

УДК 517.518.1

Г. Г. Магарил-Ильяев, Е. О. Сивкова

Наилучшее восстановление оператора Лапласа функции по ее неточно заданному спектру

В работе решается задача о наилучшем восстановлении дробной степени оператора Лапласа гладкой функции на \mathbb{R}^d по точно или приближенно известному ее преобразованию Фурье на некотором выпуклом подмножестве \mathbb{R}^d . Построена серия оптимальных методов восстановления. Информация о преобразовании Фурье за пределами некоторого шара с центром в нуле оказывается лишней – оптимальные методы ее не используют. Сами методы различаются способом “обработки” полезной информации.

Библиография: 12 названий.

Ключевые слова: оператор Лапласа, оптимальное восстановление, экстремальная задача, преобразование Фурье.

§ 1. Постановка задачи и формулировка результата

Пусть Δ – оператор Лапласа на \mathbb{R}^d , т.е. для гладкой функции $f(\cdot)$

$$\Delta f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_d^2}(x),$$

где $x = (x_1, \dots, x_d)$. Если F – преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R}^d)$, то (по крайней мере формально) $(F\Delta f)(\xi) = -|\xi|^2 Ff(\xi)$, где $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_d^2$. Пусть F^{-1} – обратное преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Для любого $\alpha > 0$ оператор $(-\Delta)^{\alpha/2}$, действующий по правилу $(-\Delta)^{\alpha/2} f(x) = F^{-1}(|\xi|^\alpha Ff(\xi))(x)$, называется α -й степенью оператора Лапласа.

Рассмотрим следующее пространство функций в $L_2(\mathbb{R}^d)$:

$$\mathscr{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d) = \{f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d) \mid (-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)\},$$

и положим $W_2^\alpha(\mathbb{R}^d) = \{f(\cdot) \in \mathscr{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d) \mid \|(-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 1\}$.

Пусть A – непустое измеримое собственное подмножество \mathbb{R}^d , $0 < \beta < \alpha$ и $\delta \geq 0$. Мы хотим восстановить β -ю степень оператора Лапласа функции $f(\cdot) \in W_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$ по следующей информации: известна с точностью до δ в метрике $L_2(A)$ функция $Ff(\cdot)|_A$ (сужение преобразования Фурье $f(\cdot)$ на множество A), т.е. известна (наблюдается) функция $g(\cdot) \in L_2(A)$ такая, что $\|Ff(\cdot) - g(\cdot)\|_{L_2(A)} \leq \delta$ (при $\delta = 0$ это означает, что наблюдается сама функция $Ff(\cdot)|_A$).

Под задачей оптимального восстановления β -й степени оператора Лапласа функции $f(\cdot)$ по данной информации понимается нахождение величины

$$\begin{aligned} & E((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), A, \delta) \\ &= \inf_m \sup_{\substack{f(\cdot) \in W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), g(\cdot) \in L_2(A) \\ \|Ff(\cdot) - g(\cdot)\|_{L_2(A)} \leq \delta}} \|(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot) - m(g(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \end{aligned}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 10-01-00188 и № 11-01-00529).

где нижняя грань берется по всем отображениям (методам восстановления) $m: L_2(A) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$, а также нахождение тех m , на которых эта грань достигается. Величину $E((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), A, \delta)$ будем называть *погрешностью оптимального восстановления*, а отображения m , на которых нижняя грань достигается – *оптимальными методами восстановления*.

Оптимальные методы, как видно из постановки, ищутся сразу для всех функций из данного класса и в этом смысле задача оптимального восстановления идеологически восходит к работам А. Н. Колмогорова 30-х гг. прошлого века о наилучших методах приближения классов функций. Заметим, что с точки зрения приложений вполне естественно считать, что мы имеем дело не с индивидуальным элементом, а (в силу неизбежных погрешностей измерения) лишь с представителем некоторого семейства. Общая постановка задачи оптимального восстановления (но в значительно более простой ситуации) принадлежит С. А. Смоляку [1]. Представление о дальнейшем развитии тематики, связанной с задачами оптимального восстановления линейных функционалов и операторов по неточной информации можно получить из работ [2]–[8]. Задачи, близкие к той, которая изучается здесь, но для функций одного переменного (периодических и на прямой) рассматривались в работах [9]–[11].

Перед формулировкой теоремы введем некоторые обозначения. Всюду далее $B(x, r)$ – замкнутый шар в \mathbb{R}^d с центром в точке x радиуса $r > 0$, а (x, y) – скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^d$.

Пусть A – собственное подмножество \mathbb{R}^d и $0 \in \text{int } A$. Положим

$$r_A = \sup\{r > 0 \mid B(0, r) \subset A\}.$$

Ясно, что $0 < r_A < \infty$.

