Оптимальное восстановлений функциий и их производных на соболевском классе по неточно заданному преобразованию Фурье

дипломная работа
студента кафедры общих проблем управления
экономико-математического отделения
механико-математического факультета МГУ
Куца Алесксандра Владимировича
научный руководитель
Магарил-Ильяев Георгий Георгиевич

1 Введение

Работа посвящена оптимальному одновременному восстановлению функций и их производных по неточно заданному преобразованию Фурье на некотором множестве. Также рассматривается вопрос оптимального выбора этого множества. Впервые задача оптимального восстановления функционалов была поставленна С.А.Смоляком, он же доказал, что среди оптимальных методов восстановления есть линейный. С тех пор по данной теме много сделано. Общие результаты, а также решение одномерного варианта рассматриваемой задачи для случая, когда заданное множество – симметричный отрезок можно найти в [1]. О том как строить множество оптимальных методов написано в [2]. Вопрос оптимального выбора множества, на котором надо измерить преобразование Фурье в более общем, но одномерном случае, изложен в [3]. Один из результатов работы можно сформулировать так: при одновременном восстановлении вектора из функции и её производных по неточно заданному преобразованию фурье на некотором множестве выделяется некоторый симметричный отрезок (зависящий от погрешности задания преобразования Фурье, весовых коэффицентов), и полезной для восстановления оказывается информация на максимальном симметричном пересечении этого отрезка с множеством, на котором задано преобразование Фурье. Информация вне этого отрезка, или несимметричная часть информации на нем нам ничего не дает. Подобные отрезки были полученны в [2] для одномерного случая. Причем отрезок для вектора при положительных коэффицентах будет строго меньше, чем максимальный из соответствующих отрезков для одномерного восстановления.

2 Постановка задачи

$\Omega_2^n(\mathbb{R}) := \left\{ x(\cdot) \in L_2(R) : x^{(n-1)}(\cdot) \in LAC(\mathbb{R}); x^{(n)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}) \right\}$

— соболевское пространство;

Здесь $LAC(\mathbb{R})$ - множество функций, локально абсолютно непрерывных на $\mathbb{R}$, то есть абсолютно непрерывных на каждом конечном отрезке.

$W_2^n(\mathbb{R}) := \left\{ x(\cdot) \in \Omega_2^n(\mathbb{R}) : \left\| x^{(n)}(\cdot) \right\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq 1 \right\}$

— соболевский класс.

На этом классе мы хотим восстановить вектор

$(x(\cdot), x^{'}(\cdot), x^{''}(\cdot)...x^{(n-1)}(\cdot))^T$

по неточно заданному преобразованию Фурье на некотором множестве. То есть нам дано

$y(\cdot) : M_\sigma \to \mathbb{R}$ такое что $y(\cdot) \in L_2(M_\sigma)$ и $\|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(M_\sigma)} \leq \delta$; где $\delta \geq 0$— заданная величина погрешности; M_σ — некоторое измеримое множество , такое что $mes(M_\sigma) \leq 2\sigma$;

Также рассматривается вопрос оптимального выбора M_σ.

Под методом восстановления понимается отображение

$m : L_2(M_\sigma) \to (L_2(\mathbb{R}))^n$; $m = (m_0(\cdot), m_1(\cdot), ...m_{n-1}(\cdot))^T$.

Под квадратом погрешности метода понимается

$$e^2(W_2^n(\mathbb{R}), M_\sigma), \delta, c, m) = \underset{\substack{x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R}) \\ y \in L_2(M_\sigma) : \|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(M_\sigma)} \leq \delta}}{sup} \sum_{i=0}^{n-1} c_i \left\| m_i(\cdot) - x^{(i)}(\cdot) \right\|^2_{L_2(\mathbb{R})},$$

где $c = (c_0, c_1, ...c_{n-1}) \geq 0$ — вектор весовых коэффицентов. Меняя этот вектор мы можем отдавать предпочтение более точному восстановлению тех или иных производных. Будем предполагать что он ненулевой и кроме того $c \neq (\alpha, 0, 0...0)$, то есть мы восстанавливаем хотя бы одну производную, а не только функцию. Случай восстановления просто функции мы не рассматриваем лишь для краткости записи последующих выражений, он не представляет какой-либо сложности.

