Математические заметки

Том 0 выпуск 0 июнь 1966

УДК 517.5

Оптимальное восстановление гармонической в шаре функции по ее неточно заданному преобразованию Радона

Т. Э. Баграмян

Рассматривается задача оптимального восстановления гармонической в шаре функции по ее неточно заданному преобразованию Радона. Найдена погрешность оптимального восстановления и семейство оптимальных методов, на которых эта погрешность достигается.

Библиография: 13 названий.

1. Введение. Общая постановка задачи оптимального восстановления, которая исследуется в работах [1]-[3], состоит в восстановлении значения линейного оператора U на некотором классе в линейном пространстве X по значениям линейного оператора I (называемого информационным), возможно заданным неточно, с погрешностью в той или иной метрике. В конкретных задачах (начиная с [4] и недавних [5]-[8]) в качестве информации рассматриваются линейные функционалы и операторы, сопоставляющие функции ее значения на наборе точек, ее коэффициенты Фурье или преобразование Фурье. В данной работе рассматривается преобразование Радона - оператор, переводящий функцию на $\mathbb{R}^d$ в множество ее интегралов по гиперплоскостям в $\mathbb{R}^d$. Этот оператор подробно изучается в теории компьютерной томографии, которая занимается численным восстановлением функций по их линейным или плоскостным интегралам. Для определенного пространства функций (см. [9]) в случае, если преобразование Радона известно точно, существуют точные формулы обращения, позволяющие произвести однозначное восстановление. Мы рассматриваем случай, когда преобразование Радона измерено неточно, но с известной погрешностью δ. В теории оптимального восстановления подобные операторы рассматривались ранее в [2] (пример 3.2), где для функции на $\mathbb{R}^2$ известны интегралы вдоль прямых, проходящих в некотором конечном числе направлений, а также в работе [10], где рассматривается оператор радиального интегрирования, значение которого известно с погрешностью.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, Осипенко К.Ю. за всестороннюю поддержку во время написания работы.

2. Постановка задачи и формулировка результата. Рассмотрим пространство Харди h_2 гармонических в шаре $\mathbb{B}^d = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| < 1\}$, $d \geqslant 2$, функций, для которых конечна норма

$$\|f\|_{h_2} = \sup_{0 \leqslant r < 1} \left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}} |f(r\phi)|^2 \right)^{1/2} d\phi,$$

$$\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d \colon |x| = 1\}.$$

Через Bh_2 обозначим класс функций $f \in h_2$, таких что $\|f\|_{h_2} \leqslant 1$. Продолжим функции $f \in Bh_2$ на $\mathbb{R}^d$, положив $f(x) = 0$, $|x| \geqslant 1$. Определим преобразование Радона

$$Rf(\theta, s) = \int_{x\theta = s} f(x)dx, \quad \theta \in \mathbb{S}^{d-1}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Функция Rf определена на единичном цилиндре $Z = \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}$. Гильбертово пространство $L_2(Z)$ задается скалярным произведением

$$(g, h)_{L_2(Z)} = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\mathbb{R}} g(\theta, s)\overline{h}(\theta, s) ds d\theta.$$

Предположим, что функция Rf известна с некоторой погрешностью. Будем считать, что нам известна функция $g \in L_2(Z)$, такая что

$$||Rf - g||_{L_2(Z)} \leqslant \delta, \quad \delta > 0.$$

Задача состоит в нахождении оптимального метода восстановления функции f по информации g. Под методом восстановления понимается произвольное отображение $m : L_2(Z) \to L_2(\mathbb{B}^d)$, а погрешностью метода называется величина

$$e(\delta, m) = \sup_{\substack{f \in Bh_2, g \in L_2(Z) \\ \|Rf - g\|_{L_2(Z)} \leqslant \delta}} ||f - m(g)||_{L_2(\mathbb{B}^d)}.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется наименьшая из погрешностей всех возможных методов

$$E(\delta) = \inf_{m : L_2(Z) \to L_2(\mathbb{B}^d)} e(\delta, m).$$

Метод, на котором достигается погрешность оптимального восстановления, называется оптимальным методом восстановления.

