УДК 517.518.8

К. Ю. Кривошеев

Об оптимальном восстановлении значений линейных операторов по информации, известной со случайной ошибкой

В работе рассмотрена задача оптимального восстановления значений линейных операторов на классах элементов, информация о которых известна со случайной ошибкой. Построены линейные оптимальные методы восстановления, которые используют, вообще говоря, не всю доступную для измерения информацию. В качестве следствия приводится оптимальный метод восстановления функции по конечному набору ее коэффициентов Фурье, заданных со случайной ошибкой.

Библиография: 14 названий.

Ключевые слова: оптимальное восстановление, коэффициенты Фурье, минимаксное оценивание, экстремальная задача, линейный оператор.

§ 1. Введение

Работа посвящена построению оптимальных методов восстановления значений одного семейства линейных операторов на классах элементов, информация о которых известна со случайной ошибкой. Сама проблематика оптимального восстановления значений линейных функционалов и операторов на классах множеств возникла в 60-е годы прошлого века (см. [1]–[5]) и касалось случая, когда информация об элементах этих множеств известна с детерминированной ошибкой. Общая постановка задачи оптимального восстановления в этой ситуации такова.

Пусть X — векторное пространство, Z — нормированное пространство и $T\colon X \to Z$ — линейный оператор. Наша цель заключается в том, чтобы наилучшим образом восстановить значения оператора T на множестве (классе) $W \subset X$ по приближенной информации об элементах W. Точнее говоря, пусть задан линейный оператор $I\colon X \to \mathbb{R}^n$ и $\delta > 0$. Информация об $x \in W$ представляет собой произвольный вектор $y \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$\|y - I(x)\| \leqslant \delta,$$

где $\|\cdot\|$ — какая-либо норма в $\mathbb{R}^n$.

Каждое отображение $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to Z$ будем называть *методом восстановления* (значений оператора T на множестве W). *Погрешность метода* φ задается формулой

$$e_0(T, W, \varphi) = \sup_{x\in W} \sup_{\substack{y\in\mathbb{R}^n:\\ \|y-I(x)\|\leqslant\delta}} \|T(x) - \varphi(y)\|_Z.$$

Оптимальный метод восстановления — это отображение $\widehat{\varphi}\colon \mathbb{R}^n \to Z$ с минимальной погрешностью, т. е.

$$e_0(T,\, W,\, \widehat{\varphi}) = \inf_{\varphi} e_0(T,\, W,\, \varphi),$$

где инфимум берется по всем отображениям $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to Z$.

Задача состоит в поиске оптимального метода восстановления (если он существует) и числа

$$E_0(T,\, W) = \inf_{\varphi} e_0(T,\, W,\, \varphi),$$

где нижняя грань также берется по всем отображениям $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to Z$, называемого *погрешностью оптимального восстановления*.

К настоящему времени имеется значительное число работ, в которых для различных задач восстановления найдены оптимальные методы (см. [6]–[10]).

Задача, подобная изложенной, рассматривается и в математической статистике, где информация об $x \in W$ представляет собой случайный вектор $y = y(x)$, распределенный по нормальному закону с математическим ожиданием $I(x)$ и ковариационной матрицей $\delta^2 I_n$ для всех $x \in W$ (здесь I_n — единичная матрица порядка n), а погрешность восстановления определяется так

$$e_1(T,\, W,\, \varphi) = \sqrt{\sup_{x\in W} \mathbb{E}\, \|T(x) - \varphi(y(x))\|_Z^2}\,, \tag{1.1}$$

где $\mathbb{E}$ обозначает математическое ожидание.

Такой постановке также посвящено немало работ (см., например, [11], [12], [13], [14]). Несмотря на то, что формулировки задач с детерминированной и случайной ошибками весьма схожи, подходы к их решению и полученные результаты во многом различаются. В частности известно, что для задачи (1.1) даже в простейшем одномерном случае оптимальный метод нелинеен ([11], [12], [14]). Для задач оптимального восстановления с детерминированной ошибкой разработаны достаточно эффективные методы исследования, основанные на общей теории экстремума, позволяющие в разных задачах находить оптимальные методы восстановления. В связи с этим представляется интересным адаптировать эти подходы к задачам оптимального восстановления и со случайной ошибкой. При этом мы не будем ограничиваться только нормальным распределением, а будем рассматривать произвольные распределения вектора $y(x)$ с фиксированным матожиданием $I(x)$ и фиксированной оценкой для дисперсии.

Более точно, для каждого $x \in W$ и $\delta > 0$ рассмотрим множество вероятностных распределений в $\mathbb{R}^n$

$$Y_\delta(x) = \{y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \ : \ \mathbb{E}\, y = I(x), \quad \mathbb{V} y_k \leqslant \delta^2, \quad k = 1, \ldots, n\} \tag{1.2}$$

(здесь $\mathbb{V}$ обозначает дисперсию) и определим погрешность метода $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to Z$ по формуле

$$e(T,\, W,\, \varphi) = \sqrt{\sup_{x\in W} \sup_{y\in Y_\delta(x)} \mathbb{E}\, \|T(x) - \varphi(y)\|_Z^2} \tag{1.3}$$

(будем рассматривать только те методы, для которых погрешность (1.3) определена).

Как и ранее, *оптимальным методом восстановления* называется отображение $\widehat{\varphi}\colon \mathbb{R}^n \to Z$ с минимальной погрешностью, т. е.

$$e(T,\, W,\, \widehat{\varphi}) = \inf_{\varphi} e(T,\, W,\, \varphi).$$

Иными словами, оптимальный метод $\widehat{\varphi}$ обладает следующим свойством: супремум по всем парам $x \in W$, $y \in Y_\delta(x)$ величины $\mathbb{E}\,\|Tx - \varphi(y)\|^2$ минимален при $\varphi = \widehat{\varphi}$.

Задача состоит в поиске оптимального метода восстановления (если он существует) и *погрешности оптимального восстановления*

$$E(T,\, W) = \inf_{\varphi} e(T,\, W,\, \varphi).$$

В настоящей работе рассматривается именно такая задача оптимального восстановления, о которой мы будем говорить как о задаче оптимального восстановления значений оператора T на классе W по информации (1.2). Для операторов определенного вида найдены оптимальные методы и точные значения погрешности оптимального восстановления. При этом различные эффекты, обнаруженные в задачах восстановления с детерминированной ошибкой, например, линейность оптимального метода и возможность использовать не всю доступную для измерения информацию, проявляются и здесь. В качестве следствия, полученные результаты применяются к задаче оптимального восстановления функции по ее конечному набору коэффициентов Фурье, заданных со случайной ошибкой.

Автор выражает искреннюю благодарность Г. Г. Магарил-Ильяеву и К. Ю. Осипенко за постановку задачи и внимание к работе.

§ 2. Постановка задачи

Пусть l_2 — вещественное пространство суммируемых с квадратом последовательностей $x = (x_1,\, x_2, \ldots)$. Если $e_1,\, e_2, \ldots$ — стандартный базис в l_2, то $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$.

Пусть $\nu_k > 0$, $k = 1,\, 2, \ldots$. Определим подпространство $\mathcal{W}$ в l_2 и множество W по правилу

$$\mathcal{W} = \Big\{x \in l_2 : \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k |x_k|^2 < \infty\Big\}, \quad W = \Big\{x \in \mathcal{W} : \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k |x_k|^2 \leqslant 1\Big\}.$$

Пусть, наконец, ненулевые вещественные числа μ_k, $k = 1,\, 2, \ldots$ таковы, что $|\mu_k|^2 \leqslant C\nu_k$ для всех $k = 1,\, 2, \ldots$ и некоторого $C > 0$. Определим линейные операторы $T\colon \mathcal{W} \to l_2$ и $I\colon \mathcal{W} \to \mathbb{R}^n$ соответственно по формулам

$$Tx = (\mu_1 x_1,\, \mu_2 x_2, \ldots)$$

и $Ix = (x_1,\, x_2, \ldots,\, x_n)$, где $x = (x_1,\, x_2, \ldots)$.

Если обозначить $X = \mathcal{W}$ и $Z = l_2$, то в соответствии с общей постановкой, нас интересует задача оптимального восстановления значений оператора T на классе W по информации (1.2).

