

**Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
“МАТИ” - Российский государственный
технологический университет
им. К.Э.Циолковского**

Кафедра "Высшая математика"

К. Ю. Осипенко

**Сферические гармоники, собственные функции
оператора Лапласа и задачи восстановления**

Москва 2006 г.

1. ОДНОРОДНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

Однородным многочленом степени k в пространстве \mathbb{R}^d называется многочлен вида

$$P(x) = \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha x^\alpha,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ — мультииндекс, $\alpha_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = 1, \dots, d$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}$, $c_\alpha \in \mathbb{R}$. Обозначим через \mathcal{P}_k множество всех однородных многочленов степени k . Очевидно, что \mathcal{P}_k — линейное пространство.

Положим

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

Если $P \in \mathcal{P}_k$, то

$$P(D) = \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha D^\alpha$$

— дифференциальный оператор. В частности, если

$$P(x) = |x|^2 = |x_1|^2 + \dots + |x_d|^2,$$

то $P(D) = \Delta$ — оператор Лапласа.

Введем в пространстве \mathcal{P}_k скалярное произведение, положив

$$\langle P, Q \rangle = P(D)Q, \quad P, Q \in \mathcal{P}_k.$$

Проверим, что введенная операция действительно является скалярным произведением. Прежде всего заметим, что

$$D^\alpha x^\beta = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta, \\ \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_d!, & \alpha = \beta. \end{cases}$$

Тем самым $\langle P, Q \rangle$ принимает скалярные значения. Линейность функции $\langle P, Q \rangle$ очевидна, а из равенства

$$D^\alpha x^\beta = D^\beta x^\alpha$$

вытекает коммутативность. Поскольку

$$\langle P, P \rangle = \sum_{|\alpha|=k} |c_\alpha|^2 \alpha!,$$

то $\langle P, P \rangle = 0$ в том и только в том случае, если $P = 0$.

В пространстве \mathcal{P}_k одночлены x^α , $|\alpha| = k$, образуют ортогональную систему и, следовательно, являются ортогональным базисом этого пространства. Число таких одночленов d_k равно числу различных мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ таких, что $\alpha_1 + \dots + \alpha_d = k$. Для нахождения этого числа рассмотрим $d+k-1$ урну, выберем неудачу $d-1$ урну, а в остальные положим по одному шару. Нетрудно

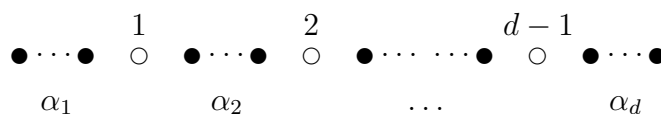


Рис. 1

убедиться, что число d_k равно числу способов выбора $d - 1$ урны из $k + d - 1$ урн, т.е.

$$d_k = C_{d+k-1}^{d-1} = \frac{(d+k-1)!}{(d-1)!k!}.$$

2. ОДНОРОДНЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ

Однородными гармоническими многочленами степени k называются такие многочлены $P \in \mathcal{P}_k$, что $\Delta P = 0$. Множество однородных гармонических многочленов степени k обозначим через \mathcal{A}_k . Ясно, что $\mathcal{A}_k \subset \mathcal{P}_k$.

Теорема 1. *Всякий многочлен $P \in \mathcal{P}_k$ представим в виде*

$$(1) \quad P(x) = P_0(x) + |x|^2 P_1(x) + \dots + |x|^{2l} P_l(x),$$

где $P_j \in \mathcal{A}_{k-2j}$, $j = 0, \dots, l$.

Доказательство. Будем считать, что $k \geq 2$ (при $k = 0, 1$ $\mathcal{P}_k = \mathcal{A}_k$). Рассмотрим линейное подпространство

$$|x|^2 \mathcal{P}_{k-2} = \{ P \in \mathcal{P}_k : P(x) = |x|^2 Q(x), Q \in \mathcal{P}_{k-2} \}.$$

Докажем, что его ортогональным дополнением является \mathcal{A}_k . Пусть $P_1 \in \mathcal{P}_k$ и для всех $Q \in \mathcal{P}_{k-2}$

$$(2) \quad \langle R, P_1 \rangle = 0,$$

где $R(x) = |x|^2 Q(x)$. Но

$$(3) \quad \langle R, P_1 \rangle = \Delta Q(D) P_1 = Q(D) \Delta P_1 = \langle Q, \Delta P_1 \rangle.$$

Выберем $Q \in \mathcal{P}_{k-2}$ так, чтобы $Q = \Delta P_1$. Из (3) вытекает, что

$$\langle \Delta P_1, \Delta P_1 \rangle = 0.$$

Следовательно, $\Delta P_1 = 0$ и $P_1 \in \mathcal{A}_k$. Из (3) вытекает также, что верно и обратное, т.е. если $\Delta P_1 = 0$, то для всех $Q \in \mathcal{P}_{k-2}$ выполняется равенство (2). Итак, доказано, что

$$(4) \quad \mathcal{P}_k = \mathcal{A}_k \oplus |x|^k \mathcal{P}_{k-2}.$$

Пусть $P \in \mathcal{P}_k$. Тогда найдутся такие однородные многочлены $P_0 \in \mathcal{A}_k$ и $Q_1 \in \mathcal{P}_{k-2}$, что

$$P(x) = P_0(x) + |x|^2 Q_1(x).$$

Если $k \geq 4$, то можно в аналогичном виде представить Q_1

$$Q_1(x) = P_1(x) + |x|^2 Q_2(x), \quad P_1 \in \mathcal{A}_{k-2}, \quad Q_2 \in \mathcal{P}_{k-4}.$$