Рассмотрим множество сферических гармоник — ограничений однородных гармонических полиномов на сферу S^{d-1}. Сферические гармоники разных степеней ортогональны между собой в $L_2(S^{d-1})$. Существует $N(l)$ линейно независимых сферических гармоник степени l, где

$$N(l) = \frac{(2l + d - 2)(d + l - 3)!}{l!(d - 2)!}, \quad l \geqslant 1,$$

$$N(0) = 1.$$

Обозначим через $Y_k^l(\theta)$, $k = 1, \dots, N(l)$ элементы ортонормированного базиса пространства сферических гармоник степени l. Рассмотрим множество точек $\{(x_l, y_l)\}_{l=0,1,\dots}$, заданное формулами

$$x_l = \frac{\Gamma^2(\frac{d+1}{2})\Gamma(d+l+\frac{1}{2})}{\pi^{d-1}\Gamma(d)\Gamma(l+\frac{1}{2})}, \quad y_l = \frac{x_l}{2l+d}.$$

Пусть $x_s < \delta^{-2} \leqslant x_{s+1}$, $s \geqslant 0$, тогда положим

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{y_{s+1} - y_s}{x_{s+1} - x_s}, \quad \widehat{\lambda}_2 = \frac{y_s x_{s+1} - y_{s+1} x_s}{x_{s+1} - x_s}. \tag{2.1}$$

Если $\delta^{-2} \leqslant x_0$, положим

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{y_0}{x_0}, \quad \widehat{\lambda}_2 = 0.$$

В следующей теореме дается решение поставленной задачи об оптимальном восстановлении функций из Bh_2 по их неточно заданному преобразованию Радона.

Теорема 1. *Погрешность оптимального восстановления равна*

$$E(\delta) = \sqrt{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 \delta^2}.$$

Методы

$$m_a(g)(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l)} a_{kl} \frac{(\widehat{g}_{kl}, \psi_l)}{(\psi_l, \psi_l)} |x|^l Y_k^l \left(\frac{x}{|x|} \right), \tag{2.2}$$

где

$$g_{kl}(s) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} g(\theta, s) Y_k^l(\theta) d\theta,$$

$$\psi_l(\sigma) = (2\pi)^{(d-1)/2} i^{-l} \sigma^{-d/2} J_{l+d/2}(\sigma),$$

J_l *- функция Бесселя 1-го рода* l*-го порядка,*

$$a_{kl} = \frac{\widehat{\lambda}_2}{\widehat{\lambda}_1 x_l + \widehat{\lambda}_2} + \epsilon_{kl} \frac{\sqrt{\widehat{\lambda}_1 \widehat{\lambda}_2 (2l+d)}}{\widehat{\lambda}_1 x_l + \widehat{\lambda}_2} \sqrt{\widehat{\lambda}_1 x_l + \widehat{\lambda}_2 - \frac{x_l}{2l+d}}, \tag{2.3}$$

ϵ_{kl} *— произвольные числа из отрезка* $[-1; 1]$*, являются оптимальными.*

Набор a_{kl} является фильтром, определяющим значение гармоник в восстановлении функции f. В зависимости от δ коэффициенты некоторых гармоник можно положить равными 0, а некоторых 1, т.е. некоторые гармоники можно не учитывать, а другие не нуждаются в фильтрации. Например, при $\delta \geqslant 1/\sqrt{x_0}$ погрешность оптимального восстановления становится равной $\sqrt{1/d}$, а оптимальным является метод $m_0(g)(x) = 0$, где все коэффициенты a_{kl} равны нулю. Соотношение между объемом полезной информации и погрешностью, с которой она задана, дает

Следствие 1. *В условиях теоремы 1 методы*

$$m_a(g)(x) = \sum_{l<l'} \sum_{k=1}^{N(l)} \frac{(\widehat{g}_{kl}, \psi_l)}{(\psi_l, \psi_l)} |x|^l Y_k^l \left(\frac{x}{|x|} \right) + \sum_{l'<l<l''} \sum_{k=1}^{N(l)} a_{kl} \frac{(\widehat{g}_{kl}, \psi_l)}{(\psi_l, \psi_l)} |x|^l Y_k^l \left(\frac{x}{|x|} \right),$$

где

$$l' = \max\{l | y_l \leqslant \widehat{\lambda}_2\}, \quad l'' = \min\left\{ l | l \geqslant \frac{1-\widehat{\lambda}_1 d}{2\widehat{\lambda}_1} \right\},$$

являются оптимальными.

