Одновременное восстановление функции и её производных на соболевском классе.

Рассматриваем задачу одновременного восстановления первых $(n-1)$ - ой производной функции на соболевсом классе $W_2^n(R)$ по неточно заданному преобразованию Фурье на всей прямой с точностью до δ в метрике $L_2(R)$. То есть $W_2^n(R) := \left\{ x \in L_2(R) \middle| x^{(n-1)} \in LAC(R); \|x^n\|_{L_2(R)} \leq 1 \right\}$.

Под методом восстановления здесь понимаестя отображение $m : L_2(R) \to (L_2(R))^n$; $m(.) = (m_0(.), ..., m_{n-1}(.))$.

Погрешность оптимального восстановления в этой задаче определяется так : $(E(W_2^n(R), \delta, \overline{c}))^2 := \inf\limits_{m:L_2(R)\to(L_2(R))^n} \Big(\sup\limits_{\substack{x(.)\in W_2^n(R); y\in L_2(R)\\ \|Fx(.)-y(.)\|_{L_2(R)}\leq\delta}} \sum_{k=0}^{n-1} c_k \left\| m_k(y(.) - x^{(k)}) \right\|_{L_2(R)}^2 \Big)$.

Где $\overline{c} = (c_0 ..., c_{n-1})$; $c_i \geq 0$ - вектор весов. Изменяя $\overline{c}$ мы можем отдавать предпочтение более точному восстановлению тех или иных производных.

Рассмотрим соответствующую двойственную задачу, значение которой не меньше квадрата погрешности оптимального восстановления:

$\sum_{k=0}^{n-1} c_k \left\| x(.)^{(k)} \right\|_{L_2(R)}^2 \to \max;$

$\|Fx(.) - y(.)\|_{L_2(R)}^2 \leq \delta^2; \left\| x(.)^{(n)} \right\| \leq 1;$ (1)

В преобразованиях Фурье по теореме Планшереля получим:

$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n-1} c_k \int\limits_R \xi^{2k} |Fx(\xi)|^2 \partial\xi \to max;$

$\|Fx(\xi)\|_{L_2(R)}^2 \leq \delta^2$; $\frac{1}{2\pi} \int\limits_R \xi^{2n} |Fx(\xi)|^2 \partial\xi \leq 1;$ (2)

В этой задаче, как ясно из дальнейшего нет решения. Переходим к мерам. $\frac{1}{2\pi} |Fx(\xi)|^2 \partial\xi := \partial\mu(\xi) \geq 0$; получаем:

$\sum_{k=0}^{n-1} c_k \int\limits_R \xi^{2k} \partial\mu(\xi) \to max;$

$2\pi \int\limits_R \partial\mu(\xi) \leq \delta^2; \int\limits_R \xi^{2n} \partial\mu(\xi) \leq 1; \partial\mu(\xi) \geq 0;$ (3)

Заметим, что мы уже знаем значение этой задачи. Решив одномерную задачу оптимального восстановления k- ой производной при фиксированом $0 \leq k \leq n-1$ в тех же условиях (см. статью Г.Г. Магарил-Ильяев, К.Ю. Осипенко "Оптимальное восстановление линейных операторов по неточной информации Итоги науки. Южный федеральный округ. Математический форум. Том 2. "Исследования по выпуклому анализу Владикавказ, 2009, с. 158-192."), мы получили максимум в соответствующей задаче в мерах на мере $\partial\hat{\mu}(.) = \frac{\delta^2}{2\pi} \delta((\frac{2\pi}{\delta^2})^{\frac{1}{2n}})$. Где $\delta((\frac{2\pi}{\delta^2})^{\frac{1}{2n}})$ - соответствующая дельтафункция. Эта мера одна и та же для всех k. Значит на ней же достигает максимума и наша весовая сумма, и этот максимум равен

$S=\frac{\delta^2}{2\pi}\sum_{k=0}^{n-1}c_k(\frac{2\pi}{\delta^2})^{\frac{k}{n}}=\sum_{k=0}^{n-1}c_k(\overset{\wedge}{\lambda}_1(k)+\overset{\wedge}{\lambda}_2(k)\delta^2)=\overset{\wedge}{\lambda}_1+\overset{\wedge}{\lambda}_2\delta^2,$

где $\overset{\wedge}{\lambda}_1(k)=\frac{k}{n}(\frac{\delta^2}{2\pi})^{\frac{n-k}{n}}$; $\overset{\wedge}{\lambda}_2(k)=\frac{1}{2\pi}\frac{n-k}{n}(\frac{2\pi}{\delta^2})^{\frac{k}{n}}$ (5)

- множители Лагранжа, возникшие при решении задачи восстановления k-ой производной.