Тем самым

$$P(x) = P_0(x) + |x|^2 P_1(x) + |x|^4 Q_1(x).$$

Продолжая этот процесс, приходим к представлению (1). \square

Следствие 1. При всех $k \geq 2$

$$(5) \quad a_k = \dim \mathcal{A}_k = d_k - d_{k-2} = (d + 2k - 2) \frac{(d + k - 3)!}{(d - 2)!k!}.$$

Доказательство. Из (4) имеем

$$d_k = \dim \mathcal{P}_k = \dim \mathcal{A}_k + \dim |x|^k \mathcal{P}_{k-2} = \dim \mathcal{A}_k + d_{k-2}.$$

Отсюда следует (5). \square

В силу того, что $\mathcal{A}_k = \mathcal{P}_k$ при $k = 0, 1$, имеем

$$a_0 = \dim \mathcal{A}_0 = 1, \quad a_1 = \dim \mathcal{A}_1 = d.$$

3. СФЕРИЧЕСКИЕ ГАРМОНИКИ

Множество многочленов из \mathcal{A}_k , суженное на сферу

$$\mathbb{S}^{d-1} = \{ x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1 \}$$

называется *сферическими гармониками порядка k* и обозначается через \mathcal{H}_k . Рассмотрим сужение Y многочлена $P \in \mathcal{A}_k$ (при $x' \in \mathbb{S}^{d-1}$ $Y(x') = P(x')$). В силу однородности $P(x) = |x|^k Y(x/|x|)$ при $x \neq 0$. Тем самым рассматриваемое сужение является изоморфизмом. Поэтому

$$\dim \mathcal{H}_k = \dim \mathcal{A}_k = a_k.$$

Теорема 2. Множество всех конечных линейных комбинаций из $\cup_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k$ плотно в $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$.

Доказательство. Так как пространство непрерывных функций плотно в $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, достаточно доказать, что любая непрерывная функция может быть приближена конечными линейными комбинациями из $\cup_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k$. По теореме Вейерштрасса любая непрерывная функция может быть приближена в норме $L_{\infty}(\mathbb{S}^{d-1})$ (а значит, и в норме $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$) многочленами, суженными на \mathbb{S}^{d-1} . В силу теоремы 1 эти сужения являются конечными линейными комбинациями элементов из $\cup_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k$. \square

Теорема 3. Пусть $Y^{(k)} \in \mathcal{H}_k$ и $Y^{(l)} \in \mathcal{H}_l$. Тогда

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} Y^{(k)}(x') Y^{(l)}(x') dx' = 0.$$

Доказательство. Положим при $x \neq 0$

$$u(x) = |x|^k Y^{(k)} \left(\frac{x}{|x|} \right), \quad v(x) = |x|^l Y^{(l)} \left(\frac{x}{|x|} \right).$$

Если $x = 0$ и $k \neq 0$, положим $u(0) = 0$. При $k = 0$ $Y^{(k)} \equiv C$, поэтому в этом случае полагаем $u(0) = C$. Аналогично доопределяется значение v в нуле. Вектор $n = (x_1, \dots, x_d)$ при $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{S}^{d-1}$ является единичным вектором внешней нормали к \mathbb{S}^{d-1} в точке x . При всех $x \in \mathbb{S}^{d-1}$

$$(6) \quad (\text{grad } u(x), n) = \sum_{j=1}^d x_j \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} = ku(x)$$

(здесь (\cdot, \cdot) — стандартное скалярное произведение в \mathbb{R}^d). Аналогично получаем, что для всех $x \in \mathbb{S}^{d-1}$

$$(\text{grad } v(x), n) = lv(x).$$

Пользуясь формулой Гаусса

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} (F(x'), n) dx' = \int_{\mathbb{B}^d} \text{div } F(x) dx,$$

где

$$\mathbb{B}^d = \{ x \in \mathbb{R}^d : |x| < 1 \},$$

получаем

$$\begin{aligned} (k-l) \int_{\mathbb{S}^{d-1}} u(x')v(x') dx' &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} (v(x') \text{grad } u(x') - u(x') \text{grad } v(x'), n) dx' \\ &= \int_{\mathbb{B}^d} \text{div}((v(x') \text{grad } u(x') - u(x') \text{grad } v(x'))) dx \\ &= \int_{\mathbb{B}^d} \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} - u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{B}^d} (v(x) \Delta u(x) - u(x) \Delta v(x)) dx = 0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} Y^{(k)}(x')Y^{(l)}(x')dx' = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} u(x')v(x') dx' = 0.$$

□

Будем рассматривать \mathcal{H}_k как подпространство $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ со скалярным произведением

$$(f, g)_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(x')g(x') dx'.$$

Пусть $Y_1^{(k)}, \dots, Y_{a_k}^{(k)}$ — ортонормированный базис в \mathcal{H}_k . Тогда из теоремы 2 вытекает, что система однородных сферических гармоник $Y_j^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots$, $j = 1, \dots, a_k$, является ортонормированным