Из следствия следует, что начиная с некоторой степени, все гармоники больших степеней не влияют на погрешность оптимального восстановления и их можно занулить, а некоторое число первых гармоник не нужно фильтровать. С ростом δ число ненулевых коэффициентов гармоник уменьшается, пока они все не обнуляются при $\delta \geqslant 1/\sqrt{x_0}$. При уменьшении δ увеличивается чило гармоник, не нуждающихся в фильтрации, а оптимальный метод переходит в точную формулу восстановления

$$m(g)(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l)} \frac{(\widehat{g}_{kl}, \psi_l)_{L_2(\mathbb{R})}}{(\psi_l, \psi_l)_{L_2(\mathbb{R})}} |x|^l Y_k^l \left(\frac{x}{|x|}\right).$$

3. Доказательства. Сформулируем ряд понятий и утверждений, необходимых для доказательства основной теоремы. Введем обозначения

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}} f(\sigma) \bar{g}(\sigma) d\sigma,$$

$$R_\theta f(s) = Rf(\theta, s)$$

и

$$\widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\xi} f(x) dx$$

- преобразование Фурье функции f. Следующее утверждение (т.н. проекционная теорема) устанавливает связь между преобразованием Радона функции f и ее преобразованием Фурье ([9]).

Теорема 2.

$$\widehat{(R_\theta f)}(\sigma) = (2\pi)^{(d-1)/2} \widehat{f}(\sigma\theta), \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим нормализованные полиномы Гегенбауэра C_l^λ, $\lambda > -\frac{1}{2}$, степени l, которые являются ортогональными на отрезке $[-1, 1]$ с весовой функцией $(1-t^2)^{\lambda - 1/2}$ и $C_l^\lambda(1) = 1$. Основным инструментом при рассмотрении сферических гармоник для нас является теорема Функа-Хекке ([9])

Теорема 3. *Для функции f, интегрируемой на отрезке* $[-1, 1]$,

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(\theta\omega) Y_l(\omega) d\omega = c(d, l) Y_l(\theta),$$

$$c(d, l) = |\mathbb{S}^{d-2}| \int_{-1}^{1} f(t) C_l^{(d-2)/2}(t) (1-t^2)^{(d-3)/2} dt,$$

где $|\mathbb{S}^{d-2}|$ *- площадь поверхности сферы* $\mathbb{S}^{d-2}$.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы.

Рассмотрим двойственную задачу

$$\|f\|^2_{L_2(\mathbb{B}^d)} \to \max, \quad \|f\|^2_{h_2} \leqslant 1, \quad \|Rf\|^2_{L_2(Z)} \leqslant \delta^2.$$

Ее решение дает оценку снизу для квадрата погрешности оптимального восстановления в силу следующей цепочки неравенств (в которой m — произвольный метод)

$$E(\delta) \geqslant \sup_{\substack{f\in Bh_2, g\in L_2(Z)\\ \|Rf-g\|_{L_2(Z)}\leqslant\delta}} \|m(g)-f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)} \geqslant \sup_{\substack{f\in Bh_2\\ \|Rf\|_{L_2(Z)}\leqslant\delta}} \|m(0)-f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)} \geqslant$$

$$\sup_{\substack{f\in Bh_2\\ \|Rf\|_{L_2(Z)}\leqslant\delta}} \frac{\|m(0)-f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)} + \|-m(0)-f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}}{2} \geqslant \sup_{\substack{f\in Bh_2\\ \|Rf\|_{L_2(Z)}\leqslant\delta}} \|f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}.$$

Найдем решение двойственной задачи. Для функции $f \in Bh_2$ имеет место представление (см. [13])

