

К. Ю. Осипенко

## Неравенства типа Карлсона со многими весами и оптимальное восстановление

В статье находится точная константа в неравенстве

$$\|\psi(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T,\mu)} \leq C \max_{1 \leq j \leq l} \|\varphi_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)}^\gamma \max_{l+1 \leq j \leq n} \|\varphi_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T,\mu)}^{1-\gamma},$$

где  $T$  – конус в  $\mathbb{R}^d$ , а веса  $\psi(\cdot)$  и  $\varphi_j(\cdot)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , – измеримые однородные функции, удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям симметричности. Точное неравенство является следствием более общей задачи об оптимальном восстановлении в весовых  $L_q(T, \mu)$ -пространствах по неточно заданным функциям, решение которой приводится. Полученные результаты применяются для оптимального восстановления степеней обобщенного оператора Лапласа и соответствующих точных неравенств.

Библиография: 11 названий.

**Ключевые слова:** точные неравенства, дифференциальные операторы, неравенства типа Карлсона.

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm10314>

### Введение

Пусть  $T$  – некоторое непустое множество,  $\Sigma$  –  $\sigma$ -алгебра подмножеств  $T$  и  $\mu$  – неотрицательная  $\sigma$ -аддитивная мера на  $\Sigma$ . Через  $L_p(T, \mu)$  обозначим совокупность всех  $\Sigma$ -измеримых функций со значениями в  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ , для которых

$$\|x(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)} = \begin{cases} \left( \int_T |x(t)|^p d\mu \right)^{1/p} < \infty, & 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname{vraisup}_{t \in T} |x(t)| < \infty, & p = \infty. \end{cases}$$

При  $T \subset \mathbb{R}^d$  и  $d\mu(t) = dt$  мы используем обозначение  $L_q(T)$ .

Хорошо известное неравенство Карлсона (см. [1])

$$\|x(t)\|_{L_1(\mathbb{R}_+)} \leq \sqrt{\pi} \|x(t)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^{1/2} \|tx(t)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^{1/2}, \quad \mathbb{R}_+ = [0, +\infty),$$

обобщалось многими авторами (см., например, [2]–[9]). Оказалось, что задача нахождения точной константы в неравенствах типа Карлсона тесно связана с некоторой задачей оптимального восстановления по неточно заданной информации. В § 1 мы формулируем соответствующую задачу и даем ее решение. В § 2 этот общий результат применяется для однородных весовых функций,

обладающих некоторыми дополнительными свойствами. В качестве следствия получается точное неравенство типа Карлсона со многими весами, обобщающее результат, полученный в работе [9].

В § 3 рассматривается случай однородных весов в  $\mathbb{R}^d$ . В этом случае удается записать точную константу в неравенстве типа Карлсона в терминах бета-функции Эйлера. В частности, для весов конкретного вида приводится точное неравенство, обобщающее хорошо известное неравенство, полученное В. В. Левинским в [2].

В § 4 изучаются задачи оптимального восстановления дифференциальных операторов по неточно заданным преобразованиям Фурье других дифференциальных операторов. В частности, получены соответствующие результаты для степеней обобщенного оператора Лапласа. В качестве следствия получены точные неравенства типа Карлсона для обобщенных степеней Лапласа, дающие оценку норм обобщенных степеней через нормы производных.

## § 1. Общие результаты

Положим

$$\begin{aligned} W &= \{x(\cdot) : \varphi_j(\cdot)x(\cdot) \in L_p(T, \mu), j = 1, \dots, l, \\ &\quad \varphi_j(\cdot)x(\cdot) \in L_r(T, \mu), j = l + 1, \dots, n\}, \\ W &= \{x(\cdot) \in W : \|\varphi_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T, \mu)} \leq \delta_j, j = l + 1, \dots, n\}, \end{aligned}$$

где  $1 \leq p, r \leq \infty$ ,  $\delta_j > 0$ ,  $j = l + 1, \dots, n$ , а  $\varphi_j(\cdot)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , – измеримые функции на  $T$ .

Рассмотрим задачу восстановления оператора  $\Lambda : W \rightarrow L_q(T, \mu)$ ,  $1 \leq q \leq \infty$ , задаваемого равенством  $\Lambda x(\cdot) = \psi(\cdot)x(\cdot)$ , где  $\psi(\cdot)$  – некоторая измеримая функция на  $T$ , на классе  $W$  по функциям  $\varphi_j(\cdot)x(\cdot) \in W$ ,  $j = 1, \dots, l$ , известным с погрешностью (будем считать, что функции  $\varphi_j(\cdot)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , и  $\psi(\cdot)$  таковы, что оператор  $\Lambda$  отображает пространство  $W$  в  $L_q(T, \mu)$ ).

Предполагается, что для каждой функции  $x(\cdot) \in W$  известны функции  $y_j(\cdot) \in L_p(T, \mu)$ ,  $j = 1, \dots, l$ , такие, что

$$\|\varphi_j(\cdot)x(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_p(T, \mu)} \leq \delta_j, \quad \delta_j > 0, \quad j = 1, \dots, l.$$

Требуется по функциям  $y_j(\cdot)$ ,  $j = 1, \dots, l$ , восстановить функцию  $\Lambda x(\cdot)$ . В качестве методов восстановления рассматриваются всевозможные отображения  $m : (L_p(T, \mu))^l \rightarrow L_q(T, \mu)$ . Погрешностью метода  $m$  называется величина

$$e(p, q, r, m) = \sup_{\substack{x(\cdot) \in W, y(\cdot) \in (L_p(T, \mu))^l \\ \|\varphi_j(\cdot)x(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_p(T, \mu)} \leq \delta_j, j=1, \dots, l}} \|\Lambda x(\cdot) - m(y(\cdot))(\cdot)\|_{L_q(T, \mu)},$$

$y(\cdot) = (y_1(\cdot), \dots, y_l(\cdot))$ . Величина

$$E(p, q, r) = \inf_{m : (L_p(T, \mu))^l \rightarrow L_q(T, \mu)} e(p, q, r, m) \quad (1.1)$$

называется *погрешностью оптимального восстановления*, а метод, на котором достигается нижняя грань, называется *оптимальным*.

Имеет место неравенство

$$E(p, q, r) \geq \sup_{\substack{x(\cdot) \in W \\ \|\varphi_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T, \mu)} \leq \delta_j, j=1, \dots, l}} \|\Lambda x(\cdot)\|_{L_q(T, \mu)}. \quad (1.2)$$

Действительно, пусть  $x(\cdot) \in W$ ,  $\|\varphi_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T, \mu)} \leq \delta_j$ ,  $j = 1, \dots, l$ , а  $m: (L_p(T, \mu))^l \rightarrow L_q(T, \mu)$  – произвольный метод восстановления. Тогда в силу того, что  $x(\cdot) \in W$  и  $-x(\cdot) \in W$ , имеем

$$\begin{aligned} 2\|\Lambda x(\cdot)\|_{L_q(T, \mu)} &= \|\Lambda x(\cdot) - m(0)(\cdot) - (\Lambda(-x(\cdot)) - m(0))(\cdot)\|_{L_q(T, \mu)} \\ &\leq \|\Lambda x(\cdot) - m(0)(\cdot)\|_{L_q(T, \mu)} + \|\Lambda(-x(\cdot)) - m(0)(\cdot)\|_{L_q(T, \mu)} \\ &\leq 2e(p, q, r, m). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для любого метода  $m$

$$e(p, q, r, m) \geq \sup_{\substack{x(\cdot) \in W \\ \|\varphi_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T, \mu)} \leq \delta_j, j=1, \dots, l}} \|\Lambda x(\cdot)\|_{L_q(T, \mu)}.$$

Переходя к нижней грани в левой части по всем методам, получаем нужное неравенство.