§ 3. Основная теорема

Теорема 1. *Пусть числа* ν_k *и* μ_k *таковы, что последовательность* $\gamma_k = \sqrt{\nu_k}/|\mu_k|$, $k \in \mathbb{N}$, *возрастает и*

$$\xi_j = \begin{cases} \left(\sum\limits_{k=1}^{j} \nu_k \left(\dfrac{\gamma_j}{\gamma_k} - 1\right)\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad 1 < j \leqslant n+1, \\ +\infty, \quad j = 1. \end{cases}$$

Тогда, если $\xi_{m+1} \leqslant \delta < \xi_m$ *при некотором* $1 \leqslant m \leqslant n$ *и*

$$\widehat{c}_1 = 1 - \frac{\delta^2 \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{\nu_k \gamma_1}{\gamma_k}}{1 + \delta^2 \sum\limits_{k=1}^{m} \nu_k},$$

то метод

$$\widehat{\varphi}(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{\gamma_k(1 - \widehat{c}_1)}{\gamma_1}\right) \mu_k y_k e_k$$

является оптимальным и при этом

$$E(T, W) = \sqrt{\frac{(1 - \widehat{c}_1)^2}{\gamma_1^2} + \delta^2 \sum_{k=1}^{m} \mu_k^2 \left(1 - \frac{\gamma_k(1 - \widehat{c}_1)}{\gamma_1}\right)^2}.$$

Если $\delta < \xi_{n+1}$, *то метод*

$$\widehat{\varphi}(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_{n+1}}\right) \mu_k y_k e_k$$

оптимален и

$$E(T, W) = \sqrt{\frac{1}{\gamma_{n+1}^2} + \delta^2 \sum_{k=1}^{n} \mu_k^2 \left(1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_{n+1}}\right)^2}.$$

§ 4. Доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы 1 разобьем на несколько частей. Сначала докажем оценку снизу для погрешности оптимального восстановления, а затем построим метод, на котором эта оценка будет достигаться.

4.1. Оценка снизу.

Теорема 2. *Пусть* W *– произвольное подмножество* l_2, *симметричное относительно «координатных плоскостей»* $\{x \in l_2 \ : \ x_k = 0\}$ *при всех* $k \in \mathbb{N}$. *Тогда для погрешности оптимального восстановления справедлива оценка*

$$E^2(T, W) \geqslant \sup_{\tau \in W} \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta^2 \mu_i^2 \tau_i^2}{\delta^2 + \tau_i^2} + \mu_{n+1}^2 \tau_{n+1}^2. \tag{4.1}$$

Доказательство. Зафиксируем элемент $\tau \in W$, такой, что

$$\tau_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1, \qquad \tau_i = 0, \quad i > n+1.$$

Заметим, что для нахождения супремума в правой части (4.1) достаточно рассматривать только такие τ.

Положим

$$B = \{x \in l_2 \;:\; x_i^2 = \tau_i^2, \quad i = 1, 2, \ldots\}.$$

Поскольку W симметрично относительно всех «координатных плоскостей» $\{x \in l_2 \;:\; x_k = 0\}$, ясно, что $B \subset W$.

Обозначим

$$p_i = \frac{\delta^2}{\delta^2 + \tau_i^2}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Не умаляя общности, для удобства обозначений предположим

$$\tau_1 \geqslant \tau_2 \geqslant \cdots \geqslant \tau_n, \qquad p_1 \leqslant p_2 \leqslant \cdots \leqslant p_n.$$

Пусть $m = \max\{i \;:\; 1 \leqslant i \leqslant n, \;\; \tau_i > 0\}$. Произвольный элемент $x \in B$ можно записать в виде:

$$x = \sum_{i=1}^{m} s_i(x)\tau_i e_i + s_{n+1}(x)\tau_{n+1}e_{n+1}.$$

где $s_i(x) \in \{-1, +1\}$. Отметим также следующее равенство, справедливое при любом $x \in B$

$$\|Tx\|_{l_2}^2 = \sum_{i=1}^{m} \mu_i^2\tau_i^2 + \mu_{n+1}^2\tau_{n+1}^2.$$

Напомним, информация об элементах W представляет собой n-мерный вектор. Пусть $\{e_i'\}_{i=1}^n$ – стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Зададим распределение $\eta(x)$ для каждого $x \in B$:

$$\eta(x) = \begin{cases} 0, \text{ с вероятностью } p_1, \\ \dfrac{s_1(x)\tau_1}{1-p_1}e_1', \text{ с вероятностью } p_2 - p_1, \\ \dfrac{s_1(x)\tau_1}{1-p_1}e_1' + \dfrac{s_2(x)\tau_2}{1-p_2}e_2', \text{ с вероятностью } p_3 - p_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{i=1}^{m-1} \dfrac{s_i(x)\tau_i}{1-p_i}e_i', \text{ с вероятностью } p_m - p_{m-1}, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{s_i(x)\tau_i}{1-p_i}e_i', \text{ с вероятностью } 1 - p_m. \end{cases}$$

Легко видеть, что первые m компонент этого распределения имеют вид

$$\eta_i(x) = \begin{cases} 0, \text{ с вероятностью } p_i, \\ \dfrac{s_i(x)\tau_i}{1-p_i}, \text{ с вероятностью } 1 - p_i. \end{cases}$$

при любом $i = 1, 2, \ldots, m$. Остальные $(n-m)$ компонент тождественно равны нулю.

Условие $\eta(x) \in Y_\delta(x)$ проверяется напрямую:

$$\mathbb{E}\,\eta_i(x) = (1-p_i)\frac{s_i(x)\tau_i}{1-p_i} = s_i(x)\tau_i = x_i.$$

$$\mathbb{V}\eta_i(x) = \mathbb{E}\,\eta_i^2(x) - (\mathbb{E}\,\eta_i(x))^2 = (1-p_i)\frac{\tau_i^2}{(1-p_i)^2} - x_i^2 = \frac{\tau_i^2}{1-p_i} - \tau_i^2.$$

Из определения p_i:

$$1 - p_i = \frac{\tau_i^2}{\delta^2 + \tau_i^2} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{V}\eta_i(x) = \frac{1}{1-p_i}\tau_i^2 - \tau_i^2 = \delta^2 + \tau_i^2 - \tau_i^2 = \delta^2.$$

Для компонент $\eta_i(x)$, $i > m$, необходимые требования на дисперсии и матожидания тоже соблюдаются. Проверим это отдельно:

$$\mathbb{E}\,\eta_i(x) = 0 = x_i, \qquad \mathbb{V}\eta_i(x) = 0 \leqslant \delta^2, \qquad i = m+1, \ldots, n.$$

Таким образом, $\eta(x) \in Y_\delta(x)$ для каждого $x \in B$.

Пусть φ – произвольный метод восстановления. Мы знаем, что мощность множества B конечна (не превосходит 2^{m+1}), обозначим ее $|B|$. Имеем:

$$\begin{aligned}
e^2(T, W, \varphi) &\geqslant \sup_{x\in B} \mathbb{E}\,\|Tx - \varphi(\eta(x))\|_{l_2}^2 \\
&= \sup_{x\in B}\left(\sum_{k=1}^{m+1}(p_k - p_{k-1})\left\|Tx - \varphi\left(\sum_{i=1}^{k-1}\frac{s_i(x)\tau_i}{1-p_i}e_i'\right)\right\|_{l_2}^2\right) \\
&\geqslant \frac{1}{|B|}\sum_{x\in B}\left(\sum_{k=1}^{m+1}(p_k - p_{k-1})\left\|Tx - \varphi\left(\sum_{i=1}^{k-1}\frac{s_i(x)\tau_i}{1-p_i}e_i'\right)\right\|_{l_2}^2\right) \\
&= \frac{1}{|B|}\sum_{k=1}^{m+1}(p_k - p_{k-1})\sum_{x\in B}\left\|Tx - \varphi\left(\sum_{i=1}^{k-1}\frac{s_i(x)\tau_i}{1-p_i}e_i'\right)\right\|_{l_2}^2.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Здесь мы оценили супремум по $x \in B$ средним арифметическим. Предполагалось также $p_0 = 0$, $p_{m+1} = 1$ и сумма по пустому множеству индексов равна нулю.