Квадратом погрешности оптимального восстановления назовем

$$E^2(W_2^n(\mathbb{R}), \delta, c) = \underset{M_\sigma : mes(M_\sigma) \leq 2\sigma}{inf} \left(\underset{m : L_2(M_\sigma) \to (L_2(\mathbb{R}))^n}{inf} e^2(W_2^n(\mathbb{R}), M_\sigma), \delta, c, m) \right.$$

3 Теорема

Пусть

$\hat{a} := sup\,\{a \geq 0 : mes(M_\sigma \cap [-a;a]) = 2a\};$
$\overset{\wedge}{\sigma}$ — единственное положительное решение уравнения
$-\sum_{k=0}^{n-1} c_k \xi^{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{k}{n} (\frac{\delta^2}{2\pi})^{\frac{n-k}{n}} \xi^{2n} = 0;$
$\overset{\wedge}{\xi}$ — единственное положительное решение уравнения
$\sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{k}{n} \xi^{-2(n-k)} = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \hat{a}^{-2(n-k)}.$
Тогда

Если $\overset{\wedge}{\sigma} \leq \hat{a}$,квадрат погрешности оптимального восстановления равен
$E^2(W_2^n(\mathbb{R}), M_\sigma, \delta, c) = \frac{\delta^2}{2\pi} \sum_{k=0}^{n-1} c_k (\frac{\delta^2}{2\pi})^{-\frac{k}{n}}.$
Если M_σ не фиксировано, оптимальным выбором этого множества будет $[-\sigma;\sigma]$.
При этом все методы вида
$m_k(y(\cdot))(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{M_\sigma \cap [-\overset{\wedge}{\sigma};\overset{\wedge}{\sigma}]} (i\xi)^k a_k(\xi) y(\xi) e^{it\xi} d\xi$
оптимальны для любого фильтра $a_k(\cdot), k = 0...n-1$, удовлетворяющего условию
$\sup\limits_{\xi \in [-\overset{\wedge}{\sigma};\overset{\wedge}{\sigma}]} (\sum_{k=0}^{n-1} c_k (\frac{|(1-a_k(\xi))|^2}{(\sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{k}{n} (\frac{\delta^2}{2\pi})^{\frac{n-k}{n}}) \xi^{2(n-k)}} + \frac{|(a_k(\xi))|^2 \xi^{2k}}{(\sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{n-k}{n} (\frac{\delta^2}{2\pi})^{-\frac{k}{n}})}) \leq 1.$
Если $\overset{\wedge}{\sigma} > \hat{a}$, квадрат погрешности оптимального восстановления равен
$E^2(W_2^n(\mathbb{R}), M_\sigma, \delta, c) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \hat{a}^{-2(n-k)} + \frac{\delta^2}{2\pi} \sum_{k=0}^{n-1} c_k \overset{\wedge}{\xi}^{2k} (1 - (\frac{\overset{\wedge}{\xi}}{\hat{a}})^{2(n-k)})$
Если M_σ не фиксировано, оптимальным выбором этого множества будет $[-\sigma;\sigma]$.
При этом все методы вида
$m_k(y(\cdot))(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{M_\sigma \cap [-\hat{a};\hat{a}]} (i\xi)^k a_k(\xi) y(\xi) e^{it\xi} d\xi$
оптимальны для любого фильтра $a_k(\cdot), k = 0...n-1$, удовлетворяющего условию
$\sup\limits_{\xi \in [-\hat{a};\hat{a}]} (\sum_{k=0}^{n-1} c_k (\frac{|(1-a_k(\xi))|^2}{(\sum_{k=0}^{n-1} c_k \hat{a}^{-2(n-k)}) \xi^{2(n-k)}} + \frac{|(a_k(\xi))|^2 \xi^{2k}}{(\sum_{k=0}^{n-1} c_k \overset{\wedge}{\xi}^{2k} (1 - (\frac{\overset{\wedge}{\xi}}{\hat{a}})^{2(n-k)}))}) \leq 1.$

4 Оценка снизу для погрешности оптимального восстановления

Зафиксируем некоторое множество M_σ.
Лемма 1:
Квадрат погрешности оптимального восстановления не меньше значения

задачи

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} c_k \left\|x^{(k)}(\cdot)\right\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \to max \\ \|Fx(\cdot)\|^2_{L_2(M_\sigma)} \le \delta^2 \\ \left\|x^{(n)}(\cdot)\right\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \le 1 \end{cases} \qquad (4.1)$$

Доказательство.