Положим

$$\sigma_{p,l}(t) = \sum_{j=1}^l \lambda_j |\varphi_j(t)|^p, \quad \Sigma_{r,n}(t) = \sum_{j=l+1}^n \lambda_j |\varphi_j(t)|^r.$$

**ТЕОРЕМА 1.** Пусть  $1 \leq q < p, r < \infty$ ,  $\lambda_j \geq 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $\sigma_{p,l}(t) + \Sigma_{r,n}(t) \neq 0$  для почти всех  $t \in T$ ,  $|\varphi_j(t)| > 0$ ,  $j = 1, \dots, l$ , для почти всех  $t \in T$ ,  $\hat{x}(t) \geq 0$  – решение уравнения

$$-q|\psi(t)|^q + p\sigma_{p,l}(t)x^{p-q}(t) + r\Sigma_{r,n}(t)x^{r-q}(t) = 0, \quad (1.3)$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$  таковы, что  $\hat{x}(\cdot) \in W$ ,

$$\begin{aligned} \|\varphi_j(\cdot)\hat{x}(\cdot)\|_{L_p(T, \mu)} \leq \delta_j, \quad \lambda_j (\|\varphi_j(\cdot)\hat{x}(\cdot)\|_{L_p(T, \mu)}^p - \delta_j^p) &= 0, \quad j = 1, \dots, l, \\ \lambda_j (\|\varphi_j(\cdot)\hat{x}(\cdot)\|_{L_r(T, \mu)}^r - \delta_j^r) &= 0, \quad j = l + 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Тогда

$$\begin{aligned} E(p, q, r) &= \sup_{\substack{x(\cdot) \in W \\ \|\varphi_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T, \mu)} \leq \delta_j, j=1, \dots, l}} \|\Lambda x(\cdot)\|_{L_q(T, \mu)} \\ &= \left( \frac{p}{q} \sum_{j=1}^l \lambda_j \delta_j^p + \frac{r}{q} \sum_{j=l+1}^n \lambda_j \delta_j^r \right)^{1/q}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

а метод

$$\hat{m}(y(\cdot))(t) = \psi(t) \sum_{j=1}^l \beta_j(t)y_j(t), \quad (1.6)$$

где

$$\beta_j(t) = \begin{cases} \frac{p}{q} \lambda_j \frac{|\varphi_j(t)|^p}{\varphi_j(t)|\psi(t)|^q} \widehat{x}^{p-q}(t), & \psi(t) \neq 0, \\ 0, & \psi(t) = 0, \end{cases} \quad j = 1, \dots, l,$$

является оптимальным.

Для оценки снизу погрешности оптимального восстановления, вытекающей из неравенства (1.2), будет решаться экстремальная задача, возникающая в правой части этого неравенства. Приведем один простой результат (близкий к достаточным условиям в теореме Куна–Таккера), используемый для решения соответствующих экстремальных задач.

Пусть  $f_j: A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , – функции, определенные на некотором множестве  $A$ . Рассмотрим экстремальную задачу

$$f_0(x) \rightarrow \max, \quad f_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad x \in A, \quad (1.7)$$

и ее функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = -f_0(x) + \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j(x), \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

ЛЕММА 1 (см. [10]). Пусть существуют  $\widehat{\lambda}_j \geq 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ , и допустимый в задаче (1.7) элемент  $\widehat{x} \in A$ , для которых

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \min_{x \in A} \mathcal{L}(x, \widehat{\lambda}) = \mathcal{L}(\widehat{x}, \widehat{\lambda}), \quad \widehat{\lambda} = (\widehat{\lambda}_1, \dots, \widehat{\lambda}_n), \\ \text{(b)} \quad & \sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j f_j(\widehat{x}) = 0. \end{aligned}$$

Тогда  $\widehat{x}$  – экстремальный элемент в задаче (1.7).

Нам потребуется также следующая лемма, являющаяся обобщением леммы 3 из работы [7].

Пусть  $u = (u_0, u_1, \dots, u_l)$ ,  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_l)$ ,  $a = (a_0, a_1, \dots, a_l)$ . Положим

$$F(u, \alpha) = -\left(\sum_{j=0}^l \alpha_j u_j\right)^q + \sum_{j=1}^l a_j u_j^p + a_0 u_0^r, \quad u, \alpha, a \in \mathbb{R}_+^{l+1}, \quad \sum_{j=0}^l \alpha_j = 1,$$

где  $1 \leq p, q, r < \infty$ .

ЛЕММА 2. Пусть  $1 \leq q < p, r < \infty$ . Для любых  $a \in \mathbb{R}_+^{l+1}$ ,  $a \neq 0$ , существует единственное решение  $\widehat{v} > 0$  уравнения

$$-q + pv^{p-q} \sum_{j=1}^l a_j + ra_0 v^{r-q} = 0. \quad (1.8)$$

Кроме того, при  $\alpha_j = q^{-1} p a_j \widehat{v}^{p-q}$ ,  $j = 1, \dots, l$ ,  $\alpha_0 = q^{-1} r a_0 \widehat{v}^{r-q}$  для всех  $u \in \mathbb{R}_+^{l+1}$

$$F(\bar{u}, \alpha) \leq F(u, \alpha), \quad \bar{u} = (\widehat{v}, \dots, \widehat{v}). \quad (1.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование единственного решения уравнения (1.8) вытекает из того, что непрерывная функция

$$f(v) = pv^{p-q} \sum_{j=1}^l a_j + ra_0v^{r-q}$$

на  $\mathbb{R}_+$  монотонно возрастает от 0 до  $+\infty$ .

Докажем неравенство (1.9). Если  $a_j = 0$  при некотором  $j$ ,  $0 \leq j \leq l$ , то надо доказать то же утверждение, в котором число  $l$  заменяется на  $l - 1$ . При  $l = 1$  соответствующее утверждение доказано в работе [7]. Будем считать, что  $a_j > 0$ ,  $j = 0, \dots, l$ . Пусть

$$C > \max\{a_0^{-1/(r-q)}, a_1^{-1/(p-q)}, \dots, a_l^{-1/(p-q)}\}.$$

Если

$$U = \max_{0 \leq j \leq l} u_j = u_0,$$

то

$$F(u, \alpha) \geq -u_0^q + a_0u_0^r > 0$$

при  $U \geq C$ . Если  $U = u_j$ ,  $1 \leq j \leq l$ , то

$$F(u, \alpha) \geq -u_j^q + a_ju_j^p > 0$$

при  $U \geq C$ . В силу того, что  $F(0, \alpha) = 0$ , функция  $F(u, \alpha)$  принимает минимальное значение в кубе  $0 \leq U < C$ . Тем самым существует точка  $\hat{u} = (\hat{u}_0, \dots, \hat{u}_l)$ ,  $\hat{u}_j \in [0, C)$ ,  $j = 0, \dots, l$ , для которой

$$\inf_{u \in \mathbb{R}_+^{l+1}} F(u, \alpha) = F(\hat{u}, \alpha).$$

Имеем

$$F_{u_0}(u, \alpha) = -q \left( \sum_{j=0}^l \alpha_j u_j \right)^{q-1} \alpha_0 + a_0 r u_0^{r-1} = r a_0 \left( - \left( \sum_{j=0}^l \alpha_j u_j \right)^{q-1} \hat{v}^{r-q} + u_0^{r-1} \right). \tag{1.10}$$

Так как  $F_{u_0}(u, \alpha) < 0$  при достаточно малых  $u_0$ , то  $0 < \hat{u}_0 < C$ . Такие же неравенства верны для остальных координат  $\hat{u}$ . Действительно,

$$F_{u_j}(u, \alpha) = -q \left( \sum_{j=0}^l \alpha_j u_j \right)^{q-1} \alpha_j + a_j p u_j^{p-1} = p a_j \left( - \left( \sum_{j=0}^l \alpha_j u_j \right)^{q-1} \hat{v}^{p-q} + u_j^{p-1} \right). \tag{1.11}$$

Следовательно,  $F_{u_j}(u, \alpha) < 0$  при достаточно малых  $u_j$ . Таким образом, в точке  $\hat{u}$  выполнены равенства

$$F_{u_j}(\hat{u}, \alpha) = 0, \quad j = 0, \dots, l.$$

Учитывая (1.10) и (1.11), получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned} -\left(\sum_{j=0}^l \alpha_j \widehat{u}_j\right)^{q-1} \widehat{v}^{r-q} + \widehat{u}_0^{r-1} &= 0, \\ -\left(\sum_{j=0}^l \alpha_j \widehat{u}_j\right)^{q-1} \widehat{v}^{p-q} + \widehat{u}_j^{p-1} &= 0, \quad j = 1, \dots, l. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{\widehat{u}_j^{p-1}}{\widehat{u}_0^{r-1}} = \widehat{v}^{p-r}, \quad j = 1, \dots, l.$$

Тем самым

$$\widehat{u}_j = \widehat{v}^{(p-r)/(p-1)} \widehat{u}_0^{(r-1)/(p-1)}, \quad j = 1, \dots, l. \quad (1.12)$$

Положим

$$\alpha = \sum_{j=1}^l \alpha_j.$$

Тогда  $\alpha_0 = 1 - \alpha$ . В силу того, что  $\widehat{u}_1 = \dots = \widehat{u}_l$ , имеем

$$((1 - \alpha)\widehat{u}_0 + \alpha\widehat{u}_1)^{q-1} \widehat{v}^{r-q} = \widehat{u}_0^{r-1}.$$

Пусть  $p \geq r$ . Подставляя  $\widehat{u}_1$  из равенства (1.12), получаем равенство

$$(1 - \alpha + \alpha t^{(r-p)/(p-1)})^{q-1} = t^{r-q},$$

где  $t = \widehat{u}_0/\widehat{v}$ . Нетрудно убедиться, что это уравнение имеет единственное решение  $t = 1$ . Если  $p < r$ , то воспользуемся равенством

$$((1 - \alpha)\widehat{u}_0 + \alpha\widehat{u}_1)^{q-1} \widehat{v}^{p-q} = \widehat{u}_1^{p-1}.$$

Выразив  $\widehat{u}_0$  через  $\widehat{u}_1$  с помощью равенства (1.12), будем иметь

$$((1 - \alpha)s^{(p-r)/(r-1)} + \alpha)^{q-1} = s^{p-q},$$

где  $s = \widehat{u}_1/\widehat{v}$ . Это уравнение также имеет единственное решение  $s = 1$ .

