

Одновременное восстановление функции и её производных на соболевском классе.

Рассматриваем задачу одновременного восстановления первых $(n - 1)$ - ой производной функции на соболевском классе $W_2^n(R)$ по неточно заданному преобразованию Фурье на всей прямой с точностью до δ в метрике $L_2(R)$. То есть $W_2^n(R) := \left\{ x \in L_2(R) \mid x^{(n-1)} \in LAC(R); \|x^n\|_{L_2(R)} \leq 1 \right\}$.

Под методом восстановления здесь понимается отображение $m : L_2(R) \rightarrow (L_2(R))^n$; $m(\cdot) = (m_0(\cdot), \dots, m_{n-1}(\cdot))$.

Погрешность оптимального восстановления в этой задаче определяется так: $(E(W_2^n(R), \delta, \bar{c}))^2 := \inf_{m: L_2(R) \rightarrow (L_2(R))^n} \left(\sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2^n(R); y \in L_2(R) \\ \|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(R)} \leq \delta}} \sum_{k=0}^{n-1} c_k \|m_k(y(\cdot) - x^{(k)})\|_{L_2(R)}^2 \right)$.

Где $\bar{c} = (c_0, \dots, c_{n-1})$; $c_i \geq 0$ - вектор весов. Изменяя \bar{c} мы можем отдавать предпочтение более точному восстановлению тех или иных производных.

Рассмотрим соответствующую двойственную задачу, значение которой не меньше квадрата погрешности оптимального восстановления:

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k \|x(\cdot)^{(k)}\|_{L_2(R)}^2 \rightarrow \max;$$

$$\|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(R)}^2 \leq \delta^2; \|x(\cdot)^{(n)}\| \leq 1; \quad (1)$$

В преобразованиях Фурье по теореме Планшереля получим:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n-1} c_k \int_R \xi^{2k} |Fx(\xi)|^2 d\xi \rightarrow \max;$$

$$\|Fx(\xi)\|_{L_2(R)}^2 \leq \delta^2; \frac{1}{2\pi} \int_R \xi^{2n} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq 1; \quad (2)$$

В этой задаче, как ясно из дальнейшего нет решения. Переходим к мерам. $\frac{1}{2\pi} |Fx(\xi)|^2 d\xi := \partial\mu(\xi) \geq 0$; получаем:

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k \int_R \xi^{2k} \partial\mu(\xi) \rightarrow \max;$$

$$2\pi \int_R \partial\mu(\xi) \leq \delta^2; \int_R \xi^{2n} \partial\mu(\xi) \leq 1; \partial\mu(\xi) \geq 0; \quad (3)$$

Заметим, что мы уже знаем значение этой задачи. Решив одномерную задачу оптимального восстановления k - ой производной при фиксированом $0 \leq k \leq n - 1$ в тех же условиях (см. статью Г.Г. Магарил-Ильяев, К.Ю. Осипенко "Оптимальное восстановление линейных операторов по неточной информации Итоги науки. Южный федеральный округ. Математический форум. Том 2. "Исследования по выпуклому анализу Владикавказ, 2009, с. 158-192."), мы получили максимум в соответствующей задаче в мерах на мере $\hat{\partial\mu}(\cdot) = \frac{\delta^2}{2\pi} \delta\left(\left(\frac{2\pi}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{2n}}\right)$. Где $\delta\left(\left(\frac{2\pi}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{2n}}\right)$ - соответствующая дельта-

функция. Эта мера одна и та же для всех k . Значит на ней же достигает максимума и наша весовая сумма, и этот максимум равен

$$S = \frac{\delta^2}{2\pi} \sum_{k=0}^{n-1} c_k \left(\frac{2\pi}{\delta^2}\right)^{\frac{k}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} c_k (\hat{\lambda}_1(k) + \hat{\lambda}_2(k)\delta^2) = \hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2\delta^2,$$

$$\text{где } \hat{\lambda}_1(k) = \frac{k}{n} \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{n}}; \hat{\lambda}_2(k) = \frac{1}{2\pi} \frac{n-k}{n} \left(\frac{2\pi}{\delta^2}\right)^{\frac{k}{n}} \quad (5)$$

