigma \geq \hat{\sigma}, \end{cases},$$

а метод

$$\varphi_0(y)(\cdot) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} (i\tau)^k \left(1 - \left(\frac{\tau}{\sigma_0}\right)^{2(r-k)} \frac{\operatorname{ch} 2\beta t}{\operatorname{ch} 2\beta\sigma_0}\right) y(\tau) e^{i\tau t} d\tau,$$

где $\sigma_0 = \min\{\sigma, \hat{\sigma}\}$, является оптимальным.

Доказательство. Рассмотрим экстремальную задачу

$$(27) \quad \|f^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \rightarrow \max, \quad \|f^{(r)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^\beta}^2 \leq 1, \quad \|\hat{f}(\cdot)\|_{L_\infty(\Delta_\sigma)}^2 \leq \delta^2.$$

Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид

$$\mathcal{L}(f(\cdot), \lambda_1, \lambda_2(\cdot)) = -\|f^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 + \lambda_1 \|f^{(r)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^\beta}^2 + \int_{\Delta_\sigma} \lambda_2(t) |\hat{f}(t)|^2 dt.$$

Переходя к образам Фурье и обозначая $(2\pi)^{-1} |\hat{f}(\cdot)|^2 = u(\cdot)$, имеем

$$\mathcal{L}(f(\cdot), \lambda_1, \lambda_2(\cdot)) = \int_{\mathbb{R}} (-t^{2k} + \lambda_1 t^{2r} \operatorname{ch} 2\beta t) u(t) dt + 2\pi \int_{\Delta_\sigma} \lambda_2(t) u(t) dt.$$

Положим $\hat{\lambda}_1 = \sigma_0^{-2(r-k)} \operatorname{ch}^{-1} 2\beta\sigma_0$ и

$$\hat{\lambda}_2(t) = \begin{cases} (2\pi)^{-1} \left(t^{2k} - \hat{\lambda}_1 t^{2r} \operatorname{ch} 2\beta t\right), & |t| < \sigma_0, \\ 0, & |t| \geq \sigma_0. \end{cases}$$

Тогда при всех $f(\cdot) \in \mathcal{H}_{2,\infty}^{r,\beta}$

$$\mathcal{L}(f(\cdot), \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2(\cdot)) = \int_{|t| \geq \sigma_0} \left(-t^{2k} + \hat{\lambda}_1 t^{2r} \operatorname{ch} 2\beta t\right) u(t) dt \geq 0.$$

Если $\sigma \geq \hat{\sigma}$, то, обозначив через $g(\cdot)$ обратное преобразование Фурье функции, совпадающей с δ в интервале $(-\hat{\sigma}, \hat{\sigma})$ и равной нулю вне него, легко проверить, что условия (b) и (c) теоремы 4 выполнены для постоянной последовательности $f_n(\cdot) = g(\cdot)$.

Если $\sigma < \hat{\sigma}$, положим

$$\gamma = 1 - \delta^2 I_{r,\beta}(\sigma).$$

Рассмотрим последовательность функций

$$u_n(t) = \begin{cases} \frac{\delta^2}{2\pi}, & |t| < \sigma, \\ \frac{n\gamma}{2(\sigma + 1/n)^{2r} \operatorname{ch} 2\beta(\sigma + 1/n)}, & \sigma \leq |t| \leq \sigma + 1/n, \\ 0, & |t| > \sigma + 1/n \end{cases}$$

(через $g_n(\cdot)$ будем обозначать обратные преобразования Фурье функций $\sqrt{2\pi u_n(\cdot)}$). Нетрудно убедиться, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}(g_n(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2(\cdot)) = 0.$$

Кроме того,

$$(28) \quad \begin{aligned} \|g_n^{(r)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^\beta}^2 &= \int_{\mathbb{R}} t^{2r} u_n(t) \operatorname{ch} 2\beta t \, dt \\ &= 1 - \gamma + \frac{n\gamma}{(\sigma + 1/n)^{2r} \operatorname{ch} 2\beta(\sigma + 1/n)} \int_{\sigma}^{\sigma+1/n} t^{2r} \operatorname{ch} 2\beta t \, dt < 1, \end{aligned}$$

т. е. функции $g_n(\cdot)$ являются допустимыми в задаче (27). Из (28) вытекает также, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n^{(r)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^\beta} = 1.$$

Задача (7) имеет здесь вид

$$\widehat{\lambda}_1 \|f^{(r)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^\beta} + \int_{\Delta_\sigma} \widehat{\lambda}_2(t) |\widehat{f}(t) - y(t)|^2 \, dt \rightarrow \min, \quad f(\cdot) \in \mathcal{H}_{2,\infty}^{r,\beta}.$$