Рассмотрим для примера слагаемое $k = 1$. В силу центральной симметричности B:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|B|}p_1\sum_{x\in B}\left\|Tx - \varphi(0)\right\|_{l_2}^2 &= \frac{1}{2|B|}p_1\sum_{x\in B}\left\|Tx - \varphi(0)\right\|_{l_2}^2 \\
+\frac{1}{2|B|}p_1\sum_{x\in B}\left\|-Tx - \varphi(0)\right\|_{l_2}^2 &\geqslant \frac{1}{|B|}p_1\sum_{x\in B}\|Tx\|_{l_2}^2 \\
&= p_1\left(\sum_{i=1}^{m}\mu_i^2\tau_i^2 + \mu_{n+1}^2\tau_{n+1}^2\right).
\end{aligned}$$

Перейдем к общему случаю. Определим «сечения»

$$B_{s_1,\, s_2,\, \dots,\, s_{k-1}} = \Big\{x \in B : s_1(x) = s_1,\, s_2(x) = s_2,\, \dots,\, s_{k-1}(x) = s_{k-1}\Big\}.$$

для всех $k = 1, \dots, m+1$ (если $k = 1$, то соответствующее сечение совпадает с B). Теперь оценим k-ое слагаемое (4.2):

$$\frac{1}{|B|}(p_k - p_{k-1}) \sum_{x \in B} \left\| Tx - \varphi\left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{s_i(x)\tau_i}{1-p_i} e'_i\right) \right\|_{l_2}^2$$
$$= \frac{1}{|B|}(p_k - p_{k-1}) \sum_{s_1,\, s_2,\, \dots,\, s_{k-1}} \ \sum_{x \in B_{s_1,\, \dots,\, s_{k-1}}} \left\| Tx - \varphi\left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{s_i\tau_i}{1-p_i} e'_i\right) \right\|_{l_2}^2. \qquad (4.3)$$

«Сечения» описываются следующим образом:

$$x \in B_{s_1,\, s_2,\, \dots,\, s_{k-1}} \quad \Rightarrow \quad x = \left(\sum_{i=1}^{k-1} s_i \tau_i e_i\right) + z(x),$$
$$z(x) = \sum_{i=k}^{m} s_i(x)\tau_i e_i + s_{n+1}(x)\tau_{n+1} e_{n+1}.$$

При этом для любого $x \in B$ верно:

$$\Big\| Tz(x) \Big\|_{l_2}^2 = \sum_{i=k}^{m} \mu_i^2 \tau_i^2 + \mu_{n+1}^2 \tau_{n+1}^2.$$

Множества $B_{s_1,\, \dots,\, s_{k-1}}$ тоже центрально-симметричны, но с центром не в нуле

$$x = \left(\sum_{i=1}^{k-1} s_i\tau_i e_i\right) + z(x) \in B_{s_1,\, s_2,\, \dots,\, s_{k-1}} \ \Rightarrow \ \left(\sum_{i=1}^{k-1} s_i\tau_i e_i\right) - z(x) \in B_{s_1,\, s_2,\, \dots,\, s_{k-1}}.$$

Теперь оценим снизу (4.3) с помощью этой центральной симметричности

$$\frac{p_k - p_{k-1}}{|B|} \sum_{s_1,\, \dots,\, s_{k-1}} \ \sum_{x \in B_{s_1,\, \dots,\, s_{k-1}}} \left\| Tx - \varphi\left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{s_i\tau_i}{1-p_i} e'_i\right) \right\|_{l_2}^2$$
$$= \frac{p_k - p_{k-1}}{|B|} \sum_{s_1,\, \dots,\, s_{k-1}} \ \sum_{x \in B_{s_1,\, \dots,\, s_{k-1}}} \left\| T\Big(\sum_{i=1}^{k-1} s_i\tau_i e_i\Big) + Tz(x) - \varphi\Big(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{s_i\tau_i e'_i}{1-p_i}\Big) \right\|_{l_2}^2$$
$$= \frac{p_k - p_{k-1}}{2|B|} \sum_{s_1,\dots,s_{k-1}} \ \sum_{x \in B_{s_1,\dots,s_{k-1}}} \left(\left\| T\Big(\sum_{i=1}^{k-1} s_i\tau_i e_i\Big) + Tz(x) - \varphi\Big(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{s_i\tau_i e'_i}{1-p_i}\Big) \right\|_{l_2}^2 \right.$$
$$\left. + \left\| T\left(\sum_{i=1}^{k-1} s_i\tau_i e_i\right) - Tz(x) - \varphi\left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{s_i\tau_i e'_i}{1-p_i}\right) \right\|_{l_2}^2 \right)$$
$$\geqslant \frac{p_k - p_{k-1}}{|B|} \sum_{s_1,\, \dots,\, s_{k-1}} \ \sum_{x \in B_{s_1,\, \dots,\, s_{k-1}}} \Big\| Tz(x) \Big\|_{l_2}^2 = \frac{p_k - p_{k-1}}{|B|} \sum_{x \in B} \Big\| Tz(x) \Big\|_{l_2}^2$$
$$= (p_k - p_{k-1}) \left(\sum_{i=k}^{m} \mu_i^2 \tau_i^2 + \mu_{n+1}^2 \tau_{n+1}^2 \right).$$

Складывая по всем $k = 1, 2, \ldots, m+1$, получим

$$e^2(T, W, \varphi) \geqslant \sum_{k=1}^{m+1} (p_k - p_{k-1}) \left(\sum_{i=k}^{m} \mu_i^2 \tau_i^2 + \mu_{n+1}^2 \tau_{n+1}^2 \right) = \mu_{n+1}^2 \tau_{n+1}^2$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} \sum_{i \geqslant k} (p_k - p_{k-1}) \mu_i^2 \tau_i^2 = \mu_{n+1}^2 \tau_{n+1}^2 + \sum_{i=1}^{m} \mu_i^2 \tau_i^2 \sum_{k=1}^{i} (p_k - p_{k-1})$$
$$= \mu_{n+1}^2 \tau_{n+1}^2 + \sum_{i=1}^{m} \mu_i^2 \tau_i^2 p_i.$$

Учитывая определение p_i:

$$e^2(T, W, \varphi) \geqslant \sum_{i=1}^{m} \frac{\delta^2 \mu_i^2 \tau_i^2}{\delta^2 + \tau_i^2} + \mu_{n+1}^2 \tau_{n+1}^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta^2 \mu_i^2 \tau_i^2}{\delta^2 + \tau_i^2} + \mu_{n+1}^2 \tau_{n+1}^2.$$

Поскольку элемент $\tau \in W$ и метод φ были выбраны произвольно, теорема доказана.

4.2. Оценка сверху. Среди всех методов восстановления выделим множество

$$D = \Big\{ \varphi \colon \mathbb{R}^n \to l_2 \ \Big| \ \exists\, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} :$$
$$\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n) = (\alpha_1 y_1, \alpha_2 y_2, \ldots, \alpha_n y_n, 0, 0, \ldots) \Big\}.$$

Сначала найдем метод $\widehat{\varphi}$ – решение задачи минимизации (будем называть его оптимальным D-методом)

$$\begin{gathered} e^2(T, W, \varphi) \to \min, \\ \varphi \in D, \end{gathered}$$

а затем, основываясь на теореме 2, покажем, что $E(T, W) \geqslant e(T, W, \widehat{\varphi})$, то есть метод $\widehat{\varphi}$ будет оптимальным.

Лемма 4.1. *Для любого метода $\varphi \in D$ квадрат его погрешности выражается через соответствующие этому методу коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ по правилу*

$$e^2(T, W, \varphi) = \max \left\{ \frac{(\mu_1 - \alpha_1)^2}{\nu_1}, \ldots, \frac{(\mu_n - \alpha_n)^2}{\nu_n}, \frac{\mu_{n+1}^2}{\nu_{n+1}}, \frac{\mu_{n+2}^2}{\nu_{n+2}}, \ldots \right\} + \delta^2 \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2.$$

Доказательство. Перейдем от случайных векторов $y \in Y_\delta(x)$, у которых математическое ожидание зависит от x, к векторам

$$z = y - Ix$$

с нулевым матожиданием.