Пусть $0 < \beta < \alpha$ и $\delta > 0$. Обозначим

$$\hat{r} = \hat{r}(\alpha, \beta, \delta) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/(2(\alpha-\beta))} \left(\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\right)^{-1/(2\alpha)}.$$

ТЕОРЕМА. Пусть $0 < \beta < \alpha$, $\delta \geq 0$, A – выпуклое замкнутое собственное подмножество \mathbb{R}^d и $\text{int } A \neq \emptyset$. Тогда

1) если $0 \notin \text{int } A$, то

$$E((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), A, \delta) = +\infty;$$

2) если $0 \in \text{int } A$ и $\delta = 0$, то

$$E((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), A, 0) = \frac{1}{r_A^{\alpha-\beta}}$$

и метод

$$\hat{m}(Ff(\cdot)|_A)(t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| \leq r_A} |\xi|^\beta Ff(\xi) e^{i(\xi, t)} d\xi$$

является оптимальным;

3) если $0 \in \text{int } A$ и $\delta > 0$, то

$$E((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), A, \delta) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\alpha - \beta}{\alpha} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\beta/(\alpha-\beta)} \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} r_A^{2\beta} + \frac{1}{r_A^{2(\alpha-\beta)}}, & r_A \leq \hat{r}, \\ \left(\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\right)^{(\alpha-\beta)/(2\alpha)}, & r_A \geq \hat{r}, \end{cases}$$

и для каждого r такого, что

$$0 \leq r \leq \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/(2\beta)} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/(2(\alpha-\beta))} r_0,$$

где $r_0 = \min(r_A, \hat{r})$, метод

$$\begin{aligned} \hat{m}_r(g(\cdot))(t) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| \leq r} |\xi|^\beta g(\xi) e^{i(\xi, t)} d\xi \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{r \leq |\xi| \leq r_0} |\xi|^\beta \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\beta/(\alpha-\beta)} \left(\frac{|\xi|}{r_0}\right)^{2\alpha}\right)^{-1} g(\xi) e^{i(\xi, t)} d\xi, \end{aligned}$$

является оптимальным.

Сделаем несколько замечаний по поводу сформулированной теоремы. Если фиксирован метод восстановления, то величину под знаком нижней грани в определении $E((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), A, \delta)$ естественно считать погрешностью данного метода. Тогда первое утверждение теоремы означает, что если $0 \notin \text{int } A$, то погрешность любого метода бесконечна и значит, никаким способом нельзя восстановить соответствующий оператор на всем классе.

Если $0 \in \text{int } A$ и преобразование Фурье функции $f(\cdot)$ на A известно точно ($\delta = 0$), то чем больше радиус шара с центром в нуле, который можно вписать в A , тем погрешность оптимального восстановления меньше. Но знание преобразования Фурье за пределами этого шара оказывается лишним – оптимальный метод эту информацию не использует. Заметим, что сам оптимальный метод есть β -я степень оператора Лапласа функции, преобразование Фурье которой совпадает с преобразованием Фурье функции f на шаре $B(0, r_A)$ и равно нулю вне этого шара.

Если $0 \in \text{int } A$ и преобразование Фурье функции $f(\cdot)$ на A известно с точностью до $\delta > 0$, то погрешность оптимального восстановления также уменьшается с ростом радиуса вписанного в A шара, но лишь до определенного предела: при $r_A \geq \hat{r}$ эта погрешность постоянна, т.е. за пределами шара $B(0, \hat{r})$ информация о преобразовании Фурье функции из данного класса не нужна. Оптимальный метод использует информацию о преобразовании Фурье только на шаре $B(0, r_0)$. При этом, если $r > 0$, то на шаре $B(0, r)$ информация не “обрабатывается” (подставляется то, что наблюдается), а на шаровом слое $\{\xi \mid r < |\xi| \leq r_0\}$ наблюдаемая информация “сглаживается”. Сам оптимальный метод, как и в предыдущем случае, есть β -я степень оператора Лапласа функции, преобразование Фурье которой совпадает с наблюдаемой функцией $g(\cdot)$ на шаре $B(0, r)$ и со сглаженным наблюдением на слое $\{\xi \mid r < |\xi| \leq r_0\}$. Заметим еще, что неравенство $r_0 \leq \hat{r}$, равносильное соотношению

$$\delta^2 r_0^{2\alpha} \leq (2\pi)^d \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\alpha/(\alpha-\beta)},$$

можно трактовать как своеобразный “принцип неопределенности”, связывающий объем полезной информации (преобразование Фурье на шаре $B(0, r_0)$) и погрешность ее измерения.

§ 2. Доказательство теоремы

2.1. Начнем с оценки снизу величины погрешности оптимального восстановления $E((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), A, \delta)$. Покажем, что она не меньше значения задачи

$$\begin{aligned} \|(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\rightarrow \max, & \|Ff(\cdot)\|_{L_2(A)} &\leq \delta, \\ \|(-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq 1, & f(\cdot) &\in \mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d), \end{aligned} \quad (2.1)$$

т.е. верхней грани максимизируемого функционала в (2.1).

Пусть $f_0(\cdot)$ – допустимая функция в (2.1) (т.е. $f_0(\cdot)$ удовлетворяет ограничениям задачи), тогда, очевидно, функция $-f_0(\cdot)$ также допустима и мы имеем для любого $m: L_2(A) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$ ($m(0)(\cdot)$ – образ нулевой функции при отображении m)

$$\begin{aligned} 2\|(-\Delta)^{\beta/2} f_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \|(-\Delta)^{\beta/2} f_0(\cdot) - m(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \|(-\Delta)^{\beta/2} (-f_0)(\cdot) - m(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq 2 \sup_{\substack{\|Ff(\cdot)\|_{L_2(A)} \leq \delta, \\ \|(-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 1}} \|(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot) - m(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq 2 \sup_{\substack{\|Ff(\cdot) - g(\cdot)\|_{L_2(A)} \leq \delta, \\ \|(-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 1}} \|(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot) - m(g(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Переходя слева к верхней грани по всем допустимым функциям в (2.1), а справа к нижней грани по всем методам m , получаем требуемое.

