



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Ю. Кривошеев, Об оптимальном восстановлении значений линейных операторов по информации, известной со случайной ошибкой, *Матем. сб.*, 2021, том 212, номер 11, 89–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm9484>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 213.234.244.230

28 октября 2021 г., 12:34:19



УДК 517.518.8

К. Ю. Кривошеев

Об оптимальном восстановлении значений линейных операторов по информации, известной со случайной ошибкой

Рассмотрена задача оптимального восстановления значений линейных операторов на классах элементов, информация о которых известна со случайной ошибкой. Построены линейные оптимальные методы восстановления, которые используют, вообще говоря, не всю доступную для измерения информацию. В качестве следствия приводится оптимальный метод восстановления функции по конечному набору ее коэффициентов Фурье, заданных со случайной ошибкой.

Библиография: 14 названий.

Ключевые слова: оптимальное восстановление, минимаксное оценивание, коэффициенты Фурье, экстремальная задача, линейный оператор.

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm9484>

§ 1. Введение

Работа посвящена построению оптимальных методов восстановления значений одного семейства линейных операторов на классах элементов, информация о которых известна со случайной ошибкой. Сама проблематика оптимального восстановления значений линейных функционалов и операторов на классах множеств возникла в 60-е годы прошлого века (см. [1]–[5]) и касалась случая, когда информация об элементах этих множеств известна с детерминированной ошибкой. Общая постановка задачи оптимального восстановления в этой ситуации такова.

Пусть X – векторное пространство, Z – нормированное пространство и $T: X \rightarrow Z$ – линейный оператор. Наша цель заключается в том, чтобы наилучшим образом восстановить значения оператора T на множестве (классе) $W \subset X$ по приближенной информации об элементах W . Точнее говоря, пусть задан линейный оператор $I: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $\delta > 0$. Информация о любом $x \in W$ представляет собой некоторый вектор $y = y(x) \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$\|y - I(x)\| \leq \delta,$$

где $\|\cdot\|$ – какая-либо норма в \mathbb{R}^n .

Каждое отображение $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow Z$ будем называть *методом восстановления* (значений оператора T на множестве W). *Погрешность метода* φ задается формулой

$$e_0(T, W, \varphi) = \sup_{x \in W} \sup_{\substack{y \in \mathbb{R}^n: \\ \|y - I(x)\| \leq \delta}} \|T(x) - \varphi(y)\|_Z.$$

Оптимальный метод восстановления – это отображение $\widehat{\varphi}: \mathbb{R}^n \rightarrow Z$ с минимальной погрешностью, т.е.

$$e_0(T, W, \widehat{\varphi}) = \inf_{\varphi} e_0(T, W, \varphi),$$

где инфимум берется по всем отображениям $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow Z$.

Задача состоит в поиске оптимального метода восстановления (если он существует) и числа

$$E_0(T, W) = \inf_{\varphi} e_0(T, W, \varphi),$$

где нижняя грань также берется по всем отображениям $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow Z$, называемого *погрешностью оптимального восстановления*.

К настоящему времени имеется значительное число работ, в которых для различных задач восстановления найдены оптимальные методы (см. [6]–[10]).

Задача, подобная изложенной, рассматривается и в математической статистике, где информация об $x \in W$ представляет собой случайный вектор $y = y(x)$, распределенный по нормальному закону с математическим ожиданием $I(x)$ и ковариационной матрицей $\delta^2 \text{Id}_n$ для всех $x \in W$ (здесь Id_n – единичная матрица порядка n), а погрешность восстановления определяется как

$$e_1(T, W, \varphi) = \sqrt{\sup_{x \in W} \mathbb{E} \|T(x) - \varphi(y(x))\|_Z^2}, \quad (1.1)$$

где \mathbb{E} обозначает математическое ожидание.

Такой постановке также посвящено немало работ (см., например, [11]–[14]). Несмотря на то, что формулировки задач с детерминированной и случайной ошибками весьма схожи, подходы к их решениям и полученные результаты во многом различаются. В частности, известно, что для задачи (1.1) даже в простейшем одномерном случае оптимальный метод нелинеен (см. [11], [12], [14]). Для задач оптимального восстановления с детерминированной ошибкой разработаны достаточно эффективные методы исследования, основанные на общей теории экстремума, которые позволяют в разных задачах находить оптимальные методы восстановления. В связи с этим представляется интересным адаптировать эти подходы к задачам оптимального восстановления и со случайной ошибкой. При этом мы не будем ограничиваться только нормальным распределением, а будем рассматривать произвольные распределения вектора $y(x)$ с фиксированным математическим ожиданием $I(x)$ и фиксированной оценкой для дисперсии.

Более точно, для каждого $x \in W$ и $\delta > 0$ рассмотрим множество вероятностных распределений в \mathbb{R}^n

$$Y_{\delta}(x) = \{y = (y_1, y_2, \dots, y_n): \mathbb{E}y = I(x), \forall y_k \leq \delta^2, k = 1, \dots, n\} \quad (1.2)$$

(здесь \mathbb{V} обозначает дисперсию) и определим погрешность метода $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow Z$ по формуле

$$e(T, W, \varphi) = \sqrt{\sup_{x \in W} \sup_{y \in Y_{\delta}(x)} \mathbb{E} \|T(x) - \varphi(y)\|_Z^2} \quad (1.3)$$

(будем рассматривать только те методы, для которых погрешность (1.3) определена).

Как и ранее, *оптимальным методом восстановления* называется отображение $\hat{\varphi}: \mathbb{R}^n \rightarrow Z$ с минимальной погрешностью, т.е.

$$e(T, W, \hat{\varphi}) = \inf_{\varphi} e(T, W, \varphi).$$

Иными словами, оптимальный метод $\hat{\varphi}$ обладает следующим свойством: супремум по всем парам $x \in W, y \in Y_{\delta}(x)$ величины $\mathbb{E}\|Tx - \varphi(y)\|^2$ минимален при $\varphi = \hat{\varphi}$.

Задача состоит в поиске оптимального метода восстановления (если он существует) и *погрешности оптимального восстановления*

$$E(T, W) = \inf_{\varphi} e(T, W, \varphi).$$

В настоящей работе рассматривается именно такая задача оптимального восстановления, о которой мы будем говорить как о задаче оптимального восстановления значений оператора T на классе W по информации (1.2). Для операторов определенного вида найдены оптимальные методы и точные значения погрешности оптимального восстановления. При этом различные эффекты, обнаруженные в задачах восстановления с детерминированной ошибкой (например, линейность оптимального метода и возможность использовать не всю доступную для измерения информацию), проявляются и здесь. В качестве следствия полученные результаты применяются к задаче оптимального восстановления функции по ее конечному набору коэффициентов Фурье, заданных со случайной ошибкой.

Благодарность. Автор выражает искреннюю благодарность Г.Г. Магарил-Ильяеву и К.Ю. Осипенко за постановку задачи и внимание к работе.

§ 2. Постановка задачи

Пусть l_2 – вещественное пространство суммируемых с квадратом последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$. Если e_1, e_2, \dots – стандартный базис в l_2 , то $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$.

Пусть $\nu_k > 0, k = 1, 2, \dots$. Определим подпространство \mathcal{W} в l_2 и множество W по правилу

$$\mathcal{W} = \left\{ x \in l_2 : \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k |x_k|^2 < \infty \right\}, \quad W = \left\{ x \in \mathcal{W} : \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k |x_k|^2 \leq 1 \right\}.$$

Пусть, наконец, ненулевые вещественные числа $\mu_k, k = 1, 2, \dots$, таковы, что $|\mu_k|^2 \leq C \nu_k$ для всех $k = 1, 2, \dots$ и некоторого $C > 0$. Определим линейные операторы $T: \mathcal{W} \rightarrow l_2$ и $I: \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}^n$ соответственно по формулам

$$Tx = (\mu_1 x_1, \mu_2 x_2, \dots), \quad Ix = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где $x = (x_1, x_2, \dots)$.