Рассмотрим более подробно величину $e^2(T,\,W,\,\varphi)$ для произвольного метода φ из множества D:

$$\begin{aligned} e^2(T,\,W,\,\varphi) &= \sup_{\substack{x\in W,\\ y\in Y_\delta(x)}} \mathbb{E}\,\|Tx-\varphi(y)\|_{l_2}^2 = \sup_{\substack{x\in W,\\ y\in Y_\delta(x)}} \mathbb{E}\,\|Tx-\varphi(Ix)-\varphi(z)\|_{l_2}^2 \\ &= \sup_{\substack{x\in W,\\ y\in Y_\delta(x)}} \Big(\|Tx-\varphi(Ix)\|_{l_2}^2+\mathbb{E}\,\|\varphi(z)\|_{l_2}^2-2\,\mathbb{E}\,\big\langle Tx-\varphi(Ix),\,\varphi(z)\big\rangle\Big). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Ограничения, связанные с определением множества $Y_\delta(x)$, легко выразить в терминах z:

$$\mathbb{E}\,z=0,\qquad \mathbb{V}z_k\leqslant\delta^2,\qquad k=1,\,2,\,\ldots,\,n.$$

Условие $\varphi\in D$ позволяет записать

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\,\big\langle Tx-\varphi(Ix),\,\varphi(z)\big\rangle &= \mathbb{E}\,\Big\langle Tx-\varphi(Ix),\,\sum_{k=1}^n \alpha_k z_k e_k\Big\rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \alpha_k\big\langle Tx-\varphi(Ix),\,e_k\big\rangle\,\mathbb{E}\,z_k=0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что третье слагаемое в формуле (4.4) для погрешности восстановления равно нулю. Распишем теперь второе слагаемое под знаком супремума (4.4):

$$\mathbb{E}\,\|\varphi(z)\|_{l_2}^2=\mathbb{E}\,\sum_{k=1}^n\alpha_k^2\,z_k^2(x)=\sum_{k=1}^n\alpha_k^2\,\mathbb{V}z_k.$$

Подставляя полученные результаты в (4.4), находим

$$\begin{aligned} e^2(T,\,W,\,\varphi) &= \sup_{x\in W}\sup_{y\in Y_\delta(x)}\Big(\|Tx-\varphi(Ix)\|_{l_2}^2+\sum_{k=1}^n\alpha_k^2\,\mathbb{V}z_k\Big) \\ &= \sup_{x\in W}\Big(\|Tx-\varphi(Ix)\|_{l_2}^2+\delta^2\sum_{k=1}^n\alpha_k^2\Big)=\sup_{x\in W}\Big(\|Tx-\varphi(Ix)\|_{l_2}^2\Big)+\delta^2\sum_{k=1}^n\alpha_k^2. \end{aligned}$$

Избавимся теперь от супремума по $x\in W$. Для этого нужно решить экстремальную задачу (при фиксированном φ):

$$\|Tx-\varphi(Ix)\|_{l_2}^2\to\max_x,\qquad x\in W.$$

Переписывая в более явном виде, получаем задачу линейного программирования

$$\begin{gathered} \sum_{k=1}^n(\mu_k-\alpha_k)^2|x_k|^2+\sum_{k=n+1}^\infty\mu_k^2|x_k|^2\to\max_{\{x_k\}}, \\ \sum_{k=1}^\infty\nu_k|x_k|^2\leqslant1. \end{gathered} \tag{4.5}$$

Покажем, что значение этой задачи равно максимальному отношению коэффициента в целевом функционале (4.5) к коэффициенту в ограничении при одной и той же переменной:

$$\max\left\{\frac{(\mu_1-\alpha_1)^2}{\nu_1},\ \frac{(\mu_2-\alpha_2)^2}{\nu_2},\ \ldots,\ \frac{(\mu_n-\alpha_n)^2}{\nu_n},\ \frac{\mu_{n+1}^2}{\nu_{n+1}},\ \frac{\mu_{n+2}^2}{\nu_{n+2}},\ \ldots\right\}. \tag{4.6}$$

Чтобы доказать это, введем вспомогательные обозначения: $X_k=\nu_k|x_k|^2$, $k\geqslant 1$, после чего (4.5) примет вид:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(\mu_k-\alpha_k)^2}{\nu_k}X_k+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\mu_k^2}{\nu_k}X_k\to\max_{\{X_k\}},$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}X_k\leqslant 1,\qquad X_k\geqslant 0.$$

Значение полученной задачи очевидно совпадает с (4.6). Лемма доказана.

Построение оптимального D-метода. Как показано в предыдущей лемме, погрешность метода $\varphi\in D$ является функцией соответствующих ему коэффициентов $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n$. Для нахождения оптимального D-метода $\widehat{\varphi}$ нужно найти точку минимума этой функции. Имеем задачу минимизации

$$e^2(T,\,W,\,\varphi)=\max\left\{\frac{(\mu_1-\alpha_1)^2}{\nu_1},\ \ldots,\ \frac{(\mu_n-\alpha_n)^2}{\nu_n},\ \frac{\mu_{n+1}^2}{\nu_{n+1}},\ \frac{\mu_{n+2}^2}{\nu_{n+2}},\ \ldots\right\}+\delta^2\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\to\min_{\{\alpha_k\}}. \tag{4.7}$$

Положим

$$c_k=\frac{\alpha_k}{\mu_k},\qquad k=1,\,2,\,\ldots,\,n,$$
$$\gamma_k=\sqrt{\frac{\nu_k}{\mu_k^2}},\qquad k=1,\,2,\,\ldots.$$

Исходя из сделанного в формулировке теоремы 1 предположения о возрастании последовательности $\{\gamma_k\}$, преобразуем (4.7) следующим образом:

$$e^2(T,\,W,\,\varphi)=\max\left\{\frac{(1-c_1)^2}{\gamma_1^2},\ \ldots,\ \frac{(1-c_n)^2}{\gamma_n^2},\ \frac{1}{\gamma_{n+1}^2}\right\}+\delta^2\sum_{k=1}^{n}\mu_k^2c_k^2\to\min_{\{c_k\}} \tag{4.8}$$

Заметим, что задача (4.8) строго выпуклая, поэтому ее решение единственно. Пусть $(\widehat{c}_1,\ \ldots,\ \widehat{c}_n)$ – оптимальные в этой задаче значения переменных. Тогда им соответствует оптимальный D-метод

$$\widehat{\varphi}(y_1,y_2,\ldots,y_n)=\sum_{k=1}^{n}\widehat{c}_k\mu_ky_ke_k.$$

Проведем решение (4.8) в несколько шагов.

Аналитическое решение задачи (4.8).

Шаг 1. Все $\widehat{c}_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ принадлежат отрезку $[0, 1]$.
Чтобы доказать это утверждение, будем рассуждать от противного. Допустим $\widehat{c}_k < 0$ для некоторого k. Подставим в целевой функционал (4.8) $c_k = -\widehat{c}_k$ вместо $c_k = \widehat{c}_k$, зафиксировав значения остальных переменных. Такая замена не меняет величину c_k^2, но уменьшает $(1 - c_k)^2$, то есть значение целевого функционала не увеличивается. Аналогично, если $\widehat{c}_k > 1$, то присвоим c_k значение, симметричное $\widehat{c}_k$ относительно единицы. $(1 - c_k)^2$ не изменится, а c_k^2 уменьшится. Таким образом, можно считать

$$\widehat{c}_k \in [0, 1], \qquad \forall\, k \in \{1,\, 2,\, \ldots,\, n\}.$$

Шаг 2. Предположим, что при каком-то $k > 1$:

$$\frac{(1 - \widehat{c}_1)^2}{\gamma_1^2} < \frac{(1 - \widehat{c}_k)^2}{\gamma_k^2}. \tag{4.9}$$