Пусть $x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R})$ таково, что $\|Fx(\cdot)\|_{L_2(M_\sigma)} \le \delta$; m — произвольный метод. $2\sum_{k=0}^{n-1} c_k \left\|x^{(k)}(\cdot)\right\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \le \sum_{k=0}^{n-1} c_k \left\|x^{(k)}(\cdot) - m_k(0)\right\|^2_{L_2(\mathbb{R})} + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \left\|-m_k(0) + x^{(k)}(\cdot)\right\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \le 2e^2(W_2^n(\mathbb{R}), M_\sigma), \delta, c, m)$. Переходя к верхней грани по всем таким $x(\cdot)$, получим, что для каждого метода m его квадрат погрешности восстановлени не меньше значения задачи 4.1. Значит и квадрат погрешности оптимального восстановления (при фиксированном M_σ) также не меньше значения задачи 4.1.

Лемма доказана.

Эта лемма представляет собой частный случай аналогичного утверждения для восстановления произвольного линейного оператора на выпуклом центрально-симметричном классе, доказанного еще С.А. Смоляком. Подробнее об этом в [1].

Перепишем нашу экстремальную задачу в преобразованиях Фурье по теореме Планшереля.

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n-1} c_k \int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2k} \left|Fx(\xi)\right|^2 d\xi \to max \\ \int\limits_{M_\sigma} \left|Fx(\xi)\right|^2 d\xi \le \delta^2 \\ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2n} \left|Fx(\xi)\right|^2 d\xi \le 1 \end{cases} \qquad (4.2)$$

Обозначив $d\mu(\xi) := \frac{1}{2\pi} \left|Fx(\xi)\right|^2 d\xi \ge 0$, переходим к задаче в мерах

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} c_k \int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2k} d\mu(\xi) \to max \\ \int\limits_{M_\sigma} d\mu(\xi) \le \frac{\delta^2}{2\pi} \\ \int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2n} d\mu(\xi) \le 1 \\ d\mu(\xi) \ge 0 \end{cases} \qquad (4.3)$$

Значение задачи 4.3 не больше значения задачи 4.1. В дальнейшем, когда мы решим задачу 4.3, приближая получившуюся дельта-функцию гладкими функциями, можно показать, что имеет место равенство. Подробнее об этом см. [1]

Для этой задачи, рассмотрим функцию Лагранжа

$\Lambda(d\mu(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) = \int\limits_{\mathbb{R}} (-\sum_{k=0}^{n-1} c_k \xi^{2k} + \lambda_1 \xi^{2n} + \lambda_2 I_{M_\sigma}(\xi)) d\mu(\xi)$,

где $I_{M_\sigma}(\xi)$ — индикатор множества M_σ.

Лемма 2

Если в задаче 4.3 мы найдем такие $\overset{\wedge}{\lambda}_1, \overset{\wedge}{\lambda}_2 \geq 0, \overset{\wedge}{d\mu}(\cdot) \geq 0$,

что выполнены условия:

$(a)\quad \underset{d\mu(\cdot)\in D_3}{inf}\ \Lambda(\overset{\wedge}{\lambda}_1, \overset{\wedge}{\lambda}_2, d\mu(\cdot)) = \Lambda(\overset{\wedge}{\lambda}_1, \overset{\wedge}{\lambda}_2, \overset{\wedge}{d\mu}(\cdot))$,

где D_3 — множество мер, допустимых в задаче 4.3,

$(b)\ \lambda_1(\int\limits_{\mathbb{R}}^{2n} \overset{\wedge}{d\mu}(\xi) - 1) = \lambda_2(\int\limits_{M_\sigma} \overset{\wedge}{d\mu}(\xi) - \frac{\delta^2}{2\pi}) = 0,$

то $\overset{\wedge}{d\mu}(\cdot)$ — решение задачи 4.3.