$\overset{\wedge}{\lambda}_1=\sum_{k=0}^{n-1}c_k\overset{\wedge}{\lambda}_1(k)$; $\overset{\wedge}{\lambda}_2=\sum_{k=0}^{n-1}c_k\overset{\wedge}{\lambda}_2(k)$ (6)

S - оценка квадрата погрешности оптимального восстановления в нашей задаче. Чтобы получить такую же оценку сверху, достаточно подставить в качестве $m_k(y(.))$ полученный ранее оптимальный метод восстановления k- ой производной.

Итак $(E(W_2^n(R),\delta,\overline{\alpha}))^2=S$.

Теперь ищем класс оптимальных методов. Ищем в виде

$m_k(y(.))(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_R(i\xi)^k a_k(\xi)y(\xi)e^{it\xi}\partial\xi$

(то есть $Fm_k(\xi)=(i\xi)^k a_k(\xi)y(\xi)$). Где $a_k(\xi)$ - некий "фильтр".

Рассмотрим задачу

$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{n-1}c_k\int\limits_R\xi^{2k}\left|(Fx(\xi)-a_k(\xi)y(\xi))\right|^2\partial\xi\to max;$

$\int\limits_R\left|Fx(\xi)-y(\xi)\right|^2\le\delta^2$; $\frac{1}{2\pi}\int\limits_R\xi^{2n}\left|Fx(\xi)\right|^2\le 1$;(4)

Фильтр $a(\xi)=(a_0(\xi),...,a_{n-1}(\xi))$, при котором значение этой задачи не больше S (на самом деле ровно S, так как меньше быть не может), даёт оптимальный метод. Обозначим $z(\xi)=Fx(\xi)-y(\xi)$. k- ое подынтегральное выражение перепишем в виде

$c_k(\frac{1-a_k(\xi)}{\xi^{n-k}\sqrt{\overset{\wedge}{\lambda}_1}}(\xi^n\sqrt{\overset{\wedge}{\lambda}_1}Fx(\xi))+\frac{a_k(\xi)*\xi^k}{\sqrt{2\pi\overset{\wedge}{\lambda}_2(k)}}\sqrt{2\pi\overset{\wedge}{\lambda}_2}z(\xi))^2\le$ (неравенство Коши-Буняковского)

$\le c_k(\frac{|(1-a_k(\xi))|^2}{\overset{\wedge}{\lambda}_1\xi^{2(n-k)}}+\frac{|(a_k(\xi))|^2*\xi^{2k}}{2\pi\overset{\wedge}{\lambda}_2})(\overset{\wedge}{\lambda}_1\xi^{2n}\left|Fx(\xi)\right|^2+2\pi\overset{\wedge}{\lambda}_2\left|z(\xi)\right|^2).$

Проинтегрировав по R и сложив по k, получим

$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{n-1}c_k\int\limits_R\xi^{2k}\left|(Fx(\xi)-a_k(\xi)y(\xi))\right|^2\partial\xi\le\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{n-1}c_k\int\limits_R S_{a_k}(\xi)(\overset{\wedge}{\lambda}_1\xi^{2n}\left|Fx(\xi)\right|^2+$
$2\pi\overset{\wedge}{\lambda}_2\left|z(\xi)\right|^2)\le\sum_{k=0}^{n-1}c_k\sup\limits_{\xi\in R}(S_{a_k}(\xi))\frac{1}{2\pi}\int\limits_R(\overset{\wedge}{\lambda}_1\xi^{2n}\left|Fx(\xi)\right|^2+2\pi\overset{\wedge}{\lambda}_2\left|z(\xi)\right|^2)\partial\xi\le$
$\sup\limits_{\xi\in R}(\sum_{k=0}^{n-1}c_k S_{a_k}(\xi))(\overset{\wedge}{\lambda}_1+\overset{\wedge}{\lambda}_2\delta^2)=\sup\limits_{\xi\in R}(\sum_{k=0}^{n-1}c_k S_{a_k}(\xi))*S.$