В силу шага 1 имеется ограничение:

$$\frac{(1 - \widehat{c}_k)^2}{\gamma_k^2} \leqslant \frac{1}{\gamma_k^2}.$$

Будем уменьшать c_1, начиная с $c_1 = \widehat{c}_1$ (зафиксировав $c_2 = \widehat{c}_2$, $\ldots$, $c_n = \widehat{c}_n$), до тех пор пока не будет достигнуто равенство:

$$\frac{(1 - c_1)^2}{\gamma_1^2} = \frac{(1 - \widehat{c}_k)^2}{\gamma_k^2}.$$

Условия $\gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \cdots \leqslant \gamma_n$ гарантируют, что найденное в результате этого процесса значение c_1 неотрицательно. Кроме того, величина

$$\max\left\{\frac{(1 - c_1)^2}{\gamma_1^2},\, \frac{(1 - c_2)^2}{\gamma_2^2}, \ldots,\, \frac{(1 - c_n)^2}{\gamma_n^2},\, \frac{1}{\gamma_{n+1}^2}\right\} \tag{4.10}$$

не увеличилась. Следовательно, рассматриваемый процесс приводит к уменьшению целевого функционала (4.8), что противоречит определению $\widehat{c}_1$. Тогда справедливо обратное к (4.9) неравенство:

$$\frac{(1 - \widehat{c}_1)^2}{\gamma_1^2} \geqslant \frac{(1 - \widehat{c}_k)^2}{\gamma_k^2}, \qquad k = 2,\, 3,\, \ldots,\, n. \tag{4.11}$$

Аналогично доказывается, что для последнего слагаемого под знаком максимума (4.10):

$$\frac{(1 - \widehat{c}_1)^2}{\gamma_1^2} \geqslant \frac{1}{\gamma_{n+1}^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \widehat{c}_1 \leqslant 1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_{n+1}}. \tag{4.12}$$

С другой стороны, похожие соображения можно использовать не только для c_1, но и для других переменных. Допустим, при некотором $k > 1$:

$$\frac{(1 - \widehat{c}_k)^2}{\gamma_k^2} < \frac{(1 - \widehat{c}_1)^2}{\gamma_1^2}.$$

При уменьшении c_k (стартуя с $c_k = \widehat{c}_k$) максимум (4.10) не будет изменяться и целевой функционал (4.8) будет убывать. Однако, этот процесс остановится, если:

- либо при каком-то неотрицательном c_k окажется

$$\frac{(1-c_k)^2}{\gamma_k^2} = \frac{(1-\widehat{c}_1)^2}{\gamma_1^2} \qquad \Rightarrow \qquad c_k = 1 - \frac{\gamma_k(1-\widehat{c}_1)}{\gamma_1}. \tag{4.13}$$

- либо c_k будет равно нулю, но тем не менее:

$$\frac{(1-c_k)^2}{\gamma_k^2} < \frac{(1-\widehat{c}_1)^2}{\gamma_1^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{\gamma_k^2} < \frac{(1-\widehat{c}_1)^2}{\gamma_1^2}$$
$$\Leftrightarrow \qquad 1 - \frac{\gamma_k(1-\widehat{c}_1)}{\gamma_1} < 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \widehat{c}_1 < 1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_k}.$$

Отсюда $\widehat{c}_k$ либо равно нулю, либо (если верно $1 - \frac{\gamma_k(1-\widehat{c}_1)}{\gamma_1} \geqslant 0$) выражается формулой (4.13). Запишем это в кратком виде так:

$$\widehat{c}_k = \left[1 - \frac{\gamma_k(1-\widehat{c}_1)}{\gamma_1}\right]_+. \tag{4.14}$$

Здесь $[t]_+ = \max(0, t)$.

Таким образом, все коэффициенты оптимального D-метода выражены через $\widehat{c}_1$. Собирая вместе (4.8), (4.11), (4.12), (4.14), получим одномерную задачу для поиска $\widehat{c}_1$:

$$\frac{(1-c_1)^2}{\gamma_1^2} + \delta^2 \sum_{k=1}^{n} \mu_k^2 \left[1 - \frac{\gamma_k(1-c_1)}{\gamma_1}\right]_+^2 \to \min_{c_1},$$
$$0 \leqslant c_1 \leqslant 1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_{n+1}}.$$

Домножим целевой функционал на γ_1^2. После несложных упрощений имеем:

$$\begin{gathered} g(c_1) \overset{\text{def}}{\equiv} (1-c_1)^2 + \delta^2 \sum_{k=1}^{n} \nu_k \left[c_1 - 1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_k}\right]_+^2 \to \min_{c_1}, \\ 0 \leqslant c_1 \leqslant 1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_{n+1}}. \end{gathered} \tag{4.15}$$

Здесь мы по-прежнему минимизируем погрешность метода (с точностью до константы). В частности для оптимального D-метода

$$\begin{aligned} e^2(T, W, \widehat{\varphi}) = \frac{g(\widehat{c}_1)}{\gamma_1^2} &= \frac{(1-\widehat{c}_1)^2}{\gamma_1^2} + \delta^2 \sum_{k=1}^{n} \mu_k^2 \left[1 - \frac{\gamma_k(1-\widehat{c}_1)}{\gamma_1}\right]_+^2 \\ &= \frac{(1-\widehat{c}_1)^2}{\gamma_1^2} + \delta^2 \sum_{k=1}^{n} \mu_k^2 \widehat{c}_k^2. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Шаг 3. Исследуем (4.15). Эта задача строго выпуклая и дифференцируемая по c_1. Вычислим призводную целевого функционала (4.15)

$$g'(c_1) = 2(c_1 - 1) + 2\delta^2 \sum_{k=1}^{n} \nu_k \left[c_1 - 1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_k}\right]_+. \tag{4.17}$$

Предположим, что при каком-то $1 \leqslant m \leqslant n$

$$1-\frac{\gamma_1}{\gamma_m}<\widehat{c}_1 \leqslant 1-\frac{\gamma_1}{\gamma_{m+1}}. \tag{4.18}$$

Тогда

$$g'(\widehat{c}_1)=2(\widehat{c}_1-1)+2\delta^2\sum_{k=1}^{m}\nu_k\left(\widehat{c}_1-1+\frac{\gamma_1}{\gamma_k}\right).$$

Из того, что $g'(\widehat{c}_1)=0$, следует

$$\widehat{c}_1=1-\frac{\delta^2\sum\limits_{k=1}^{m}\dfrac{\nu_k\gamma_1}{\gamma_k}}{1+\delta^2\sum\limits_{k=1}^{m}\nu_k}. \tag{4.19}$$

Подставляя это в (4.18), получаем двойное неравенство, которое можно представить в виде условия на δ:

$$\xi_{m+1}^2=\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{m+1}\nu_k\left(\dfrac{\gamma_{m+1}}{\gamma_k}-1\right)} \leqslant \delta^2<\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{m}\nu_k\left(\dfrac{\gamma_m}{\gamma_k}-1\right)}=\xi_m^2.$$

Таким образом, при $\xi_{m+1} \leqslant \delta<\xi_m$ коэффициент $\widehat{c}_1$ задается формулой (4.19). Согласно (4.14):

$$\widehat{c}_k=\left[1-\frac{\gamma_k(1-\widehat{c}_1)}{\gamma_1}\right]_+,$$

$$\widehat{c}_k>0 \quad\Leftrightarrow\quad 1-\frac{\gamma_k(1-\widehat{c}_1)}{\gamma_1}>0 \quad\Leftrightarrow\quad \widehat{c}_1>1-\frac{\gamma_1}{\gamma_k}.$$

Сравнив это с (4.18), несложно видеть, что $\widehat{c}_k>0$ только при $k \leqslant m$. Отсюда находим оптимальный D-метод:

$$\widehat{\varphi}(y_1, y_2, \ldots, y_n)=\sum_{k=1}^{m}\left(1-\frac{\gamma_k(1-\widehat{c}_1)}{\gamma_1}\right)\mu_k y_k e_k.$$

Пусть $\delta<\xi_{n+1}$. В этом случае согласно (4.17)

$$\begin{aligned} g'\left(1-\frac{\gamma_1}{\gamma_{n+1}}\right)&=\frac{-2\gamma_1}{\gamma_{n+1}}+2\delta^2\sum_{k=1}^{n}\nu_k\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_k}-\frac{\gamma_1}{\gamma_{n+1}}\right)\\ &=\frac{2\gamma_1}{\gamma_{n+1}}\left(-1+\delta^2\sum_{k=1}^{n}\nu_k\left(\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_k}-1\right)\right)=\frac{2\gamma_1}{\gamma_{n+1}}\left(-1+\frac{\delta^2}{\xi_{n+1}^2}\right) \leqslant 0. \end{aligned}$$

В (4.15) имеем ограничение $0 \leqslant c_1 \leqslant 1-\dfrac{\gamma_1}{\gamma_{n+1}}$. Поэтому, в силу строгого возрастания $g'(\cdot)$ на этом отрезке, получим

$$\widehat{c}_1=1-\frac{\gamma_1}{\gamma_{n+1}}.$$

Учитывая выражения для $\{\widehat{c}_k\}$, находим оптимальный D-метод:

$$\widehat{\varphi}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_{n+1}}\right) \mu_k y_k e_k.$$

Следующая лемма дополняет полученные нами результаты.