Доказательство

Пусть $d\mu(\cdot) \in D_3$; тогда

$-\sum_{k=0}^{n-1} c_k \int\limits_{\mathbb{R}}^{2k} d\mu(\xi) = (b) = \Lambda(\overset{\wedge}{\lambda}_1, \overset{\wedge}{\lambda}_2, d\mu(\cdot)) \leq (a) \leq \Lambda(\overset{\wedge}{\lambda}_1, \overset{\wedge}{\lambda}_2, \overset{\wedge}{d\mu}(\cdot)) = (b) = -\sum_{k=0}^{n-1} c_k \int\limits_{\mathbb{R}}^{2k} \overset{\wedge}{d\mu}(\xi).$

Лемма доказана.

Эта лемма следует из достаточных условий в теореме Каруша-Куна-Таккера.

Рассмотрим

$f(\xi) = -\sum_{k=0}^{n-1} c_k \xi^{2k} + \lambda_1 \xi^{2n} + \lambda_2 I_{M_\sigma}(\xi)$.

Если взять $\overset{\wedge}{\lambda}_1, \overset{\wedge}{\lambda}_2 \geq 0$ такими, чтобы $f(\xi)$ была неотрицательна $\forall \xi \in \mathbb{R}$, а меру $\overset{\wedge}{d\mu}(\cdot)$ сосредоточить в нулях $f(\xi)$, то условия (a) и (b) будут выполнены.

Обозначим

$\hat{a} := sup\,\{a \geq 0 : mes(M_\sigma \cap [-a; a]) = 2a\}.$

Лемма 3

Если $\hat{a} = 0$, то значение задачи 4.3 равно $+\infty$;

Действительно, тогда $\forall \epsilon > 0$

$mes(M_\sigma) \cap [-\epsilon; \epsilon] < 2\epsilon;$

Положим $\Omega_\epsilon = [-\epsilon; \epsilon] \cap M_\sigma$; $mes(\Omega_\epsilon) > 0$. Рассмотрим меры $d\mu_\epsilon(\xi) = \begin{cases} (\int\limits_{\Omega_\epsilon} \tau^{2n} d\tau)^{-1} d\xi, \xi \in \Omega_\epsilon \\ 0, \xi \notin \Omega_\epsilon \end{cases}$;

Эти меры - допустимы в задаче 4.3 и

$\sum_{k=0}^{n-1} c_k \int\limits_{\Re} \xi^{2k} d\mu_\epsilon(\xi) = \int\limits_{\Omega_\epsilon} \sum_{k=0}^{n-1} c_k \int\limits_{\Re} \xi^{2k} d\xi (\int\limits_{\Omega_\epsilon} \xi^{2n} d\xi)^{-1} \geq \sum_{k=0}^{n-1} c_k \epsilon^{2(k-n)} \to \infty, \epsilon \to 0.$

Лемма доказана.

Далее считаем $\hat{a} > 0$;

Рассмотрим

$g(\xi) := -\sum_{k=0}^{n-1} c_k \xi^{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{k}{n} (\frac{\delta^2}{2\pi})^{\frac{n-k}{n}} \xi^{2n}$

$g(0) = 0;\ g'(\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} 2k c_k \xi^{2k-1}(-1 + (\frac{\delta^2}{2\pi})^{\frac{n-k}{n}} \xi^{2(n-k)});$

$g'(\xi) < 0$ на $(0; \xi_0)$ и $g'(\xi) > 0$ на $(\xi_0; +\infty)$, где $\xi_0 = (\frac{\delta^2}{2\pi})^{-\frac{1}{2n}}$;

Значит уравнение $g(\xi) = 0$ имеет ровно один положительный корень, расположенный на $(\xi_0; +\infty)$. Обозначим его $\hat{\sigma}$

Рассмотрим два случая :$\hat{\sigma} \leq \hat{a}$ и $\hat{\sigma} > \hat{a}$.

1-ый случай: $\hat{\sigma} \leq \hat{a}$

Рассмотрим параметрически заданную кривую:

$x = \xi^{2n}$;$y = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \xi^{2k} = \sum_{k=0}^{n-1} c_k x^{\frac{k}{n}}$.

