

ТЕОРИЯ АППРОКСИМАЦИИ И ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Г.Г. Магарил-Ильяев

МИРЭА

Классическая теория аппроксимации (или теория приближений) берет свое начало с работ П.Л.Чебышева второй половины 19 века. К середине 20 века, в основном, сформировались те задачи, которыми интересовались и продолжают интересоваться специалисты по теории приближений. В шестидесятые годы прошлого века возникла новая постановка – задача об оптимальном восстановлении линейного функционала (а затем и оператора) на классе элементов по неточной информации о самих элементах. Эта задача идеологически тесно связана с понятием поперечника класса функций, предложенного А.Н.Колмогоровым, но имеет явно выраженный информационный характер. Оказалось, что многие задачи теории приближений могут быть интерпретированы как задачи оптимального восстановления. Ниже приводятся примеры таких задач, но сначала дадим общую постановку задачи оптимального восстановления.

Пусть X – векторное пространство, W – непустое множество (класс элементов) в X , Y – нормированное пространство, $I : X \rightarrow Y$ – линейный оператор и $d > 0$.

Каждому элементу $x \in W$ сопоставим множество $I^d(x) = \{y \in Y \mid \|Ix - y\|_Y \leq d\}$, которое назовем *информацией об элементе x* , а многозначное отображение $I^d : W \rightarrow Y$, сопоставляющее x множество $I^d(x)$ – *информационным отображением (или оператором)*.

Пусть Z – нормированное пространство. Под задачей оптимального восстановления линейного оператора $\Lambda : X \rightarrow Z$ на классе W по информации $I^d(x)$ об элементе $x \in W$ понимается задача о нахождении величины

$$E(\Lambda, W, I^d) = \inf_m \sup_{\substack{x \in W, y \in Y \\ \|Ix - y\|_Y \leq d}} \|\Lambda x - m(y)\|_Z$$

(где нижняя грань берется по всем отображениям (методам восстановления) $m : Y \rightarrow Z$), называемой *погрешностью оптимального восстановления* и методов $\hat{m}$, на которых нижняя грань достигается, называемых *оптимальными методами восстановления*.

Задача оптимального восстановления тесно связана со следующей экстремальной задачей,

$$\|\Lambda x\|_Z \rightarrow \max, \|Ix\|_Y \leq d, x \in W, \quad (1)$$

которую будем называть *двойственной* (к задаче оптимального восстановления). Если известно решение задачи (1), то в ряде интересных случаях в соответствующей задаче оптимального восстановления удастся найти погрешность

оптимального восстановления и оптимальный метод. С другой стороны, многие известные задачи анализа и теории приближений имеют вид задачи (1), которую можно рассматривать как двойственную к задаче восстановления, что позволяет дать иную, информационную, интерпретацию исходной задачи. Приведем здесь три примера, связанных с классическими задачами теории приближений.

1. Задача П. Л. Чебышева об экстраполяции алгебраических полиномов. В 18... году Чебышев нашел решение следующей задачи: среди всех полиномов степени не выше n , значения которых на отрезке $[-1, 1]$ по модулю не превосходят числа $d > 0$, найти тот, который принимает максимальное значение в точке $t > 1$. Формальная запись этой задачи такова

$$x(t) \rightarrow \max, \quad \|x(\cdot)\|_{C([-1,1])} \leq d, \quad x(\cdot) \in P_n, \quad (2)$$

где P_n – пространство полиномов степени не выше n . Решением этой задачи является полином $dT_n(\cdot)$, где $T_n(t) = \cos(n \arccos(t))$ – полином Чебышева.

Задача (2) записывается в форме задачи (1). Действительно, пусть X – пространство непрерывных функций на R , $Y = C([-1,1])$, $Z = R$, $W = P_n$, I – оператор сужения функций на отрезок $[-1, 1]$, Λ – линейный функционал $x(\cdot)$ в $x(t)$ и, так как P_n – пространство, можно писать $x(t)$ вместо $|x(t)|$. Тогда соответствующая (2) задача оптимального восстановления, очевидно, состоит в том, чтобы наилучшим образом восстановить (на множестве P_n) значение полинома в точке t по следующей информации: о каждом полиноме $x(\cdot) \in P_n$ нам известна функция $y(\cdot) \in C([-1,1])$ такая, что $\|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{C([-1,1])} \leq d$.