Лемма 4.2. *Предположим, $\xi_{m+1} \leqslant \delta < \xi_m$ при некотором $1 \leqslant m \leqslant n$. Тогда для погрешности оптимального D-метода верна формула*

$$e^2(T,\, W,\, \widehat{\varphi}) = \delta^2 \sum_{k=1}^{m} \mu_k^2 \widehat{c}_k. \tag{4.20}$$

В случае $\delta < \xi_{n+1}$

$$e^2(T,\, W,\, \widehat{\varphi}) = \delta^2 \sum_{k=1}^{n} \mu_k^2 \widehat{c}_k + \frac{1}{\gamma_{n+1}^2} \left(1 - \frac{\delta^2}{\xi_{n+1}^2}\right). \tag{4.21}$$

Доказательство. Сначала докажем (4.20). Напомним формулы для коэффициентов оптимального D-метода

$$\widehat{c}_1 = 1 - \frac{\delta^2 \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{\nu_k \gamma_1}{\gamma_k}}{1 + \delta^2 \sum\limits_{k=1}^{m} \nu_k} \qquad \Rightarrow \qquad (1 - \widehat{c}_1) + \delta^2 \sum_{k=1}^{m} \nu_k (1 - \widehat{c}_1) - \delta^2 \sum_{k=1}^{m} \frac{\nu_k \gamma_1}{\gamma_k} = 0,$$

$$\widehat{c}_k = \left[1 - \frac{\gamma_k (1 - \widehat{c}_1)}{\gamma_1}\right]_+, \qquad k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n.$$

Согласно полученным выше результатам, ненулевыми будут первые m из них. Поэтому для погрешности оптимального D-метода в соответствии с (4.16) имеем

$$e^2(T,\, W,\, \widehat{\varphi}) = \frac{(1 - \widehat{c}_1)^2}{\gamma_1^2} + \delta^2 \sum_{k=1}^{m} \mu_k^2 \widehat{c}_k^2. \tag{4.22}$$

Для доказательства леммы будем использовать соотношения

$$1 - \widehat{c}_k = \frac{\gamma_k (1 - \widehat{c}_1)}{\gamma_1}, \qquad k = 1,\, 2,\, \ldots,\, m.$$

Составим разность правых частей (4.22) и (4.20) и покажем, что она равна нулю:

$$\begin{aligned}
&\frac{(1 - \widehat{c}_1)^2}{\gamma_1^2} + \delta^2 \sum_{k=1}^{m} \mu_k^2 \widehat{c}_k^2 - \delta^2 \sum_{k=1}^{m} \mu_k^2 \widehat{c}_k \\
&= \frac{(1 - \widehat{c}_1)^2}{\gamma_1^2} + \delta^2 \sum_{k=1}^{m} \mu_k^2 (1 - \widehat{c}_k)^2 - \delta^2 \sum_{k=1}^{m} \mu_k^2 (1 - \widehat{c}_k) \\
&= \frac{(1 - \widehat{c}_1)}{\gamma_1^2} \left((1 - \widehat{c}_1) + \delta^2 \sum_{k=1}^{m} \mu_k^2 \gamma_k^2 (1 - \widehat{c}_1) - \delta^2 \sum_{k=1}^{m} \mu_k^2 \gamma_k \gamma_1 \right) \\
&= \frac{(1 - \widehat{c}_1)}{\gamma_1^2} \left((1 - \widehat{c}_1) + \delta^2 \sum_{k=1}^{m} \nu_k (1 - \widehat{c}_1) - \delta^2 \sum_{k=1}^{m} \frac{\nu_k \gamma_1}{\gamma_k} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Похожие рассуждения можно провести и если $\delta < \xi_{n+1}$. Воспользуемся формулами для коэффициентов метода $\widehat{\varphi}$

$$\widehat{c}_k = 1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_{n+1}}, \qquad k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n.$$

Тогда из (4.22) находим

$$e^2(T,\, W,\, \widehat{\varphi}) = \frac{1}{\gamma_{n+1}^2} + \delta^2 \sum_{k=1}^{n} \mu_k^2 \left(1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_{n+1}}\right)^2. \tag{4.23}$$

Сравним правые части (4.21) и (4.23):

$$\delta^2 \sum_{k=1}^{n} \mu_k^2 \left(1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_{n+1}}\right) + \frac{1}{\gamma_{n+1}^2}\left(1 - \frac{\delta^2}{\xi_{n+1}^2}\right) - \frac{1}{\gamma_{n+1}^2} - \delta^2 \sum_{k=1}^{n} \mu_k^2 \left(1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_{n+1}}\right)^2$$
$$= \delta^2 \sum_{k=1}^{n} \mu_k^2 \left(1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_{n+1}}\right) - \delta^2 \sum_{k=1}^{n} \mu_k^2 \left(1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_{n+1}}\right)^2 - \frac{\delta^2}{\gamma_{n+1}^2\, \xi_{n+1}^2}$$
$$= \delta^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k^2 \gamma_k}{\gamma_{n+1}} \left(1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_{n+1}}\right) - \frac{\delta^2}{\gamma_{n+1}^2\, \xi_{n+1}^2} = \frac{\delta^2}{\gamma_{n+1}^2}\left(\sum_{k=1}^{n} \nu_k \Big(\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_k} - 1\Big) - \frac{1}{\xi_{n+1}^2}\right) = 0.$$

Лемма доказана.

Завершение доказательства теоремы 1. Покажем, что построенный в предыдущем пункте метод $\widehat{\varphi}$ оптимальный. В соответствии с теоремой 2

$$E^2(T,\, W) \geqslant \sup_{\tau \in W} \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta^2 \mu_k^2 \tau_k^2}{\delta^2 + \tau_k^2} + \mu_{n+1}^2 \tau_{n+1}^2.$$

Пусть $\xi_{m+1} \leqslant \delta < \xi_m$, где $1 \leqslant m \leqslant n$. Выберем $\widehat{\tau} \in l_2$, удовлетворяющее условиям

$$\widehat{\tau}_k^2 = \delta^2 \left(\frac{\gamma_1}{(1 - \widehat{c}_1)\gamma_k} - 1\right), \qquad k = 1,\, 2,\, \ldots,\, m,$$

$$\widehat{\tau}_k = 0, \qquad k = m + 1,\, \ldots.$$

Здесь $\widehat{c}_1$, вообще говоря, зависит от δ. На отрезке $\delta \in [\xi_{m+1},\, \xi_m)$ справедлива формула

$$\widehat{c}_1 = 1 - \frac{\delta^2 \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{\nu_k \gamma_1}{\gamma_k}}{1 + \delta^2 \sum\limits_{k=1}^{m} \nu_k}.$$

Убедимся, что $\widehat{\tau} \in W$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \widehat{\tau}_k^2 = \delta^2 \sum_{k=1}^{m} \nu_k \left(\frac{\gamma_1}{(1 - \widehat{c}_1)\gamma_k} - 1\right) = \frac{\delta^2 \gamma_1}{1 - \widehat{c}_1} \sum_{k=1}^{m} \frac{\nu_k}{\gamma_k} - \delta^2 \sum_{k=1}^{m} \nu_k$$
$$= \left(1 + \delta^2 \sum_{k=1}^{m} \nu_k\right) - \delta^2 \sum_{k=1}^{m} \nu_k = 1.$$

По теореме 2

$$E^2(T,\,W) \geqslant \sum_{k=1}^{m} \frac{\delta^2\mu_k^2\widehat{\tau}_k^2}{\delta^2+\widehat{\tau}_k^2} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\delta^4\mu_k^2\left(\dfrac{\gamma_1}{(1-\widehat{c}_1)\gamma_k}-1\right)}{\delta^2\left(\dfrac{\gamma_1}{(1-\widehat{c}_1)\gamma_k}\right)}$$

$$= \delta^2\sum_{k=1}^{m}\mu_k^2\left(1-\frac{\gamma_k(1-\widehat{c}_1)}{\gamma_1}\right) = \delta^2\sum_{k=1}^{m}\mu_k^2\widehat{c}_k = e^2(T,\,W,\,\widehat{\varphi}),$$

что и требовалось.