Переходя к образам Фурье, ее можно записать в виде

$$\frac{\widehat{\lambda}_1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} t^{2r} |\widehat{f}(t)|^2 \operatorname{ch} 2\beta t \, dt + \int_{\Delta_\sigma} \widehat{\lambda}_2(t) |\widehat{f}(t) - y(t)|^2 \, dt \rightarrow \min, \\ f(\cdot) \in \mathcal{H}_{2,\infty}^{r,\beta}.$$

Нетрудно убедиться, что решением этой задачи является функция $f_y(\cdot)$ такая, что

$$\widehat{f}_y(t) = \begin{cases} \frac{2\pi \widehat{\lambda}_2(t)}{2\pi \widehat{\lambda}_2(t) + \widehat{\lambda}_2 t^{2r} \operatorname{ch} 2\beta t} y(t), & |t| < \sigma_0, \\ 0, & |t| \geq \sigma_0, \end{cases}$$

т. е.

$$\widehat{f}_y(t) = \begin{cases} \left(1 - \left(\frac{t}{\sigma_0} \right)^{2(r-k)} \frac{\operatorname{ch} 2\beta t}{\operatorname{ch} 2\beta \sigma_0} \right) y(t), & |t| < \sigma_0, \\ 0, & |t| \geq \sigma_0. \end{cases}$$

Из теоремы 4 вытекает, что метод

$$\varphi_0(y)(\cdot) = f_y^{(k)}(\cdot)$$

является оптимальным, а для его погрешности справедливо равенство

$$E_k(H_{2,\infty}^{r,\beta}, \delta, \sigma) = \sqrt{\widehat{\lambda}_1 + \delta^2 \int_{\Delta_\sigma} \widehat{\lambda}_2(t) dt}.$$

Подставляя выражения для $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2(\cdot)$, получаем утверждение теоремы. \square

Из теоремы 6 вытекает, что при фиксированном δ , начиная с $\widehat{\delta}$, дальнейшее увеличение интервала, на котором известно преобразование Фурье функции из класса $H_{2,\infty}^{r,\beta}$, заданное с погрешностью δ в равномерной метрике, не ведет к уменьшению погрешности восстановления. Иными словами, при нарушении соотношения

$$(29) \quad \frac{\delta^2}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} t^{2r} \operatorname{ch} 2\beta t dt \leq 1,$$

связывающего погрешность исходных данных с величиной интервала, на котором эти данные измеряются, получаемая информация оказывается уже избыточной.

4.3. Теорема о трех окружностях. Обозначим через \mathcal{H}_2 множество функций $f(\cdot)$, аналитических в единичном круге $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, для которых

$$\sup_{0 < r < 1} \int_{\mathbb{T}} |f(re^{it})|^2 dt < \infty.$$

Рассмотрим аналог теоремы о трех прямых (теорема 3) для функций из \mathcal{H}_2 . Нас будет интересовать экстремальная задача о нахождении величины

$$\sup_{\substack{f(\cdot) \in \mathcal{H}_2 \\ \|f(r_1 e^{i\cdot})\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq \delta_1 \\ \|f(r_2 e^{i\cdot})\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq \delta_2}} \|f(\rho e^{i\cdot})\|_{L_2(\mathbb{T})},$$

где $0 < r_1 < \rho < r_2 \leq 1$. Свяжем эту задачу с задачей восстановления функции $f(\cdot) \in \mathcal{H}_2$ на окружности $|z| = \rho$ по приближенным значениям этой функции на окружностях $|z| = r_1$ и $|z| = r_2$. Будем считать, что для каждой функции $f(\cdot) \in \mathcal{H}_2$ известны функции $y_1(\cdot), y_2(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ такие, что

$$\|f(r_j e^{i\cdot}) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq \delta_j, \quad j = 1, 2.$$

Требуется по функциям $y_1(\cdot), y_2(\cdot)$ наилучшим образом восстановить функцию $f(\rho e^{i\cdot})$.