Заметим, что в образах Фурье согласно теореме Планшереля квадрат значения задачи (2.1) равен значению такой задачи:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\beta} |Ff(\xi)|^2 d\xi &\rightarrow \max, & \int_A |Ff(\xi)|^2 d\xi &\leq \delta^2, \\ \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |Ff(\xi)|^2 d\xi &\leq 1, & f(\cdot) &\in \mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d). \end{aligned} \quad (2.2)$$

2.2. Докажем первое утверждение теоремы. Для этого в силу полученной выше оценки снизу для погрешности оптимального восстановления достаточно показать, что значение задачи (2.2) равно $+\infty$. Так как $0 \notin \text{int } A$, то согласно конечномерной теореме отделимости (см., например, [12]) можно отделить нуль от выпуклого множества $\text{int } A$, т.е. существует такой вектор $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d$, $|\lambda| = \sqrt{\lambda_1^2 + \dots + \lambda_d^2} = 1$, что

$$\sup_{\xi \in A} (\lambda, \xi) \leq 0. \quad (2.3)$$

Для каждого $\varepsilon > 0$ рассмотрим шар $B(\varepsilon\lambda, \varepsilon/2)$, который для краткости обозначим B_ε . Тогда $B_\varepsilon \cap A = \emptyset$, так как если $\xi \in B_\varepsilon$, то $|\xi - \varepsilon\lambda| \leq \varepsilon/2$, откуда легко выводится, что $(\lambda, \xi) > 0$ и, значит, $\xi \notin A$ согласно (2.3). Пусть функция $f_\varepsilon(\cdot)$ такова, что

$$Ff_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} (2\pi)^{d/2} \left(\int_{B_\varepsilon} |\eta|^{2\alpha} d\eta \right)^{-1/2}, & \xi \in B_\varepsilon \\ 0, & \xi \notin B_\varepsilon. \end{cases}$$

Эта функция допустима в задаче (2.2). Действительно, поскольку $Ff_\varepsilon(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$, то $f_\varepsilon(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$, и так как ясно, что функция $\xi \mapsto -|\xi|^2 Ff_\varepsilon(\xi)$ принадлежит $L_2(\mathbb{R}^d)$, то $(-\Delta)^{\alpha/2} f_\varepsilon(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ и, значит, $f_\varepsilon(\cdot) \in \mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$. Далее элементарно проверяется, что $f_\varepsilon(\cdot)$ удовлетворяет остальным ограничениям задачи (2.2). Теперь, если $\xi \in B_\varepsilon$, то $|\xi| \leq |\xi - \varepsilon\lambda| + |\varepsilon\lambda| \leq 3\varepsilon/2$ и мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\beta} |Ff_\varepsilon(\xi)|^2 d\xi &= \frac{\int_{B_\varepsilon} |\xi|^{2\beta} d\xi}{\int_{B_\varepsilon} |\eta|^{2\alpha} d\eta} = \frac{\int_{B_\varepsilon} |\xi|^{2\alpha} |\xi|^{-2(\alpha-\beta)} d\xi}{\int_{B_\varepsilon} |\eta|^{2\alpha} d\eta} \\ &\geq \left(\frac{3}{2}\right)^{-2(\alpha-\beta)} \varepsilon^{-2(\alpha-\beta)}, \end{aligned}$$

откуда в силу произвольности ε следует, что значение максимизируемого функционала в (2.2) может быть сделано сколь угодно большим. Это вместе с полученной выше оценкой снизу доказывает утверждение 1) теоремы.

2.3. Докажем второе утверждение теоремы. Найдем значение величины $E((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), A, 0)$. Как показано выше, оно не меньше квадрата значения задачи (2.2). Поскольку $\delta = 0$, то первое ограничение в (2.2) означает, что $Ff(\xi) = 0$ для п.в. $\xi \in A$, и тогда сама задача (2.2) переписывается в этом случае так:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d \setminus A} |\xi|^{2\beta} |Ff(\xi)|^2 d\xi &\rightarrow \max, \\ \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d \setminus A} |\xi|^{2\alpha} |Ff(\xi)|^2 d\xi &\leq 1, \quad f(\cdot) \in \mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Найдем значение этой задачи. Так как $B(0, r_A) \subset A$, то $|\xi| \geq r_A$, если $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus A$, и мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d \setminus A} |\xi|^{2\beta} |Ff(\xi)|^2 d\xi &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d \setminus A} |\xi|^{-2(\alpha-\beta)} |\xi|^{2\alpha} |Ff(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq r_A^{-2(\alpha-\beta)} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |Ff(\xi)|^2 d\xi \leq r_A^{-2(\alpha-\beta)}, \end{aligned}$$

т.е. значение задачи (2.4) не превосходит $r_A^{-2(\alpha-\beta)}$. Покажем, что, на самом деле, оно равно этой величине.