$y'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{k}{n} x^{-\frac{n-k}{n}} > 0$, при $x \in (0; +\infty)$;

$y''(x) = \sum_{k=0}^{n-1} -c_k \frac{k}{n} \frac{n-k}{n} x^{-\frac{2n-k}{n}} < 0$, при $x \in (0; +\infty)$;

$y(x)$ — возрастает, вогнута на $(0; +\infty)$;

В силу вогнутости функции $y(x)$, для любой точки $(x(\xi), y(\xi))$ её графика справедливо неравенство

$y(\xi) \leq y(\xi_0) - y'_x(\xi_0)(x(\xi_0) - x(\xi))$,

или после преобразований

$$-\sum_{k=0}^{n-1} c_k \xi^{2k} + (\sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{k}{n} (\frac{\delta^2}{2\pi})^{\frac{n-k}{n}}) \xi^{2n} + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{n-k}{n} \frac{\delta^2}{2\pi}^{-\frac{k}{n}} \geq 0 \tag{4.4}$$

Возьмем

$$\hat{\lambda}_1 := \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{k}{n} (\frac{\delta^2}{2\pi})^{\frac{n-k}{n}} \geq 0 \tag{4.5}$$

$$\hat{\lambda}_2 := \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{n-k}{n} (\frac{\delta^2}{2\pi})^{-\frac{k}{n}} \geq 0 \tag{4.6}$$

При них $f(\xi) \geq 0; \forall \xi \in \mathbb{R}$ и имеет один ноль в одной точке $\xi_0 = (\frac{\delta^2}{2\pi})^{-\frac{1}{2n}}$.

Действительно, для $0 \leq \xi \leq \hat{a}$, $f(\xi)$ неотрицательна в силу 4.4, кроме того, в силу выбора $\hat{\sigma}$ функция $f(\xi)$ без слагаемого с индикатором неотрицательна при $\xi \geq \hat{\sigma}$, а значит, поскольку у нас $\hat{a} \geq \hat{\sigma}$ и при всех $\xi \geq \hat{a}$.

Значит, вместе с мерой $d\hat{\mu}(\xi) := \frac{\delta^2}{2\pi} \delta(\xi - (\frac{\delta^2}{\pi})^{-\frac{1}{2n}})$ они удовлетворяют условию (a), также они удовлетворяют и условию (b).

Итак в этом случае мера $d\hat{\mu}(\xi) := \frac{\delta^2}{2\pi} \delta(\xi - (\frac{\delta^2}{2\pi})^{-\frac{1}{2n}})$ — решение задачи 4.3 и оценка снизу для квадрата погрешности оптимального восстановления

$$E^2(W_2^n(\mathbb{R}), M_\sigma, \delta, c) \geq S := \frac{\delta^2}{2\pi} \sum_{k=0}^{n-1} c_k (\frac{\delta^2}{2\pi})^{-\frac{k}{n}} = \hat{\lambda}_1 + \frac{\delta^2}{2\pi} \hat{\lambda}_2 \tag{4.7}$$

Где $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2$ - определены в 4.5 и 4.6 соответственно.

2-ой случай : $\hat{\sigma} \geq \hat{a}$

Уравнение касательной к графику в точке $(\xi^{2n}; \sum_{k=0}^{n-1} c_k \xi^{2k})$ имеет вид:

$y-\sum_{k=0}^{n-1} c_k \xi^{2k} = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{k}{n} x^{-\frac{n-k}{n}}(x-\xi^{2n})$;

уравнение прямой, проходящей через точки $O(0;0)$ и $A(\hat{a}^{2n};\sum_{k=0}^{n-1} c_k \hat{a}^{2k})$ есть $y=\sum_{k=0}^{n-1} c_k \hat{a}^{-2(n-k)} x$;

Найдем $\hat{\xi}$ - параметр, соответсвующий единственной точке на дуге OA графика, в которой касательная паралельна прямой OA.

Другими словами $\hat{\xi}$ — единственное положительное решение уравнения

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{k}{n} \xi^{-2(n-k)} = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \hat{a}^{-2(n-k)} \tag{4.8}$$

Так как справа константа, а слева убывающая функция, стремящаяся к бесконечности при $\xi \to 0$, и меньшая правой части при $\xi = \hat{a}$ (так как при каждом k слагаемое в сумме справа не больше чем соответсвующее слева, а при некотором k строго меньше), уравнение 4.8 действительно имеет единственное положительное решение, и оно находится на интервале $(0;\hat{a})$.