- множители Лагранжа, возникшие при решении задачи восстановления k -ой производной.

$$\hat{\lambda}_1 = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \hat{\lambda}_1(k); \hat{\lambda}_2 = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \hat{\lambda}_2(k) \quad (6)$$

S - оценка квадрата погрешности оптимального восстановления в нашей задаче. Чтобы получить такую же оценку сверху, достаточно подставить в качестве $m_k(y(\cdot))$ полученный ранее оптимальный метод восстановления k -ой производной.

$$\text{Итак } (E(W_2^n(R), \delta, \bar{\alpha}))^2 = S.$$

Теперь ищем класс оптимальных методов. Ищем в виде

$$m_k(y(\cdot))(t) = \frac{1}{2\pi} \int_R (i\xi)^k a_k(\xi) y(\xi) e^{it\xi} \partial\xi$$

(то есть $Fm_k(\xi) = (i\xi)^k a_k(\xi) y(\xi)$). Где $a_k(\xi)$ - некий "фильтр".

Рассмотрим задачу

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n-1} c_k \int_R \xi^{2k} |(Fx(\xi) - a_k(\xi)y(\xi))|^2 \partial\xi \rightarrow \max;$$

$$\int_R |Fx(\xi) - y(\xi)|^2 \leq \delta^2; \frac{1}{2\pi} \int_R \xi^{2n} |Fx(\xi)|^2 \leq 1; (4)$$

Фильтр $a(\xi) = (a_0(\xi), \dots, a_{n-1}(\xi))$, при котором значение этой задачи не больше S (на самом деле ровно S , так как меньше быть не может), даёт оптимальный метод. Обозначим $z(\xi) = Fx(\xi) - y(\xi)$. k -ое подынтегральное выражение перепишем в виде

$$c_k \left(\frac{1-a_k(\xi)}{\xi^{n-k} \sqrt{\hat{\lambda}_1}} (\xi^n \sqrt{\hat{\lambda}_1} Fx(\xi)) + \frac{a_k(\xi) * \xi^k}{\sqrt{2\pi \hat{\lambda}_2(k)}} \sqrt{2\pi \hat{\lambda}_2} z(\xi) \right)^2 \leq \text{(неравенство Коши-Буняковского)}$$

$$\leq c_k \left(\frac{|(1-a_k(\xi))|^2}{\hat{\lambda}_1 \xi^{2(n-k)}} + \frac{|a_k(\xi)|^2 * \xi^{2k}}{2\pi \hat{\lambda}_2} \right) (\hat{\lambda}_1 \xi^{2n} |Fx(\xi)|^2 + 2\pi \hat{\lambda}_2 |z(\xi)|^2).$$

Проинтегрировав по R и сложив по k , получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n-1} c_k \int_R \xi^{2k} |(Fx(\xi) - a_k(\xi)y(\xi))|^2 \partial\xi &\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n-1} c_k \int_R S_{a_k}(\xi) (\hat{\lambda}_1 \xi^{2n} |Fx(\xi)|^2 + \\ 2\pi \hat{\lambda}_2 |z(\xi)|^2) &\leq \sum_{k=0}^{n-1} c_k \sup_{\xi \in R} (S_{a_k}(\xi)) \frac{1}{2\pi} \int_R (\hat{\lambda}_1 \xi^{2n} |Fx(\xi)|^2 + 2\pi \hat{\lambda}_2 |z(\xi)|^2) \partial\xi \leq \\ \sup_{\xi \in R} \left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k S_{a_k}(\xi) \right) (\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 \delta^2) &= \sup_{\xi \in R} \left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k S_{a_k}(\xi) \right) * S. \end{aligned}$$

$$\text{Где } S_{a_k}(\xi) = \frac{|(1-a_k(\xi))|^2}{\hat{\lambda}_1 \xi^{2(n-k)}} + \frac{|a_k(\xi)|^2 \xi^{2k}}{2\pi \hat{\lambda}_2}.$$

Значит если фильтр таков, что $\sup_{\xi \in R} (\sum_{k=0}^{n-1} c_k S_{a_k}(\xi)) \leq 1$, то соответствующий метод оптимален.