Таким образом, доказано, что  $\widehat{u} = (\widehat{v}, \dots, \widehat{v})$  и для всех  $u \in \mathbb{R}_+^{l+1}$  выполнено неравенство (1.9).

Лемма доказана.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. 1. Оценка снизу.** Экстремальная задача в правой части неравенства (1.2) (для удобства мы переходим к  $q$ -й степени) имеет вид

$$\begin{aligned} \int_T |\psi(t)x(t)|^q d\mu(t) \rightarrow \max, \quad \int_T |\varphi_j(t)x(t)|^p d\mu(t) \leq \delta_j^p, \quad j = 1, \dots, l, \\ \int_T |\varphi_j(t)x(t)|^r d\mu(t) \leq \delta_j^r, \quad j = l+1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Если элемент  $t \in T$  такой, что  $\psi(t) = 0$ , то  $\hat{x}(t) = 0$ . Если  $\psi(t) \neq 0$ , то из леммы 2 вытекает, что решение уравнения (1.3) существует и единственно. В силу условий (1.4) и предположения, что  $\hat{x}(\cdot) \in W$ , функция  $\hat{x}(\cdot)$  является допустимой для экстремальной задачи (1.13). Из (1.3) следует, что

$$|\psi(t)|^q \hat{x}^q(t) = \frac{p}{q} \sigma_{p,l}(t) \hat{x}^p(t) + \frac{r}{q} \Sigma_{r,n}(t) \hat{x}^r(t).$$

Тем самым

$$E^q(p, q, r) \geq \int_T |\psi(t)|^q \hat{x}^q(t) d\mu(t) = \frac{p}{q} \sum_{j=1}^l \lambda_j \delta_j^p + \frac{r}{q} \sum_{j=l+1}^n \lambda_j \delta_j^r. \quad (1.14)$$

2. Оценка сверху. Для нахождения погрешности метода (1.6) нужно найти значение следующей экстремальной задачи (здесь снова для удобства мы переходим к  $q$ -й степени)

$$\begin{aligned} & \int_T \left| \psi(t)x(t) - \psi(t) \sum_{j=1}^l \beta_j(t)y_j(t) \right|^q d\mu(t) \rightarrow \max, \\ & \int_T |\varphi_j(t)x(t) - y_j(t)|^p d\mu(t) \leq \delta_j^p, \quad j = 1, \dots, l, \\ & \int_T |\varphi_j(t)x(t)|^r d\mu(t) \leq \delta_j^r, \quad j = l+1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Положим

$$z_j(t) = \varphi_j(t)x(t) - y_j(t), \quad j = 1, \dots, l,$$

и запишем задачу (1.15) в виде

$$\begin{aligned} & \int_T |\psi(t)|^q \left| \left( 1 - \sum_{j=1}^l \beta_j(t)\varphi_j(t) \right) x(t) + \sum_{j=1}^l \beta_j(t)z_j(t) \right|^q d\mu(t) \rightarrow \max, \\ & \int_T |z_j(t)|^p d\mu(t) \leq \delta_j^p, \quad j = 1, \dots, l, \\ & \int_T |\varphi_j(t)x(t)|^r d\mu(t) \leq \delta_j^r, \quad j = l+1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Положим  $u_0(t) = |x(t)|$ ,  $u_j(t) = |z_j(t)|/|\varphi_j(t)|$ ,  $j = 1, \dots, l$ . Значение задачи (1.16) не превосходит значения задачи

$$\begin{aligned} & \int_T |\psi(t)|^q \left| \sum_{j=0}^l \alpha_j(t)u_j(t) \right|^q d\mu(t) \rightarrow \max, \\ & \int_T |\varphi_j(t)|^p u_j^p(t) d\mu(t) \leq \delta_j^p, \quad j = 1, \dots, l, \\ & \int_T |\varphi_j(t)|^r u_0^r(t) d\mu(t) \leq \delta_j^r, \quad j = l+1, \dots, n, \end{aligned} \quad (1.17)$$

где  $\alpha_j(t) = \beta_j(t)\varphi_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, l$ ,

$$\alpha_0(t) = 1 - \sum_{j=1}^l \alpha_j(t).$$

Функция Лагранжа для этой экстремальной задачи имеет вид

$$\mathcal{L}(u(\cdot), \mu) = \int_T L(t, u(t), \mu) dt, \quad u(\cdot) = (u_0(\cdot), \dots, u_l(\cdot)), \quad \mu = (\mu_1, \dots, \mu_n),$$

где

$$\begin{aligned} L(t, u(t), \mu) = & -|\psi(t)|^q \left| \sum_{j=0}^l \alpha_j(t) u_j(t) \right|^q + \sum_{j=1}^l \mu_j |\varphi_j(t)|^p u_j^p(t) \\ & + u_0^r(t) \sum_{j=l+1}^n \mu_j |\varphi_j(t)|^r. \end{aligned}$$

При  $\psi(t) \neq 0$  рассмотрим функцию

$$F(u(t), \lambda) = - \left| \sum_{j=0}^l \alpha_j(t) u_j(t) \right|^q + \sum_{j=1}^l a_j(t) u_j^p(t) + a_0(t) u_0^r(t), \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

где

$$a_j(t) = |\psi(t)|^{-q} \lambda_j |\varphi_j(t)|^p, \quad j = 1, \dots, l, \quad a_0(t) = |\psi(t)|^{-q} \sum_{j=l+1}^n \lambda_j |\varphi_j(t)|^r.$$

Нетрудно убедиться, что при  $\psi(t) \neq 0$  функция  $\hat{x}(t)$  является решением уравнения

$$-q + p \hat{x}^{p-q}(t) \sum_{j=1}^l a_j(t) + r a_0(t) \hat{x}^{r-q}(t) = 0.$$

Кроме того, выполняются равенства

$$\alpha_j(t) = \frac{p}{q} a_j(t) \hat{x}^{p-q}(t), \quad j = 1, \dots, l, \quad \alpha_0(t) = \frac{r}{q} a_0(t) \hat{x}^{r-q}.$$

Из леммы 2 вытекает, что для всех  $u(\cdot)$  таких, что  $u_j(t) \geq 0$ ,  $j = 0, \dots, n$ ,

$$F(\hat{u}(\cdot), \lambda) \leq F(u(\cdot), \lambda),$$

где  $\hat{u}(\cdot) = (\hat{x}(\cdot), \dots, \hat{x}(\cdot))$ . Следовательно, при  $\psi(t) \neq 0$

$$L(t, \hat{u}(t), \lambda) \leq L(t, u(t), \lambda). \quad (1.18)$$

При  $\psi(t) = 0$  из (1.3) следует, что  $\hat{x}(t) = 0$ . Тогда в силу того, что  $\hat{u}(t) = 0$ ,  $L(t, \hat{u}(t), \lambda) = 0$  и неравенство (1.18) очевидным образом тоже выполнено. Тем самым

$$\mathcal{L}(\hat{u}(\cdot), \lambda) \leq \mathcal{L}(u(\cdot), \lambda).$$

Применяя лемму 1, получаем, что функция  $\widehat{x}(\cdot)$  является экстремальной в задаче (1.17). Поэтому, учитывая (1.14), имеем

$$\begin{aligned}
 e^q(p, q, r, \widehat{m}) &\leq \int_T |\psi(t)\widehat{x}(t)|^q d\mu(t) = \frac{p}{q} \sum_{j=1}^l \lambda_j \delta_j^p + \frac{r}{q} \sum_{j=l+1}^n \lambda_j \delta_j^r \\
 &\leq \sup_{\substack{x(\cdot) \in W \\ \|\varphi_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T, \mu)} \leq \delta_j, \quad j=1, \dots, l}} \|\Lambda x(\cdot)\|_{L_q(T, \mu)}^q \leq E^q(p, q, r).
 \end{aligned}$$

Отсюда вытекает равенство (1.5) и оптимальность метода  $\widehat{m}$ .

Теорема 1 доказана.