Ясно, что граница шара $B(0, r_A)$ и граница A имеют непустое пересечение. Пусть ξ_0 принадлежит этому пересечению. Тогда $\xi_0 \notin \text{int } A$, и поэтому можно отделить ξ_0 от выпуклого множества $\text{int } A$, т.е. существует такой вектор $\lambda \in \mathbb{R}^d$, $|\lambda| = 1$, что $\sup_{\xi \in A} (\lambda, \xi) \leq (\lambda, \xi_0)$. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Положим $\xi_n = \xi_0 + (1/n)\lambda$ и рассмотрим шар $B(\xi_n, 1/(2n))$. Он не пересекается с A (если $\xi \in B(\xi_n, 1/(2n))$, то отсюда легко следует, что $(\lambda, \xi) > (\lambda, \xi_0)$ и, значит, $\xi \notin A$). Обозначим через $V_n = \pi^{d/2}/(2n)^d \Gamma(d/2 + 1)$ объем шара в \mathbb{R}^d радиуса $1/(2n)$ и рассмотрим последовательность функций $f_n(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$, преобразование Фурье которых имеет вид

$$Ff_n(\xi) = \begin{cases} (2\pi)^{d/2} V_n^{-1/2} \left(r_A + \frac{3}{2n}\right)^{-\alpha}, & \xi \in B\left(\xi_n, \frac{1}{2n}\right), \\ 0, & \xi \notin B\left(\xi_n, \frac{1}{2n}\right). \end{cases}$$

Эти функции допустимы в задаче (2.4). Действительно, как и раньше, проверяется, что они принадлежат $\mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$. Далее ясно, что $|\xi_0| = r_A$, и тогда, если $\xi \in B(\xi_n, 1/(2n))$, то

$$|\xi| \leq \left| \xi - \xi_0 - \frac{1}{n}\lambda + \xi_0 + \frac{1}{n}\lambda \right| \leq \frac{1}{2n} + |\xi_0| + \frac{1}{n} = r_A + \frac{3}{2n},$$

и мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d \setminus A} |\xi|^{2\alpha} |Ff_n(\xi)|^2 d\xi &= V_n^{-1} \left(r_A + \frac{3}{2n} \right)^{-2\alpha} \int_{B(\xi_n, 1/(2n))} |\xi|^{2\alpha} d\xi \\ &\leq V_n^{-1} \left(r_A + \frac{3}{2n} \right)^{-2\alpha} \left(r_A + \frac{3}{2n} \right)^{2\alpha} V_n = 1. \end{aligned}$$

Пусть снова $\xi \in B(\xi_n, 1/(2n))$. Тогда

$$r_A = |\xi_0| \leq |\xi| + \left| \xi_0 - \xi + \frac{1}{n}\lambda \right| + \left| \frac{1}{n}\lambda \right| \leq |\xi| + \frac{1}{2n} + \frac{1}{n},$$

т.е. $|\xi| \geq r_A - 3/(2n)$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d \setminus A} |\xi|^{2\beta} |Ff_n(\xi)|^2 d\xi &= V_n^{-1} \left(r_A + \frac{3}{2n} \right)^{-2\alpha} \int_{B(\xi_n, 1/(2n))} |\xi|^{2\beta} d\xi \\ &\geq V_n^{-1} \left(r_A + \frac{3}{2n} \right)^{-2\alpha} \left(r_A - \frac{3}{2n} \right)^{2\beta} V_n. \end{aligned}$$

Правая часть этого неравенства стремится при $n \rightarrow \infty$ к величине $r_A^{-2(\alpha-\beta)}$, а левая по доказанному не превосходит этой величины, откуда вытекает, что значение задачи (2.4) равно $r_A^{-2(\alpha-\beta)}$. Отсюда и из доказанной ранее оценки снизу для погрешности оптимального восстановления следует неравенство $E((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), A, 0) \geq r_A^{-2(\alpha-\beta)}$.

Теперь докажем противоположное неравенство и найдем оптимальный метод восстановления. Пусть \hat{m} – метод, определенный в теореме и $f(\cdot) \in W_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$. Имеем, используя теорему Планшереля,

$$\begin{aligned} \|(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot) - \hat{m}(Ff(\cdot)|_A)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0, r_A)} |\xi|^{2\beta} |Ff(\xi)|^2 d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0, r_A)} |\xi|^{-2(\alpha-\beta)} |\xi|^{2\alpha} |Ff(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq r_A^{-2(\alpha-\beta)} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |Ff(\xi)|^2 d\xi \leq r_A^{-2(\alpha-\beta)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $E((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), A, 0) \leq r_A^{-2(\alpha-\beta)}$. Вместе с предыдущей оценкой это означает, что $E((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), A, 0) = r_A^{-2(\alpha-\beta)}$ и что \hat{m} – оптимальный метод. Утверждение 2) теоремы доказано.

2.4. Докажем оценку снизу для погрешности оптимального восстановления в третьем утверждении теоремы. Как и в предыдущем случае, начнем с нахождения величины $E((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), A, \delta)$. По доказанному ее квадрат не меньше значения задачи (2.2). Сопоставим этой задаче функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(f(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} (-|\xi|^{2\beta} + \lambda_1 \chi_A(\xi) + \lambda_2 |\xi|^{2\alpha}) |Ff(\xi)|^2 d\xi,$$

где $\chi_A(\cdot)$ – характеристическая функция множества A . Найдём значение задачи (2.2), воспользовавшись для этого следующим утверждением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если найдутся такие $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$ и допустимая в (2.2) последовательность функций $f_n(\cdot)$, что

(а) $\mathcal{L}(f(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) \geq 0$ для всех функций $f(\cdot) \in \mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$;

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}(f_n(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) = 0$;

(с) $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1 \left(\int_A |F f_n(\xi)|^2 d\xi - \delta^2 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_2 \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |F f_n(\xi)|^2 d\xi - (2\pi)^d \right) = 0$,

то значение задачи (2.2) равно $\lambda_1 \delta^2 / (2\pi)^d + \lambda_2$.

