

# ТОЧНОЕ НЕРАВЕНСТВО ДЛЯ ДРОБНЫХ СТЕПЕНЕЙ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА <sup>1</sup>

© Е. О. Сивкова

Неравенства для степеней различных операторов играют важную роль в анализе, теории приближений и теории дифференциальных уравнений. Здесь приводится точное неравенство, связывающее дробные степени оператора Лапласа функции и ее преобразование Фурье.

Пусть  $\Delta$  — оператор Лапласа на  $\mathbb{R}^d$ , то есть  $\Delta$  сопоставляет гладкой функции  $f(\cdot)$  функцию

$$\Delta f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_d^2}(x).$$

Если существует преобразование Фурье  $F$  функций  $f(\cdot)$  и  $\Delta f(\cdot)$ , то нетрудно видеть, что  $(F\Delta f)(\xi) = -|\xi|^2 Ff(\xi)$ , где  $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_d^2$ .

Для каждого  $\alpha \geq 0$  оператор  $(-\Delta)^{\alpha/2}$ , действующий по правилу  $(-\Delta)^{\alpha/2} f(x) = F^{-1}(|\xi|^\alpha Ff(\xi))(x)$ , где  $F^{-1}$  — обратное преобразование Фурье, называется  $\alpha$ -ой степенью оператора Лапласа. Ясно, что  $(-\Delta)^0$  — тождественный оператор.

Рассмотрим следующее пространство

$$\mathcal{W}_{\infty,2}^\alpha(\mathbb{R}^d) = \{ f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d) \mid Ff(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}^d), (-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d) \}.$$

**Т е о р е м а.** Пусть  $0 \leq \beta < \alpha$ . Для всех  $f(\cdot) \in \mathcal{W}_{\infty,2}^\alpha(\mathbb{R}^d)$  справедливо точное неравенство

$$\|(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq K \|Ff(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}^{\frac{2(\alpha-\beta)}{d+2\alpha}} \|(-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{\frac{d+2\beta}{d+2\alpha}},$$

где

$$K = K(\beta, \alpha, d) = \frac{(d+2\alpha)^{d+2\beta}}{\sqrt{d+2\beta}} \left( \frac{2^{1-d}}{(\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)} \right)^{\frac{\alpha-\beta}{d+2\alpha}}.$$

Точность данного неравенства означает, что константу  $K$  нельзя уменьшить.

Приведем краткую схему доказательства. Пусть  $\delta > 0$ . Рассмотрим экстремальную задачу на  $\mathcal{W}_{\infty,2}^\alpha(\mathbb{R}^d)$ :

$$\|(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \rightarrow \max, \quad \|Ff(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \delta, \quad \|(-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 1. \quad (1)$$

Если перейти к образам Фурье, то по теореме Планшереля, квадрат значения данной задачи (то есть величина верхней грани максимизируемого функционала) будет равен значению такой задачи

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\beta} |Ff(\xi)|^2 d\xi \rightarrow \max, \quad |Ff(\xi)|^2 \leq \delta^2, \quad \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |Ff(\xi)|^2 d\xi \leq 1, \quad (2)$$

где неравенство в первом ограничении выполняется для почти всех  $\xi \in \mathbb{R}^d$ .

Относительно переменной  $|Ff(\cdot)|^2$  данная задача является задачей выпуклого программирования. Используя стандартные методы выпуклой оптимизации (см., напр., [1]) можно доказать, что функция  $\widehat{f}(\cdot)$  такая, что

$$F\widehat{f}(\xi) = \begin{cases} \delta, & |\xi| \leq \sigma; \\ 0, & |\xi| > \sigma, \end{cases}$$

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-90200)

где

$$\sigma = \left( \frac{2^{d-1} \pi^{d/2} (d+2\alpha) \Gamma(d/2)}{\delta^2} \right)^{\frac{1}{d+2\alpha}},$$

является ее решением. Подставляя эту функцию в максимизируемый функционал в (2), а затем извлекая квадратный корень, получаем, что значение  $S$  задачи (1) таково

$$S = \frac{(d+2\alpha)^{d+2\beta}}{\sqrt{d+2\beta}} \left( \frac{\delta^2 2^{1-d}}{(\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)} \right)^{\frac{\alpha-\beta}{d+2\alpha}}.$$

Пусть теперь  $f(\cdot)$  — произвольная функция из  $\mathcal{W}_{\infty,2}^\alpha(\mathbb{R}^d)$ , отличная от нуля. Положим  $g(\cdot) = f(\cdot) / \|(-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$ . Тогда ясно, что  $\|(-\Delta)^{\alpha/2} g(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 1$  и  $\|Fg(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} = \|Ff(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} / \|(-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$ , то есть  $g(\cdot)$  удовлетворяет ограничениям задачи (1) с  $\delta = \|Ff(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} / \|(-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$ . Следовательно,

$$\|(-\Delta)^{\beta/2} g(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \frac{\|(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}}{\|(-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}} \leq S.$$

Подставляя  $\delta = \|Ff(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} / \|(-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$  в выражение для  $S$ , получаем после несложных преобразований требуемое неравенство. На функции  $\hat{f}(\cdot)$ , как легко убедиться, оно обращается в равенство и поэтому константа  $K$  — наименьшая из возможных.

Подобные неравенства, но когда вместо степеней оператора Лапласа рассматриваются производные, изучались в работе [2]. Доказательство данного неравенства следует рассуждениям из этой работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М. Выпуклый анализ и его приложения. Москва, Эдиториал УРСС, 2003 (2-ое изд).

2. Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функциональный анализ и его приложения. Москва, 2003. Т. 37. Вып. 3. С. 51-64.

Сивкова Елена Олеговна

Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики  
(Технический университет)

Россия, Москва

e-mail: sivkova\_elena@inbox.ru

The exact inequality for fractional powers of Laplace operator  
Elena Sivkova