### § 2. Однородные весовые функции на конусе

Пусть  $T$  – конус в линейном пространстве,  $\mu(\cdot)$  – однородная мера порядка  $d$ ,  $|\psi(\cdot)|$  – однородная функция порядка  $\eta$ ,  $|\varphi_j(\cdot)|$ ,  $j = 1, \dots, l$ , – однородные функции порядка  $\nu$ ,  $|\varphi_j(\cdot)|$ ,  $j = l + 1, \dots, n$ , – однородные функции порядка  $\nu_1$ . Положим

$$s_{p,l}(t) = \sum_{j=1}^l |\varphi_j(t)|^p, \quad S_{r,n}(t) = \sum_{j=l+1}^n |\varphi_j(t)|^r.$$

Будем предполагать, что  $\psi(t), s_{p,l}(t), S_{r,n}(t) \neq 0$  для почти всех  $t \in T$ .

Если  $1 \leq q < p, r < \infty$ , то при  $k \in [0, 1)$  функция  $k^{1/(p-q)}(1-k)^{-1/(r-q)}$  монотонно возрастает от 0 до  $+\infty$ . Следовательно, существует функция  $k(\cdot)$  такая, что для почти всех  $t \in T$

$$\frac{k^{1/(p-q)}(t)}{(1-k(t))^{1/(r-q)}} = S_{r,n}^{-1/(r-q)}(t) s_{p,l}^{1/(p-q)}(t) |\psi(t)|^{q(p-r)/((p-q)(r-q))}. \tag{2.1}$$

Рассмотрим задачу о нахождении величины (1.1) для случая, когда

$$\delta_1 = \dots = \delta_l = \delta, \quad \delta_{l+1} = \dots = \delta_n = \Delta. \tag{2.2}$$

**ТЕОРЕМА 2.** Пусть  $1 \leq q < p, r < \infty$  и  $\nu_1 - \nu + d(1/r - 1/p) \neq 0$ . Предположим, что

$$\begin{aligned}
 I_j &= \int_T |\varphi_j(z)|^p \left( \frac{|\psi(z)|^q}{s_{p,l}(z)} \right)^{p/(p-q)} k^{p/(p-q)}(z) d\mu(z) < \infty, \quad j = 1, \dots, l, \\
 I_j &= \int_T |\varphi_j(z)|^r \left( \frac{|\psi(z)|^q}{s_{p,l}(z)} \right)^{r/(p-q)} k^{r/(p-q)}(z) d\mu(z) < \infty, \quad j = l + 1, \dots, n.
 \end{aligned}$$

Пусть, кроме того,  $I_1 = \dots = I_l$  и  $I_{l+1} = \dots = I_n$ . Тогда

$$\begin{aligned}
 E(p, q, r) &= \sup_{\substack{x(\cdot) \in W \\ \|\varphi_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T, \mu)} \leq \delta, \quad j=1, \dots, l}} \|\Lambda x(\cdot)\|_{L_q(T, \mu)} \\
 &= \left( \frac{\delta}{I_1^{1/p}} \right)^\gamma \left( \frac{\Delta}{I_{l+1}^{1/r}} \right)^{1-\gamma} (lI_1 + (n-l)I_{l+1})^{1/q}, \tag{2.3}
 \end{aligned}$$

где

$$\gamma = \frac{\nu_1 - \eta - d(1/q - 1/r)}{\nu_1 - \nu + d(1/r - 1/p)}. \quad (2.4)$$

Метод

$$\widehat{m}(y(\cdot))(t) = \frac{\psi(t)k(\xi t)}{s_{p,l}(t)} \sum_{j=1}^l \frac{|\varphi_j(t)|^p}{\varphi_j(t)} y_j(t), \quad (2.5)$$

где

$$\xi = (\delta \Delta^{-1} I_1^{-1/p} I_{l+1}^{1/r})^{1/(\nu_1 - \nu + d(1/r - 1/p))}, \quad (2.6)$$

является оптимальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\widehat{x}(t) = \left( \frac{q|\psi(t)|^q}{p\lambda_0 s_{p,l}(t)} \right)^{1/(p-q)} k^{1/(p-q)}(\xi t),$$

где  $\lambda_0$  будет определено ниже. Имеем

$$\begin{aligned} p\lambda_0 s_{p,l}(t) \widehat{x}^{p-q}(t) &= q|\psi(t)|^q k(\xi t), \\ rS_{r,n}(t) \widehat{x}^{r-q}(t) &= rS_{r,n}(t) \left( \frac{q|\psi(t)|^q}{p\lambda_0 s_{p,l}(t)} \right)^{(r-q)/(p-q)} k^{(r-q)/(p-q)}(\xi t). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Из однородности  $|\psi(\cdot)|$  и  $|\varphi_j(\cdot)|$ ,  $j = 1, \dots, n$ , учитывая равенство (2.1), получаем

$$\begin{aligned} k^{(r-q)/(p-q)}(\xi t) &= \frac{|\psi(\xi t)|^{q(p-r)/(p-q)}}{S_{r,n}(\xi t)} s_{p,l}^{(r-q)/(p-q)}(\xi t) (1 - k(\xi t)) \\ &= \xi^{\eta q(p-r)/(p-q) - \nu_1 r + \nu p(r-q)/(p-q)} \frac{|\psi(t)|^{q(p-r)/(p-q)}}{S_{r,n}(t)} s_{p,l}^{(r-q)/(p-q)}(t) (1 - k(\xi t)). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} rS_{r,n}(t) \widehat{x}^{r-q}(t) &= r \left( \frac{q}{p\lambda_0} \right)^{(r-q)/(p-q)} \xi^{\eta q(p-r)/(p-q) - \nu_1 r + \nu p(r-q)/(p-q)} |\psi(t)|^q (1 - k(\xi t)). \end{aligned}$$

Положим

$$\lambda = \frac{q}{r} \left( \frac{q}{p\lambda_0} \right)^{-(r-q)/(p-q)} \xi^{-\eta q(p-r)/(p-q) + \nu_1 r - \nu p(r-q)/(p-q)}. \quad (2.8)$$

Тогда

$$r\lambda S_{r,n}(t) \widehat{x}^{r-q}(t) = q|\psi(t)|^q (1 - k(\xi t)). \quad (2.9)$$

Сложив равенства (2.7) и (2.9), получаем

$$p\lambda_0 s_{p,l}(t) \widehat{x}^{p-q}(t) + r\lambda S_{r,n}(t) \widehat{x}^{r-q}(t) = q|\psi(t)|^q.$$

Это означает, что  $\widehat{x}(\cdot)$  удовлетворяет равенству (1.3) при  $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = \lambda_0$  и  $\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = \lambda$ .

Покажем, что при

$$\lambda_0 = \frac{q}{p} I_1^{(p-q)/p} \xi^{q(\nu-n)-d(p-q)/p} \delta^{q-p} \quad (2.10)$$

выполняются равенства

$$\begin{aligned} \int_T |\varphi_j(t)|^p \widehat{x}^p(t) d\mu(t) &= \delta^p, & j &= 1, \dots, l, \\ \int_T |\varphi_j(t)|^r \widehat{x}^r(t) d\mu(t) &= \Delta^r, & j &= l+1, \dots, n. \end{aligned}$$

Из определения  $\widehat{x}(\cdot)$  следует, что надо доказать справедливость равенств

$$\begin{aligned} \int_T |\varphi_j(t)|^p \left( \frac{q|\psi(t)|^q}{p\lambda_0 s_{p,l}(t)} \right)^{p/(p-q)} k^{p/(p-q)}(\xi t) d\mu(t) &= \delta^p, & j &= 1, \dots, l, \\ \int_T |\varphi_j(t)|^r \left( \frac{q|\psi(t)|^q}{p\lambda_0 s_{p,l}(t)} \right)^{r/(p-q)} k^{r/(p-q)}(\xi t) d\mu(t) &= \Delta^r, & j &= l+1, \dots, n. \end{aligned}$$

Сделаем замену переменных  $z = \xi t$ . Учитывая однородность функций  $|\psi(\cdot)|$ ,  $|\varphi_j(\cdot)|$ ,  $j = 1, \dots, n$ , и меры  $\mu(\cdot)$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \int_T |\varphi_j(t)|^p \left( \frac{q|\psi(t)|^q}{p\lambda_0 s_{p,l}(t)} \right)^{p/(p-q)} k^{p/(p-q)}(\xi t) d\mu(t) &= \left( \frac{q}{p\lambda_0} \right)^{p/(p-q)} \xi^{\nu pq/(p-q) - \eta qp/(p-q) - d} I_j, & j &= 1, \dots, l, \\ \int_T |\varphi_j(t)|^r \left( \frac{q|\psi(t)|^q}{p\lambda_0 s_{p,l}(t)} \right)^{r/(p-q)} k^{r/(p-q)}(\xi t) d\mu(t) &= \left( \frac{q}{p\lambda_0} \right)^{r/(p-q)} \xi^{\nu pr/(p-q) - \nu_1 r - \eta qr/(p-q) - d} I_j, & j &= l+1, \dots, n. \end{aligned}$$

Справедливость равенств

$$\begin{aligned} \left( \frac{q}{p\lambda_0} \right)^{p/(p-q)} \xi^{\nu pq/(p-q) - \eta qp/(p-q) - d} I_j &= \delta^p, & j &= 1, \dots, l, \\ \left( \frac{q}{p\lambda_0} \right)^{r/(p-q)} \xi^{\nu pr/(p-q) - \nu_1 r - \eta qr/(p-q) - d} I_j &= \Delta^r, & j &= l+1, \dots, n, \end{aligned}$$

вытекает из определений  $\lambda_0$  и  $\xi$ .