базисом в $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Тем самым для любой функции $f \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ имеет место равенство

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)},$$

где

$$c_{kj} = (f, Y_j^{(k)})_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(x') Y_j^{(k)}(x') dx'.$$

4. ЗОНАЛЬНЫЕ ГАРМОНИКИ

Пусть $Y_1^{(k)}, \dots, Y_{a_k}^{(k)}$ — ортонормированный базис в \mathcal{H}_k . Зафиксируем $x' \in \mathbb{S}^{d-1}$. Сферическая гармоника

$$Z_{x'}^{(k)}(t') = \sum_{j=1}^{a_k} Y_j^{(k)}(x') Y_j^{(k)}(t')$$

называется *зональной гармоникой степени k с полюсом в точке x'* .

Лемма 1. Для любых $Y \in \mathcal{H}_k$

$$Y(x') = (Y, Z_{x'}^{(k)})_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}.$$

Доказательство. Имеем

$$(Y, Z_{x'}^{(k)})_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} = \sum_{j=1}^{a_k} Y_j^{(k)}(x') (Y, Y_j^{(k)})_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} = Y(x').$$

□

Вращением называется линейное преобразование $\rho: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ такое, что

- (1) для всех $x, y \in \mathbb{R}^d$ $(\rho x, \rho y) = (x, y)$;
- (2) $\det \rho = 1$.

Лемма 2. Если ρ — вращение, то

$$Z_{\rho x'}^{(k)}(\rho t') = Z_{x'}^{(k)}(t').$$

Доказательство. Сделаем замену переменных $w' = \rho t'$, для всех $Y \in \mathcal{H}_k$ будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} Z_{\rho x'}^{(k)}(\rho t') Y(t') dt' &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} Z_{\rho x'}^{(k)}(w') Y(\rho^{-1} w') dw' \\ &= Y(\rho^{-1}(\rho x')) = Y(x') = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} Z_{x'}^{(k)}(t') Y(t') dt'. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что функции $Z_{\rho x'}^{(k)}(\rho t')$ и $Z_{x'}^{(k)}(t')$ совпадают. □

Лемма 3. Для всех $x' \in \mathbb{S}^{d-1}$

$$\sum_{j=1}^{a_k} |Y_j^{(k)}(x')|^2 = \frac{a_k}{\omega_{d-1}},$$

где

$$\omega_{d-1} = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$$

— площадь сферы \mathbb{S}^{d-1} .

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 — произвольные точки на \mathbb{S}^{d-1} . Существует вращение ρ такое, что $x_2 = \rho x_1$. Тогда из леммы 2

$$Z_{x_2}^{(k)}(x_2) = Z_{\rho x_1}^{(k)}(\rho x_1) = Z_{x_1}^{(k)}(x_1).$$

Следовательно, при всех $x' \in \mathbb{S}^{d-1}$

$$Z_{x'}^{(k)}(x') = c.$$

Из определения зональных гармоник

$$\sum_{j=1}^{a_k} |Y_j^{(k)}(x')|^2 = Z_{x'}^{(k)}(x') = c.$$

В силу ортонормированности системы $Y_1^{(k)}, \dots, Y_{a_k}^{(k)}$ имеем

$$c\omega_{d-1} = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \sum_{j=1}^{a_k} |Y_j^{(k)}(x')|^2 dx' = a_k.$$

Отсюда

$$c = \frac{a_k}{\omega_{d-1}}.$$

□

5. ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ

Классическая задача Дирихле для единичного шара в \mathbb{R}^d состоит в нахождении функции, непрерывной при $|x| \leq 1$ и гармонической при $|x| < 1$, совпадающей на границе с заданной непрерывной функцией $f(x)$. Хорошо известно, что решение этой задачи существует, единственно и дается *интегралом Пуассона*

$$u(x) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} p(s, x) f(s) ds,$$

где

$$p(s, x) = \frac{1}{\omega_{d-1}} \frac{1 - |x|^2}{|x - s|^d}$$

— ядро Пуассона для единичного шара.

Пусть $f \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Рассмотрим следующую задачу Дирихле: найти функцию u , гармоническую внутри единичного шара, для которой

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |u(rx') - f(x')|^2 dx' = 0.$$

Пусть $Y_j^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots$, $j = 1, \dots, a_k$, — ортонормированный базис в $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Тогда

$$f(x') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x')$$

и

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} |c_{kj}|^2.$$

Докажем, что функция

$$(7) \quad u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} |x|^k \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

(доопределенная в нуле по непрерывности) является решением поставленной задачи.

Из леммы 3 вытекает, что при всех x

$$\left| Y_j^{(k)}\left(\frac{x}{|x|}\right) \right| \leq \sqrt{\frac{a_k}{\omega_{d-1}}}.$$

Тем самым при всех x таких, что $|x| \leq r$, $0 < r < 1$,

$$|x|^k \left| Y_j^{(k)}\left(\frac{x}{|x|}\right) \right| \leq r^k \sqrt{\frac{a_k}{\omega_{d-1}}}.$$

Из того, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k a_k \sqrt{\frac{a_k}{\omega_{d-1}}}$$

сходится вытекает равномерная сходимость ряда (7) на множестве $|x| \leq r$ при всех $0 < r < 1$. Тем самым $u(x)$ — гармоническая функция при $|x| < 1$.