Если обозначить $X = \mathcal{W}$ и $Z = l_2$, то в соответствии с общей постановкой нас интересует задача оптимального восстановления значений оператора T на классе W по информации (1.2).

§ 3. Основная теорема

ТЕОРЕМА 1. Пусть числа ν_k и μ_k таковы, что последовательность $\gamma_k = \sqrt{\nu_k}/|\mu_k|$, $k \in \mathbb{N}$, возрастает и

$$\xi_j = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^j \nu_k \left(\frac{\gamma_j}{\gamma_k} - 1 \right) \right)^{-1/2}, & 1 < j \leq n+1, \\ +\infty, & j = 1. \end{cases}$$

Тогда если $\xi_{m+1} \leq \delta < \xi_m$ при некотором $1 \leq m \leq n$ и

$$\hat{c}_1 = 1 - \frac{\delta^2 \sum_{k=1}^m \nu_k \gamma_1 / \gamma_k}{1 + \delta^2 \sum_{k=1}^m \nu_k},$$

то метод

$$\hat{\varphi}(y_1, \dots, y_n) = \sum_{k=1}^m \left(1 - \frac{\gamma_k(1 - \hat{c}_1)}{\gamma_1} \right) \mu_k y_k e_k$$

является оптимальным и при этом

$$E(T, W) = \sqrt{\frac{(1 - \hat{c}_1)^2}{\gamma_1^2} + \delta^2 \sum_{k=1}^m \mu_k^2 \left(1 - \frac{\gamma_k(1 - \hat{c}_1)}{\gamma_1} \right)^2}.$$

Если $\delta < \xi_{n+1}$, то метод

$$\hat{\varphi}(y_1, \dots, y_n) = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_{n+1}} \right) \mu_k y_k e_k$$

оптимален и

$$E(T, W) = \sqrt{\frac{1}{\gamma_{n+1}^2} + \delta^2 \sum_{k=1}^n \mu_k^2 \left(1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_{n+1}} \right)^2}.$$

§ 4. Доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы 1 разобьем на несколько частей. Сначала докажем оценку снизу для погрешности оптимального восстановления, а затем построим метод, на котором эта оценка будет достигаться.

4.1. Оценка снизу.

ТЕОРЕМА 2. Пусть W – произвольное подмножество l_2 , симметричное относительно “координатных плоскостей” $\{x \in l_2: x_k = 0\}$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда для погрешности оптимального восстановления справедлива оценка

$$E^2(T, W) \geq \sup_{\tau \in W} \sum_{i=1}^n \frac{\delta^2 \mu_i^2 \tau_i^2}{\delta^2 + \tau_i^2} + \mu_{n+1}^2 \tau_{n+1}^2. \quad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем элемент $\tau \in W$ такой, что

$$\tau_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n + 1, \quad \tau_i = 0, \quad i > n + 1.$$

Заметим, что для нахождения супремума в правой части (4.1) достаточно рассматривать только такие τ .

Положим

$$B = \{x \in l_2: x_i^2 = \tau_i^2, \quad i = 1, 2, \dots\}.$$

Поскольку W симметрично относительно всех “координатных плоскостей” $\{x \in l_2: x_k = 0\}$, ясно, что $B \subset W$.

Обозначим

$$p_i = \frac{\delta^2}{\delta^2 + \tau_i^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Не умаляя общности, для удобства обозначений предположим, что

$$\tau_1 \geq \tau_2 \geq \dots \geq \tau_n, \quad p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n.$$

Пусть $m = \max\{i: 1 \leq i \leq n, \tau_i > 0\}$. Произвольный элемент $x \in B$ можно записать в виде

$$x = \sum_{i=1}^m s_i(x)\tau_i e_i + s_{n+1}(x)\tau_{n+1} e_{n+1},$$

где $s_i(x) \in \{-1, +1\}$. Отметим также следующее равенство, справедливое при любом $x \in B$:

$$\|Tx\|_{l_2}^2 = \sum_{i=1}^m \mu_i^2 \tau_i^2 + \mu_{n+1}^2 \tau_{n+1}^2.$$

Напомним, информация об элементах W представляет собой n -мерный вектор. Пусть $\{e'_i\}_{i=1}^n$ – стандартный базис в \mathbb{R}^n . Зададим распределение $\eta(x)$ для каждого $x \in B$:

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{с вероятностью } p_1, \\ \frac{s_1(x)\tau_1}{1-p_1} e'_1 & \text{с вероятностью } p_2 - p_1, \\ \frac{s_1(x)\tau_1}{1-p_1} e'_1 + \frac{s_2(x)\tau_2}{1-p_2} e'_2 & \text{с вероятностью } p_3 - p_2, \\ \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^{m-1} \frac{s_i(x)\tau_i}{1-p_i} e'_i & \text{с вероятностью } p_m - p_{m-1}, \\ \sum_{i=1}^m \frac{s_i(x)\tau_i}{1-p_i} e'_i & \text{с вероятностью } 1 - p_m. \end{cases}$$

Легко видеть, что первые m компонент этого распределения имеют вид

$$\eta_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{с вероятностью } p_i, \\ \frac{x_i}{1-p_i} & \text{с вероятностью } 1 - p_i \end{cases}$$

при любом $i = 1, 2, \dots, m$. Остальные $n - m$ компонент тождественно равны нулю.

Условие $\eta(x) \in Y_\delta(x)$ проверяется напрямую:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\eta_i(x) &= (1 - p_i) \frac{x_i}{1 - p_i} = x_i, \\ \mathbb{V}\eta_i(x) &= \mathbb{E}\eta_i^2(x) - (\mathbb{E}\eta_i(x))^2 = (1 - p_i) \frac{x_i^2}{(1 - p_i)^2} - x_i^2 = \frac{\tau_i^2}{1 - p_i} - \tau_i^2.\end{aligned}$$

Из определения p_i следует, что

$$1 - p_i = \frac{\tau_i^2}{\delta^2 + \tau_i^2} \implies \mathbb{V}\eta_i(x) = \frac{1}{1 - p_i} \tau_i^2 - \tau_i^2 = \delta^2 + \tau_i^2 - \tau_i^2 = \delta^2.$$

Для компонент $\eta_i(x)$, $i > m$, необходимые требования на дисперсии и математические ожидания тоже соблюдаются. Проверим это отдельно:

$$\mathbb{E}\eta_i(x) = 0 = x_i, \quad \mathbb{V}\eta_i(x) = 0 \leq \delta^2, \quad i = m + 1, \dots, n.$$

Таким образом, $\eta(x) \in Y_\delta(x)$ для каждого $x \in B$.

Пусть φ – произвольный метод восстановления. Мы знаем, что мощность множества B конечна (не превосходит 2^{m+1}), обозначим ее $|B|$. Имеем

$$\begin{aligned}e^2(T, W, \varphi) &\geq \sup_{x \in B} \mathbb{E} \|Tx - \varphi(\eta(x))\|_{l_2}^2 \\ &= \sup_{x \in B} \left(\sum_{k=1}^{m+1} (p_k - p_{k-1}) \left\| Tx - \varphi \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{s_i(x) \tau_i}{1 - p_i} e'_i \right) \right\|_{l_2}^2 \right) \\ &\geq \frac{1}{|B|} \sum_{x \in B} \left(\sum_{k=1}^{m+1} (p_k - p_{k-1}) \left\| Tx - \varphi \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{s_i(x) \tau_i}{1 - p_i} e'_i \right) \right\|_{l_2}^2 \right) \\ &= \frac{1}{|B|} \sum_{k=1}^{m+1} (p_k - p_{k-1}) \sum_{x \in B} \left\| Tx - \varphi \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{s_i(x) \tau_i}{1 - p_i} e'_i \right) \right\|_{l_2}^2. \quad (4.2)\end{aligned}$$

Здесь мы оценили супремум по $x \in B$ средним арифметическим. Предполагалось также, что $p_0 = 0$, $p_{m+1} = 1$ и сумма по пустому множеству индексов равна нулю.