Из теоремы 1 и равенств (2.10), (2.8), (2.6) вытекает, что

$$\begin{aligned} E^q(p, q, r) &= \frac{pl\lambda_0\delta^p + (n-l)r\lambda\Delta^r}{q} = lI_1^{(p-q)/p} \xi^{q(\nu-n)-d(p-q)/p} \delta^q \\ &\quad + (n-l) \left( \frac{q}{p\lambda_0} \right)^{-(r-q)/(p-q)} \xi^{-\eta q(p-r)/(p-q) + \nu_1 r - \nu p(r-q)/(p-q)} \Delta^r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= lI_1^{(p-q)/p} \xi^{q(\nu-\eta)-d(p-q)/p} \delta^q \\
 &\quad + (n-l)(I_1^{(p-q)/p} \xi^{q(\nu-\eta)-d(p-q)/p} \delta^{q-p})^{(r-q)/(p-q)} \\
 &\quad \quad \times \xi^{-\eta q(p-r)/(p-q) + \nu_1 r - \nu p(r-q)/(p-q)} \Delta^r \\
 &= \left(\frac{\delta}{I_1^{1/p}}\right)^{q\gamma} \left(\frac{\Delta}{I_2^{1/r}}\right)^{q(1-\gamma)} (lI_1 + (n-l)I_2).
 \end{aligned}$$

Оптимальность метода (2.5) непосредственно следует из теоремы 1.

Теорема 2 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для всех  $x \in \mathcal{W}$ ,  $x(\cdot) \neq 0$ , имеет место точное неравенство

$$\|\psi(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T,\mu)} \leq C \max_{1 \leq j \leq l} \|\varphi_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)}^\gamma \max_{l+1 \leq j \leq n} \|\varphi_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T,\mu)}^{1-\gamma}, \quad (2.11)$$

где

$$C = I_1^{-\gamma/p} I_{l+1}^{-(1-\gamma)/r} (lI_1 + (n-l)I_{l+1})^{1/q}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\delta = \max_{1 \leq j \leq l} \|\varphi_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)}, \quad \Delta = \max_{l+1 \leq j \leq n} \|\varphi_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T,\mu)}.$$

Тогда из (2.3) следует, что

$$\|\psi(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T,\mu)} \leq C\delta^\gamma \Delta^{1-\gamma}.$$

Если предположить, что существует постоянная  $\tilde{C} < C$ , для которой при всех  $x(\cdot)$ , удовлетворяющих условиям следствия, выполняется неравенство (2.11), то

$$\sup_{\substack{x \in \mathcal{W} \\ \|\varphi_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)} \leq \delta, j=1,\dots,l}} \|\psi(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T,\mu)} \leq \tilde{C}\delta^\gamma \Delta^{1-\gamma} < C\delta^\gamma \Delta^{1-\gamma},$$

что противоречит (2.3).

Следствие доказано.

### § 3. Однородные весовые функции на конусе в $\mathbb{R}^d$

Пусть  $T$  – конус в  $\mathbb{R}^d$ ,  $d\mu(t) = dt$ ,  $|\psi(\cdot)|$  – однородная функция порядка  $\eta$ ,  $|\varphi_j(\cdot)|$ ,  $j = 1, \dots, l$ , – однородные функции порядка  $\nu$ ,  $|\varphi_j(\cdot)|$ ,  $j = l + 1, \dots, n$ , – однородные функции порядка  $\nu_1$ . Будем по-прежнему предполагать, что  $\psi(t)$ ,  $s_{p,l}(t)$ ,  $S_{r,n}(t) \neq 0$  для почти всех  $t \in T$ . Рассмотрим сферическую систему координат

$$\begin{aligned}
 t_1 &= \rho \cos \omega_1, \\
 t_2 &= \rho \sin \omega_1 \cos \omega_2, \\
 &\dots\dots\dots \\
 t_{d-1} &= \rho \sin \omega_1 \sin \omega_2 \cdots \sin \omega_{d-2} \cos \omega_{d-1}, \\
 t_d &= \rho \sin \omega_1 \sin \omega_2 \cdots \sin \omega_{d-2} \sin \omega_{d-1}.
 \end{aligned}$$

Положим  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{d-1})$ . Для любой функции  $f(\cdot)$ , заданной на  $\mathbb{R}^d$ , введем следующее обозначение:

$$\tilde{f}(\omega) = |f(\cos \omega_1, \dots, \sin \omega_1 \sin \omega_2 \cdots \sin \omega_{d-2} \sin \omega_{d-1})|.$$

Заметим, что если  $|f(\cdot)|$  – однородная функция порядка  $\kappa$ , то  $f(\omega) = \rho^{-\kappa} |f(t)|$ . Обозначим через  $\Omega$  область изменения  $\omega$ , когда  $t \in T$ . Из того, что  $T$  – конус, следует, что  $\Omega$  не зависит от  $\rho$ . Положим

$$J(\omega) = \sin^{d-2} \omega_1 \sin^{d-3} \omega_2 \cdots \sin \omega_{d-2}.$$

Переходя к сферическим координатам, для функции  $k(\cdot)$  будем иметь равенство

$$\begin{aligned} & \frac{k^{1/(p-q)}(\rho, \omega)}{(1 - k(\rho, \omega))^{1/(r-q)}} \\ &= \rho^{((\eta-\nu)q(p-r) - (\nu_1-\nu)r(p-q))/((p-q)(r-q))} \frac{\tilde{\psi}^{q(p-r)/((p-q)(r-q))}(\omega) \tilde{s}_{p,l}^{1/(p-q)}(\omega)}{\tilde{S}_{r,n}^{1/(r-q)}(\omega)}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Предположим, что  $\gamma \in (0, 1)$ , где  $\gamma$  определено формулой (2.4). Положим

$$\frac{1}{q^*} = \frac{1}{q} - \frac{\gamma}{p} - \frac{1-\gamma}{r}.$$

Нетрудно убедиться, что  $q^* > q \geq 1$ . Кроме того,

$$q^* = \frac{pqr(\nu_1 - \nu + d(1/r - 1/p))}{r(p - q)(\nu_1 - \nu) - q(p - r)(\eta - \nu)}.$$

Продолжим исследовать задачу о нахождении величины (1.1) для случая, когда выполнены условия (2.2).

**ТЕОРЕМА 3.** Пусть  $1 \leq q < p, r < \infty$  и  $\gamma \in (0, 1)$ . Предположим, что

$$I = \int_{\Omega} \frac{\tilde{\psi}^{q^*}(\omega)}{\tilde{s}_{p,l}^{q^*\gamma/p}(\omega) \tilde{S}_{r,n}^{q^*(1-\gamma)/r}} J(\omega) d\omega < \infty,$$

$I'_1 = \dots = I'_l$ , где

$$I'_j = \int_{\Omega} \tilde{\varphi}_j^p(\omega) \frac{\tilde{\psi}^{q^*}(\omega)}{\tilde{s}_{p,l}^{q^*\gamma/p+1}(\omega) \tilde{S}_{r,n}^{q^*(1-\gamma)/r}} J(\omega) d\omega, \quad j = 1, \dots, l,$$

и  $I'_{l+1} = \dots = I'_n$ , где

$$I'_j = \int_{\Omega} \tilde{\varphi}_j^r(\omega) \frac{\tilde{\psi}^{q^*}(\omega)}{\tilde{s}_{p,l}^{q^*\gamma/p}(\omega) \tilde{S}_{r,n}^{q^*(1-\gamma)/r+1}} J(\omega) d\omega, \quad j = l + 1, \dots, n.$$

Тогда

$$E(p, q, r) = C_1 \delta^\gamma \Delta^{1-\gamma},$$

где

$$C_1 = \left(\frac{l}{\gamma}\right)^{\gamma/p} \left(\frac{n-l}{1-\gamma}\right)^{(1-\gamma)/r} \left(\frac{B(q^*\gamma/p, q^*(1-\gamma)/r)I}{|\nu_1 - \nu + d(1/r - 1/p)|(\gamma r + (1-\gamma)p)}\right)^{1/q^*}$$