Ответ в этой задаче такой: $E(x(t), P_n, I^d) = dT_n(t)$, а оптимальный метод строится так. Надо взять значения наблюдаемой функции $y(\cdot)$ в точках $t_k = \cos((n-k+1)\pi/n)$, $k=1, \dots, n+1$ (это точки, где полином Чебышева принимает свои максимальные по модулю значения на $[-1,1]$), провести через них интерполяционный многочлен Лагранжа и взять значение этого полинома в точке t . Отметим, что оптимальный метод использует не всю информацию (т.е. функцию $y(\cdot)$), а лишь ее значения в $(n+1)$ -ой точке.

2. Неравенство С. Н. Бернштейна для тригонометрических полиномов. В 1912 году Бернштейн доказал следующее точное неравенство

$$\|x(\cdot)\|_{C(T)} \leq n \|x(\cdot)\|_{C(T)}, \quad x(\cdot) \in T_n, \quad (3)$$

где T_n – пространство тригонометрических полиномов степени не выше n и T – окружность единичного радиуса. Подобного рода неравенства играют важную роль в теории приближений.

Нахождение точной константы в (3) равносильно решению следующей

задачи

$$x(0) \rightarrow \max, \|x(\cdot)\|_{C(T)} \leq d, x(\cdot) \in T_n.$$

Соответствующая задача оптимального восстановления состоит в том, чтобы наилучшим образом восстановить (на множестве T_n) значение производной полинома в нуле по следующей информации: о каждом полиноме $x(\cdot) \in T_n$ нам известна функция $y(\cdot) \in C(T)$ такая, что $\|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{C(T)} \leq d$. Ответ такой:

$E(x(0), T_n, I^d) = dn$, а оптимальный метод строится так. Надо взять значения наблюдаемой функции $y(\cdot)$ в точках $t_k = (2k-1)\pi / 2n, k=1, \dots, 2n$, и сопоставить этому набору число

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{2 \sin^2 t_k / 2} y(t_k).$$

Здесь также оптимальный метод использует значения функции $y(\cdot)$ лишь в конечном наборе точек.

3. Неравенства для производных гладких функций. Это обширная тематика, связанная с нахождением точных оценок нормы функции и ее производных в той или иной метрике при условии, что известны оценки других ее производных и, вообще говоря, в других метриках. Здесь рассмотрим один пример, когда нужно оценить норму функции в $L_\infty(R_+)$, если известны оценки этой функции и ее производной в $L_2(R_+)$. В силу возможности сдвига эта задача эквивалентна решению следующей экстремальной задачи

$$x(0) \rightarrow \max, \|x(\cdot)\|_{L_2(R_+)} \leq d, \|x'(\cdot)\|_{L_2(R_+)} \leq 1. \quad (4)$$

Если обозначить через X пространство локально абсолютно непрерывных функций из $L_2(R_+)$, у которых производная принадлежит $L_2(R_+)$, а через W совокупность функций $x(\cdot) \in X$ таких, что $\|x'(\cdot)\|_{L_2(R_+)} \leq 1$, то задача (4) приобретает вид задачи (1).

Соответствующая задача оптимального восстановления состоит в том, чтобы наилучшим образом восстановить (на классе W) значение функции в нуле по следующей информации: о каждой функции $x(\cdot) \in W$ нам известна функция $y(\cdot) \in L_2(R_+)$ такая, что $\|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(R_+)} \leq d$. Ответ такой:

$E(x(0), W, I^d) = \sqrt{2d}$, а оптимальный метод заключается в том, что наблюдаемой функции $y(\cdot)$ ставится в соответствие число

$$\frac{1}{d} \int_{R_+} e^{-t/d} y(t) dt.$$

Доказательство этих и других подобного рода результатов основывается на стандартных методах теории экстремума и выпуклой двойственности (см. [1]).

1. *G.G. Magaril-Il'yayev, V.M. Tikhomirov. Convex Analysis: Theory and Applications. AMS, Translations of Mathematical Monographs, vol. 222.*