Возьмем

$$\hat{\lambda}_1 := \sum_{k=0}^{n-1} c_k \hat{a}^{-2(n-k)} \geq 0 \tag{4.9}$$

Тогда

$f(\hat{\xi}) = -\sum_{k=0}^{n-1} c_k \hat{\xi}^{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \hat{a}^{-2(n-k)} \hat{\xi}^{2n} + \hat{\lambda}_2$;

Возьмем

$$\hat{\lambda}_2 := \sum_{k=0}^{n-1} c_k \hat{\xi}^{2k} \left(1-\left(\frac{\hat{\xi}}{\hat{a}}\right)^{2(n-k)}\right) \geq 0 \tag{4.10}$$

Снова фунция $f(\xi)$ неотрицательна на $\mathbb{R}$ и имеет нули в точках $\hat{\xi}$ и $\hat{a}$;

Значит вместе с мерой вида $d\hat{\mu}(\xi) = c_1\delta(\xi-\hat{\xi}) + c_2\delta(\xi-\hat{a})$ наши множители Лагранжа удовлетворяют условию (a).

Из условия (b) находим

$c_1 = \frac{\delta^2}{2\pi}$; $c_2 = (1-\frac{\delta^2}{2\pi}\hat{\xi}^{2n})\hat{a}^{-2n}$.

Покажем, что $c_2 \geq 0$. От противного: пусть $c_2 < 0$; Тогда $\hat{\xi} > (\frac{\delta^2}{2\pi})^{-\frac{1}{2n}}$.

В силу монотонности левой части в определении $\hat{\xi}$ получаем

$\sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{k}{n} (\frac{\delta^2}{2\pi})^{\frac{n-k}{n}} > \sum_{k=0}^{n-1} c_k \hat{a}^{-2(n-k)}$ или

$\sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{k}{n} (\frac{\delta^2}{2\pi})^{\frac{n-k}{n}} \hat{a}^{2n} > \sum_{k=0}^{n-1} c_k \hat{a}^{2k}$

Откуда в из определения $\hat{\sigma}$ выходит $\hat{a} > \hat{\sigma}$ - противоречие.

Значит получившаяся мера

$d\overset{\wedge}{\mu}(\xi) = \frac{\delta^2}{2\pi}\delta(\xi - \overset{\wedge}{\xi}) + (1 - \frac{\delta^2}{2\pi}\overset{\wedge}{\xi}^{2n})\hat{a}^{-2n}\delta(\xi - \hat{a})$ — решение задачи 4.3 в этом случае.

При этом оценка квадрата погрешности после подстановки этой меры и преобразований также получается в виде

$$E^2(W_2^n(\mathbb{R}), M_\sigma, \delta, c) \geq S := \overset{\wedge}{\lambda}_1 + \frac{\delta^2}{2\pi}\overset{\wedge}{\lambda}_2 \tag{4.11}$$

Где $\overset{\wedge}{\lambda}_1, \overset{\wedge}{\lambda}_2$ - определены в 4.9 и 4.10 соответственно.

5 Оценка сверху для погрешности оптимального восстановления и множество методов

Итак, мы в обоих случаях получили для квадрата погрешности оптимального восстановления оценку сверху одинакового вида 4.7 и 4.11. Теперь докажем такие же оценки сверху и предъявим некоторое множество оптимальных методов восстановления.

Нам дано $y(\cdot) \in L_2(M_\sigma)$, такое, что $\|Fx(\cdot) - y\|_{L_2(M_\sigma)} \leq \delta$; по нему мы строим новое $\tilde{y}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$

$\tilde{y}(\xi) := \begin{cases} y(\xi); \xi \in M_\sigma \\ Fx(\xi); \xi \notin M_\sigma. \end{cases}$

Эта функция нам, вообще говоря, неизвестна. Ищем метод в виде:

$$m_k(y(\cdot))(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_R (i\xi)^k a_k(\xi)\tilde{y}(\xi)e^{it\xi}d\xi \tag{5.1}$$

(то есть $Fm_k(\xi) = (i\xi)^k a_k(\xi)\tilde{y}(\xi)$). Где $a_k(\xi)$ - некий "фильтр". Чтобы мы могли применить этот метод восстановления необходимо условие на фильтр

$$a_k(\xi) = 0; \forall\xi \notin M_\sigma \tag{5.2}$$

Поскольку интегралы по множествам, различающимся по мере нуль, не отличаются, достаточно условия:

$$a_k(\xi) = 0; \forall\xi \notin (M_\sigma \cap [-\hat{a}; \hat{a}]) \tag{5.3}$$