а  $B(\cdot, \cdot)$  –  $B$ -функция Эйлера. Метод

$$\widehat{m}(y(\cdot))(t) = k(\widehat{\xi}^{1/(\nu_1 - \nu + d(1/r - 1/p))}t) \frac{\psi(t)}{s_{p,l}(t)} \sum_{j=1}^l \frac{|\varphi_j(t)|^p}{\varphi_j(t)} y_j(t),$$

где

$$\widehat{\xi} = \frac{\delta}{\Delta} \left(\frac{l}{\gamma}\right)^{1/p} \left(\frac{1-\gamma}{n-l}\right)^{1/r} \left(\frac{B(q^*\gamma/p, q^*(1-\gamma)/r)I}{|\nu_1 - \nu + d(1/r - 1/p)|(\gamma r + (1-\gamma)p)}\right)^{1/r - 1/p},$$

является оптимальным.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Заметим, что  $I'_1 + \dots + I'_l = I$  и  $I'_{l+1} + \dots + I'_n = I$ . Поэтому  $I'_j = I/l$ ,  $j = 1, \dots, l$ , и  $I'_j = I/(n-l)$ ,  $j = l+1, \dots, n$ . Вычислим величины  $I_j$ ,  $j = 1, \dots, l$ , из теоремы 2 с помощью перехода к сферическим координатам. Имеем

$$\begin{aligned} I_j &= \int_T |\varphi_j(z)|^p \left(\frac{|\psi(z)|^q}{s_{p,l}(z)}\right)^{p/(p-q)} k^{p/(p-q)}(z) d\mu(z) \\ &= \int_{\Omega} \widetilde{\varphi}_j^p(\omega) \left(\frac{\widetilde{\psi}^q(\omega)}{\widetilde{s}_{p,l}(\omega)}\right)^{p/(p-q)} J(\omega) d\omega \int_0^{+\infty} \rho^{(\eta-\nu)qp/(p-q)+d-1} k^{p/(p-q)}(\rho, \omega) d\rho. \end{aligned}$$

Из (3.1) следует, что

$$\rho^{(\nu_1 - \nu)r(p-q) - (\eta - \nu)q(p-r)} = \frac{(1 - k(\rho, \omega))^{p-q}}{k^{r-q}(\rho, \omega)} \frac{\widetilde{\psi}^{q(p-r)}(\omega) \widetilde{s}_{p,l}^{r-q}(\omega)}{\widetilde{S}_{r,n}^{p-q}(\omega)}.$$

Зафиксируем  $\omega \in \Omega$ . Тогда

$$\begin{aligned} d\rho^{(\eta-\nu)qp/(p-q)+d} &= \left(\frac{\widetilde{\psi}^{q(p-r)}(\omega) \widetilde{s}_{p,l}^{r-q}(\omega)}{\widetilde{S}_{r,n}^{p-q}(\omega)}\right)^{\zeta} d \frac{(1-k)^{(p-q)\zeta}}{k^{(r-q)\zeta}} \\ &= -\zeta \left(\frac{\widetilde{\psi}^{q(p-r)}(\omega) \widetilde{s}_{p,l}^{r-q}(\omega)}{\widetilde{S}_{r,n}^{p-q}(\omega)}\right)^{\zeta} \frac{(1-k)^{(p-q)\zeta-1}}{k^{(r-q)\zeta+1}} (r-q + (p-r)k) dk, \end{aligned}$$

где

$$\zeta = \frac{(\eta - \nu)qp + d(p - q)}{(p - q)((\nu_1 - \nu)r(p - q) - (\eta - \nu)q(p - r))} = \frac{q^*(1 - \gamma)}{r(p - q)}.$$

Если  $\rho$  меняется от 0 до  $+\infty$ , то  $k$  будет меняться от 0 до 1 при  $(\nu_1 - \nu)r(p - q) - (\eta - \nu)q(p - r) < 0$  и от 1 до 0 при  $(\nu_1 - \nu)r(p - q) - (\eta - \nu)q(p - r) > 0$ .

Поэтому

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \rho^{(\eta-\nu)qp/(p-q)+d-1} k^{p/(p-q)}(\rho, \omega) d\rho \\ &= \frac{p-q}{(\eta-\nu)qp+d(p-q)} \int_0^{+\infty} k^{p/(p-q)}(\rho, \omega) d\rho^{(\eta-\nu)qp/(p-q)+d} \\ &= \frac{1}{|(\nu_1-\nu)r(p-q) - (\eta-\nu)q(p-r)|} \left( \frac{\tilde{\psi}^{q(p-r)}(\omega) \tilde{s}_{p,l}^{r-q}(\omega)}{\tilde{S}_{r,n}^{p-q}(\omega)} \right)^\zeta \\ & \quad \times \int_0^1 k^{p/(p-q)} \frac{(1-k)^{(p-q)\zeta-1}}{k^{(r-q)\zeta+1}} (r-q + (p-r)k) dk \\ &= \frac{1}{|(\nu_1-\nu)r(p-q) - (\eta-\nu)q(p-r)|} \left( \frac{\tilde{\psi}^{q(p-r)}(\omega) \tilde{s}_{p,l}^{r-q}(\omega)}{\tilde{S}_{r,n}^{p-q}(\omega)} \right)^\zeta (K_1 + K_2), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} K_1 &= (r-q) \int_0^1 k^{\hat{p}}(1-k)^{\hat{q}-1} dk = (r-q)B(\hat{p}+1, \hat{q}), \\ K_2 &= (p-r) \int_0^1 k^{\hat{p}+1}(1-k)^{\hat{q}-1} dk = (p-r)B(\hat{p}+2, \hat{q}) \\ &= (p-r) \frac{\hat{p}+1}{\hat{p}+\hat{q}+1} B(\hat{p}+1, \hat{q}), \\ \hat{p} &= \frac{(\nu_1-\eta)qr - d(r-q)}{(\nu_1-\nu)r(p-q) - (\eta-\nu)q(p-r)} = q^* \frac{\gamma}{p}, \\ \hat{q} &= \frac{(\eta-\nu)qp + d(p-q)}{(\nu_1-\nu)r(p-q) - (\eta-\nu)q(p-r)} = q^* \frac{1-\gamma}{r}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} K_1 + K_2 &= \left( r-q + (p-r) \frac{q^* \gamma/p + 1}{q^*/q} \right) B(\hat{p}+1, \hat{q}) = \frac{pq}{q^*} B(\hat{p}+1, \hat{q}) \\ &= \frac{q\gamma}{q^*} \left( \frac{\gamma}{p} + \frac{1-\gamma}{r} \right)^{-1} B(\hat{p}, \hat{q}). \end{aligned}$$

Отсюда

$$I_j = \frac{\gamma}{pr|\nu_1-\nu+d(1/r-1/p)|} \left( \frac{\gamma}{p} + \frac{1-\gamma}{r} \right)^{-1} B(\hat{p}, \hat{q}) I_j', \quad j = 1, \dots, l.$$

Теперь найдем  $I_j, j = l+1, \dots, n$ . Имеем

$$\begin{aligned} I_j &= \int_T |\varphi_j(z)|^r \left( \frac{|\psi(z)|^q}{s_{p,l}(z)} \right)^{r/(p-q)} k^{r/(p-q)}(z) d\mu(z) \\ &= \int_\Omega \tilde{\varphi}_j^r(\omega) \left( \frac{\tilde{\psi}^q(\omega)}{\tilde{s}_{p,l}(\omega)} \right)^{r/(p-q)} J(\omega) d\omega \\ & \quad \times \int_0^{+\infty} \rho^{(\eta-\nu)qr/(p-q)+r(\nu_1-\nu)+d-1} k^{r/(p-q)}(\rho, \omega) d\rho. \end{aligned}$$

Зафиксируем  $\omega \in \Omega$ . Тогда

$$\begin{aligned} d\rho^{(\eta-\nu)qr/(p-q)+r(\nu_1-\nu)+d} &= \left( \frac{\tilde{\psi}^{q(p-r)}(\omega) \tilde{s}_{p,l}^{r-q}(\omega)}{\tilde{S}_{r,n}^{p-q}(\omega)} \right)^{\zeta_1} d \frac{(1-k)^{(p-q)\zeta_1}}{k^{(r-q)\zeta_1}} \\ &= -\zeta_1 \left( \frac{\tilde{\psi}^{q(p-r)}(\omega) \tilde{s}_{p,l}^{r-q}(\omega)}{\tilde{S}_{r,n}^{p-q}(\omega)} \right)^{\zeta_1} \frac{(1-k)^{(p-q)\zeta_1-1}}{k^{(r-q)\zeta_1+1}} (r-q + (p-r)k) dk, \end{aligned}$$

