

ПРИНЦИП ЛАГРАНЖА В ТЕОРИИ ЭКСТРЕМУМА И ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ

Г. Г. Магарил-Ильяев

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Южный математический институт Владикавказского на-
учного центра РАН*
magaril@mirea.ru

Введение

В середине XVIII века Лагранж сформулировал необходимые условия экстремума в задачах с ограничениями, задаваемыми системой равенств. Они заключаются в том, что надо составить функцию (функцию Лагранжа), которая есть сумма минимизируемого (или максимизируемого) функционала и функций, задающих равенства с неопределенными множителями, и тогда решение исходной задачи удовлетворяет необходимым условиям экстремума (т. е. минимума или максимума) в более простой задаче — в задаче на экстремум функции Лагранжа. Эта идея оказалась универсальной. Если рекомендации Лагранжа понимать чуть более расширительно, то легко заметить, что необходимые условия экстремума практически во всех задачах согласованы с этим принципом. При решении многих экстремальных задач достаточно владеть только принципом Лагранжа — точные формулировки не нужны (их может и не быть для рассматриваемой задачи). Данный подход здесь демонстрируется на типичном примере, связанным с одной задачей оптимального восстановления.

Постановка задачи и формулировка результата

Пусть $W_2^1(\mathbb{R}_+)$ — соболевское пространство функций $x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}_+)$ ($\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$), абсолютно непрерывных на каждом отрезке из \mathbb{R}_+ и $\dot{x}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}_+)$. Соболевский класс — это множество $W_2^1(\mathbb{R}_+) = \{x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R}_+) \mid \|\dot{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq 1\}$. Мы хотим восстановить значения линейного функционала $l: W_2^1(\mathbb{R}_+) \rightarrow \mathbb{R}$, $lx(\cdot) = x(0)$ (т. е. значение функции в нуле) на классе $W_2^1(\mathbb{R}_+)$ по следующей информации: о каждой функции $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R}_+)$ нам известна функция

$y(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}_+)$ такая, что $\|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq \delta$, где $\delta > 0$. Под задачей оптимального восстановления функционала l на классе $W_2^1(\mathbb{R}_+)$ по данной информации понимается нахождение величины

$$E(l, W_2^1(\mathbb{R}_+), \delta) = \inf_m \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R}_+), y(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}_+) \\ \|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq \delta}} |x(0) - m(y(\cdot))|$$

(где нижняя грань берется по всем отображениям $m: L_2(\mathbb{R}_+) \rightarrow \mathbb{R}$ называемая *погрешностью оптимального восстановления*, и отображений \hat{m} , на которых эта нижняя грань достигается, называемых *оптимальными методами восстановления*).

Наша цель — доказать следующий результат.

Теорема 1

$$E(l, W_2^1(\mathbb{R}_+), \delta) = \sqrt{2\delta}$$

и линейный функционал $\hat{m}: L_2(\mathbb{R}_+) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\hat{m}(y(\cdot)) = \frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-t/\delta} y(t) dt$$

оптимальный метод восстановления.

Доказательство

Покажем прежде всего, что величина $E(l, W_2^1(\mathbb{R}_+), \delta)$ не меньше значения задачи

$$x(0) \rightarrow \max, \quad \int_{\mathbb{R}_+} x^2(t) dt \leq \delta^2, \quad \int_{\mathbb{R}_+} \dot{x}^2(t) dt \leq 1. \quad (1)$$

Действительно, пусть $x(\cdot)$ — допустимая функция в (1) (т. е. $x(\cdot)$ удовлетворяет ограничениям задачи), тогда, очевидно, функция $-x(\cdot)$ также допустима и мы имеем для любого $m: L_2(\mathbb{R}_+) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 2|x(0)| &\leq |x(0) - m(0)| + |-x(0) - m(0)| \leq \\ &2 \sup_{\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq \delta, \|\dot{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq 1} |x(0) - m(0)| \leq \\ &2 \sup_{\substack{\|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq \delta \\ y(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}_+), \|\dot{y}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq 1}} |x(0) - m(y(\cdot))|. \end{aligned}$$

Переходя слева к верхней грани по всем допустимым функциям в (1), а справа к нижней грани по всем отображениям m , получаем требуемое (учитывая еще, что в силу симметричности ограничений, вместо $|x(0)|$ можно писать $x(0)$).

Найдем теперь решение задачи (1), опираясь на принцип Лагранжа. Сначала рассуждаем эвристически. Сопоставим (1) следующую функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(x(\cdot), \lambda) = -x(0) + \lambda_1 \int_{\mathbb{R}_+} x^2(t) dt + \lambda_2 \int_{\mathbb{R}_+} \dot{x}^2(t) dt.$$

Согласно принципу Лагранжа, если функция $\hat{x}(\cdot)$ — решение задачи (1), то $\hat{x}(\cdot)$ должна удовлетворять необходимым условиям минимума в задаче минимизации функции Лагранжа:

$$\mathcal{L}(x(\cdot), \lambda) \rightarrow \min.$$

Эти условия, очевидно, состоят в том, что, что производная функции Лагранжа в точке $\hat{x}(\cdot)$ равняется нулю, т. е. (при разумных предположениях) должно выполняться тождество

$$-x(0) + 2\lambda_1 \int_{\mathbb{R}_+} \hat{x}(t)x(t) dt + 2\lambda_2 \int_{\mathbb{R}_+} \dot{\hat{x}}(t)\dot{x}(t) dt = 0, \quad \forall x(\cdot). \quad (2)$$