Действительно, обозначим значение задачи (2.2) через S . Для любой допустимой функции $f(\cdot)$ в (2.2) в силу неотрицательности $\lambda_i, i = 1, 2$, и условия (а) имеем

$$\begin{aligned} -\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\beta} |F f(\xi)|^2 d\xi &\geq -\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\beta} |F f(\xi)|^2 d\xi \\ &+ \frac{\lambda_1}{(2\pi)^d} \left(\int_A |F f(\xi)|^2 d\xi - \delta^2 \right) + \frac{\lambda_2}{(2\pi)^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |F f(\xi)|^2 d\xi - (2\pi)^d \right) \\ &= \mathcal{L}(f(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) - \lambda_1 \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} - \lambda_2 \geq -\lambda_1 \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} - \lambda_2, \end{aligned}$$

и, значит, $S \leq \lambda_1 \delta^2 / (2\pi)^d + \lambda_2$. С другой стороны, для любого n

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f_n(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) &= -\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\beta} |F f_n(\xi)|^2 d\xi + \frac{\lambda_1}{(2\pi)^d} \left(\int_A |F f_n(\xi)|^2 d\xi - \delta^2 \right) \\ &+ \frac{\lambda_2}{(2\pi)^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |F f_n(\xi)|^2 d\xi - (2\pi)^d \right) + \lambda_1 \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} + \lambda_2. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу (b) и (с) получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\beta} |F f_n(\xi)|^2 d\xi = \frac{\lambda_1 \delta^2}{(2\pi)^d} + \lambda_2.$$

Но этот предел, очевидно, не превосходит S , что и доказывает предложение.

Предъявим теперь такие $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$ и последовательность допустимых функций $f_n(\cdot)$ в (2.2), что выполняются условия (а), (b) и (с) предложения.

Рассмотрим сначала случай, когда $r_A < \hat{r}$. Пусть

$$\lambda_1 = \lambda_1(\alpha, \beta, r_A) = \frac{\alpha - \beta}{\alpha} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{\beta/(\alpha - \beta)} r_A^{2\beta}, \quad \lambda_2 = \lambda_2(\alpha, \beta, r_A) = r_A^{-2(\alpha - \beta)}. \tag{2.5}$$

Ясно, что это положительные числа. Нетрудно убедиться, что с такими $\lambda_i, i = 1, 2$, выражение в скобках под знаком интеграла в функции Лагранжа задачи (2.2) неотрицательно на \mathbb{R}^d . Действительно, рассмотрим функцию $\varphi(\cdot)$ на \mathbb{R} , заданную формулой $\varphi(t) = -t^{2\beta} + \lambda_1 \chi(t) + \lambda_2 t^{2\alpha}$, где $\chi(\cdot)$ – характеристическая функция отрезка $[-r_A, r_A]$. Несложная проверка показывает, что $\varphi(\cdot)$ неотрицательна на \mathbb{R} , а отсюда уже легко вытекает, что функция $\xi \mapsto -|\xi|^{2\beta} + \lambda_1 \chi_A(\xi) + \lambda_2 |\xi|^{2\alpha}$ неотрицательна на \mathbb{R}^d и тем самым выполнено условие (а) предложения.

Предъявим последовательность функций $f_n(\cdot)$. Пусть точка ξ_0 и вектор λ – те же, что и в доказательстве утверждения 2) теоремы, а $\xi' = (\beta/\alpha)^{1/(2(\alpha-\beta))}\xi_0$. Поскольку $|\xi'| = (\beta/\alpha)^{1/(2(\alpha-\beta))}r_A < r_A$, то $\xi' \in \text{int } A$. Тогда $B(\xi', 1/(2n)) \subset A$ для достаточно больших n . Выше было показано, что шар $B(\xi_n, 1/(2n))$ не пересекается с A и тем самым для таких n шары $B(\xi_n, 1/(2n))$ и $B(\xi', 1/(2n))$ не пересекаются. Далее, так как $r_A < \hat{r}$, то нетрудно проверить, что

$$C_n = 1 - \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \left(\left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{1/(2(\alpha-\beta))} r_A + \frac{1}{2n} \right)^{2\alpha} > 0$$

для больших n . Для указанных n определим последовательность функций $f_n(\cdot)$ по правилу

$$Ff_n(\xi) = \begin{cases} (2\pi)^{d/2} V_n^{-1/2} \left(r_A + \frac{3}{2n} \right)^{-\alpha} \sqrt{C_n}, & \xi \in B\left(\xi_n, \frac{1}{2n}\right), \\ V_n^{-1/2} \delta, & \xi \in B\left(\xi', \frac{1}{2n}\right), \\ 0, & \xi \notin B\left(\xi_n, \frac{1}{2n}\right) \cup B\left(\xi', \frac{1}{2n}\right), \end{cases}$$

где, напомним, V_n – объем шара в \mathbb{R}^d радиуса $1/(2n)$.