Рассмотрим для примера слагаемое $k = 1$. В силу центральной симметричности B получаем

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|B|} p_1 \sum_{x \in B} \|Tx - \varphi(0)\|_{l_2}^2 \\ &= \frac{1}{2|B|} p_1 \sum_{x \in B} \|Tx - \varphi(0)\|_{l_2}^2 + \frac{1}{2|B|} p_1 \sum_{x \in B} \|-Tx - \varphi(0)\|_{l_2}^2 \\ &\geq \frac{1}{|B|} p_1 \sum_{x \in B} \|Tx\|_{l_2}^2 = p_1 \left(\sum_{i=1}^m \mu_i^2 \tau_i^2 + \mu_{n+1}^2 \tau_{n+1}^2 \right).\end{aligned}$$

Перейдем к общему случаю. Определим “сечения”:

$$B_{s_1, s_2, \dots, s_{k-1}} = \{x \in B : s_1(x) = s_1, s_2(x) = s_2, \dots, s_{k-1}(x) = s_{k-1}\}$$

для всех $k = 1, \dots, m+1$ (если $k = 1$, то соответствующее сечение совпадает с B). Теперь оценим k -е слагаемое (4.2):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|B|} (p_k - p_{k-1}) \sum_{x \in B} \left\| Tx - \varphi \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{s_i(x) \tau_i}{1 - p_i} e'_i \right) \right\|_{l_2}^2 \\ &= \frac{1}{|B|} (p_k - p_{k-1}) \sum_{s_1, s_2, \dots, s_{k-1}} \sum_{x \in B_{s_1, \dots, s_{k-1}}} \left\| Tx - \varphi \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{s_i \tau_i}{1 - p_i} e'_i \right) \right\|_{l_2}^2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

“Сечения” описываются следующим образом:

$$\begin{aligned} x \in B_{s_1, s_2, \dots, s_{k-1}} &\implies x = \left(\sum_{i=1}^{k-1} s_i \tau_i e_i \right) + z(x), \\ z(x) &= \sum_{i=k}^m s_i(x) \tau_i e_i + s_{n+1}(x) \tau_{n+1} e_{n+1}. \end{aligned}$$

При этом для любого $x \in B$ верно

$$\|Tz(x)\|_{l_2}^2 = \sum_{i=k}^m \mu_i^2 \tau_i^2 + \mu_{n+1}^2 \tau_{n+1}^2.$$

Множества $B_{s_1, \dots, s_{k-1}}$ тоже центрально-симметричны, но с центром не в нуле:

$$x = \left(\sum_{i=1}^{k-1} s_i \tau_i e_i \right) + z(x) \in B_{s_1, s_2, \dots, s_{k-1}} \implies \left(\sum_{i=1}^{k-1} s_i \tau_i e_i \right) - z(x) \in B_{s_1, s_2, \dots, s_{k-1}}.$$

Теперь оценим снизу (4.3) с помощью этой центральной симметричности:

$$\begin{aligned} & \frac{p_k - p_{k-1}}{|B|} \sum_{s_1, \dots, s_{k-1}} \sum_{x \in B_{s_1, \dots, s_{k-1}}} \left\| Tx - \varphi \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{s_i \tau_i}{1 - p_i} e'_i \right) \right\|_{l_2}^2 \\ &= \frac{p_k - p_{k-1}}{|B|} \sum_{s_1, \dots, s_{k-1}} \sum_{x \in B_{s_1, \dots, s_{k-1}}} \left\| T \left(\sum_{i=1}^{k-1} s_i \tau_i e_i \right) + Tz(x) - \varphi \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{s_i \tau_i e'_i}{1 - p_i} \right) \right\|_{l_2}^2 \\ &= \frac{p_k - p_{k-1}}{2|B|} \sum_{s_1, \dots, s_{k-1}} \sum_{x \in B_{s_1, \dots, s_{k-1}}} \left(\left\| T \left(\sum_{i=1}^{k-1} s_i \tau_i e_i \right) + Tz(x) - \varphi \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{s_i \tau_i e'_i}{1 - p_i} \right) \right\|_{l_2}^2 \right. \\ &\quad \left. + \left\| T \left(\sum_{i=1}^{k-1} s_i \tau_i e_i \right) - Tz(x) - \varphi \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{s_i \tau_i e'_i}{1 - p_i} \right) \right\|_{l_2}^2 \right) \\ &\geq \frac{p_k - p_{k-1}}{|B|} \sum_{s_1, \dots, s_{k-1}} \sum_{x \in B_{s_1, \dots, s_{k-1}}} \|Tz(x)\|_{l_2}^2 = \frac{p_k - p_{k-1}}{|B|} \sum_{x \in B} \|Tz(x)\|_{l_2}^2 \\ &= (p_k - p_{k-1}) \left(\sum_{i=k}^m \mu_i^2 \tau_i^2 + \mu_{n+1}^2 \tau_{n+1}^2 \right). \end{aligned}$$

Суммируя по всем $k = 1, 2, \dots, m + 1$, получим

$$\begin{aligned} e^2(T, W, \varphi) &\geq \sum_{k=1}^{m+1} (p_k - p_{k-1}) \left(\sum_{i=k}^m \mu_i^2 \tau_i^2 + \mu_{n+1}^2 \tau_{n+1}^2 \right) \\ &= \mu_{n+1}^2 \tau_{n+1}^2 + \sum_{k=1}^m \sum_{i \geq k} (p_k - p_{k-1}) \mu_i^2 \tau_i^2 = \mu_{n+1}^2 \tau_{n+1}^2 + \sum_{i=1}^m \mu_i^2 \tau_i^2 \sum_{k=1}^i (p_k - p_{k-1}) \\ &= \mu_{n+1}^2 \tau_{n+1}^2 + \sum_{i=1}^m \mu_i^2 \tau_i^2 p_i. \end{aligned}$$

Учитывая определение p_i , имеем

$$e^2(T, W, \varphi) \geq \sum_{i=1}^m \frac{\delta^2 \mu_i^2 \tau_i^2}{\delta^2 + \tau_i^2} + \mu_{n+1}^2 \tau_{n+1}^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\delta^2 \mu_i^2 \tau_i^2}{\delta^2 + \tau_i^2} + \mu_{n+1}^2 \tau_{n+1}^2.$$

Поскольку элемент $\tau \in W$ и метод φ были выбраны произвольно, теорема 2 доказана.

4.2. Оценка сверху. Среди всех методов восстановления выделим множество

$$\begin{aligned} D = \{ \varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow l_2 \mid \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}: \\ \varphi(y_1, y_2, \dots, y_n) = (\alpha_1 y_1, \alpha_2 y_2, \dots, \alpha_n y_n, 0, 0, \dots) \}. \end{aligned}$$

Сначала найдем метод $\widehat{\varphi}$ – решение задачи минимизации (будем называть его оптимальным D -методом)

$$e^2(T, W, \varphi) \rightarrow \min, \quad \varphi \in D,$$

а затем, основываясь на теореме 2, покажем, что $E(T, W) \geq e(T, W, \widehat{\varphi})$, т.е. метод $\widehat{\varphi}$ будет оптимальным.

ЛЕММА 1. Для любого метода $\varphi \in D$ квадрат его погрешности выражается через соответствующие этому методу коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ по праву

$$e^2(T, W, \varphi) = \max \left\{ \frac{(\mu_1 - \alpha_1)^2}{\nu_1}, \dots, \frac{(\mu_n - \alpha_n)^2}{\nu_n}, \frac{\mu_{n+1}^2}{\nu_{n+1}}, \frac{\mu_{n+2}^2}{\nu_{n+2}}, \dots \right\} + \delta^2 \sum_{k=1}^n \alpha_k^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перейдем от случайных векторов $y \in Y_\delta(x)$, у которых математическое ожидание зависит от x , к векторам

$$z = y - Ix$$

с нулевым математическим ожиданием.