Если во втором интеграле проинтегрировать по частям (считая, что функции на бесконечности стремятся к нулю), то тождество перепишется так

$$-(2\lambda_2 \dot{\hat{x}}(0) + 1)x(0) + \int_{\mathbb{R}_+} (2\lambda_1 \hat{x}(t) - 2\lambda_2 \ddot{\hat{x}}(t))x(t) dt = 0, \quad \forall x(\cdot).$$

Так как это верно для любого $x(\cdot)$, то $\hat{x}(\cdot)$ есть решение такой задачи

$$\lambda_2 \ddot{x} - \lambda_1 x = 0, \quad 2\lambda_2 \dot{x}(0) = -1. \quad (3)$$

Общее решение дифференциального уравнения (считая, что $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2$) имеет вид

$$x(t) = C_1 e^{-\sqrt{\lambda_1/\lambda_2} t} + C_2 e^{\sqrt{\lambda_1/\lambda_2} t}.$$

Но $\hat{x}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}_+)$ и поэтому $C_2 = 0$.

Теперь потребуем, чтобы функция $\hat{x}(t) = C_1 e^{-\sqrt{\lambda_1/\lambda_2} t}$ была допустима в задаче (1), а именно, потребуем, чтобы

$$\int_{\mathbb{R}_+} \hat{x}^2(t) dt = \delta^2, \quad \int_{\mathbb{R}_+} \hat{\dot{x}}^2(t) dt = 1.$$

Эти соотношения вместе со вторым условием в (3) приводят к тому, что

$$\hat{x}(t) = \sqrt{2\delta} e^{-t/\delta}, \quad \lambda_1 = \frac{1}{2\delta\sqrt{2\delta}}, \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{\delta}}{2\sqrt{2}}.$$

Подставляя все это в (2), приходим к равенству

$$x(0) = \frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-t/\delta} x(t) dt - \int_{\mathbb{R}_+} e^{-t/\delta} \dot{x}(t) dt. \quad (4)$$

Теперь начинаем рассуждать точно. Легко проверить, что (4) имеет место для всех функций из $\mathcal{W}_2^1(\mathbb{R}_+)$. Действительно, ясно, что $\hat{x}(\cdot) \in \mathcal{W}_2^1(\mathbb{R}_+)$ и интегрируя во втором интеграле по частям с учетом того, что функции из $\mathcal{W}_2^1(\mathbb{R}_+)$ ограничены,¹ доказываем справедливость (4).

Пусть $x(\cdot)$ — допустимая функция в задаче (1). Тогда из (4) по неравенству Коши-Буняковского будем иметь

$$\begin{aligned} x(0) &\leq \frac{1}{\delta} \left(\int_{\mathbb{R}_+} e^{-2t/\delta} dt \right)^{1/2} \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} + \\ &\quad \left(\int_{\mathbb{R}_+} e^{-2t/\delta} dt \right)^{1/2} \|\dot{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{\delta}{2}} \delta + \sqrt{\frac{\delta}{2}} = \sqrt{2\delta}. \end{aligned} \quad (5)$$

Но $\hat{x}(0) = \sqrt{2\delta}$ и следовательно, $\hat{x}(\cdot)$ — решение задачи (1). Отсюда и из доказанной оценки снизу вытекает, что

$$E(l, W_2^1(\mathbb{R}_+), \delta) \geq \sqrt{2\delta}. \quad (6)$$

Покажем теперь, что линейный функционал на $L_2(\mathbb{R}_+)$

$$\hat{m}: y(\cdot) \rightarrow \frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-t/\delta} y(t) dt$$

¹Так как $\int_0^t x(\tau)\dot{x}(\tau) d\tau = x^2(\tau)|_0^t - \int_0^t x(\tau)\dot{x}(\tau) d\tau$, то $2 \int_0^t x(\tau)\dot{x}(\tau) d\tau = x^2(t) - x^2(0)$. Отсюда, по неравенству Коши-Буняковского $x^2(t) \leq x^2(0) + 2 \left(\int_{\mathbb{R}_+} x^2(\tau) d\tau \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}_+} \dot{x}^2(\tau) d\tau \right)^{1/2}$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$.

есть оптимальный метод восстановления. Действительно, пусть $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R}_+)$ и функция $y(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}_+)$ такова, что $\|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq \delta$. Тогда, используя (4), а затем делая такие же оценки как в (5), будем иметь

$$\begin{aligned} |x(0) - \widehat{m}(y(\cdot))| &= \left| x(0) - \frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-2t/\delta} y(t) dt \right| = \\ &= \left| \frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-2t/\delta} (x(t) - y(t)) dt - \int_{\mathbb{R}_+} e^{-2t/\delta} \dot{x}(t) dt \right| \leq \\ &= \frac{1}{\delta} \left(\int_{\mathbb{R}_+} e^{-2t/\delta} dt \right)^{1/2} \|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} + \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}_+} e^{-2t/\delta} dt \right)^{1/2} \|\dot{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq \sqrt{2\delta}. \end{aligned}$$

Так как это верно для всех указанных $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$, то отсюда и (6) следует, что

$$\sup_{\substack{\|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq \delta \\ y(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}_+), \|\dot{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq 1}} |x(0) - \widehat{m}(y(\cdot))| \leq \sqrt{2\delta} \leq E(l, W_2^1(\mathbb{R}_+), \delta).$$

Но левая часть этого неравенства, очевидно, не меньше $E(l, W_2^1(\mathbb{R}_+), \delta)$, и мы получаем все утверждения теоремы.