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{N(l)} f_{kl}|x|^l Y_k^l\left(\frac{x}{|x|}\right), \quad 0 \leqslant |x| < 1.$$

Пользуясь им и равенством Парсеваля, получим

$$\|f\|^2_{L_2(\mathbb{B}^d)} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{N(l)} \frac{|f_{kl}|^2}{2l+d}, \quad \|f\|^2_{h_2} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{N(l)} |f_{kl}|^2.$$

Далее,

$$\|Rf\|^2_{L_2(Z)} = \int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{R}} |Rf(\theta,s)|^2 ds d\theta = \int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{R}} |\widehat{R_\theta f}(\sigma)|^2 d\sigma d\theta$$

$$= \int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{R}} (2\pi)^{d-1}|\widehat{f}(\sigma\theta)|^2 d\sigma d\theta = \int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{R}} (2\pi)^{d-1}\left|(2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\sigma\theta} f(x)dx\right|^2 d\sigma d\theta$$

$$= \int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{R}} \left|\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{N(l)} f_{kl}(2\pi)^{-1/2}\int_0^1 r^{d-1+l}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} e^{-ir\sigma\phi\cdot\theta} Y_k^l(\phi)d\phi dr\right|^2 d\sigma d\theta,$$

где мы использовали теорему 2 и выполнили замену $x = r\phi, \quad r \in [0,1], \quad \phi \in \mathbb{S}^{d-1}$. По теореме 3, имеем

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} e^{-ir\sigma\phi\cdot\theta} Y_k^l(\phi)d\phi = |\mathbb{S}^{d-2}|\int_{-1}^1 e^{-ir\sigma t} C_l^{(d-2)/2}(t)(1-t^2)^{(d-3)/2} dt Y_k^l(\theta).$$

Обозначим

$$\psi_l(\sigma) = (2\pi)^{-1/2}\int_0^1 r^{d-1+l}|\mathbb{S}^{d-2}|\int_{-1}^1 e^{-ir\sigma t} C_l^{(d-2)/2}(t)(1-t^2)^{(d-3)/2} dt dr,$$

тогда

$$\|Rf\|^2_{L_2(Z)} = \int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{R}} \left|\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{N(l)} f_{kl}\psi_l(\sigma)Y_k^l(\theta)\right|^2 d\sigma d\theta.$$

Функции Y_k^l образуют ортонормированный базис в $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, поэтому, применяя равенство Парсеваля, получим

$$\|Rf\|^2_{L_2(Z)} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{N(l)} |f_{k,l}|^2 \int_{\mathbb{R}} |\psi_l(\sigma)|^2 d\sigma = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{N(l)} |f_{k,l}|^2 (\psi_l, \psi_l).$$

Вводя обозначения $b_l = \sum_{k=1}^{N(l)} |f_{kl}|^2$ и $x_l^{-1} = (\psi_l, \psi_l)$, запишем двойственную задачу в виде

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_l}{2l+d} \to \max, \quad \sum_{l=0}^{\infty} b_l \leqslant 1, \quad \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_l}{x_l} \leqslant \delta^2, \quad b_l \geqslant 0. \tag{3.1}$$

Функция Лагранжа этой задачи имеет вид

$$L(b, \lambda_1, \lambda_2) = -\lambda_1 - \lambda_2 \delta^2 + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_l}{x_l} \left(\lambda_1 x_l + \lambda_2 - y_l \right), \quad y_l = \frac{x_l}{2l+d}.$$

Рассмотрим множество $\{(x_l, y_l) | l = 0, 1 \dots\}$. Для описания его свойств, преобразуем выражения для x_l и y_l, вычислив соответствующие интегралы. Начнем с $\psi_l(\sigma)$. Для вычисления внутреннего интеграла воспользуемся соотношениями

$$\int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\lambda - 1/2} e^{i\sigma t} C_l^{\lambda}(t) dt = \frac{\pi 2^{1-\lambda} \Gamma(2\lambda)}{\Gamma(\lambda)} i^l \sigma^{-\lambda} J_{l+\lambda}(\sigma)$$