Функции $f_n(\cdot)$ допустимы в задаче (2.2). Действительно, как и раньше, проверяется, что $f_n(\cdot) \in \mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$. Далее,

$$\int_A |Ff_n(\xi)|^2 d\xi = \int_{B(\xi', 1/(2n))} |Ff_n(\xi)|^2 d\xi = V_n^{-1} \delta^2 \int_{B(\xi', 1/(2n))} d\xi = \delta^2.$$

Выше было показано, что $|\xi| \leq r_A + 3/(2n)$, если $\xi \in B(\xi_n, 1/(2n))$, и так как понятно, что $|\xi| \leq (\beta/\alpha)^{1/(2(\alpha-\beta))}r_A + 1/(2n)$, если $\xi \in B(\xi', 1/(2n))$, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |Ff_n(\xi)|^2 d\xi &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{B(\xi_n, 1/(2n))} |\xi|^{2\alpha} |Ff_n(\xi)|^2 d\xi \\ &\quad + \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{B(\xi', 1/(2n))} |\xi|^{2\alpha} |Ff_n(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq V_n^{-1} \left(r_A + \frac{3}{2n} \right)^{-2\alpha} C_n \int_{B(\xi_n, 1/(2n))} |\xi|^{2\alpha} d\xi + \frac{V_n^{-1} \delta^2}{(2\pi)^d} \int_{B(\xi', 1/(2n))} |\xi|^{2\alpha} d\xi \\ &\leq C_n + \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \left(\left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{1/(2(\alpha-\beta))} r_A + \frac{1}{2n} \right)^{2\alpha} = 1, \end{aligned}$$

т.е. функции $f_n(\cdot)$ допустимы в задаче (2.2).

Покажем, что выполнено условие (b) предложения. Рассуждая так же, как и при доказательстве предыдущего неравенства, получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\beta} |Ff_n(\xi)|^2 d\xi &\geq V_n^{-1} \left(r_A + \frac{3}{2n} \right)^{-2\alpha} C_n \int_{B(\xi_n, 1/(2n))} |\xi|^{2\beta} d\xi \\ &\quad + \frac{V_n^{-1} \delta^2}{(2\pi)^d} \int_{B(\xi', 1/(2n))} |\xi|^{2\beta} d\xi \\ &\geq \left(r_A + \frac{3}{2n} \right)^{-2\alpha} C_n \left(r_A - \frac{3}{2n} \right)^{2\beta} + \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \left(\left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{1/(2(\alpha-\beta))} r_A + \frac{1}{2n} \right)^{2\beta}. \end{aligned}$$

Выражение справа, как нетрудно убедиться, стремится к $\lambda_1 \delta^2 / (2\pi)^d + \lambda_2$ при $n \rightarrow \infty$. Отсюда и из предыдущих двух оценок следует, что $\mathcal{L}(f_n(\cdot), \lambda_1, \lambda_2)$ не превосходит величины, стремящейся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Но в силу уже доказанного $\mathcal{L}(f_n(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) \geq 0$, и поэтому $\mathcal{L}(f_n(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Осталось доказать (с). Так как

$$\int_A |Ff_n(\xi)|^2 d\xi = \delta^2,$$

то первое условие в (с) выполняется очевидным образом. Проверим второе. Аналогично последней оценке получаем, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |Ff_n(\xi)|^2 d\xi \\ & \geq \left(r_A + \frac{3}{2n}\right)^{-2\alpha} C_n \left(r_A - \frac{3}{2n}\right)^{2\alpha} + \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \left(\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/(2(\alpha-\beta))} r_A + \frac{1}{2n}\right)^{2\alpha}. \end{aligned}$$

Выражение справа стремится к единице при $n \rightarrow \infty$, а величина слева по доказанному не превосходит единицы, откуда следует второе соотношение в (с). Итак, согласно предложению значение задачи (2.2) равно $\lambda_1 \delta^2 / (2\pi)^d + \lambda_2$. Подставляя сюда выражения для λ_1 и λ_2 и учитывая, что квадрат погрешности оптимального восстановления не меньше значения задачи (2.2), получаем указанную в теореме оценку снизу для этой погрешности при $r_A < \hat{r}$.

Пусть теперь $r_A \geq \hat{r}$. Найдем значение задачи (2.2) в этом случае. Снова воспользуемся доказанным выше предложением. Положим

$$\lambda_1 = \lambda_1(\alpha, \beta, \delta) = \frac{\alpha - \beta}{\alpha} \left(\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\right)^{-\beta/\alpha}, \quad \lambda_2 = \lambda_2(\alpha, \beta, \delta) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\right)^{(\alpha-\beta)/\alpha}.$$

Легко проверить, что эти значения получаются, если в прежние λ_1 и λ_2 (см. (2.5)) подставить $r_A = \hat{r}$.