Подставив выражения для $S_{a_k}(\xi)$ и выделив полные квадраты, после преобразований получим, это равносильно тому, что

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k \left(\frac{2\pi \hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_1 \xi^{2n}}{\xi^{2(n-k)}} \left| a_k(\xi) - \frac{2\pi \hat{\lambda}_2}{2\pi \hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_1 \xi^{2n}} \right|^2 \right) \leq 2\pi \hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2 \left(1 - \frac{\sum_{k=0}^{n-1} c_k \xi^{2k}}{2\pi \hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_1 \xi^{2n}} \right), \forall \xi \in R. \quad (7)$$

Покажем, что выражение справа неотрицательно для любого ξ . Подставив сюда выражения для $\hat{\lambda}_1$ и $\hat{\lambda}_2$ из (5) и (6), получим после преобразований, что неотрицательность правой части (7) равносильна неравенству

$$f(\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \left(-\xi^{2k} + \frac{n-k}{n} \left(\frac{2\pi}{\delta^2} \right)^{\frac{k}{n}} + \frac{k}{n} \left(\frac{\delta^2}{2\pi} \right)^{\frac{n-k}{n}} \xi^{2n} \right) \geq 0 \quad (8)$$

Покажем, что каждое слагаемое в этой сумме неотрицательно при любом ξ . Поскольку f - чётная функция, достаточно показать для неотрицательных ξ ;

$$f'(\xi) = 2k \xi^{2k-1} \left(\xi^{2(n-k)} \left(\frac{\delta^2}{2\pi} \right)^{\frac{n-k}{n}} - 1 \right);$$

$f'(\xi) < 0$ на $(0; (\frac{2\pi}{\delta^2})^{\frac{1}{2n}})$ и $f'(\xi) > 0$ на $((\frac{2\pi}{\delta^2})^{\frac{1}{2n}}; +\infty)$. Значит $f(\xi)$ соответственно убывает и возрастает на этих интервалах и достигает своего минимума в точке $\xi_0 = (\frac{2\pi}{\delta^2})^{\frac{1}{2n}}$. Подставив в f , получим $f(\xi_0) = -(\frac{2\pi}{\delta^2})^{\frac{k}{n}} + \frac{n-k}{n} (\frac{2\pi}{\delta^2})^{\frac{k}{n}} + \frac{k}{n} (\frac{\delta^2}{2\pi})^{\frac{n-k}{n}} \frac{2\pi}{\delta^2} = 0$.

Значит $f(\xi) \geq 0, \forall \xi \in R$.

Таким образом метод, порождаемый фильтром $a_k(\xi) = \frac{2\pi \hat{\lambda}_2}{2\pi \hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_1 \xi^{2n}}$ заведомо оптимален. Он примечателен тем, что в нём $a_k(\xi)$ не зависят от k , в отличие, например от методов, где на k -ом месте стоит оптимальный метод восстановления k -ой производной.

Посмотрим теперь, когда (при каких ξ) можно положить $a_k(\xi) = 0, \forall k$ (то есть не учитывать нашу информацию). Получим: когда

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k}{\hat{\lambda}_1 \xi^{2(n-k)}} < 1.$$

Когда можно положить $a_k(\xi) = 1, \forall k$ (то есть не фильтровать информацию)- при таких ξ , что $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k \xi^{2k}}{2\pi \hat{\lambda}_2} < 1$