Рассмотрим более подробно величину $e^2(T, W, \varphi)$ для произвольного метода φ из множества D :

$$\begin{aligned} e^2(T, W, \varphi) &= \sup_{\substack{x \in W \\ y \in Y_\delta(x)}} \mathbb{E} \|Tx - \varphi(y)\|_{l_2}^2 = \sup_{\substack{x \in W \\ y \in Y_\delta(x)}} \mathbb{E} \|Tx - \varphi(Ix) - \varphi(z)\|_{l_2}^2 \\ &= \sup_{\substack{x \in W \\ y \in Y_\delta(x)}} (\|Tx - \varphi(Ix)\|_{l_2}^2 + \mathbb{E} \|\varphi(z)\|_{l_2}^2 - 2\mathbb{E} \langle Tx - \varphi(Ix), \varphi(z) \rangle). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Ограничения, связанные с определением множества $Y_\delta(x)$, легко выразить в терминах z :

$$\mathbb{E}z = 0, \quad \mathbb{V}z_k \leq \delta^2, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Условие $\varphi \in D$ позволяет записать

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\langle Tx - \varphi(Ix), \varphi(z) \rangle \\ &= \mathbb{E}\left\langle Tx - \varphi(Ix), \sum_{k=1}^n \alpha_k z_k e_k \right\rangle = \sum_{k=1}^n \alpha_k \langle Tx - \varphi(Ix), e_k \rangle \mathbb{E}z_k = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что третье слагаемое в нижней строке формулы (4.4) для погрешности восстановления равно нулю. Распишем теперь второе слагаемое под знаком супремума (4.4):

$$\mathbb{E}\|\varphi(z)\|_{l_2}^2 = \mathbb{E} \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 z_k^2(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \mathbb{V}z_k.$$

Подставляя полученные результаты в (4.4), находим

$$\begin{aligned} e^2(T, W, \varphi) &= \sup_{x \in W} \sup_{y \in Y_\delta(x)} \left(\|Tx - \varphi(Ix)\|_{l_2}^2 + \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \mathbb{V}z_k \right) \\ &= \sup_{x \in W} \left(\|Tx - \varphi(Ix)\|_{l_2}^2 + \delta^2 \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \right) = \sup_{x \in W} (\|Tx - \varphi(Ix)\|_{l_2}^2) + \delta^2 \sum_{k=1}^n \alpha_k^2. \end{aligned}$$

Избавимся теперь от супремума по $x \in W$. Для этого нужно решить экстремальную задачу (при фиксированном φ)

$$\|Tx - \varphi(Ix)\|_{l_2}^2 \rightarrow \max_x, \quad x \in W.$$

Перепишывая в более явном виде, получаем задачу линейного программирования

$$\sum_{k=1}^n (\mu_k - \alpha_k)^2 |x_k|^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu_k^2 |x_k|^2 \rightarrow \max_{\{x_k\}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k |x_k|^2 \leq 1. \quad (4.5)$$

Покажем, что максимальное значение целевого функционала в этой задаче равно

$$\max \left\{ \frac{(\mu_1 - \alpha_1)^2}{\nu_1}, \frac{(\mu_2 - \alpha_2)^2}{\nu_2}, \dots, \frac{(\mu_n - \alpha_n)^2}{\nu_n}, \frac{\mu_{n+1}^2}{\nu_{n+1}}, \frac{\mu_{n+2}^2}{\nu_{n+2}}, \dots \right\}. \quad (4.6)$$

Чтобы доказать это, введем вспомогательные обозначения $X_k = \nu_k |x_k|^2$, $k \geq 1$, после чего (4.5) примет вид

$$\sum_{k=1}^n \frac{(\mu_k - \alpha_k)^2}{\nu_k} X_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\mu_k^2}{\nu_k} X_k \rightarrow \max_{\{X_k\}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} X_k \leq 1, \quad X_k \geq 0.$$

Максимальное значение в полученной задаче, очевидно, совпадает с (4.6). Лемма 1 доказана.

4.3. Построение оптимального D -метода. Как показано в лемме 1, погрешность метода $\varphi \in D$ является функцией соответствующих ему коэффициентов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Для нахождения оптимального D -метода $\widehat{\varphi}$ нужно найти точку минимума этой функции. Имеем задачу минимизации

$$e^2(T, W, \varphi) = \max \left\{ \frac{(\mu_1 - \alpha_1)^2}{\nu_1}, \dots, \frac{(\mu_n - \alpha_n)^2}{\nu_n}, \frac{\mu_{n+1}^2}{\nu_{n+1}}, \frac{\mu_{n+2}^2}{\nu_{n+2}}, \dots \right\} + \delta^2 \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \rightarrow \min_{\{\alpha_k\}}. \quad (4.7)$$

Положим

$$c_k = \frac{\alpha_k}{\mu_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad \gamma_k = \sqrt{\frac{\nu_k}{\mu_k^2}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Исходя из сделанного в формулировке теоремы 1 предположения о возрастании последовательности $\{\gamma_k\}$, преобразуем (4.7) следующим образом:

$$e^2(T, W, \varphi) = \max \left\{ \frac{(1 - c_1)^2}{\gamma_1^2}, \dots, \frac{(1 - c_n)^2}{\gamma_n^2}, \frac{1}{\gamma_{n+1}^2} \right\} + \delta^2 \sum_{k=1}^n \mu_k^2 c_k^2 \rightarrow \min_{\{c_k\}}. \quad (4.8)$$

Заметим, что задача (4.8) строго выпуклая, поэтому ее решение единственно. Пусть $\widehat{c}_1, \dots, \widehat{c}_n$ – оптимальные в этой задаче значения переменных. Тогда им соответствует оптимальный D -метод

$$\widehat{\varphi}(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{k=1}^n \widehat{c}_k \mu_k y_k e_k.$$

Проведем решение (4.8) в несколько шагов.

4.4. Аналитическое решение задачи (4.8). Шаг 1. Все \widehat{c}_k ($1 \leq k \leq n$) принадлежат отрезку $[0, 1]$.

Чтобы доказать это утверждение, будем рассуждать от противного. Допустим, $\widehat{c}_k < 0$ для некоторого k . Подставим в целевой функционал (4.8) значение $c_k = -\widehat{c}_k$ вместо $c_k = \widehat{c}_k$, зафиксировав значения остальных переменных. Такая замена не меняет величину c_k^2 , но уменьшает $(1 - c_k)^2$, т.е. значение целевого функционала не увеличивается. Аналогично, если $\widehat{c}_k > 1$, то присвоим c_k значение, симметричное \widehat{c}_k относительно единицы; $(1 - c_k)^2$ не изменится, а c_k^2 уменьшится. Таким образом, можно считать, что

$$\widehat{c}_k \in [0, 1] \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Шаг 2. Предположим, что при каком-то $k > 1$

$$\frac{(1 - \widehat{c}_1)^2}{\gamma_1^2} < \frac{(1 - \widehat{c}_k)^2}{\gamma_k^2}. \quad (4.9)$$

В силу шага 1 имеется ограничение

$$\frac{(1 - \widehat{c}_k)^2}{\gamma_k^2} \leq \frac{1}{\gamma_k^2}.$$

Будем уменьшать c_1 , начиная с $c_1 = \widehat{c}_1$ (зафиксировав $c_2 = \widehat{c}_2, \dots, c_n = \widehat{c}_n$), до тех пор, пока не будет достигнуто равенство

$$\frac{(1 - c_1)^2}{\gamma_1^2} = \frac{(1 - \widehat{c}_k)^2}{\gamma_k^2}.$$

Условия $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots \leq \gamma_n$ гарантируют, что найденное в результате этого процесса значение c_1 неотрицательно. Кроме того, величина

$$\max \left\{ \frac{(1 - c_1)^2}{\gamma_1^2}, \frac{(1 - c_2)^2}{\gamma_2^2}, \dots, \frac{(1 - c_n)^2}{\gamma_n^2}, \frac{1}{\gamma_{n+1}^2} \right\} \quad (4.10)$$