Пусть точка $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^d$ такова, что

$$|\bar{\xi}| = 1, \quad \bar{\xi}_n = \left(\left(\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\right)^{-1/2\alpha} - \frac{1}{2n}\right) \bar{\xi}.$$

Тогда непосредственная проверка (с учетом выражения для \hat{r}) показывает, что для достаточно больших n справедливо включение $B(\bar{\xi}_n, 1/(2n)) \subset B(0, \hat{r})$. Для таких n рассмотрим последовательность функций $f_n(\cdot)$, определенных формулой

$$Ff_n(\xi) = \begin{cases} V_n^{-1/2} \delta, & \xi \in B\left(\bar{\xi}_n, \frac{1}{2n}\right), \\ 0, & \xi \notin B\left(\bar{\xi}_n, \frac{1}{2n}\right). \end{cases}$$

Так как

$$\begin{aligned} \int_A |Ff_n(\xi)|^2 d\xi &= \int_{B(\bar{\xi}_n, 1/(2n))} |Ff_n(\xi)|^2 d\xi = V_n^{-1} \delta^2 \int_{B(\bar{\xi}_n, 1/(2n))} d\xi = \delta^2, \\ \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |Ff_n(\xi)|^2 d\xi &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{B(\bar{\xi}_n, 1/(2n))} |\xi|^{2\alpha} |Ff_n(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \frac{V_n^{-1} \delta^2}{(2\pi)^d} \int_{B(\bar{\xi}_n, 1/(2n))} |\xi|^{2\alpha} d\xi \leq \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \left(\left(\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\right)^{-1/(2\alpha)}\right)^{2\alpha} = 1, \end{aligned}$$

то последовательность $f_n(\cdot)$ допустима в задаче (2.2). Далее, аналогично предыдущему (и в данном случае несколько проще) проверяется, что выполнены условия предложения и тем самым значение задачи (2.2) равно

$$\lambda_1 \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} + \lambda_2 = \left(\frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \right)^{(\alpha-\beta)/\alpha}.$$

Поскольку квадрат погрешности оптимального восстановления не меньше значения задачи (2.2), то доказана нужная оценка снизу для этой погрешности при $r_A \geq \hat{r}$. Легко проверить, что при $r_A = \hat{r}$ полученная ранее оценка переходит в данную.

2.5. Теперь докажем оценку сверху для погрешности оптимального восстановления и оптимальность указанных в теореме методов восстановления. Оптимальность метода \hat{m}_r из формулировки теоремы означает, что значение задачи

$$\begin{aligned} \|(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot) - \hat{m}_r(g(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \rightarrow \max, \quad \|Ff(\cdot) - g(\cdot)\|_{L_2(A)} \leq \delta, \\ \|(-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 1, \quad g(\cdot) \in L_2(A), \quad f(\cdot) \in \mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d) \end{aligned} \quad (2.6)$$

равно $E((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), A, \delta)$. Заметим, что во втором интеграле в определении метода \hat{m}_r множитель перед функцией $g(\cdot)$, как нетрудно убедиться, равен $\lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2|\xi|^{2\alpha})$, где λ_i , $i = 1, 2$, определены формулами (2.5). Тогда, переходя к образам Фурье в задаче (2.6), получим по теореме Планшереля, что квадрат ее значения равен значению такой задачи:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| \leq r} |\xi|^{2\beta} |Ff(\xi) - g(\xi)|^2 d\xi \\ + \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{r \leq |\xi| \leq r_0} |\xi|^{2\beta} \left| Ff(\xi) - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2|\xi|^{2\alpha}} g(\xi) \right|^2 d\xi \\ + \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| \geq r_0} |\xi|^{2\beta} |Ff(\xi)|^2 d\xi \rightarrow \max, \\ \int_A |Ff(\xi) - g(\xi)|^2 d\xi \leq \delta^2, \quad \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |Ff(\xi)|^2 d\xi \leq 1. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Первый интеграл в максимизируемом функционале, учитывая, что $|\xi| \leq r$ и оценку для r из формулировки теоремы, оценивается величиной

$$\frac{\lambda_1}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| \leq r} |Ff(\xi) - g(\xi)|^2 d\xi.$$

Оценим теперь подынтегральное выражение во втором интеграле, применяя неравенство Коши–Буняковского и то, что многочлен $\xi \mapsto -|\xi|^{2\beta} + \lambda_1 + \lambda_2|\xi|^{2\alpha}$, как уже отмечалось выше, неотрицателен на \mathbb{R}^d

$$\begin{aligned} |\xi|^{2\beta} \left| Ff(\xi) - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2|\xi|^{2\alpha}} g(\xi) \right|^2 \\ = |\xi|^{2\beta} \left| \frac{\sqrt{\lambda_1}}{\lambda_1 + \lambda_2|\xi|^{2\alpha}} \sqrt{\lambda_1} (Ff(\xi) - g(\xi)) + \frac{\sqrt{\lambda_2}|\xi|^\alpha}{\lambda_1 + \lambda_2|\xi|^{2\alpha}} \sqrt{\lambda_2} |\xi|^\alpha Ff(\xi) \right|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq |\xi|^{2\beta} \left(\frac{\lambda_1}{(\lambda_1 + \lambda_2 |\xi|^{2\alpha})^2} + \frac{\lambda_2 |\xi|^{2\alpha}}{(\lambda_1 + \lambda_2 |\xi|^{2\alpha})^2} \right) \\ &\quad \times (\lambda_1 |Ff(\xi) - g(\xi)|^2 + \lambda_2 |\xi|^{2\alpha} |Ff(\xi)|^2) \\ &= \frac{|\xi|^{2\beta}}{\lambda_1 + \lambda_2 |\xi|^{2\alpha}} (\lambda_1 |Ff(\xi) - g(\xi)|^2 + \lambda_2 |\xi|^{2\alpha} |Ff(\xi)|^2) \\ &\leq \lambda_1 |Ff(\xi) - g(\xi)|^2 + \lambda_2 |\xi|^{2\alpha} |Ff(\xi)|^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что второй интеграл в максимизируемом функционале оценивается величиной

$$\frac{\lambda_1}{(2\pi)^d} \int_{r \leq |\xi| \leq r_0} |Ff(\xi) - g(\xi)|^2 d\xi + \frac{\lambda_2}{(2\pi)^d} \int_{r \leq |\xi| \leq r_0} |\xi|^{2\alpha} |Ff(\xi)|^2 d\xi.$$