где

$$\zeta_1 = \frac{(\eta-\nu)qr + ((\nu_1-\nu)r + d)(p-q)}{(p-q)((\nu_1-\nu)r(p-q) - (\eta-\nu)q(p-r))} = \frac{q^*(1-\gamma)}{r(p-q)} + \frac{1}{p-q}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \rho^{(\eta-\nu)qr/(p-q)+r(\nu_1-\nu)+d-1} k^{r/(p-q)}(\rho, \omega) d\rho \\ &= \frac{p-q}{(\eta-\nu)qr + (r(\nu_1-\nu) + d)(p-q)} \\ &\quad \times \int_0^{+\infty} k^{r/(p-q)}(\rho, \omega) d\rho^{(\eta-\nu)qr/(p-q)+r(\nu_1-\nu)+d} \\ &= \frac{1}{|(\nu_1-\nu)r(p-q) - (\eta-\nu)q(p-r)|} \left( \frac{\tilde{\psi}^{q(p-r)}(\omega) \tilde{s}_{p,l}^{r-q}(\omega)}{\tilde{S}_{r,n}^{p-q}(\omega)} \right)^{\zeta_1} (L_1 + L_2), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} L_1 &= (r-q) \int_0^1 k^{\hat{p}-1} (1-k)^{\hat{q}} dk = (r-q)B(\hat{p}, \hat{q} + 1), \\ L_2 &= (p-r) \int_0^1 k^{\hat{p}} (1-k)^{\hat{q}} dk = (p-r)B(\hat{p} + 1, \hat{q} + 1) \\ &= (p-r) \frac{\hat{p}}{\hat{p} + \hat{q} + 1} B(\hat{p}, \hat{q} + 1). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$L_1 + L_2 = \frac{qr}{q^*} B(\hat{p}, \hat{q} + 1) = \frac{q(1-\gamma)}{q^*} \left( \frac{\gamma}{p} + \frac{1-\gamma}{r} \right)^{-1} B(\hat{p}, \hat{q}).$$

Следовательно,

$$I_j = \frac{1-\gamma}{pr|\nu_1-\nu + d(1/r - 1/p)|} \left( \frac{\gamma}{p} + \frac{1-\gamma}{r} \right)^{-1} B(\hat{p}, \hat{q}) I'_j, \quad j = l+1, \dots, n.$$

Остается применить теорему 2.

Теорема 3 доказана.

Аналогично следствию 1 получаем

**СЛЕДСТВИЕ 2.** Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда для всех  $x \in \mathcal{W}$  имеет место точное неравенство

$$\|\psi(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T,\mu)} \leq C_1 \max_{1 \leq j \leq l} \|\varphi_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)}^\gamma \max_{l+1 \leq j \leq n} \|\varphi_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T,\mu)}^{1-\gamma}.$$

Приведем пример весов, для которых выполнены условия теоремы 3. Пусть  $T = \mathbb{R}_+^d$ ,  $l = d$ ,  $n = 2d$ ,  $\eta$ ,  $\nu$  и  $\nu_1$  таковы, что  $\gamma \in (0, 1)$ ,

$$\varphi_j(t) = t_j^\nu, \quad \varphi_{j+d}(t) = t_j^{\nu_1}, \quad j = 1, \dots, d, \quad \psi(t) = \psi_\theta(t)^{\eta/2}, \quad (3.2)$$

где

$$\psi_\theta(t) = (|t_1|^\theta + \dots + |t_d|^\theta)^{2/\theta}, \quad \theta > 0.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\tilde{\psi}(\cdot) = (\tilde{t}_1^\theta(\omega) + \dots + \tilde{t}_d^\theta(\omega))^{\eta/\theta},$$

а

$$\tilde{\varphi}_j(\omega) = \tilde{t}_j^\nu(\omega), \quad \tilde{\varphi}_{j+d}(\omega) = \tilde{t}_j^{\nu_1}(\omega), \quad j = 1, \dots, d,$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{t}_1(\omega) &= \cos \omega_1, \\ \tilde{t}_2(\omega) &= \sin \omega_1 \cos \omega_2, \\ &\dots\dots\dots \\ \tilde{t}_{d-1}(\omega) &= \sin \omega_1 \sin \omega_2 \dots \sin \omega_{d-2} \cos \omega_{d-1}, \\ \tilde{t}_d(\omega) &= \sin \omega_1 \sin \omega_2 \dots \sin \omega_{d-2} \sin \omega_{d-1}. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^d \tilde{t}_k^2(\omega) = 1.$$

Для величины  $I$  из теоремы 3 имеем

$$I = \int_{\Pi_+^{d-1}} \frac{(\sum_{k=1}^d \tilde{t}_k^\theta(\omega))^{q^* \eta/\theta} J(\omega) d\omega}{(\sum_{k=1}^d \tilde{t}_k^{p\nu}(\omega))^{q^* \gamma/p} (\sum_{k=1}^d \tilde{t}_k^{r\nu_1}(\omega))^{q^*(1-\gamma)/r}}, \quad \Pi_+^{d-1} = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]^{d-1}. \quad (3.3)$$

Если  $s \leq 2$ , то

$$\sum_{k=1}^d \tilde{t}_k^s(\omega) \geq \sum_{k=1}^d \tilde{t}_k^2(\omega) = 1. \quad (3.4)$$

Если же  $s > 2$ , то по неравенству Гёльдера

$$1 = \sum_{k=1}^d \tilde{t}_k^2(\omega) \leq \left(\sum_{k=1}^d \tilde{t}_k^s(\omega)\right)^{2/s} d^{1-2/s}.$$

Тем самым

$$\sum_{k=1}^d \tilde{t}_k^s(\omega) \geq d^{1-s/2}. \quad (3.5)$$

Из (3.4) и (3.5) вытекает, что  $I < \infty$ .

Рассмотрим интегралы

$$\widehat{I}_j = \int_{\Pi_+^{d-1}} \frac{\tilde{t}_j^s(\omega) (\sum_{k=1}^d \tilde{t}_k^\theta(\omega))^{q^* \eta / \theta} J(\omega) d\omega}{(\sum_{k=1}^d \tilde{t}_k^s(\omega))^{a+1} (\sum_{k=1}^d \tilde{t}_k^{s_1}(\omega))^{a_1}}, \quad j = 1, \dots, d,$$

где  $a, a_1 > 0$ . Положим

$$M_j = \int_{\mathbb{R}_+^d \cap \mathbb{B}^d} \frac{t_j^s (\sum_{k=1}^d t_k^2)^{s(a+a_1)/2 - q^* \eta} (\sum_{k=1}^d t_k^\theta)^{q^* \eta / \theta}}{(\sum_{k=1}^d t_k^s)^{a+1} (\sum_{k=1}^d t_k^{s_1})^{a_1}} dt, \quad j = 1, \dots, d,$$

где  $\mathbb{B}^d$  – единичный шар в  $\mathbb{R}^d$ . Если сделать замену переменных в интеграле  $M_j$ , поменяв местами переменные  $t_j$  и  $t_i$ , то интеграл  $M_j$  перейдет в интеграл  $M_i$ . Следовательно,  $M_1 = \dots = M_d$ . Переходя к сферическим координатам, получим, что  $M_j = \widehat{I}_j/d$ ,  $j = 1, \dots, d$ . Таким образом,

$$\widehat{I}_1 = \dots = \widehat{I}_d. \quad (3.6)$$

Следовательно, веса (3.2) удовлетворяют условиям теоремы 3.

**СЛЕДСТВИЕ 3.** Пусть  $1 \leq q < p, r < \infty$  и  $\gamma \in (0, 1)$ . Тогда для всех  $x \in \mathcal{W}$  имеет место точное неравенство

$$\begin{aligned} & \| (|t_1|^\theta + \dots + |t_d|^\theta)^{\eta/\theta} x(t) \|_{L_q(\mathbb{R}_+^d)} \\ & \leq C_2 \max_{1 \leq j \leq d} \| t_j^\nu x(t) \|_{L_p(\mathbb{R}_+^d)}^\gamma \max_{1 \leq j \leq d} \| t_j^{\nu_1} x(t) \|_{L_r(\mathbb{R}_+^d)}^{1-\gamma}, \end{aligned}$$

где

$$C_2 = \left( \frac{d}{\gamma} \right)^{\gamma/p} \left( \frac{d}{1-\gamma} \right)^{(1-\gamma)/r} \left( \frac{B(q^* \gamma/p, q^*(1-\gamma)/r) I}{|\nu_1 - \nu + d(1/r - 1/p)| (\gamma r + (1-\gamma)p)} \right)^{1/q^*},$$

а величина  $I$  определена равенством (3.3).

Приведем еще один результат для весов (3.2).