(формула 7.321 из [11], поделенная на $\frac{\Gamma(2\lambda+l)}{l!\Gamma(2\lambda)}$ с учетом нормализации полиномов Гегенбауэра) и $J_l(-\sigma) = (-1)^l J_l(\sigma)$. Получим

$$\int_{-1}^{1} e^{-ir\sigma t} C_l^{(d-2)/2}(t) (1-t^2)^{(d-3)/2} dt = \frac{\pi 2^{1-(d-2)/2} \Gamma(d-2)}{\Gamma(\frac{d-2}{2})} i^{-l} (r\sigma)^{\frac{2-d}{2}} J_{l+\frac{d-2}{2}}(r\sigma).$$

Подставляя $|\mathbb{S}^{d-2}| = \frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})}$ и $\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\Gamma(2z)$, имеем

$$|\mathbb{S}^{d-2}| \frac{\pi 2^{1-(d-2)/2} \Gamma(d-2)}{\Gamma(\frac{d-2}{2})} = \frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})} \frac{\pi 2^{1-(d-2)/2} \Gamma(d-2)}{\Gamma(\frac{d-2}{2})}$$

$$= \frac{2^{2-(d-2)/2} \pi^{(d-1)/2+1} \Gamma(d-2)}{2^{1-(d-2)} \sqrt{\pi} \Gamma(d-2)} = (2\pi)^{d/2}.$$

Откуда

$$\psi_l(\sigma) = i^{-l} (2\pi)^{\frac{d-1}{2}} \sigma^{\frac{2-d}{2}} \int_0^1 r^{\frac{d}{2}+l} J_{l+\frac{d-2}{2}}(r\sigma) dr.$$

Используем следующее свойство функций Бесселя $x^l J_{l-1}(x) = \frac{d}{dx}(x^l J_l(x))$. Таким образом

$$\psi_l(\sigma) = i^{-l} (2\pi)^{\frac{d-1}{2}} \sigma^{\frac{2-d}{2}} \frac{1}{\sigma^{d/2+l+1}} \int_0^{\sigma} J_{l+d/2-1}(t) t^{d/2+l} dt$$

$$= i^{-l} (2\pi)^{\frac{d-1}{2}} \sigma^{\frac{2-d}{2}} \frac{1}{\sigma^{d/2+l+1}} \int_0^{\sigma} d\left(J_{l+d/2}(t) t^{d/2+l} \right) = i^{-l} (2\pi)^{\frac{d-1}{2}} \sigma^{\frac{2-d}{2}} \frac{J_{l+d/2}(\sigma)}{\sigma}$$

$$= i^{-l} (2\pi)^{\frac{d-1}{2}} \sigma^{\frac{-d}{2}} J_{l+d/2}(\sigma).$$

Возвращаясь к x_l, получим

$$x_l^{-1} = (\psi_l, \psi_l) = (2\pi)^{d-1} \int_{\mathbb{R}} \frac{|J_{l+d/2}(\sigma)|^2}{|\sigma|^d} d\sigma = (2\pi)^{d-1} 2 \int_0^{\infty} \frac{|J_{l+d/2}(\sigma)|^2}{|\sigma|^d} d\sigma.$$

Воспользуемся соотношением (30) пункта 7.7 из [12]

$$\int_0^\infty J_\mu(at)J_v(at)t^{-\rho}dt=\frac{(\frac{a}{2})^{\rho-1}\Gamma(\rho)\Gamma(\frac{v+\mu+1-\rho}{2})}{2\Gamma(\frac{1+v-\mu+\rho}{2})\Gamma(\frac{1+v+\mu+\rho}{2})\Gamma(\frac{1+\mu-v+\rho}{2})},$$

$$\operatorname{Re}(v+\mu+1)>\operatorname{Re}\rho>0,\quad a>0.$$

Положив $\mu=v=l+d/2,\quad a=1,\quad \rho=d$, получим

$$x_l^{-1}=(2\pi)^{d-1}2\int_0^\infty\frac{|J_{l+d/2}(\sigma)|^2}{|\sigma|^d}d\sigma=\frac{(\pi)^{d-1}\Gamma(d)\Gamma(l+\frac{1}{2})}{\Gamma^2(\frac{d+1}{2})\Gamma(d+l+\frac{1}{2})}.$$