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{n-1} c_k \int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2k} \left|(Fx(\xi) - a_k(\xi)\tilde{y}(\xi))\right|^2 d\xi \to max \\ \int\limits_{\mathbb{R}} |Fx(\xi) - \tilde{y}|^2 \leq \delta^2 \\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2n} |Fx(\xi)|^2 \leq 1 \end{cases} \tag{5.4}$$

Фильтр $a(\xi) = (a_0(\xi), ..., a_{n-1}(\xi))$, при котором значение этой задачи не больше S (на самом деле ровно S, так как меньше быть не может), при выполнении для него условия 5.3 даёт оптимальный метод.

Обозначим $z(\xi) = Fx(\xi) - \tilde{y}(\xi)$. k-ое подынтегральное выражение перепишем в виде

$c_k(\frac{1-a_k(\xi)}{\xi^{n-k}\sqrt{\overset{\wedge}{\lambda}_1}}(\xi^n\sqrt{\overset{\wedge}{\lambda}_1}Fx(\xi))+\frac{a_k(\xi)*\xi^k}{\sqrt{\overset{\wedge}{\lambda}_2(k)}}\sqrt{\overset{\wedge}{\lambda}_2}z(\xi))^2 \leq$ (неравенство Коши-Буняковского)

$\leq c_k(\frac{|(1-a_k(\xi))|^2}{\overset{\wedge}{\lambda}_1\xi^{2(n-k)}} + \frac{|(a_k(\xi))|^2*\xi^{2k}}{\overset{\wedge}{\lambda}_2})(\overset{\wedge}{\lambda}_1\xi^{2n}|Fx(\xi)|^2 + \overset{\wedge}{\lambda}_2|z(\xi)|^2)$.

Проинтегрировав по $\mathbb{R}$ и сложив по k, получим

$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{n-1} c_k\int\limits_{\mathbb{R}}\xi^{2k}|(Fx(\xi) - a_k(\xi)\tilde{y}(\xi))|^2 d\xi \leq \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{n-1} c_k\int\limits_{\mathbb{R}} S_{a_k}(\xi)(\overset{\wedge}{\lambda}_1\xi^{2n}|Fx(\xi)|^2 + \overset{\wedge}{\lambda}_2|z(\xi)|^2) \leq \sup\limits_{\xi\in\mathbb{R}}(\sum_{k=0}^{n-1} c_k S_{a_k}(\xi))(\overset{\wedge}{\lambda}_1 + \overset{\wedge}{\lambda}_2\frac{\delta^2}{2\pi}) = \sup\limits_{\xi\in\mathbb{R}}(\sum_{k=0}^{n-1} c_k S_{a_k}(\xi)) * S$,

где $S_{a_k}(\xi) = \frac{|(1-a_k(\xi))|^2}{\overset{\wedge}{\lambda}_1\xi^{2(n-k)}} + \frac{|(a_k(\xi))|^2\xi^{2k}}{\overset{\wedge}{\lambda}_2}$.

Значит, если фильтр таков, что

$$\sup\limits_{\xi\in\mathbb{R}}(\sum_{k=0}^{n-1} c_k S_{a_k}(\xi)) \leq 1 \tag{5.5}$$

, и выполнено условие 5.3, то соответствующий метод оптимален.

Подставив выражения для $S_{a_k}(\xi)$ и выделив полные квадраты, после преобразований получим,что это равносильно тому,что

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k(\frac{\overset{\wedge}{\lambda}_2 + \overset{\wedge}{\lambda}_1\xi^{2n}}{\xi^{2(n-k)}}\left|(a_k(\xi) - \frac{\overset{\wedge}{\lambda}_2}{\overset{\wedge}{\lambda}_2 + \overset{\wedge}{\lambda}_1\xi^{2n}})\right|^2) \leq \overset{\wedge}{\lambda}_1\overset{\wedge}{\lambda}_2(1 - \frac{\sum_{k=0}^{n-1} c_k\xi^{2k}}{\overset{\wedge}{\lambda}_2 + \overset{\wedge}{\lambda}_1\xi^{2n}}), \forall\xi \in R \tag{5.6}$$

Выражение справа неотрицательно для любого ξ в обоих наших случаях, так как при приведении к общему знаменателю в скобках, в числителе получается $f(\xi)$, а мы в обоих случаях подбирали множители Лагранжа так, чтобы она была неотрицательна.