Пусть $\delta < \xi_{n+1}$. В этом случае возьмем последовательность $\widehat{\tau} \in l_2$, такую, что

$$\widehat{\tau}_k^2 = \delta^2\left(\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_k}-1\right), \qquad k = 1,\,2,\,\ldots,\,n,$$

$$\widehat{\tau}_{n+1}^2 = \frac{1}{\nu_{n+1}}\left(1-\sum_{k=1}^{n}\nu_k\widehat{\tau}_k^2\right),$$

$$\widehat{\tau}_k = 0, \qquad k = n+2,\,n+3,\,\ldots.$$

Проверим $\widehat{\tau} \in W$. Для этого достаточно показать, что верно неравенство

$$\sum_{k=1}^{n}\nu_k\widehat{\tau}_k^2 \leqslant 1.$$

Произведем равносильные переходы, чтобы убедиться в его справедливости:

$$\sum_{k=1}^{n}\nu_k\widehat{\tau}_k^2 \leqslant 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \delta^2\sum_{k=1}^{n}\nu_k\left(\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_k}-1\right) \leqslant 1,$$

$$\delta^2 \leqslant \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}\nu_k\left(\dfrac{\gamma_{n+1}}{\gamma_k}-1\right)} \qquad \Leftrightarrow \qquad \delta^2 \leqslant \xi_{n+1}^2.$$

Значит, $\widehat{\tau} \in W$. По теореме 2

$$E^2(T,\,W) \geqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{\delta^2\mu_k^2\widehat{\tau}_k^2}{\delta^2+\widehat{\tau}_k^2} + \mu_{n+1}^2\widehat{\tau}_{n+1}^2$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{\delta^4\mu_k^2\left(\dfrac{\gamma_{n+1}}{\gamma_k}-1\right)}{\delta^2\left(\dfrac{\gamma_{n+1}}{\gamma_k}\right)} + \frac{\mu_{n+1}^2}{\nu_{n+1}}\left(1-\sum_{k=1}^{n}\nu_k\widehat{\tau}_k^2\right)$$

$$= \delta^2\sum_{k=1}^{n}\mu_k^2\left(1-\frac{\gamma_k}{\gamma_{n+1}}\right) + \frac{1}{\gamma_{n+1}^2}\left(1-\delta^2\sum_{k=1}^{n}\nu_k\left(\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_k}-1\right)\right)$$

$$= \delta^2\sum_{k=1}^{n}\mu_k^2\widehat{c}_k + \frac{1}{\gamma_{n+1}^2}\left(1-\frac{\delta^2}{\xi_{n+1}^2}\right) = e^2(T,\,W,\,\widehat{\varphi}),$$

что и требовалось. Теорема 1 доказана.

Следствие теоремы 1. Небольшая модификация доказательства теоремы 1 позволяет получить несколько более общее утверждение.

Будем обозначать стандартный базис в l_2 индексами, начинающимися с нуля: e_0, e_1, $\ldots$. Оставаясь в рамках общей постановки задачи оптимального восстановления по информации (1.2), уточним определения множества W и операторов T, I.

$$\mathcal{W} = \Big\{x \in l_2 : \sum_{k=0}^{\infty} \nu_k |x_k|^2 < \infty\Big\}, \qquad W = \Big\{x \in \mathcal{W} : \sum_{k=0}^{\infty} \nu_k |x_k|^2 \leqslant 1\Big\},$$
$$Tx = (\mu_0 x_0,\, \mu_1 x_1, \ldots), \qquad Ix = (x_0,\, x_1, \ldots,\, x_n),$$

где $x = (x_0,\, x_1, \ldots)$.

Теорема 3. *Пусть*

1. $\mu_k \neq 0$ *при всех* $k \in \mathbb{Z}_+$. *Здесь* $\mathbb{Z}_+$ *— множество целых неотрицательных чисел.*
2. *Определим*
$$\gamma_k = \sqrt{\frac{\nu_k}{\mu_k^2}}, \qquad k = 0,\, 1,\, \ldots$$
и потребуем, чтобы последовательность $\{\gamma_k\}$ *была возрастающей.*
3. *Пусть* $\gamma_0 = 0$, $\gamma_k > 0$ *при* $k \geqslant 1$ *или эквивалентно* $\nu_0 = 0$, $\nu_k > 0$ *при* $k \geqslant 1$.

Положим:

$$\xi_j = \begin{cases} \left(\sum\limits_{k=1}^{j} \nu_k \left(\dfrac{\gamma_j}{\gamma_k} - 1\right)\right)^{-1/2}, & 1 < j \leqslant n+1, \\ +\infty, \quad j = 1. \end{cases}$$

Если $\xi_{m+1} \leqslant \delta < \xi_m$ *при некотором* $1 \leqslant m \leqslant n$, *то оптимальный метод имеет вид:*

$$\widehat{\varphi}(y_0, y_1, \ldots, y_n) = \mu_0 y_0 e_0 + \sum_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{\gamma_k(1 - \widehat{c}_1)}{\gamma_1}\right) \mu_k y_k e_k,$$

где

$$\widehat{c}_1 = 1 - \frac{\delta^2 \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{\nu_k \gamma_1}{\gamma_k}}{1 + \delta^2 \sum\limits_{k=1}^{m} \nu_k}.$$

При этом погрешность оптимального восстановления равна

$$E(T, W) = \sqrt{\delta^2 \mu_0^2 + \frac{(1 - \widehat{c}_1)^2}{\gamma_1^2} + \delta^2 \sum_{k=1}^{m} \mu_k^2 \left(1 - \frac{\gamma_k(1 - \widehat{c}_1)}{\gamma_1}\right)^2}.$$

Если же $\delta < \xi_{n+1}$, *то метод*

$$\widehat{\varphi}(y_0, y_1, \ldots, y_n) = \mu_0 y_0 e_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_{n+1}}\right) \mu_k y_k e_k$$

является оптимальным, и его погрешность равна

$$E(T,\,W) = \sqrt{\delta^2\mu_0^2 + \frac{1}{\gamma_{n+1}^2} + \delta^2\sum_{k=1}^{n}\mu_k^2\left(1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_{n+1}}\right)^2}.$$

§ 5. Применение к восстановлению функции по ее конечному набору коэффициентов Фурье

Пусть $\mathbb{T}$ – это отрезок $[-\pi,\,\pi]$ с идентифицированными концами. $\mathcal{W}_2^r(\mathbb{T})$ – пространство вещественных 2π-периодических функций, у которых $(r-1)$-ая производная абсолютно непрерывна на $\mathbb{T}$, а r-ая производная принадлежит $L_2(\mathbb{T})$ $(r \in \mathbb{N})$.

Введем в пространстве $L_2(\mathbb{T})$ скалярное произведение и согласованную с ним норму:

$$\big\langle f_1,\, f_2\big\rangle = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_1(t)f_2(t)\,dt,$$

$$\|f_1\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_1^2(t)\,dt,$$

где $f_1,\,f_2$ – произвольные элементы $L_2(\mathbb{T})$.