Заметим, что $x_l\to\infty$ и $y_l\to\infty$. А также, для всех $l\geqslant 1$ выполнено неравенство

$$\frac{y_{l+1}-y_l}{x_{l+1}-x_l}\leqslant\frac{y_l-y_{l-1}}{x_l-x_{l-1}}.$$

Для доказательства используем известное свойство гамма функции $\Gamma(l+1)=l\Gamma(l)$. Имеем

$$x_{l+1}=\frac{(l+d+\frac{1}{2})}{(l+\frac{1}{2})}x_l.$$

Тогда

$$\frac{y_{l+1}-y_l}{x_{l+1}-x_l}=\frac{l(2d-2)+d^2-1}{d(2l+2+d)(2l+d)}.$$

Нетрудно убедиться, что эта величина монотонно убывает. Отсюда следует, что любая прямая, соединяющая соседние точки множества $\{(x_l,y_l)|l=0,\dots\}$ является опорной к этому множеству. В частности, это верно для прямой, соединяющей точки (x_s,y_s) и (x_{s+1},y_{s+1}), которая имеет вид $y=\widehat{\lambda}_1x+\widehat{\lambda}_2$, где $\widehat{\lambda}_1$, $\widehat{\lambda}_2$ определены в (2.1). В случае $\delta^{-2}\leqslant x_0$ рассмотрим прямую $y=\frac{y_0}{x_0}x$, соединяющую точки $(0,0)$ и (x_0,y_0), и положим $\widehat{\lambda}_1=\frac{y_0}{x_0}$, $\widehat{\lambda}_2=0$. Тогда для всех $l=0,\dots$ выполнено $\widehat{\lambda}_1x_l+\widehat{\lambda}_2-y_l\geqslant 0$ и $L(b,\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2)\geqslant-\widehat{\lambda}_1-\widehat{\lambda}_2\delta^2$. Рассмотрим элемент $\widehat{b}=(b_0,b_1,\dots)$,

$$\widehat{b}_i=\begin{cases}0, & i\notin\{s,s+1\},\\ x_s\frac{\delta^2x_{s+1}-1}{x_{s+1}-x_s}, & i=s,\\ x_{s+1}\frac{1-\delta^2x_s}{x_{s+1}-x_s}, & i=s+1.\end{cases}$$

Элемент $\widehat{b}$ допустим в (3.1), удовлетворяет условиям дополняющей нежесткости

$$\widehat{\lambda}_1\left(\sum_{l=0}^\infty\widehat{b}_l-1\right)+\widehat{\lambda}_2\left(\sum_{l=0}^\infty\frac{\widehat{b}_l}{x_l}-\delta^2\right)=0$$

и доставляет минимум функции Лагранжа

$$\min_b L(b,\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2)=L(\widehat{b},\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2)=-\sum_{l=0}^\infty\frac{\widehat{b}_l}{2l+d}=-\widehat{\lambda}_1-\widehat{\lambda}_2\delta^2.$$

В силу того, что $\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2\geqslant 0$, верно неравенство

$$L(b,\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2)\leqslant-\sum_{l=0}^\infty\frac{b_l}{2l+d},$$

откуда

$$\min_{b_l \geqslant 0} L(b, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) \leqslant \min_{\substack{b_l \geqslant 0 \\ \sum_{l=0}^{\infty} b_l \leqslant 1 \\ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_l}{x_l} \leqslant \delta^2}} -\sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_l}{2l+d}.$$

Но, из того, что $\widehat{b}$ минимизирует функцию Лагранжа и удовлетворяет условиям дополняющей нежесткости следует

$$\min_{b_l \geqslant 0} L(b, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = L(\widehat{b}, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = -\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\widehat{b}_l}{2l+d}.$$

Таким образом,

$$-\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\widehat{b}_l}{2l+d} \leqslant \min_{\substack{b_l \geqslant 0 \\ \sum_{l=0}^{\infty} b_l \leqslant 1 \\ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_l}{x_l} \leqslant \delta^2}} -\sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_l}{2l+d},$$

что означает, что набор $\widehat{b}$ является точкой максимума в задаче (3.1), решение которой равно $\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2\delta^2$. Отсюда получаем оценку снизу для погрешности оптимального восстановления $E(\delta) \geqslant \sqrt{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2\delta^2}$.