При всех $0 < r < 1$

$$u(rx') - f(x') = \sum_{k=0}^{\infty} (r^k - 1) \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x').$$

Поэтому

$$a(r) = \|u(rx') - f(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (r^k - 1)^2 \sum_{j=1}^{a_k} |c_{kj}|^2.$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Выберем N так, чтобы

$$\sum_{k=N}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} |c_{kj}|^2 < \varepsilon.$$

Тогда

$$a(r) < \sum_{k=0}^N (r^k - 1)^2 \sum_{j=1}^{a_k} |c_{kj}|^2 + \varepsilon.$$

Из того, что

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \sum_{k=0}^N (r^k - 1)^2 \sum_{j=1}^{a_k} |c_{kj}|^2 = 0,$$

вытекает существование $r_\varepsilon \in (0, 1)$ такого, что для всех $r \in (r_\varepsilon, 1)$

$$\sum_{k=0}^N (r^k - 1)^2 \sum_{j=1}^{a_k} |c_{kj}|^2 < \varepsilon.$$

Тем самым $a(r) < 2\varepsilon$. Отсюда следует, что

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|u(rx') - f(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 = \lim_{r \rightarrow 1-0} a(r) = 0.$$

Докажем единственность решения поставленной задачи Дирихле. Для этого достаточно доказать, что гармонической внутри единичного шара функция u при выполнении условия

$$(8) \quad \lim_{r \rightarrow 1-0} \|u(rx')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} = 0$$

тождественно равна нулю.

Если $|x| = r < 1$, то

$$p(s, x) \leq \frac{1}{\omega_{d-1}(1-r)^{d-1}}.$$

Зафиксируем x_0 , $|x_0| = r_0 < 1$. Функция $u(rx)$ при всех $r < 1$ является гармонической в единичном шаре и непрерывной при $|x| \leq r$. Поэтому ее можно представить в виде

$$u(rx) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} p(s, x) u(rs) ds.$$

Тем самым

$$u(x_0) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} p\left(s, \frac{x_0}{r}\right) u(rs) ds.$$

Отсюда

$$|u(x_0)| \leq \frac{1}{\omega_{d-1}} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{1-d} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |u(rs)| ds.$$

Для r достаточно близких к единице, пользуясь неравенством Коши–Буняковского, получаем

$$|u(x_0)| \leq \frac{2}{\sqrt{\omega_{d-1}}(1-r_0)^{d-1}} \|u(rs)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}.$$

Из условия (8) вытекает, что $u(x_0) = 0$.

6. СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА–БЕЛЬТРАМИ

Сферический лапласиан или *оператор Лапласа–Бельтрами* Δ_S определяется для функций, заданных на единичной сфере, следующим образом

$$\Delta_S Y(x') = \Delta Y \left(\frac{x}{|x|} \right) \Big|_{x=x'}.$$

Предложение 1. Пусть $Y^{(k)} \in \mathcal{H}_k$. Тогда

$$\Delta_S Y^{(k)} = -\Lambda_k Y^{(k)},$$

где

$$\Lambda_k = k(k + d - 2).$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \Delta_S Y^{(k)} &= \Delta(|x|^{-k} Y^{(k)}(x)) = Y^{(k)} \Delta(|x|^{-k}) + |x|^{-k} \Delta Y^{(k)} \\ &+ 2 \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} |x|^{-k} \frac{\partial}{\partial x_j} Y^{(k)} = Y^{(k)} \Delta(|x|^{-k}) - \frac{2k}{|x|^{k+2}} \sum_{j=1}^d x_j \frac{\partial}{\partial x_j} Y^{(k)} \\ &= (\Delta(|x|^{-k}) - 2k^2 |x|^{-k-2}) Y^{(k)}. \end{aligned}$$

Остается воспользоваться легко проверяемым равенством

$$\Delta(|x|^{-k}) = (k^2 + 2k - dk) |x|^{-k-2}.$$

□

Пусть $Y_j^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots$, $j = 1, \dots, a_k$, — ортонормированный базисом в $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Для $\alpha > 0$ оператор $(-\Delta_S)^{\alpha/2}$ определяется равенством

$$(-\Delta_S)^{\alpha/2} Y = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^{\alpha/2} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)},$$

где

$$Y = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}.$$

Пусть $f \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Рассмотрим следующую задачу: найти функцию $u(x', t)$, $x' \in \mathbb{S}^{d-1}$, удовлетворяющую при $t > 0$ уравнению

$$(9) \quad u_t + (-\Delta_S)^{\alpha/2} u = 0,$$

для которой

$$(10) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |u(x', t) - f(x')|^2 dx' = 0.$$

Отметим, что при $\alpha = 2$ уравнение (9) переходит в уравнение теплопроводности.