не увеличилась. Следовательно, рассматриваемый процесс приводит к уменьшению целевого функционала (4.8), что противоречит определению \widehat{c}_1 . Тогда справедливо обратное к (4.9) неравенство

$$\frac{(1 - \widehat{c}_1)^2}{\gamma_1^2} \geq \frac{(1 - \widehat{c}_k)^2}{\gamma_k^2}, \quad k = 2, 3, \dots, n. \quad (4.11)$$

Аналогично доказывается, что для последнего слагаемого под знаком максимума в (4.10)

$$\frac{(1 - \widehat{c}_1)^2}{\gamma_1^2} \geq \frac{1}{\gamma_{n+1}^2} \iff \widehat{c}_1 \leq 1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_{n+1}}. \quad (4.12)$$

С другой стороны, похожие соображения можно использовать не только для c_1 , но и для других переменных. Допустим, при некотором $k > 1$

$$\frac{(1 - \widehat{c}_k)^2}{\gamma_k^2} < \frac{(1 - \widehat{c}_1)^2}{\gamma_1^2}.$$

При уменьшении c_k (стартуя с $c_k = \widehat{c}_k$) максимум (4.10) не будет изменяться и целевой функционал (4.8) будет убывать. Однако этот процесс остановится, если:

- либо при каком-то неотрицательном c_k окажется

$$\frac{(1 - c_k)^2}{\gamma_k^2} = \frac{(1 - \widehat{c}_1)^2}{\gamma_1^2} \implies c_k = 1 - \frac{\gamma_k(1 - \widehat{c}_1)}{\gamma_1}; \quad (4.13)$$

- либо c_k будет равно нулю, но тем не менее

$$\begin{aligned} \frac{(1 - c_k)^2}{\gamma_k^2} < \frac{(1 - \widehat{c}_1)^2}{\gamma_1^2} &\iff \frac{1}{\gamma_k^2} < \frac{(1 - \widehat{c}_1)^2}{\gamma_1^2} \\ &\iff 1 - \frac{\gamma_k(1 - \widehat{c}_1)}{\gamma_1} < 0 \iff \widehat{c}_1 < 1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_k}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что \widehat{c}_k либо равно нулю, либо (если $1 - \gamma_k(1 - \widehat{c}_1)/\gamma_1 \geq 0$) выражается формулой (4.13). Запишем это в кратком виде так:

$$\widehat{c}_k = \left[1 - \frac{\gamma_k(1 - \widehat{c}_1)}{\gamma_1} \right]_+. \quad (4.14)$$

Здесь $[t]_+ = \max(0, t)$.

Таким образом, все коэффициенты оптимального D -метода выражены через \widehat{c}_1 . Собирая вместе (4.8), (4.11), (4.12), (4.14), получим одномерную задачу для поиска \widehat{c}_1

$$\frac{(1-c_1)^2}{\gamma_1^2} + \delta^2 \sum_{k=1}^n \mu_k^2 \left[1 - \frac{\gamma_k(1-c_1)}{\gamma_1} \right]_+^2 \rightarrow \min_{c_1}, \quad 0 \leq c_1 \leq 1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_{n+1}}.$$

Домножим целевой функционал на γ_1^2 . После несложных упрощений имеем

$$g(c_1) \stackrel{\text{def}}{=} (1-c_1)^2 + \delta^2 \sum_{k=1}^n \nu_k \left[c_1 - 1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_k} \right]_+^2 \rightarrow \min_{c_1}, \quad 0 \leq c_1 \leq 1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_{n+1}}. \quad (4.15)$$

Здесь мы по-прежнему минимизируем погрешность метода (с точностью до константы). В частности, для оптимального D -метода

$$\begin{aligned} e^2(T, W, \widehat{\varphi}) &= \frac{g(\widehat{c}_1)}{\gamma_1^2} = \frac{(1-\widehat{c}_1)^2}{\gamma_1^2} + \delta^2 \sum_{k=1}^n \mu_k^2 \left[1 - \frac{\gamma_k(1-\widehat{c}_1)}{\gamma_1} \right]_+^2 \\ &= \frac{(1-\widehat{c}_1)^2}{\gamma_1^2} + \delta^2 \sum_{k=1}^n \mu_k^2 \widehat{c}_k^2. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Шаг 3. Исследуем (4.15). Эта задача строго выпуклая и дифференцируемая по c_1 . Вычислим производную целевого функционала (4.15):

$$g'(c_1) = 2(c_1 - 1) + 2\delta^2 \sum_{k=1}^n \nu_k \left[c_1 - 1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_k} \right]_+. \quad (4.17)$$

Предположим, что при каком-то $1 \leq m \leq n$

$$1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_m} < \widehat{c}_1 \leq 1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_{m+1}}. \quad (4.18)$$

Тогда

$$g'(\widehat{c}_1) = 2(\widehat{c}_1 - 1) + 2\delta^2 \sum_{k=1}^m \nu_k \left(\widehat{c}_1 - 1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_k} \right).$$

Из того, что $g'(\widehat{c}_1) = 0$, следует

$$\widehat{c}_1 = 1 - \frac{\delta^2 \sum_{k=1}^m (\nu_k \gamma_1 / \gamma_k)}{1 + \delta^2 \sum_{k=1}^m \nu_k}. \quad (4.19)$$

Подставляя это в (4.18), получаем двойное неравенство, которое можно представить в виде условия на δ :

$$\xi_{m+1}^2 = \frac{1}{\sum_{k=1}^{m+1} \nu_k (\gamma_{m+1} / \gamma_k - 1)} \leq \delta^2 < \frac{1}{\sum_{k=1}^m \nu_k (\gamma_m / \gamma_k - 1)} = \xi_m^2.$$

Таким образом, при $\xi_{m+1} \leq \delta < \xi_m$ коэффициент \widehat{c}_1 задается формулой (4.19). Согласно (4.14)

$$\widehat{c}_k = \left[1 - \frac{\gamma_k(1-\widehat{c}_1)}{\gamma_1} \right]_+,$$

$$\widehat{c}_k > 0 \iff 1 - \frac{\gamma_k(1-\widehat{c}_1)}{\gamma_1} > 0 \iff \widehat{c}_1 > 1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_k}.$$

Сравнив это с (4.18), несложно видеть, что $\widehat{c}_k > 0$ только при $k \leq m$. Отсюда находим оптимальный D -метод:

$$\widehat{\varphi}(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{k=1}^m \left(1 - \frac{\gamma_k(1 - \widehat{c}_1)}{\gamma_1} \right) \mu_k y_k e_k.$$

Пусть $\delta < \xi_{n+1}$. В этом случае согласно (4.17)

$$\begin{aligned} g' \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_{n+1}} \right) &= \frac{-2\gamma_1}{\gamma_{n+1}} + 2\delta^2 \sum_{k=1}^n \nu_k \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_k} - \frac{\gamma_1}{\gamma_{n+1}} \right) \\ &= \frac{2\gamma_1}{\gamma_{n+1}} \left(-1 + \delta^2 \sum_{k=1}^n \nu_k \left(\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_k} - 1 \right) \right) = \frac{2\gamma_1}{\gamma_{n+1}} \left(-1 + \frac{\delta^2}{\xi_{n+1}^2} \right) \leq 0. \end{aligned}$$

В (4.15) имеем ограничение $0 \leq c_1 \leq 1 - \gamma_1/\gamma_{n+1}$. Поэтому в силу строгого возрастания $g'(\cdot)$ на этом отрезке получим

$$\widehat{c}_1 = 1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_{n+1}}.$$

Учитывая выражения для $\{\widehat{c}_k\}$, находим оптимальный D -метод:

$$\widehat{\varphi}(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_{n+1}} \right) \mu_k y_k e_k.$$

Следующая лемма дополняет полученные нами результаты.