Покажем теперь, что погрешность $e(\delta, m)$ для всех методов (2.2) совпадает с полученной оценкой.

При $\delta^{-2} \leqslant x_0$ (эквивалентно $\widehat{\lambda}_2 = 0$) из (2.3) следует, что $m_a(g) = 0$. Тогда

$$\sup_{\substack{f \in Bh_2, g \in L_2(Z) \\ \|Rf - g\|_{L_2(Z)} \leqslant \delta}} \|f - m_a(g)\|^2_{L_2(\mathbb{B}^d)} \leqslant \sup_{f \in Bh_2} \|f\|^2_{L_2(\mathbb{B}^d)} = \sup_{\substack{f \in Bh_2, \\ \|Rf\|_{L_2(Z)} \leqslant \delta}} \|f\|^2_{L_2(\mathbb{B}^d)} = \widehat{\lambda}_1.$$

При $\widehat{\lambda}_2 > 0$ имеем

$$\|f - m_a(g)\|^2_{L_2(\mathbb{B}^d)} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l)} \frac{(f_{kl} - a_{kl}\frac{(\widehat{g}_{kl}, \psi_l)}{(\psi_l, \psi_l)})^2}{2l+d}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l)} \frac{(a_{kl}((\widehat{g}_{kl}, \psi_l) - f_{kl}(\psi_l, \psi_l)) + f_{kl}(\psi_l, \psi_l)(a_{kl} - 1))^2}{(2l+d)(\psi_l, \psi_l)^2}.$$

Применив неравенство Коши-Буняковского $(x, y)^2 \leqslant \|x\|^2\|y\|^2$ к векторам

$$x = \left(\frac{(\psi_l, \psi_l)(a_{kl} - 1)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_1}}, a_{kl}\frac{\sqrt{(\psi_l, \psi_l)}}{\sqrt{\widehat{\lambda}_2}} \right),$$

$$y = \left(f_{kl}\sqrt{\widehat{\lambda}_1}, ((\widehat{g}_{kl}, \psi_l) - f_{kl}(\psi_l, \psi_l)) \frac{\sqrt{\widehat{\lambda}_2}}{\sqrt{(\psi_l, \psi_l)}} \right),$$

получим

$$\|f - m_a(g)\|^2_{L_2(\mathbb{B}^d)} \leqslant \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l)} A_{kl} \left(f_{kl}^2 \widehat{\lambda}_1 + ((\widehat{g}_{kl}, \psi_l) - f_{kl}(\psi_l, \psi_l))^2 \frac{\widehat{\lambda}_2}{(\psi_l, \psi_l)} \right)$$

$$\leqslant \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{N(l)} A_{kl}\left(f_{kl}^2\widehat{\lambda}_1 + (\widehat{g}_{kl} - f_{kl}\psi_l, \psi_l)^2\frac{\widehat{\lambda}_2}{(\psi_l,\psi_l)}\right)$$

$$\leqslant \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{N(l)} A_{kl}\left(f_{kl}^2\widehat{\lambda}_1 + \|\widehat{g}_{kl} - f_{kl}\psi_l\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\widehat{\lambda}_2\right),$$

где

$$A_{kl} = \frac{1}{(2l+d)(\psi_l,\psi_l)^2}\left(\frac{(\psi_l,\psi_l)^2(a_{kl}-1)^2}{\widehat{\lambda}_1} + \frac{a_{kl}^2(\psi_l,\psi_l)}{\widehat{\lambda}_2}\right)$$

$$= \frac{1}{(2l+d)}\left(\frac{(a_{kl}-1)^2}{\widehat{\lambda}_1} + \frac{a_{kl}^2}{\widehat{\lambda}_2}x_l\right).$$