Пусть $Y_j^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots$, $j = 1, \dots, a_k$, — ортонормированный базис в $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ и

$$f(x') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x').$$

Тогда, используя метод Фурье и рассуждения аналогичные тем, которые приводились для задачи Дирихле, можно показать, что решением поставленной задачи является функция

$$u(x', t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\Lambda_k^{\alpha/2} t} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x').$$

Пусть теперь заданы две функции $f_0, f_1 \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Можно рассмотреть задачу о нахождении функции $u(x', t)$, $x' \in \mathbb{S}^{d-1}$, удовлетворяющую при $t > 0$ уравнению

$$(11) \quad u_{tt} + (-\Delta_S)^{\alpha/2} u = 0,$$

для которой

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= f_0, \\ u_t|_{t=0} &= f_1. \end{aligned}$$

Начальные условия здесь также следует понимать в смысле равенства (10). При $\alpha = 2$ уравнение (11) переходит в волновое уравнение. Применение метода Фурье дает решение этой задачи в виде

$$\begin{aligned} u(x', t) &= c_{00}^{(0)} + c_{00}^{(1)} t \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \left(c_{kj}^{(0)} \cos \Lambda_k^{\alpha/4} t + \frac{c_{kj}^{(1)}}{\Lambda_k^{\alpha/4}} \sin \Lambda_k^{\alpha/4} t \right) Y_j^{(k)}(x'), \end{aligned}$$

где

$$f_i(x') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^{(i)} Y_j^{(k)}(x'), \quad i = 0, 1.$$

Рассмотрим еще одну задачу. Пусть $f \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Требуется найти решение уравнения

$$(-\Delta_S)^{\alpha/2} u = f.$$

Решение этой задачи может быть записано в виде

$$u(x') = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_k^{-\alpha/2} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x'),$$

где c_{kj} — коэффициенты Фурье функции f .

7. СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА В ШАРЕ

Пусть $Y \in \mathcal{A}_k$. Будем искать собственные функции оператора Лапласа в виде

$$u(x) = F(r)Y(x), \quad r = |x|.$$

Имеем

$$\Delta u = Y \Delta F + 2 \sum_{j=1}^d \frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{\partial Y}{\partial x_j}.$$

В силу того, что

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = F'(r) \frac{x_j}{r},$$

используя однородность Y (см. (6)), получаем

$$\Delta u = Y \Delta F + 2kY \frac{F'(r)}{r}.$$

Из того, что функция u должна быть собственной, т.е. при некотором λ должно иметь место равенство

$$\Delta u = -\lambda u,$$

получаем уравнение на F

$$(12) \quad \Delta F + 2k \frac{F'(r)}{r} + \lambda F(r) = 0.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \Delta F &= \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left(F'(r) \frac{x_j}{r} \right) = \sum_{j=1}^d \left(\left(\frac{F'(r)}{r} \right)' \frac{x_j^2}{r} + \frac{F'(r)}{r} \right) \\ &= \left(\frac{F'(r)}{r} \right)' r + \frac{d}{r} F'(r) = F''(r) + \frac{d-1}{r} F'(r). \end{aligned}$$

Тем самым уравнение (12) принимает вид

$$F''(r) + \frac{2k+d-1}{r} F'(r) + \lambda F(r) = 0.$$

Положим

$$F(r) = f(r)r^{-p}, \quad p = k + \frac{d-2}{2}.$$

Тогда для функции f получим уравнение

$$r^2 f''(r) + r f'(r) + (\lambda r^2 - p^2) f(r) = 0.$$

Положив $y(t) = f(t/\sqrt{\lambda})$, для функции y получим уравнение

$$t^2 y''(t) + t y'(t) + (t^2 - p^2) y(t) = 0,$$

которое является уравнением Бесселя p -го порядка. Пусть $J_p(x)$ — функция Бесселя первого рода p -го порядка (являющаяся решением этого уравнения).

Тогда функции

$$\frac{J_p(r)}{r^{d/2-1}}Y(x'), \quad p = k + d/2 - 1, \quad x' = \frac{x}{r},$$

где $\mu_s^{(p)}$ — s -й корень функции Бесселя J_p , при всех $Y \in \mathcal{H}_k$ являются собственными функциями оператора Лапласа, равными нулю на \mathbb{S}^{d-1} , отвечающие собственным значениям $-(\mu_s^{(p)})^2$. Выбрав ортонормированный базис в $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ $Y_j^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots$, $j = 1, \dots, a_k$, получаем ортогональную систему собственных функций

$$Z_{ksj}(x) = \frac{J_p(\mu_s^{(p)} r)}{r^{d/2-1}} Y_j^{(k)}(x'),$$

$$k = 0, 1, \dots, \quad s = 1, 2, \dots, \quad j = 1, \dots, a_k.$$

Эта система является базисом в $L_2(\mathbb{B}^d)$. Ее можно ортонормировать, положив

$$Y_{ksj}(x) = \frac{1}{\|Z_{ksj}\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}} Z_{ksj}(x).$$

Нетрудно убедиться, что

$$\|Z_{ksj}\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}^2 = \int_0^1 J_p^2(\mu_s^{(p)} r) r \, dr.$$

Пусть $f \in L_2(\mathbb{B}^d)$ и

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{ksj} Y_{ksj}(x).$$

Определим оператор $(-\Delta)^{\alpha/2}$ следующим образом:

$$(-\Delta)^{\alpha/2} f = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (\mu_s^{(p)})^{\alpha} \sum_{j=1}^{a_k} c_{ksj} Y_{ksj}(x).$$

Рассмотрим ряд задач, аналогичных тем, которые были рассмотрены для сферического лапласиана.