ЛЕММА 2. *Предположим, $\xi_{m+1} \leq \delta < \xi_m$ при некотором $1 \leq m \leq n$. Тогда для погрешности оптимального D -метода верна формула*

$$e^2(T, W, \widehat{\varphi}) = \delta^2 \sum_{k=1}^m \mu_k^2 \widehat{c}_k. \quad (4.20)$$

В случае $\delta < \xi_{n+1}$

$$e^2(T, W, \widehat{\varphi}) = \delta^2 \sum_{k=1}^n \mu_k^2 \widehat{c}_k + \frac{1}{\gamma_{n+1}^2} \left(1 - \frac{\delta^2}{\xi_{n+1}^2} \right). \quad (4.21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем (4.20). Напомним формулы для коэффициентов оптимального D -метода:

$$\begin{aligned} \widehat{c}_1 = 1 - \frac{\delta^2 \sum_{k=1}^m (\nu_k \gamma_1 / \gamma_k)}{1 + \delta^2 \sum_{k=1}^m \nu_k} &\implies (1 - \widehat{c}_1) + \delta^2 \sum_{k=1}^m \nu_k (1 - \widehat{c}_1) - \delta^2 \sum_{k=1}^m \frac{\nu_k \gamma_1}{\gamma_k} = 0, \\ \widehat{c}_k &= \left[1 - \frac{\gamma_k(1 - \widehat{c}_1)}{\gamma_1} \right]_+, \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Согласно полученным выше результатам ненулевыми будут первые m из них. Поэтому для погрешности оптимального D -метода в соответствии с (4.16) имеем

$$e^2(T, W, \widehat{\varphi}) = \frac{(1 - \widehat{c}_1)^2}{\gamma_1^2} + \delta^2 \sum_{k=1}^m \mu_k^2 \widehat{c}_k^2. \quad (4.22)$$

Для доказательства леммы будем использовать соотношения

$$1 - \widehat{c}_k = \frac{\gamma_k(1 - \widehat{c}_1)}{\gamma_1}, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Составим разность правых частей (4.22) и (4.20) и покажем, что она равна нулю:

$$\begin{aligned} & \frac{(1 - \widehat{c}_1)^2}{\gamma_1^2} + \delta^2 \sum_{k=1}^m \mu_k^2 \widehat{c}_k^2 - \delta^2 \sum_{k=1}^m \mu_k^2 \widehat{c}_k \\ &= \frac{(1 - \widehat{c}_1)^2}{\gamma_1^2} + \delta^2 \sum_{k=1}^m \mu_k^2 (1 - \widehat{c}_k)^2 - \delta^2 \sum_{k=1}^m \mu_k^2 (1 - \widehat{c}_k) \\ &= \frac{1 - \widehat{c}_1}{\gamma_1^2} \left((1 - \widehat{c}_1) + \delta^2 \sum_{k=1}^m \mu_k^2 \gamma_k^2 (1 - \widehat{c}_1) - \delta^2 \sum_{k=1}^m \mu_k^2 \gamma_k \gamma_1 \right) \\ &= \frac{1 - \widehat{c}_1}{\gamma_1^2} \left((1 - \widehat{c}_1) + \delta^2 \sum_{k=1}^m \nu_k (1 - \widehat{c}_1) - \delta^2 \sum_{k=1}^m \frac{\nu_k \gamma_1}{\gamma_k} \right) = 0. \end{aligned}$$

Похожие рассуждения можно провести, и если $\delta < \xi_{n+1}$. Воспользуемся формулами для коэффициентов метода $\widehat{\varphi}$

$$\widehat{c}_k = 1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_{n+1}}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда из (4.22) находим

$$e^2(T, W, \widehat{\varphi}) = \frac{1}{\gamma_{n+1}^2} + \delta^2 \sum_{k=1}^n \mu_k^2 \left(1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_{n+1}} \right)^2. \quad (4.23)$$

Сравним правые части (4.21) и (4.23):

$$\begin{aligned} & \delta^2 \sum_{k=1}^n \mu_k^2 \left(1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_{n+1}} \right) + \frac{1}{\gamma_{n+1}^2} \left(1 - \frac{\delta^2}{\xi_{n+1}^2} \right) - \frac{1}{\gamma_{n+1}^2} - \delta^2 \sum_{k=1}^n \mu_k^2 \left(1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_{n+1}} \right)^2 \\ &= \delta^2 \sum_{k=1}^n \mu_k^2 \left(1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_{n+1}} \right) - \delta^2 \sum_{k=1}^n \mu_k^2 \left(1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_{n+1}} \right)^2 - \frac{\delta^2}{\gamma_{n+1}^2 \xi_{n+1}^2} \\ &= \delta^2 \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k^2 \gamma_k}{\gamma_{n+1}} \left(1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_{n+1}} \right) - \frac{\delta^2}{\gamma_{n+1}^2 \xi_{n+1}^2} \\ &= \frac{\delta^2}{\gamma_{n+1}^2} \left(\sum_{k=1}^n \nu_k \left(\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_k} - 1 \right) - \frac{1}{\xi_{n+1}^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

4.5. Завершение доказательства теоремы 1. Покажем, что построенный в предыдущем пункте метод $\widehat{\varphi}$ оптимальный. В соответствии с теоремой 2

$$E^2(T, W) \geq \sup_{\tau \in W} \sum_{k=1}^n \frac{\delta^2 \mu_k^2 \tau_k^2}{\delta^2 + \tau_k^2} + \mu_{n+1}^2 \tau_{n+1}^2.$$

Пусть $\xi_{m+1} \leq \delta < \xi_m$, где $1 \leq m \leq n$. Выберем $\hat{\tau} \in l_2$, удовлетворяющее условиям

$$\hat{\tau}_k^2 = \delta^2 \left(\frac{\gamma_1}{(1 - \hat{c}_1)\gamma_k} - 1 \right), \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad \hat{\tau}_k = 0, \quad k = m + 1, \dots$$

Здесь \hat{c}_1 , вообще говоря, зависит от δ . На отрезке $\delta \in [\xi_{m+1}, \xi_m)$ справедлива формула

$$\hat{c}_1 = 1 - \frac{\delta^2 \sum_{k=1}^m (\nu_k \gamma_1 / \gamma_k)}{1 + \delta^2 \sum_{k=1}^m \nu_k}.$$

Убедимся, что $\hat{\tau} \in W$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \hat{\tau}_k^2 &= \delta^2 \sum_{k=1}^m \nu_k \left(\frac{\gamma_1}{(1 - \hat{c}_1)\gamma_k} - 1 \right) = \frac{\delta^2 \gamma_1}{1 - \hat{c}_1} \sum_{k=1}^m \frac{\nu_k}{\gamma_k} - \delta^2 \sum_{k=1}^m \nu_k \\ &= \left(1 + \delta^2 \sum_{k=1}^m \nu_k \right) - \delta^2 \sum_{k=1}^m \nu_k = 1. \end{aligned}$$

По теореме 2

$$\begin{aligned} E^2(T, W) &\geq \sum_{k=1}^m \frac{\delta^2 \mu_k^2 \hat{\tau}_k^2}{\delta^2 + \hat{\tau}_k^2} = \sum_{k=1}^m \frac{\delta^4 \mu_k^2 (\gamma_1 / ((1 - \hat{c}_1)\gamma_k) - 1)}{\delta^2 \gamma_1 / ((1 - \hat{c}_1)\gamma_k)} \\ &= \delta^2 \sum_{k=1}^m \mu_k^2 \left(1 - \frac{\gamma_k (1 - \hat{c}_1)}{\gamma_1} \right) = \delta^2 \sum_{k=1}^m \mu_k^2 \hat{c}_k = e^2(T, W, \hat{\varphi}), \end{aligned}$$

что и требовалось.