Положим

$$F_n x = \left(a_0(x),\, a_1(x),\, \ldots,\, a_n(x),\, b_1(x),\, b_2(x),\, \ldots,\, b_n(x)\right),$$

где $\{a_k(x)\}$, $\{b_k(x)\}$ – коэффициенты Фурье $x \in \mathcal{W}_2^r(\mathbb{T})$.

Определим класс функций

$$W_2^r(\mathbb{T}) = \{x \in \mathcal{W}_2^r(\mathbb{T}) \;:\; \|x^{(r)}\|_{L_2(\mathbb{T})} \leqslant 1\}.$$

Сформулируем задачу оптимального восстановления функции из $W_2^r(\mathbb{T})$ по конечному набору ее коэффициентов Фурье, известных со случайной ошибкой.

Для любых $x \in W_2^r(\mathbb{T})$ и $\delta > 0$ рассмотрим множество всех вероятностных распределений в $\mathbb{R}^{2n+1}$ с матожиданием $F_n x$ и дисперсией каждой из компонент не больше δ^2:

$$\begin{aligned} Y_\delta(x) = \Big\{y = \Big(\widetilde{a}_0,\, \ldots,\, \widetilde{a}_n,\, \widetilde{b}_1,\, \ldots,\, \widetilde{b}_n\Big) \quad &: \quad \mathbb{E}\,y = F_n x, \\ \mathbb{V}\,\widetilde{a}_k \leqslant \delta^2, \qquad k = 0,\,1,\,\ldots,\,n, \qquad\qquad & \mathbb{V}\,\widetilde{b}_k \leqslant \delta^2, \qquad k = 1,\,\ldots,\,n\Big\}. \end{aligned}$$

Метод восстановления функций из $W_2^r(\mathbb{T})$ – это произвольное отображение $\varphi : \mathbb{R}^{2n+1} \to L_2(\mathbb{T})$. Будем рассматривать только множество методов, для которых определена погрешность

$$e(W,\,\varphi) = \sqrt{\sup_{x \in W_2^r(\mathbb{T})}\ \sup_{y \in Y_\delta(x)}\ \mathbb{E}\,\|x - \varphi(y)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2}. \tag{5.1}$$

Как и во введении, оптимальным методом называется метод восстановления $\widehat{\varphi}$ с минимальной погрешностью

$$e(W,\, \widehat{\varphi}) = \inf_{\varphi} e(W,\, \varphi), \tag{5.2}$$

а погрешность оптимального восстановления определяется по формуле

$$E(W) = \inf_{\varphi} e(W,\, \varphi).$$

Задача состоит в том, чтобы найти оптимальный метод и погрешность оптимального восстановления.

Приведем решение поставленной задачи, основанное на применении общей теоремы 3.

Введем ортонормированный базис в пространстве $L_2(\mathbb{T})$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\, \cos t,\, \sin t,\, \ldots,\, \cos kt,\, \sin kt,\, \ldots\right).$$

Преобразование Фурье

$$x \longmapsto \left(\frac{a_0(x)}{\sqrt{2}},\, a_1(x),\, b_1(x),\, \ldots,\, a_k(x),\, b_k(x),\, \ldots\right)$$

задает изометрический изоморфизм между пространствами $L_2(\mathbb{T})$ и l_2. Кроме того, из равенства Парсеваля

$$\|x^{(r)}\|^2_{L_2(\mathbb{T})} \leqslant 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r}(a_k^2(x) + b_k^2(x)) \leqslant 1.$$

В соответствии с этим положим

$$\begin{aligned} &\nu_0 = 0, && \nu_k = \nu_k' = k^{2r}, && k = 1,\, 2,\, \ldots, \\ &\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, && \mu_k = \mu_k' = 1, && k = 1,\, 2,\, \ldots. \end{aligned}$$

Таким образом, в данном случае применима теорема 3. Сформулируем ее следствие для рассматриваемой задачи.

Определим

$$\xi_j = \begin{cases} \left(2\sum\limits_{k=1}^{j} k^r(j^r - k^r)\right)^{-1/2}, & 1 < j \leqslant n+1, \\ +\infty, \quad j = 1. \end{cases}$$

Теорема 4. *Если $\xi_{m+1} \leqslant \delta < \xi_m$ при некотором $1 \leqslant m \leqslant n$, то оптимальный метод имеет вид*

$$\widehat{\varphi}(\widetilde{a}_0, \ldots, \widetilde{a}_n, \widetilde{b}_1, \ldots, \widetilde{b}_n) = \frac{\widetilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} (1 - k^r(1 - \widehat{c}_1)) \left(\widetilde{a}_k \cos kt + \widetilde{b}_k \sin kt\right),$$

где

$$\widehat{c}_1 = 1 - \frac{2\delta^2 \sum\limits_{k=1}^{m} k^r}{1 + 2\delta^2 \sum\limits_{k=1}^{m} k^{2r}}.$$

При этом погрешность оптимального восстановления равна

$$E(W) = \sqrt{\frac{\delta^2}{2} + (1-\widehat{c}_1)^2 + 2\delta^2 \sum_{k=1}^{m} (1 - k^r(1-\widehat{c}_1))^2}.$$

Если же $\delta < \xi_{n+1}$, *то метод*

$$\widehat{\varphi}(\widetilde{a}_0, \dots, \widetilde{a}_n, \widetilde{b}_1, \dots, \widetilde{b}_n) = \frac{\widetilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k^r}{(n+1)^r}\right) \left(\widetilde{a}_k \cos kt + \widetilde{b}_k \sin kt\right)$$

оптимальный, и его погрешность равна

$$E(W) = \sqrt{\frac{\delta^2}{2} + \frac{1}{(n+1)^{2r}} + 2\delta^2 \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k^r}{(n+1)^r}\right)^2}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Метод $\widehat{\varphi}$ из теоремы 4 оптимален в смысле (5.2), то есть имеет наименьшую погрешность (5.1).

Как легко видеть, метод $\widehat{\varphi}$ линеен, использует, вообще говоря, не все доступные коэффициенты Фурье, а используемые коэффициенты определенным образом сглаживает.

Список литературы

[1] С. А. Смоляк, “Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них”, *Канд. дисс. Москва: МГУ*, 1965.

[2] А. Г. Марчук, К. Ю. Осипенко, “Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек”, *Матем. заметки*, **17**:3 (1975), 359–368.

[3] C. A. Micchelli, T. J. Rivlin, “A survey of optimal recovery”, Optimal Estimation in Approximation Theory, Plenum, New York, 1977, 1–54.

[4] A. A. Melkman, C. A. Micchelli, “Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **16**:1 (1979), 87–105.

[5] C. A. Micchelli, T. J. Rivlin, “Lectures on Optimal Recovery”, Lecture Notes in Mathematics, **1129**, Springer–Verlag, Berlin, 1985, 21–93.

[6] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью”, *Матем. сб.*, **193**:3 (2002), 79—100.

[7] Н. Д. Выск, К. Ю. Осипенко, “Оптимальное восстановление решения волнового уравнения по неточным начальным данным”, *Матем. заметки*, **81**:6 (2007), 803—815.

[8] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “О наилучшем гармоническом синтезе периодических функций”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **18**:5 (2013), 155—174.

[9] К. Ю. Осипенко, “Оптимальное восстановление линейных операторов в неевклидовых метриках”, *Матем. сб.*, **205**:10 (2014), 77—106.

[10] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Точность и оптимальность методов восстановления функций по их спектру”, *Тр. МИАН*, **293** (2016), 201—216.

[11] L. Plaskota, *Noisy information and computational complexity.*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.

[12] D. L. Donoho, “Statistical estimation and optimal recovery”, *Ann. Statist.*, **22**:1 (1994), 238–270.

[13] D. L. Donoho, R. C. Liu, K. B. MacGibbon, “Minimax Risk Over Hyperrectangles, and Implications”, *Ann. of Statist.*, **18**:3 (1990), 1416–1437.

[14] С. В. Решетов, “Минимаксный риск для квадратично выпуклых множеств”, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **368** (2009), 181—189.

К. Ю. Кривошеев
E-mail: kirill0212@gmail.com

Поступила в редакцию
23 марта 2021 г.