Об оптимальном восстановлении решений эволюционных уравнений

Г.Г. Магарил-Ильяев

Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет), пр. Вернадского, 78, Москва, 119454, Россия

e-mail: magaril@mirea.ru

К.Ю. Осипенко

"МАТИ" — Российский государственный технологический университет им. К. Э. Циолковского, ул. Оршанская, 3, Москва, 121552, Россия

e-mail: kosipenko@yahoo.com

Рассматривается задача оптимального восстановления решения абстрактной задачи Коши

$$\frac{dx}{dt}+Ax=0, \tag{1}$$

$$x\Big|_{t=0}=x_0(\cdot) \tag{2}$$

по неточным его измерениям в отдельные моменты времени. Здесь оператор A действует из $\left\{\,x(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^d):\int_{\mathbb{R}^d}\psi^2(\xi)|Fx(\xi)|^2\,d\xi<\infty\,\right\}$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$ по правилу $Ax(\cdot)=F^{-1}(\psi(\cdot)Fx(\cdot))(\cdot)$, где $\psi(\cdot)$ — непрерывная вещественная функция на $\mathbb{R}^d$ такая, что $\sup_{\xi\in\mathbb{R}^d}\psi(\xi)=+\infty$ и $\min_{\xi\in\mathbb{R}^d}\psi(\xi)=a>-\infty$, а F и F^{-1} — прямое и обратное преобразования Фурье.

Под решением задачи (1)–(2) понимается дифференцируемая функция $t\to x(t,\cdot)$ на $(0,\infty)$ со значениями в $L_2(\mathbb{R}^d)$, удовлетворяющая (1) и такая, что $x(t,\cdot)\to x_0(\cdot)$ при $t\downarrow 0$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Нетрудно проверить, что функция $t\to P_t^{\psi}x_0(\cdot)=F^{-1}(e^{-\psi(\cdot)t}Fx_0(\cdot))(\cdot)$ является единственным решением данной задачи.

Пусть в моменты времени $0\le t_1<\ldots<t_n$ известны приближенные решения задачи (1)–(2), т. е. известны такие функции $y_j(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^d)$, что $\|P_{t_j}^{\psi}x_0(\cdot)-y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\le\delta_j$, где $\delta_j>0$, $j=1,\ldots,n$. Требуется по этой информации восстановить решение в момент времени $\tau\ne t_j$. В качестве методов восстановления рассматриваем произвольные отображения $m\colon (L_2(\mathbb{R}^d))^n\to L_2(\mathbb{R}^d)$. Погрешностью метода m назовем величину ($\delta=(\delta_1,\ldots,\delta_n)$, $y=(y_1(\cdot),\ldots,y_n(\cdot))$)

$$e(\tau,A,\delta,m)=\sup_{\substack{x_0(\cdot),y_1(\cdot),\ldots,y_n(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^d)\\ \|P_{t_j}^{\psi}x_0(\cdot)-y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\le\delta_j,\ j=1,\ldots,n}}\|P_\tau^{\psi}x_0(\cdot)-m(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Нас интересует величина

$$E(\tau, A, \delta) = \inf_{m\colon (L_2(\mathbb{R}^d))^n \to L_2(\mathbb{R}^d)} e(\tau, A, \delta, m),$$

которая называется погрешностью оптимального восстановления и метод, на котором достигается нижняя грань, называемый оптимальным методом восстановления.

Обозначим $M = \operatorname{co}\{\,(t_j, \ln(1/\delta_j),\ 1 \le j \le n\,\} + \{\,(\gamma, a\gamma) \mid \ \gamma \ge 0\,\}$, где $\operatorname{co} C$ — выпуклая оболочка множества C. Пусть функция $\theta(\cdot)$ на $[0, \infty)$ определена равенством: $\theta(t) = \max\{\,x : (t, x) \in M\,\}$. Ясно, что $\theta(\cdot)$ — ломаная на $[t_1, \infty)$. Пусть $t_{s_1} < \ldots < t_{s_k}$ — ее точки излома, которые, очевидно, являются подмножеством точек $\{t_1, \ldots, t_n\}$.

Теорема. *Пусть $\tau \in (t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$, $1 \le j \le k-1$. Тогда*

$$E(\tau, A, \delta) = e^{-\theta(\tau)}$$

и

$$\widehat{m}(y)(\cdot) = P_\tau^\psi (K * (\lambda_{s_j} P_{t_{s_j}}^\psi y_{s_j} + \lambda_{s_{j+1}} P_{t_{s_{j+1}}}^\psi y_{s_{j+1}}))(\cdot)$$

— оптимальный метод, где

$$FK(\cdot) = \frac{1}{\lambda_{s_j} e^{-2\psi(\cdot) t_{s_j}} + \lambda_{s_{j+1}} e^{-2\psi(\cdot) t_{s_{j+1}}}}$$

и

$$\lambda_{s_j} = \frac{t_{s_{j+1}} - \tau}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}} \left(\frac{\delta_{s_{j+1}}}{\delta_{s_j}}\right)^{2\frac{\tau - t_{s_j}}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}}}, \quad \lambda_{s_{j+1}} = \frac{\tau - t_{s_j}}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}} \left(\frac{\delta_{s_j}}{\delta_{s_{j+1}}}\right)^{2\frac{t_{s_{j+1}} - \tau}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}}},$$

если $\theta(t_{s_{j+1}}) - \theta(t_{s_j}) > a(t_{s_{j+1}} - t_{s_j})$ и $\lambda_{s_j} = e^{-2a(\tau - t_{s_j})}$, $\lambda_{s_{j+1}} = 0$ в противном случае.

Рассмотренная здесь задача относится к так называемым задачам оптимального восстановления линейных операторов. Подробнее см. [1] и [2].

Список литературы

[1] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью”, *Матем. сб.*, 193, No. 3, 79–100 (2002).

[2] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных”, *Функц. анализ и его прилож.*, 37, 51–64 (2003).