Погрешностью метода восстановления $\varphi: L_2(\mathbb{T}) \times L_2(\mathbb{T}) \rightarrow L_2(\mathbb{T})$ назовем величину

$$e_\rho(\mathcal{H}_2, \delta_1, \delta_2, \varphi) = \sup_{\substack{f(\cdot) \in \mathcal{H}_2, y_1(\cdot), y_2(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}) \\ \|f(r_j e^{i\cdot}) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq \delta_j, j=1,2}} \|f(\rho e^{i\cdot}) - \varphi(y_1, y_2)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E_\rho(\mathcal{H}_2, \delta_1, \delta_2) = \inf_{\varphi: L_2(\mathbb{T}) \times L_2(\mathbb{T}) \rightarrow L_2(\mathbb{T})} e_\rho(\mathcal{H}_2, \delta_1, \delta_2, \varphi),$$

а оптимальным методом — метод, на котором эта нижняя грань достигается.

Теорема 7. Пусть $0 < r_1 < \rho < r_2 \leq 1$ и $\delta_1, \delta_2 > 0$. Положим

$$(30) \quad \begin{aligned} \Delta_s &= [(r_1/r_2)^{s+1}, (r_1/r_2)^s], \quad s = 0, 1, \dots, \\ \mu_{s1} &= \frac{r_2^2 - \rho^2}{r_1^{2s}}, \quad \mu_{s2} = \frac{\rho^2 - r_1^2}{r_2^{2s}}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} E_\rho(\mathcal{H}_2, \delta_1, \delta_2) &= \sup_{\substack{f(\cdot) \in \mathcal{H}_2 \\ \|f(r_1 e^{i\cdot})\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq \delta_1 \\ \|f(r_2 e^{i\cdot})\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq \delta_2}} \|f(\rho e^{i\cdot})\|_{L_2(\mathbb{T})} \\ &= \begin{cases} \frac{\rho^s}{\sqrt{r_2^2 - r_1^2}} \sqrt{\delta_1^2 \mu_{s1} + \delta_2^2 \mu_{s2}} & \delta_1/\delta_2 \in \Delta_s, \quad s = 0, 1, \dots, \\ \delta_2, & \delta_1 \geq \delta_2. \end{cases} \end{aligned}$$

При $\delta_1/\delta_2 \in \Delta_s$, $s = 0, 1, \dots$, метод

$$\varphi_0(y_1, y_2)(\cdot) = \mu_{s1} \mathcal{K}_{\rho, \delta_1, \delta_2}(\rho r_1 e^{i\cdot}) * y_1(\cdot) + \mu_{s2} \mathcal{K}_{\rho, \delta_1, \delta_2}(\rho r_2 e^{i\cdot}) * y_2(\cdot),$$

где

$$(31) \quad \mathcal{K}_{\rho, \delta_1, \delta_2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\mu_{s1} r_1^{2k} + \mu_{s2} r_2^{2k}},$$

является оптимальным. Если $\delta_1 \geq \delta_2$, то метод

$$\varphi_0(y_1, y_2)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{r_2}{r_2 - \rho e^{ik(t-u)}} y_2(u) du$$

— оптимальный.

Доказательство. Рассмотрим экстремальную задачу

$$(32) \quad \|f(\rho e^{i\cdot})\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 \rightarrow \max, \quad \|f(r_j e^{i\cdot})\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 \leq \delta_j^2, \quad j = 1, 2,$$

и запишем соответствующую функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(f(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) = -\|f(\rho e^{i\cdot})\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 + \lambda_1 \|f(r_1 e^{i\cdot})\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 + \lambda_2 \|f(r_2 e^{i\cdot})\|_{L_2(\mathbb{T})}^2.$$

Для функции $f(\cdot) \in \mathcal{H}_2$, имеющий вид

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

при всех $0 < r \leq 1$ справедливо равенство

$$\|f(r e^{i\cdot})\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k}.$$

Поэтому функция Лагранжа может быть записана в виде

$$\mathcal{L}(f(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{k=0}^{\infty} (-\rho^{2k} + \lambda_1 r_1^{2k} + \lambda_2 r_2^{2k}) |a_k|^2.$$

Функция

$$\alpha(x) = -1 + \lambda_1 \left(\frac{r_1}{\rho}\right)^{2x} + \lambda_2 \left(\frac{r_2}{\rho}\right)^{2x}$$

является выпуклой при всех $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$. Следовательно, если при некотором s

$$(33) \quad \alpha(s) = \alpha(s+1) = 0,$$

то $\alpha(x) \geq 0$ при всех $x \in [0, s] \cup [s+1, +\infty)$. Тем самым, если выбрать $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ из условия (33), то при всех $k \in \mathbb{Z}_+$

$$-\rho^{2k} + \widehat{\lambda}_1 r_1^{2k} + \widehat{\lambda}_2 r_2^{2k} = \rho^{2k} \alpha(k) \geq 0.$$