Таким образом метод, порождаемый фильтром

$a_k(\xi) = \frac{\overset{\wedge}{\lambda}_2}{\overset{\wedge}{\lambda}_2+\overset{\wedge}{\lambda}_1\xi^{2n}}; k = 0...n-1$

заведомо оптимален и множество методов, удовлетворяющих 5.5, непусто. Покажем, что множество фильтров, удовлетворяющих условиям 5.5 и 5.3 одновременно, также непусто. Возьмем произвольный фильтр $a_k; k = 0...n-1$, удовлетворяющий 5.5 и "обрубим"его, то есть оставим прежним при $\xi \in M_\sigma \cap [-\overset{\wedge}{\sigma}; \overset{\wedge}{\sigma}]$ в первом случае и при $\xi \in M_\sigma \cap [-\hat{a}; \hat{a}]$ — во втором случае и обнулим при всех остальных $\xi \in \mathbb{R}$. Новый фильтр обозначим так же, как и предыдущий. Он по построению удовлетворяет 5.3. Покажем, что при этом условие 5.5 не нарушилось.

Для $\xi \in M_\sigma \cap [-\overset{\wedge}{\sigma};\overset{\wedge}{\sigma}]$ в первом случае и $\xi \in M_\sigma \cap [-\hat{a};\hat{a}]$ во втором случае мы ничего не изменили. Для остальных ξ проверяем условие:

$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k}{\overset{\wedge}{\lambda}_1 \xi^{2(n-k)}} < 1.$

В первом случае при $|\xi| > \overset{\wedge}{\sigma}$, подставив $\overset{\wedge}{\lambda}_1$ из 4.5, получаем

$(\sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{k}{n} (\frac{\delta^2}{2\pi})^{\frac{n-k}{n}})^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} c_k \xi^{-2(n-k)} \leq 1$ или

$-\sum_{k=0}^{n-1} c_k \xi^{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{k}{n} (\frac{\delta^2}{2\pi})^{\frac{n-k}{n}} \xi^{2n} \geq 0.$

При $|\xi| > \overset{\wedge}{\sigma}$ это верно в силу выбора $\overset{\wedge}{\sigma}$.

Во втором случае,при $|\xi| > \hat{a}$, подставив $\overset{\wedge}{\lambda}_1$ из 4.9, получим

$(\sum_{k=0}^{n-1} c_k \hat{a}^{-2(n-k)})^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} c_k \xi^{-2(n-k)} \leq 1$, что также верно в силу $|\xi| > \hat{a}$.

Что происходит при $\xi \in [-\hat{a};\hat{a}]/M_\sigma$ не важно, так как это множество меры ноль, по определению $\hat{a}$.

Таким образом, можно не налагать дополнительных условий на фильтр, а сказать, что метод

$m_k(y(\cdot))(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{M_\sigma \cap [-\overset{\wedge}{\sigma};\overset{\wedge}{\sigma}]} (i\xi)^k a_k(\xi) y(\xi) e^{it\xi} d\xi$

в первом случае и соответственно метод

$m_k(y(\cdot))(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{M_\sigma \cap [-\hat{a};\hat{a}]} (i\xi)^k a_k(\xi) y(\xi) e^{it\xi} d\xi$

во втором случае оптимальны для любого фильтра $a_k(\cdot), k = 0...n-1$, удовлетворяющему условию 5.5 или, что то же самое, 5.6. При этом выполнения соответствующего неравенства можно требовать только на отрезке, по которому мы интегрируем.

Список литературы

[1] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. „Оптимальное восстановление операторов по неточной информации". Итоги науки. Южный федеральный округ. Математический форум. Том 2. Исследования по выпуклому анализу , Владикавказ, 2009, с. 158-192.

[2] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. „Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру", Функ. анал. и его прил., 44:3 (2010), 76-79.

[3] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. „Как наилучшим образом восстановить функцию по неточно заданному спектру?" Матем. зам. 2011. (в печати).