1. Обобщенная задача Пуассона. Пусть $f \in L_2(\mathbb{B}^d)$. Требуется найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую уравнению

$$(-\Delta)^{\alpha/2} u = f$$

и граничному условию

$$u|_{x \in \mathbb{S}^{d-1}} = 0.$$

Решение этой задачи дается равенством

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (\mu_s^{(p)})^{-\alpha} \sum_{j=1}^{a_k} c_{ksj} Y_{ksj}(x),$$

где c_{ksj} — коэффициенты Фурье функции f .

2. Обобщенное уравнение теплопроводности. Пусть $f \in L_2(\mathbb{B}^d)$. Требуется найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую уравнению

$$u_t + (-\Delta)^{\alpha/2} u = 0$$

с начальным условием

$$u|_{t=0} = f$$

Решение этой задачи дается равенством

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} e^{-(\mu_s^{(p)})^\alpha} \sum_{j=1}^{a_k} c_{ksj} Y_{ksj}(x),$$

где c_{ksj} — коэффициенты Фурье функции f .

3. Обобщенное волновое уравнение. Пусть $f_0, f_1 \in L_2(\mathbb{B}^d)$. Требуется найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую уравнению

$$u_{tt} + (-\Delta)^{\alpha/2} u = 0$$

с начальными условиями

$$u|_{t=0} = f_0,$$

$$u_t|_{t=0} = f_1,$$

и граничным условием

$$u|_{x \in \mathbb{S}^{d-1}} = 0.$$

Решение этой задачи дается равенством

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \left(c_{ksj}^{(0)} \cos(\mu_s^{(p)})^{\alpha/2} t + \frac{c_{ksj}^{(1)}}{(\mu_s^{(p)})^{\alpha/2}} \sin(\mu_s^{(p)})^{\alpha/2} t \right) Y_{ksj}(x),$$

где $c_{ksj}^{(i)}$ — коэффициенты Фурье функции f_i , $i = 0, 1$.

8. ЗАДАЧИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ НА СФЕРЕ

Соболевским классом $W_2^\alpha(\mathbb{S}^{d-1})$ называется множество функций $f \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, для которых

$$\|(-\Delta_S)^{\alpha/2} f\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq 1.$$

1. Восстановить решение уравнения

$$(-\Delta_S)^{\alpha/2} u = f$$

по неточно заданному конечному набору коэффициентов Фурье функции f на классе $W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1})$. Более точно, найти величину

$$E_{Np}^{(1)}(\alpha, W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta) = \inf_{\varphi: l_p^N \rightarrow L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \sup_{\substack{f \in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \\ \|I_N f - y\|_{l_p^N} \leq \delta}} \|u - \varphi(y)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}$$

и метод, на котором достигается нижняя грань (здесь $I_N f = \{c_{kj}\}$, $k = 0, 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, a_k$, $N = a_0 + \dots + a_n$, c_{kj} — коэффициенты Фурье f , $p = 2, \infty$).

2. Восстановить решение задачи

$$\begin{aligned} u_t + (-\Delta_S)^{\alpha/2} u &= 0, \\ u|_{t=0} &= f, \end{aligned}$$

в момент времени τ по неточно заданному конечному набору коэффициентов Фурье функции f на классе $W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1})$, т.е. найти величину

$$\begin{aligned} E_{Np}^{(2)}(\tau, \alpha, W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta) \\ = \inf_{\varphi: l_p^N \rightarrow L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \sup_{\substack{f \in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), y \in l_p^N \\ \|I_N f - y\|_{l_p^N} \leq \delta}} \|u(\cdot, \tau) - \varphi(y)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \end{aligned}$$

и соответствующий оптимальный метод восстановления ($p = 2, \infty$).

3. Восстановить решение задачи

$$\begin{aligned} u_t + (-\Delta_S)^{\alpha/2} u &= 0, \\ u|_{t=0} &= f, \end{aligned}$$

в момент времени τ по неточно заданным решениям в моменты времени $t = 0$ и $t = T$, т.е. найти величину

$$\begin{aligned} E_T^{(3)}(\alpha, L_2(\mathbb{S}^{d-1}), \delta_0, \delta_T) \\ = \inf_{\varphi} \sup_{\substack{f, y_0, y_T \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \\ \|f - y_0\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta_0 \\ \|u(\cdot, T) - y_T\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta_T}} \|u(\cdot, \tau) - \varphi(y_0, y_T)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}, \end{aligned}$$

где $\varphi: L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \times L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \rightarrow L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, и соответствующий оптимальный метод восстановления.