Пусть $\delta < \xi_{n+1}$. В этом случае возьмем последовательность $\hat{\tau} \in l_2$ такую, что

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_k^2 &= \delta^2 \left(\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_k} - 1 \right), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad \hat{\tau}_{n+1}^2 = \frac{1}{\nu_{n+1}} \left(1 - \sum_{k=1}^n \nu_k \hat{\tau}_k^2 \right), \\ \hat{\tau}_k &= 0, \quad k = n + 2, n + 3, \dots \end{aligned}$$

Проверим, что $\hat{\tau} \in W$. Для этого достаточно показать, что верно неравенство

$$\sum_{k=1}^n \nu_k \hat{\tau}_k^2 \leq 1.$$

Произведем равносильные переходы, чтобы убедиться в его справедливости:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \nu_k \hat{\tau}_k^2 \leq 1 &\iff \delta^2 \sum_{k=1}^n \nu_k \left(\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_k} - 1 \right) \leq 1, \\ \delta^2 &\leq \frac{1}{\sum_{k=1}^n \nu_k (\gamma_{n+1} / \gamma_k - 1)} \iff \delta^2 \leq \xi_{n+1}^2. \end{aligned}$$

Значит, $\hat{\tau} \in W$. По теореме 2

$$\begin{aligned} E^2(T, W) &\geq \sum_{k=1}^n \frac{\delta^2 \mu_k^2 \hat{\tau}_k^2}{\delta^2 + \hat{\tau}_k^2} + \mu_{n+1}^2 \hat{\tau}_{n+1}^2 \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\delta^4 \mu_k^2 (\gamma_{n+1}/\gamma_k - 1)}{\delta^2 (\gamma_{n+1}/\gamma_k)} + \frac{\mu_{n+1}^2}{\nu_{n+1}} \left(1 - \sum_{k=1}^n \nu_k \hat{\tau}_k^2 \right) \\ &= \delta^2 \sum_{k=1}^n \mu_k^2 \left(1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_{n+1}} \right) + \frac{1}{\gamma_{n+1}^2} \left(1 - \delta^2 \sum_{k=1}^n \nu_k \left(\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_k} - 1 \right) \right) \\ &= \delta^2 \sum_{k=1}^n \mu_k^2 \hat{c}_k + \frac{1}{\gamma_{n+1}^2} \left(1 - \frac{\delta^2}{\xi_{n+1}^2} \right) = e^2(T, W, \hat{\varphi}), \end{aligned}$$

что и требовалось. Теорема 1 доказана.

4.6. Следствие теоремы 1. Небольшая модификация доказательства теоремы 1 позволяет получить несколько более общее утверждение.

Будем обозначать стандартный базис в l_2 индексами, начинающимися с нуля: e_0, e_1, \dots . Оставаясь в рамках общей постановки задачи оптимального восстановления по информации (1.2), уточним определения множества W и операторов T, I :

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \left\{ x \in l_2 : \sum_{k=0}^{\infty} \nu_k |x_k|^2 < \infty \right\}, & W &= \left\{ x \in \mathcal{W} : \sum_{k=0}^{\infty} \nu_k |x_k|^2 \leq 1 \right\}, \\ Tx &= (\mu_0 x_0, \mu_1 x_1, \dots), & Ix &= (x_0, x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

где $x = (x_0, x_1, \dots)$.

ТЕОРЕМА 3. 1. Пусть $\mu_k \neq 0$ при всех $k \in \mathbb{Z}_+$. Здесь \mathbb{Z}_+ – множество целых неотрицательных чисел.

2. Положим

$$\gamma_k = \sqrt{\frac{\nu_k}{\mu_k^2}}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

и потребуем, чтобы последовательность $\{\gamma_k\}$ была возрастающей.

3. Пусть $\gamma_0 = 0$, $\gamma_k > 0$ при $k \geq 1$ или, эквивалентно, $\nu_0 = 0$, $\nu_k > 0$ при $k \geq 1$.

Положим

$$\xi_j = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^j \nu_k \left(\frac{\gamma_j}{\gamma_k} - 1 \right) \right)^{-1/2}, & 1 < j \leq n+1, \\ +\infty, & j = 1. \end{cases}$$

Если $\xi_{m+1} \leq \delta < \xi_m$ при некотором $1 \leq m \leq n$, то оптимальный метод имеет вид

$$\hat{\varphi}(y_0, y_1, \dots, y_n) = \mu_0 y_0 e_0 + \sum_{k=1}^m \left(1 - \frac{\gamma_k (1 - \hat{c}_1)}{\gamma_1} \right) \mu_k y_k e_k,$$

где

$$\widehat{c}_1 = 1 - \frac{\delta^2 \sum_{k=1}^m (\nu_k \gamma_1 / \gamma_k)}{1 + \delta^2 \sum_{k=1}^m \nu_k}.$$

При этом погрешность оптимального восстановления равна

$$E(T, W) = \sqrt{\delta^2 \mu_0^2 + \frac{(1 - \widehat{c}_1)^2}{\gamma_1^2} + \delta^2 \sum_{k=1}^m \mu_k^2 \left(1 - \frac{\gamma_k (1 - \widehat{c}_1)}{\gamma_1}\right)^2}.$$

Если же $\delta < \xi_{n+1}$, то метод

$$\widehat{\varphi}(y_0, y_1, \dots, y_n) = \mu_0 y_0 e_0 + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_{n+1}}\right) \mu_k y_k e_k$$

является оптимальным и его погрешность равна

$$E(T, W) = \sqrt{\delta^2 \mu_0^2 + \frac{1}{\gamma_{n+1}^2} + \delta^2 \sum_{k=1}^n \mu_k^2 \left(1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_{n+1}}\right)^2}.$$

§ 5. Применение к восстановлению функции по ее конечному набору коэффициентов Фурье

Пусть \mathbb{T} – это отрезок $[-\pi, \pi]$ с идентифицированными концами, $\mathcal{W}_2^r(\mathbb{T})$ – пространство вещественных 2π -периодических функций, у которых $(r - 1)$ -я производная абсолютно непрерывна на \mathbb{T} , а r -я производная принадлежит $L_2(\mathbb{T})$ ($r \in \mathbb{N}$).

Введем в пространстве $L_2(\mathbb{T})$ скалярное произведение и согласованную с ним норму:

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(t) f_2(t) dt, \quad \|f_1\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1^2(t) dt,$$

где f_1, f_2 – произвольные элементы $L_2(\mathbb{T})$.

Положим

$$F_n x = (a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x), b_1(x), b_2(x), \dots, b_n(x)),$$

где $\{a_k(x)\}, \{b_k(x)\}$ – коэффициенты Фурье $x \in \mathcal{W}_2^r(\mathbb{T})$.

Определим класс функций:

$$\mathcal{W}_2^r(\mathbb{T}) = \{x \in \mathcal{W}_2^r(\mathbb{T}) : \|x^{(r)}\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq 1\}.$$

Сформулируем задачу оптимального восстановления функции из $\mathcal{W}_2^r(\mathbb{T})$ по конечному набору ее коэффициентов Фурье, известных со случайной ошибкой.

Для любых $x \in \mathcal{W}_2^r(\mathbb{T})$ и $\delta > 0$ рассмотрим множество всех вероятностных распределений в \mathbb{R}^{2n+1} с математическим ожиданием $F_n x$ и дисперсией каждой из компонент не больше δ^2 :

$$Y_\delta(x) = \{y = (\tilde{a}_0, \dots, \tilde{a}_n, \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n) : \mathbb{E}y = F_n x, \\ \forall \tilde{a}_k \leq \delta^2, k = 0, 1, \dots, n, \forall \tilde{b}_k \leq \delta^2, k = 1, \dots, n\}.$$

Методы восстановления функций из $W_2^r(\mathbb{T})$ – это все отображения $\varphi: \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow L_2(\mathbb{T})$. Будем рассматривать только множество методов, для которых определена погрешность

$$e(W, \varphi) = \sqrt{\sup_{x \in W_2^r(\mathbb{T})} \sup_{y \in Y_\delta(x)} \mathbb{E} \|x - \varphi(y)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2}. \quad (5.1)$$

Оптимальным методом называется метод восстановления $\widehat{\varphi}$ с минимальной погрешностью

$$e(W, \widehat{\varphi}) = \inf_{\varphi} e(W, \varphi), \quad (5.2)$$

а погрешность оптимального восстановления определяется по формуле

$$E(W) = \inf_{\varphi} e(W, \varphi).$$

Задача состоит в том, чтобы найти оптимальный метод и погрешность оптимального восстановления.