Наконец, для третьего интеграла справедлива оценка

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| \geq r_0} |\xi|^{2\beta} |Ff(\xi)|^2 d\xi &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| \geq r_0} |\xi|^{2(\beta-\alpha)} |\xi|^{2\alpha} |Ff(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \frac{\lambda_2}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| \geq r_0} |\xi|^{2\alpha} |Ff(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Складывая полученные оценки, приходим к тому, что значение задачи (2.7) не превосходит величины $\lambda_1 \delta^2 / (2\pi)^d + \lambda_2$, и значит,

$$E((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), A, \delta) \leq \sqrt{\frac{\lambda_1 \delta^2}{(2\pi)^d} + \lambda_2}.$$

Но ранее было доказано противоположное неравенство, следовательно,

$$E((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), A, \delta) = \sqrt{\frac{\lambda_1 \delta^2}{(2\pi)^d} + \lambda_2}$$

и \hat{m}_r – оптимальный метод восстановления. Теорема доказана.

Список литературы

- [1] С. А. Смоляк, *Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, МГУ, М., 1965.
- [2] С. А. Micchelli, T. J. Rivlin, "A survey of optimal recovery", *Optimal estimation in approximation theory* (Freudenstadt, 1976), Plenum, New York, 1977, 1–54.
- [3] А. А. Melkman, С. А. Micchelli, "Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data", *SIAM J. Numer. Anal.*, **16**:1 (1979), 87–105.
- [4] Дж. Трауб, Х. Вожняковский, *Общая теория оптимальных алгоритмов*, Мир, М., 1983; пер. с англ.: J. F. Traub, H. Woźniakowski, *A general theory of optimal algorithms*, Academic Press, New York–London, 1980.
- [5] С. А. Micchelli, T. J. Rivlin, "Lectures on optimal recovery", *Numerical analysis* (Lancaster, 1984), Lecture Notes in Math., **1129**, Springer-Verlag, Berlin, 1985, 21–93.
- [6] В. В. Арестов, "Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи", *Сборник трудов Всесоюзной школы по теории функций* (Душанбе, 1986), Тр. МИАН СССР, **189**, Наука, М., 1989, 3–20; англ. пер.: V. V. Arestov, "Optimal recovery of operators, and related problems", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **189** (1990), 1–20.

- [7] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным”, *Матем. заметки*, **50**:6 (1991), 85–93; англ. пер.: G. G. Magaril-Ilyayev, K. Yu. Osipenko, “Optimal recovery of functionals based on inaccurate data”, *Math. Notes*, **50**:6 (1991), 1274–1279.
- [8] Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, “О неравенствах для производных колмогоровского типа”, *Матем. сб.*, **188**:12 (1997), 73–106; англ. пер.: G. G. Magaril-Ilyayev, V. M. Tikhomirov, “Kolmogorov-type inequalities for derivatives”, *Sb. Math.*, **188**:12 (1997), 1799–1832.
- [9] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью”, *Матем. сб.*, **193**:3 (2002), 79–100; англ. пер.: G. G. Magaril-Ilyayev, K. Yu. Osipenko, “Optimal recovery of functions and their derivatives from Fourier coefficients prescribed with an error”, *Sb. Math.*, **193**:3 (2002), 387–407.
- [10] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных”, *Функц. анализ и его прил.*, **37**:3 (2003), 51–64; англ. пер.: G. G. Magaril-Ilyayev, K. Yu. Osipenko, “Optimal recovery of functions and their derivatives from inaccurate information about the spectrum and inequalities for derivatives”, *Funct. Anal. Appl.*, **37**:3 (2003), 203–214.
- [11] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру”, *Функц. анализ и его прил.*, **44**:3 (2010), 76–79; англ. пер.: G. G. Magaril-Ilyayev, K. Yu. Osipenko, “On optimal harmonic synthesis from inaccurate spectral data”, *Funct. Anal. Appl.*, **44**:3 (2010), 223–225.
- [12] Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, *Выпуклый анализ и его приложения*, УРСС, М., 2000; англ. пер.: G. G. Magaril-Ilyayev, V. M. Tikhomirov, *Convex analysis: theory and applications*, Transl. Math. Monogr., **222**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

Г. Г. Магарил-Ильяев (G. G. Magaril-Ilyayev)

Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича РАН, г. Москва
E-mail: magaril@mirea.ru

Поступила в редакцию
22.06.2011

Е. О. Сивкова (E. O. Sivkova)

Московский государственный технический университет
радиотехники, электроники и автоматики
E-mail: sivkova_elena@inbox.ru