Аналогично рассуждениям, использованным для вычисления $\|Rf\|^2_{L_2(Z)}$, имеем

$$\|g - Rf\|^2_{L_2(Z)} = \int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{R}}\left|\widehat{g}_\theta(\sigma) - \widehat{Rf}_\theta(\sigma)\right|^2 d\sigma d\theta$$

$$= \int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{R}}\left|\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{N(l)}(\widehat{g}_{kl}(\sigma) - f_{kl}\psi_l(\sigma))Y_k^l(\theta)\right|^2 d\sigma d\theta = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{N(l)}\|\widehat{g}_{kl} - f_{kl}\psi_l\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Условие (2.3) эквивалентно $A_{kl} \leqslant 1$, следовательно

$$\|f - m_a(g)\|^2_{L_2(\mathbb{B}^d)} \leqslant \widehat{\lambda}_1\|f\|_{Bh_2} + \widehat{\lambda}_2\|g - Rf\|^2_{L_2(Z)} \leqslant \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2\delta^2.$$

Таким образом, семейство методов (2.2) является оптимальным, а погрешность оптимального восстановления равна $\sqrt{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2\delta^2}$. Теорема доказана.

Доказательство следствия.

Подставим $a_{kl} = 0$ и $a_{kl} = 1$ в $A_{kl} = \frac{1}{(2l+d)}\left(\frac{(a_{kl}-1)^2}{\widehat{\lambda}_1} + \frac{a_{kl}^2}{\widehat{\lambda}_2}x_l\right)$. Получим, что условие $A_{kl} \leqslant 1$ эквивалентно $l \geqslant \frac{1-\widehat{\lambda}_1 d}{2\widehat{\lambda}_1}$ и $y_l \leqslant \widehat{\lambda}_2$, соответственно.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] C. A. Micchelli, T. J. Rivlin, “A survey of optimal recovery”, *Optimal Estimation in Approximation Theory (C. A. Micchelli, T. J. Rivlin, Eds.)*, Plenum Press, New York, 1977, 1–54.

[2] C. A. Micchelli, T. J. Rivlin, “Lectures on Optimal Recovery”, *Lecture Notes in Mathematics*, **1129**, Springer–Verlag, Berlin, 1985, 21–93.

[3] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Оптимальное восстановление операторов по неточной информации”, *Математический форум. Т. 2. Исследования по выпуклому анализу*, ВНЦ РАН, Владикавказ, 2009, 158–192.

[4] К. Ю. Осипенко, “Оптимальная интерполяция аналитических функций”, *Матем. заметки*, **12**:4 (1972), 465-476.

[5] К. Ю. Осипенко, М. И. Стесин, “Hadamard and Schwarz type theorems and optimal recovery in spaces of analytic functions”, *Constr. Approx*, **31**:1 (2010), 37–67.

[6] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “О восстановлении операторов сверточного типа по неточной информации”, *Тр. МИАН. Т. 269.*, МАИК, Москва, 2010, 181-192.

[7] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру”, *Функ. анал. и его прил.*, **44**:3 (2010), 76–79.

[8] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Неравенство Харди-Литтлвуда-Полиа и восстановление производных по неточной информации”, *Докл. РАН*, **438**:3 (2011), 300–302.

[9] F. Natterer, *The mathematics of computerized tomography*, John Wiley&Sons, Stuttgart, 1986.

[10] Т. Э. Баграмян, “Оптимальное восстановление гармонической функции по неточно заданным значениям оператора радиального интегрировани”, *Владикавказский математический журнал*, **14**:1 (2012), 22–36.

[11] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений (4-е изд.)*, Наука, Москва, 1963.

[12] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены*, Наука, Москва, 1966.

[13] S. Axler, P. Bourdon, W Ramey, *Harmonic function theory. Second edition*, Springer-Verlag New York, Inc., New York, 2001.

Т. Э. Баграмян

РУДН, г. Москва

E-mail: mybestzoo@gmail.com