Где $S_{a_k}(\xi) = \frac{|(1-a_k(\xi))|^2}{\hat{\lambda}_1 \xi^{2(n-k)}} + \frac{|(a_k(\xi))|^2 \xi^{2k}}{2\pi\hat{\lambda}_2}$.

Значит если фильтр таков, что $\sup\limits_{\xi \in R}(\sum_{k=0}^{n-1} c_k S_{a_k}(\xi)) \le 1$, то соответствующий метод оптимален.

Подставив выражения для $S_{a_k}(\xi)$ и выделив полные квадраты, после преобразований получим, это равносильно тому,что

$\sum_{k=0}^{n-1} c_k (\frac{2\pi\hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_1 \xi^{2n}}{\xi^{2(n-k)}} \left|(a_k(\xi) - \frac{2\pi\hat{\lambda}_2}{2\pi\hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_1 \xi^{2n}})\right|^2) \le 2\pi\hat{\lambda}_1\hat{\lambda}_2(1 - \frac{\sum_{k=0}^{n-1} c_k \xi^{2k}}{2\pi\hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_1 \xi^{2n}}), \forall \xi \in R$. (7)

Покажем, что выражение справа неотрицательно для любого ξ. Подставив сюда выражения для $\hat{\lambda}_1$ и $\hat{\lambda}_2$ из (5) и (6), получим после преобразований, что неотрицательность правой части (7) равносильна неравенству

$f(\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(-\xi^{2k} + \frac{n-k}{n}(\frac{2\pi}{\delta^2})^{\frac{k}{n}} + \frac{k}{n}(\frac{\delta^2}{2\pi})^{\frac{n-k}{n}} \xi^{2n}) \ge 0 (8)$

Покажем, что каждое слагаемое в этой сумме неотрицательно при любом ξ.Поскольку f- чётная функция , достаточно показать для неотрицательных ξ;

$f'(\xi) = 2k\xi^{2k-1}(\xi^{2(n-k)}(\frac{\delta^2}{2\pi})^{\frac{n-k}{n}} - 1)$;

$f'(\xi) < 0$ на $(0; (\frac{2\pi}{\delta^2})^{\frac{1}{2n}})$ и $f'(\xi) > 0$ на $((\frac{2\pi}{\delta^2})^{\frac{1}{2n}}; +\infty)$. Значит $f(\xi)$ соответственно убывает и возрастает на этих интервалах и достигает своего минимума в точке $\xi_0 = (\frac{2\pi}{\delta^2})^{\frac{1}{2n}}$. Подставив в f, получим $f(\xi_0) = -(\frac{2\pi}{\delta^2})^{\frac{k}{n}} + \frac{n-k}{n}(\frac{2\pi}{\delta^2})^{\frac{k}{n}} + \frac{k}{n}(\frac{\delta^2}{2\pi})^{\frac{n-k}{n}} \frac{2\pi}{\delta^2} = 0$.

Значит $f(\xi) \ge 0, \forall \xi \in R$.

Таким образом метод, порождаемый фильтром $a_k(\xi) = \frac{2\pi\hat{\lambda}_2}{2\pi\hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_1 \xi^{2n}}$ заведомо оптимален. Он примечателен тем, что в нём $a_k(\xi)$ не зависят от k, в отличие , например от методов, где на k- ом месте стоит оптимальный метод восстановления k-ой производной.

Посмотрим теперь, когда (при каких ξ)можно положить $a_k(\xi) = 0, \forall k$ (то есть не учитывать нашу информацию). Получим: когда

$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k}{\hat{\lambda}_1 \xi^{2(n-k)}} < 1$.

Когда можно положить $a_k(\xi) = 1, \forall k$ (то есть не фильтровать информацию)- при таких ξ, что $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k \xi^{2k}}{2\pi\hat{\lambda}_2} < 1$