4. Восстановления решения задачи

$$\begin{aligned} u_{tt} + (-\Delta_S)^{\alpha/2} u &= 0, \\ u|_{t=0} &= f_0, \\ u_t|_{t=0} &= f_1, \end{aligned}$$

в момент времени τ по неточно заданному конечному набору коэффициентов Фурье функций f_0 и f_1 на классах $W_2^{\beta_1}(\mathbb{S}^{d-1})$, $W_2^{\beta_2}(\mathbb{S}^{d-1})$

соответственно, т.е. найти величину

$$E_{Np}^{(4)}(\tau, \alpha, W_2^{\beta_1}(\mathbb{S}^{d-1}), W_2^{\beta_2}(\mathbb{S}^{d-1}), \delta_0, \delta_1) = \inf_{\varphi: l_p^N \times l_p^N \rightarrow L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \sup_{\substack{f_i \in W_2^{\beta_i}(\mathbb{S}^{d-1}), y_i \in l_p^N, i=1,2 \\ \|I_N f_i - y_i\|_{l_p^N} \leq \delta_i, i=1,2}} \|u(\cdot, \tau) - \varphi(y_0, y_1)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}$$

и соответствующий оптимальный метод восстановления ($p = 2, \infty$). Частные случаи этой задачи, когда одна из функций f_0 или f_1 фиксирована, в частности, равна нулю.

5. Аналог постановки в п.3 для задачи

$$\begin{aligned} u_{tt} + (-\Delta_S)^{\alpha/2} u &= 0, \\ u|_{t=0} &= f_0, \\ u_t|_{t=0} &= f_1. \end{aligned}$$

Здесь много вариантов постановок. Например (не самый общий), следующий: восстановить решение задачи в момент времени τ по неточно заданным решениям в моменты времени $t = 0$ и $t = T$, если известно, что $f_1 = 0$, т.е. найти величину

$$E_T^{(5)}(\alpha, L_2(\mathbb{S}^{d-1}), \delta_0, \delta_T) = \inf_{\varphi} \sup_{\substack{f_0, y_0, y_T \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \\ \|f_0 - y_0\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta_0 \\ \|u(\cdot, T) - y_T\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta_T}} \|u(\cdot, \tau) - \varphi(y_0, y_T)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})},$$

где $\varphi: L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \times L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \rightarrow L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, и соответствующий оптимальный метод восстановления.

9. ЗАДАЧИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ В ШАРЕ

Соболевским классом $W_2^\alpha(\mathbb{B}^d)$ называется множество функций $f \in L_2(\mathbb{B}^d)$, для которых

$$\|(-\Delta)^{\alpha/2} f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)} \leq 1.$$

6. Восстановить решение задачи

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \\ u|_{\mathbb{S}^{d-1}} &= f \end{aligned}$$

по неточно заданному конечному набору коэффициентов Фурье функции f на классе $W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1})$. Более точно, найти величину

$$E_{Np}^{(6)}(\alpha, W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta) = \inf_{\varphi: l_p^N \rightarrow L_2(\mathbb{B}^d)} \sup_{\substack{f \in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), y \in l_p^N \\ \|I_N f - y\|_{l_p^N} \leq \delta}} \|u - \varphi(y)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}$$

и метод, на котором достигается нижняя грань ($p = 2, \infty$).

7. Теорема о трех сферах. Восстановить решение задачи

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0, \\ u|_{\mathbb{S}^{d-1}} &= f\end{aligned}$$

на сфере радиуса r по неточно заданным решениям на сферах радиусов r_1 и r_2 , $r_1 < r < r_2$. Здесь требуется найти величину

$$\begin{aligned}E_{r_1, r_2}^{(7)}(r, L_2(\mathbb{S}^{d-1}), \delta_1, \delta_2) \\ = \inf_{\varphi} \sup_{\substack{f, y_1, y_2 \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \\ \|u|_{|x|=r_i} - y_i\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta_i, i=1,2}} \|u|_{|x|=r} - \varphi(y_1, y_2)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})},\end{aligned}$$

где $\varphi: L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \times L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \rightarrow L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, и соответствующий оптимальный метод восстановления.

8. Восстановить решение задачи

$$\begin{aligned}(-\Delta)^{\alpha/2} u &= f, \\ u|_{\mathbb{S}^{d-1}} &= 0,\end{aligned}$$

по неточно заданному конечному набору коэффициентов Фурье функции f на классе $W_2^\beta(\mathbb{B}^d)$. Более точно, найти величину

$$E_{Np}^{(8)}(\alpha, W_2^\beta(\mathbb{B}^d), \delta) = \inf_{\varphi: l_p^N \rightarrow L_2(\mathbb{B}^d)} \sup_{\substack{f \in W_2^\beta(\mathbb{B}^d), y \in l_p^N \\ \|I_N f - y\|_{l_p^N} \leq \delta}} \|u - \varphi(y)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}$$

и метод, на котором достигается нижняя грань (здесь $I_N f = \{c_{ksj}\}$, $k = 0, 1, \dots, n$, $s = 1, \dots, s_0$, $j = 1, \dots, a_k$, $N = (a_0 + \dots + a_n)s_0$, c_{ksj} — коэффициенты Фурье f , $p = 2, \infty$).

9. Теорема о трех сферах для неоднородного уравнения. Восстановить решение задачи

$$\begin{aligned}(-\Delta)^{\alpha/2} u &= f, \\ u|_{\mathbb{S}^{d-1}} &= 0\end{aligned}$$

на сфере радиуса r по неточно заданным решениям на сферах радиусов r_1 и r_2 , $r_1 < r < r_2$. Здесь требуется найти величину

$$\begin{aligned}E_{r_1, r_2}^{(9)}(r, L_2(\mathbb{S}^{d-1}), \delta_1, \delta_2) \\ = \inf_{\varphi} \sup_{\substack{f \in L_2(\mathbb{B}^d), y_1, y_2 \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \\ \|u|_{|x|=r_i} - y_i\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta_i, i=1,2}} \|u|_{|x|=r} - \varphi(y_1, y_2)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})},\end{aligned}$$

где $\varphi: L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \times L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \rightarrow L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, и соответствующий оптимальный метод восстановления.