Приведем решение поставленной задачи, основанное на применении общей теоремы 3.

Введем ортонормированный базис в пространстве $L_2(\mathbb{T})$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos t, \sin t, \dots, \cos kt, \sin kt, \dots \right).$$

Преобразование Фурье

$$x \mapsto \left(\frac{a_0(x)}{\sqrt{2}}, a_1(x), b_1(x), \dots, a_k(x), b_k(x), \dots \right)$$

задает изометрический изоморфизм между пространствами $L_2(\mathbb{T})$ и l_2 . Кроме того, из равенства Парсеваля имеем

$$\|x^{(r)}\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 \leq 1 \iff \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} (a_k^2(x) + b_k^2(x)) \leq 1.$$

В соответствии с этим положим

$$\begin{aligned} \nu_0 &= 0, & \nu_k &= \nu'_k = k^{2r}, & k &= 1, 2, \dots, \\ \mu_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & \mu_k &= \mu'_k = 1, & k &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Таким образом, в данном случае применима теорема 3. Сформулируем ее следствие для рассматриваемой задачи.

Пусть

$$\xi_j = \begin{cases} \left(2 \sum_{k=1}^j k^r (j^r - k^r) \right)^{-1/2}, & 1 < j \leq n+1, \\ +\infty, & j = 1. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 4. Если $\xi_{m+1} \leq \delta < \xi_m$ при некотором $1 \leq m \leq n$, то оптимальный метод имеет вид

$$\widehat{\varphi}(\widetilde{a}_0, \dots, \widetilde{a}_n, \widetilde{b}_1, \dots, \widetilde{b}_n) = \frac{\widetilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^m (1 - k^r (1 - \widehat{c}_1)) (\widetilde{a}_k \cos kt + \widetilde{b}_k \sin kt),$$

где

$$\widehat{c}_1 = 1 - \frac{2\delta^2 \sum_{k=1}^m k^r}{1 + 2\delta^2 \sum_{k=1}^m k^{2r}}.$$

При этом погрешность оптимального восстановления равна

$$E(W) = \sqrt{\frac{\delta^2}{2} + (1 - \widehat{c}_1)^2 + 2\delta^2 \sum_{k=1}^m (1 - k^r (1 - \widehat{c}_1))^2}.$$

Если же $\delta < \xi_{n+1}$, то метод

$$\widehat{\varphi}(\widetilde{a}_0, \dots, \widetilde{a}_n, \widetilde{b}_1, \dots, \widetilde{b}_n) = \frac{\widetilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k^r}{(n+1)^r}\right) (\widetilde{a}_k \cos kt + \widetilde{b}_k \sin kt)$$

оптимальный и его погрешность равна

$$E(W) = \sqrt{\frac{\delta^2}{2} + \frac{1}{(n+1)^{2r}} + 2\delta^2 \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k^r}{(n+1)^r}\right)^2}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Метод $\widehat{\varphi}$ из теоремы 4 оптимален в смысле (5.2), т.е. имеет наименьшую погрешность (5.1).

Как легко видеть, метод $\widehat{\varphi}$ линеен, использует, вообще говоря, не все доступные коэффициенты Фурье и определенным образом сглаживает используемые коэффициенты.

Список литературы

- [1] С. А. Смоляк, *Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них*, Дисс. ... канд. физ.-матем. наук, МГУ, М., 1965.
- [2] А. Г. Марчук, К. Ю. Осипенко, "Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек", *Матем. заметки*, **17**:3 (1975), 359–368; англ. пер.: A. G. Marchuk, K. Yu. Osipenko, "Best approximation of functions specified with an error at a finite number of points", *Math. Notes*, **17**:3 (1975), 207–212.
- [3] С. А. Micchelli, Т. J. Rivlin, "A survey of optimal recovery", *Optimal estimation in approximation theory* (Freudenstadt, 1976), Plenum, New York, 1977, 1–54.
- [4] А. А. Melkman, С. А. Micchelli, "Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data", *SIAM J. Numer. Anal.*, **16**:1 (1979), 87–105.
- [5] С. А. Micchelli, Т. J. Rivlin, "Lectures on optimal recovery", *Numerical analysis* (Lancaster, 1984), Lecture Notes in Math., **1129**, Springer, Berlin, 1984, 21–93.
- [6] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, "Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью", *Матем. сб.*, **193**:3 (2002), 79–100; англ. пер.: G. G. Magaril-Il'yaev, K. Yu. Osipenko, "Optimal recovery of functions and their derivatives from Fourier coefficients prescribed with an error", *Sb. Math.*, **193**:3 (2002), 387–407.

- [7] Н. Д. Виск, К. Ю. Осипенко, “Оптимальное восстановление решения волнового уравнения по неточным начальным данным”, *Матем. заметки*, **81**:6 (2007), 803–815; англ. пер.: N. D. Vysk, K. Yu. Osipenko, “Optimal reconstruction of the solution of the wave equation from inaccurate initial data”, *Math. Notes*, **81**:6 (2007), 723–733.
- [8] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “О наилучшем гармоническом синтезе периодических функций”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **18**:5 (2013), 155–174; англ. пер.: G. G. Magaril-Ilyayev, K. Yu. Osipenko, “On best harmonic synthesis of periodic functions”, *J. Math. Sci. (N.Y.)*, **209**:1 (2015), 115–129.
- [9] К. Ю. Осипенко, “Оптимальное восстановление линейных операторов в неевклидовых метриках”, *Матем. сб.*, **205**:10 (2014), 77–106; англ. пер.: K. Yu. Osipenko, “Optimal recovery of linear operators in non-Euclidean metrics”, *Sb. Math.*, **205**:10 (2014), 1442–1472.
- [10] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Точность и оптимальность методов восстановления функций по их спектру”, *Функциональные пространства, теория приближений, смежные разделы математического анализа*, Сборник статей. К 110-летию со дня рождения академика Сергея Михайловича Никольского, Труды МИАН, **293**, МАИК “Наука/Интерпериодика”, М., 2016, 201–216; англ. пер.: G. G. Magaril-Ilyayev, K. Yu. Osipenko, “Exactness and optimality of methods for recovering functions from their spectrum”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **293** (2016), 194–208.
- [11] L. Plaskota, *Noisy information and computational complexity*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996, xii+308 pp.
- [12] D. L. Donoho, “Statistical estimation and optimal recovery”, *Ann. Statist.*, **22**:1 (1994), 238–270.
- [13] D. L. Donoho, R. C. Liu, B. MacGibbon, “Minimax risk over hyperrectangles, and implications”, *Ann. Statist.*, **18**:3 (1990), 1416–1437.
- [14] С. В. Решетов, “Минимаксный риск для квадратично выпуклых множеств”, *Вероятность и статистика*. 15, Зап. науч. сем. ПОМИ, **368**, ПОМИ, СПб., 2009, 181–189; англ. пер.: S. Reshetov, “Minimax risk for quadratically convex sets”, *J. Math. Sci. (N.Y.)*, **167**:4 (2010), 537–542.

Кирилл Юрьевич Кривошеев
(Kirill Yu. Krivosheev)

Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет),
г. Долгопрудный, Московская обл.
E-mail: kirill0212@gmail.com

Поступила в редакцию
24.07.2020 и 08.04.2021