Для $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ имеем

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{\rho^{2s}}{r_2^2 - r_1^2} \mu_{s1}, \quad \widehat{\lambda}_2 = \frac{\rho^{2s}}{r_2^2 - r_1^2} \mu_{s2},$$

где μ_{s1} и μ_{s2} определены равенством (30). Таким образом, для всех $f(\cdot) \in \mathcal{H}_2$

$$\mathcal{L}(f(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) \geq 0.$$

Пусть $\delta_1/\delta_2 \in \Delta_s$. Положим

$$g(z) = \widehat{a}_s z^s + \widehat{a}_{s+1} z^{s+1},$$

где

$$\widehat{a}_s = \left(\frac{\delta_1^2 r_2^{2s+2} - \delta_2^2 r_1^{2s+2}}{(r_1 r_2)^{2s} (r_2^2 - r_1^2)} \right)^{1/2}, \quad \widehat{a}_{s+1} = \left(\frac{\delta_2^2 r_1^{2s} - \delta_1^2 r_2^{2s}}{(r_1 r_2)^{2s} (r_2^2 - r_1^2)} \right)^{1/2}.$$

Легко проверить, что

$$\|g(r_1 e^{i\cdot})\|_{L_2(\mathbb{T})} = \delta_1, \quad \|g(r_2 e^{i\cdot})\|_{L_2(\mathbb{T})} = \delta_2,$$

а $\mathcal{L}(g(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = 0$. Из теоремы 4 вытекает, что значение экстремальной задачи (32) равно

$$\widehat{\lambda}_1 \delta_1^2 + \widehat{\lambda}_2 \delta_2^2 = \frac{\rho^{2s}}{r_2^2 - r_1^2} (\delta_1^2 \mu_{s1} + \delta_2^2 \mu_{s2}).$$

Экстремальная задача (7) имеет здесь вид

$$\|f(r_1 e^{i\cdot}) - y_1(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 + \|f(r_2 e^{i\cdot}) - y_2(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 \rightarrow \min, \quad f(\cdot) \in \mathcal{H}_2.$$

Нетрудно убедиться, что ее решением является функция

$$f_{y_1, y_2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\widehat{\lambda}_1 r_1^k (y_1)_k + \widehat{\lambda}_2 r_2^k (y_2)_k}{\widehat{\lambda}_1 r_1^{2k} + \widehat{\lambda}_2 r_2^{2k}} z^k,$$

где $(y_1)_k, (y_2)_k, k = 0, 1, \dots$, — коэффициенты Фурье функции $y_1(\cdot)$ и $y_2(\cdot)$ соответственно. Из теоремы 4 вытекает, что метод

$$\begin{aligned} \varphi_0(y_1, y_2)(\cdot) &= f_{y_1, y_2}(\rho e^{i\cdot}) \\ &= \mu_{s1} \mathcal{K}_{\rho, \delta_1, \delta_2}(\rho r_1 e^{i\cdot}) * y_1(\cdot) + \mu_{s2} \mathcal{K}_{\rho, \delta_1, \delta_2}(\rho r_2 e^{i\cdot}) * y_2(\cdot) \end{aligned}$$

является оптимальным.

При $\delta_1 \geq \delta_2$ положим $\widehat{\lambda}_1 = 0, \widehat{\lambda}_2 = 1, g(\cdot) = \delta_2$. В остальном этот случай рассматривается аналогично предыдущему. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтлвуд, Г. Полиа, *Неравенства*, ИЛ, М., 1948.
- [2] E. Landau, “Ungleichungen für zweimal differenzierbar Funktionen”, *Proc. London Math. Soc.*, **13** (1913), 43–49.
- [3] А. Н. Колмогоров, “О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале”, *Избранные труды. Математика и механика*, Наука, М., 1985, 252–261.
- [4] Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, “О неравенствах для производных колмогоровского типа”, *Матем. сб.*, **188**:12 (1997), 73–106.
- [5] A. S. Kochurov, G. G. Magaril-Ilyayev, V. M. Tikhomirov, “Inequalities for derivatives on a line and a half-line and problems of recovery”, *East J. Approx.*, **10**:1–2 (2004), 231–260.
- [6] К. Ю. Осипенко, “Неравенства для производных аналитических в полосе функций”, *Матем. заметки*, **56**:4 (1994), 114–122.
- [7] И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974.
- [8] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Наука, М., 1966.
- [9] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью”, *Матем. сб.*, **193**:3 (2002), 79–100.
- [10] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных”, *Функц. анализ и его прилож.*, **37** (2003), 51–64.

МАТИ — РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. К. Э. ЦИОЛКОВСКОГО