10. Восстановить решение задачи

$$\begin{aligned} u_t + (-\Delta)^{\alpha/2} u &= 0, \\ u|_{t=0} &= f, \\ u|_{\mathbb{S}^{d-1}} &= 0, \end{aligned}$$

в момент времени τ по неточно заданному конечному набору коэффициентов Фурье функции f на классе $W_2^\beta(\mathbb{B}^d)$, т.е. найти величину

$$\begin{aligned} E_{Np}^{(10)}(\tau, \alpha, W_2^\beta(\mathbb{B}^d), \delta) \\ = \inf_{\varphi: l_p^N \rightarrow L_2(\mathbb{B}^d)} \sup_{\substack{f \in W_2^\beta(\mathbb{B}^d), y \in l_p^N \\ \|I_N f - y\|_{l_p^N} \leq \delta}} \|u(\cdot, \tau) - \varphi(y)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)} \end{aligned}$$

и соответствующий оптимальный метод восстановления ($p = 2, \infty$).

11. Восстановить решение задачи

$$\begin{aligned} u_t + (-\Delta)^{\alpha/2} u &= 0, \\ u|_{t=0} &= f, \\ u|_{\mathbb{S}^{d-1}} &= 0, \end{aligned}$$

в момент времени τ по неточно заданным решениям в моменты времени $t = 0$ и $t = T$, т.е. найти величину

$$\begin{aligned} E_T^{(11)}(\alpha, L_2(\mathbb{B}^d), \delta_0, \delta_T) \\ = \inf_{\varphi} \sup_{\substack{f, y_0, y_T \in L_2(\mathbb{B}^d) \\ \|f - y_0\|_{L_2(\mathbb{B}^d)} \leq \delta_0 \\ \|u(\cdot, T) - y_T\|_{L_2(\mathbb{B}^d)} \leq \delta_T}} \|u(\cdot, \tau) - \varphi(y_0, y_T)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}, \end{aligned}$$

где $\varphi: L_2(\mathbb{B}^d) \times L_2(\mathbb{B}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{B}^d)$, и соответствующий оптимальный метод восстановления.

12. Восстановления решения задачи

$$\begin{aligned} u_{tt} + (-\Delta_S)^{\alpha/2} u &= 0, \\ u|_{t=0} &= f_0, \\ u_t|_{t=0} &= f_1, \\ u|_{\mathbb{S}^{d-1}} &= 0, \end{aligned}$$

в момент времени τ по неточно заданному конечному набору коэффициентов Фурье функций f_0 и f_1 на классах $W_2^{\beta_1}(\mathbb{B}^d)$, $W_2^{\beta_2}(\mathbb{B}^d)$

соответственно, т.е. найти величину

$$E_{Np}^{(12)}(\tau, \alpha, W_2^{\beta_1}(\mathbb{B}^d), W_2^{\beta_2}(\mathbb{B}^d), \delta_0, \delta_1) \\ = \inf_{\varphi: l_p^N \times l_p^N \rightarrow L_2(\mathbb{B}^d)} \sup_{\substack{f_i \in W_2^{\beta_i}(\mathbb{B}^d), y_i \in l_p^N, i=1,2 \\ \|I_N f_i - y_i\|_{l_p^N} \leq \delta_i, i=1,2}} \|u(\cdot, \tau) - \varphi(y_0, y_1)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}$$

и соответствующий оптимальный метод восстановления ($p = 2, \infty$). Частные случаи этой задачи, когда одна из функций f_0 или f_1 фиксирована, в частности, равна нулю.

13. Аналог постановки в п.5 для задачи

$$u_{tt} + (-\Delta)^{\alpha/2} u = 0, \\ u|_{t=0} = f_0, \\ u_t|_{t=0} = f_1, \\ u|_{\mathbb{S}^{d-1}} = 0.$$

Один из вариантов (не самый общий) следующий: восстановить решение задачи в момент времени τ по неточно заданным решениям в моменты времени $t = 0$ и $t = T$, если известно, что $f_1 = 0$, т.е. найти величину

$$E_T^{(13)}(\alpha, L_2(\mathbb{B}^d), \delta_0, \delta_T) \\ = \inf_{\varphi} \sup_{\substack{f_0, y_0, y_T \in L_2(\mathbb{B}^d) \\ \|f_0 - y_0\|_{L_2(\mathbb{B}^d)} \leq \delta_0 \\ \|u(\cdot, T) - y_T\|_{L_2(\mathbb{B}^d)} \leq \delta_T}} \|u(\cdot, \tau) - \varphi(y_0, y_T)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)},$$

где $\varphi: L_2(\mathbb{B}^d) \times L_2(\mathbb{B}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{B}^d)$, и соответствующий оптимальный метод восстановления.

10. ДАЛЬНЕЙШИЕ ЗАДАЧИ

14. Аналоги задач предыдущего раздела для шарового пояса.
15. Неоднородные эволюционные уравнения.
16. Краевые условия других типов.