**СЛЕДСТВИЕ 4.** Пусть  $1 \leq q < p, r < \infty$ . Положим

$$\alpha = \frac{\mu}{p\mu + r\lambda}, \quad \beta = \frac{\lambda}{p\mu + r\lambda},$$

где  $\lambda, \mu > 0$ . Тогда для всех  $x \in \mathcal{W}$  имеет место точное неравенство

$$\begin{aligned} & \| (t_1^\theta + \dots + t_d^\theta)^{d(1-1/q)/\theta} x(t) \|_{L_q(\mathbb{R}_+^d)} \\ & \leq C_3 \max_{1 \leq j \leq d} \| t_j^{d-(\lambda+d)/p} x(t) \|_{L_p(\mathbb{R}_+^d)}^{p\alpha} \max_{1 \leq j \leq d} \| t_j^{d+(\mu-d)/r} x(t) \|_{L_r(\mathbb{R}_+^d)}^{r\beta}, \end{aligned}$$

где

$$C_3 = \frac{d^{\alpha+\beta}}{(p\alpha)^\alpha (r\beta)^\beta} \left( \frac{I}{\lambda + \mu} B \left( \frac{\alpha}{1/q - \alpha - \beta}, \frac{\beta}{1/q - \alpha - \beta} \right) \right)^{1/q - \alpha - \beta},$$

а

$$I = \int_{\Pi_+^{d-1}} \frac{(\sum_{k=1}^d \tilde{t}_k^\theta(\omega))^{d(1-1/q)/(\theta(1/q-\alpha-\beta))} J(\omega) d\omega}{(\sum_{k=1}^d \tilde{t}_k^{d(p-1)-\lambda}(\omega))^{\alpha/(1/q-\alpha-\beta)} (\sum_{k=1}^d \tilde{t}_k^{(d-1)+\mu}(\omega))^{\beta/(1/q-\alpha-\beta)}}.$$

При  $d = 1$  этот результат вытекает из следствия 6 работы [9], а при  $d = 1, q = 1$  он был доказан в работе [2].

#### § 4. Восстановление и точные неравенства для дифференциальных операторов

Пусть  $T = \mathbb{R}^d, d\mu(t) = dt, |\psi(\cdot)|$  – однородная функция порядка  $\eta, |\varphi_j(\cdot)|, j = 1, \dots, l,$  – однородные функции порядка  $\nu, |\varphi_j(\cdot)|, j = l + 1, \dots, n,$  – однородные функции порядка  $\nu_1$  и  $\psi(t), s_{p,l}(t), S_{2,n}(t) \neq 0$  для почти всех  $t \in \mathbb{R}^d$ .

Пусть  $S$  – пространство Шварца быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций на  $\mathbb{R}, S'$  – соответствующее пространство обобщенных функций,  $F: S' \rightarrow S'$  – преобразование Фурье. Положим

$$X_p = \{x(\cdot) \in S': \varphi_j(\cdot)Fx(\cdot) \in L_p(\mathbb{R}^d), j = 1, \dots, l, \varphi_j(\cdot)Fx(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d), j = l + 1, \dots, n\}.$$

Для функций  $x(\cdot) \in X_p$  определим операторы  $D_j, j = 1, \dots, n,$

$$D_j x(\cdot) = F^{-1}(\varphi_j(\cdot)Fx(\cdot))(\cdot), \quad j = 1, \dots, n,$$

и оператор  $\Lambda$

$$\Lambda x(\cdot) = F^{-1}(\psi(\cdot)Fx(\cdot))(\cdot). \tag{4.1}$$

Рассмотрим задачу оптимального восстановления значений  $\Lambda x(\cdot)$  на классе

$$W_p^{\mathcal{D}} = \{x(\cdot) \in X_p: \|D_j x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \Delta, j = l + 1, \dots, n\}, \quad \mathcal{D} = (D_1, \dots, D_n),$$

по неточной информации о преобразованиях Фурье функций  $D_j x(\cdot), j = 1, \dots, l.$  Будем предполагать, что для каждой функции  $x(\cdot) \in W_p^{\mathcal{D}}$  известны функции  $y_j(\cdot) \in L_p(\mathbb{R}^d), j = 1, \dots, l,$  такие, что

$$\|F(D_j x(\cdot))(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \leq \delta, \quad j = 1, \dots, l.$$

Требуется восстановить функцию  $\Lambda x(\cdot)$  по заданным функциям  $y_j(\cdot) \in L_p(\mathbb{R}^d), j = 1, \dots, l.$

Предположим, что  $\Lambda x(\cdot) \in L_q(\mathbb{R}^d)$  для всех  $x(\cdot) \in X_p.$  Погрешностью метода восстановления  $m: (L_p(\mathbb{R}^d))^l \rightarrow L_q(\mathbb{R}^d)$  назовем величину

$$e_{pq}(\Lambda, \mathcal{D}, m) = \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_p^{\mathcal{D}}, y(\cdot) \in (L_p(\mathbb{R}^d))^l \\ \|F(D_j x(\cdot))(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \leq \delta, j = 1, \dots, l}} \|\Lambda x(\cdot) - m(y(\cdot))(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)},$$

$y(\cdot) = (y_1(\cdot), \dots, y_l(\cdot))$ . Величина

$$E_{pq}(\Lambda, \mathcal{D}) = \inf_{m: (L_p(\mathbb{R}^d))^l \rightarrow L_q(\mathbb{R}^d)} e_{pq}(\Lambda, \mathcal{D}, m)$$

называется *погрешностью оптимального восстановления*, а метод, на котором достигается нижняя грань, называется *оптимальным*.

Рассмотрим случай, когда  $q = \infty$ . Положим

$$\gamma_1 = \frac{\nu_1 - \eta - d/2}{\nu_1 - \nu + d(1/2 - 1/p)} \quad q_1 = \frac{1}{1/2 + \gamma_1(1/2 - 1/p)}.$$

При  $1 < p < \infty$  определим функцию  $k_1(\cdot)$  равенством

$$\frac{k_1(t)}{(1 - k_1(t))^{p-1}} = (2\pi)^{d(p-1)} \frac{s_{p,l}(t) |\psi(t)|^{p-2}}{S_{2,n}^{p-1}(t)}.$$

**ТЕОРЕМА 4.** Пусть  $1 < p < \infty$  и  $\gamma_1 \in (0, 1)$ . Предположим, что

$$I = \int_{\Pi^{d-1}} \frac{\tilde{\psi}^{q_1}(\omega)}{\tilde{s}_{p,l}^{q_1 \gamma_1/p}(\omega) \tilde{S}_{2,n}^{q_1(1-\gamma_1)/2}} J(\omega) d\omega < \infty, \quad \Pi^{d-1} = [0, \pi]^{d-2} \times [0, 2\pi],$$

$I'_1 = \dots = I'_l$ , где

$$I'_j = \int_{\Pi^{d-1}} \tilde{\varphi}_j^p(\omega) \frac{\tilde{\psi}^{q_1}(\omega)}{\tilde{s}_{p,l}^{q_1 \gamma_1/p+1}(\omega) \tilde{S}_{2,n}^{q_1(1-\gamma_1)/2}} J(\omega) d\omega, \quad j = 1, \dots, l,$$

и  $I'_{l+1} = \dots = I'_n$ , где

$$I'_j = \int_{\Pi^{d-1}} \tilde{\varphi}_j^2(\omega) \frac{\tilde{\psi}^{q_1}(\omega)}{\tilde{s}_{p,l}^{q_1 \gamma_1/p}(\omega) \tilde{S}_{2,n}^{q_1(1-\gamma_1)/2+1}} J(\omega) d\omega, \quad j = l+1, \dots, n.$$

Тогда

$$E_{p\infty}(\Lambda, \mathcal{D}) = \frac{C_4}{(2\pi)^{d(1+\gamma_1)/2}} \delta^{\gamma_1} \Delta^{1-\gamma_1},$$

где

$$C_4 = \left(\frac{l}{\gamma_1}\right)^{\gamma_1/p} \left(\frac{n-l}{1-\gamma_1}\right)^{(1-\gamma_1)/2} \left(\frac{B(q_1 \gamma_1/p, q_1(1-\gamma_1)/2) I}{|\nu_1 - \nu + d(1/2 - 1/p)| (2\gamma_1 + (1-\gamma_1)p)}\right)^{1/q_1}.$$

Метод

$$\hat{m}_2(y(\cdot))(t) = F^{-1} \left( k_1(\hat{\xi}_1^{1/(\nu_1 - \nu + d(1/2 - 1/p))} \xi) \frac{\psi(\xi)}{s_{p,l}(\xi)} \sum_{j=1}^l \frac{|\varphi_j(\xi)|^p}{\varphi_j(\xi)} y_j(\xi) \right) (t), \quad (4.2)$$

где

$$\hat{\xi}_1 = \frac{\delta}{\Delta} \left(\frac{l}{\gamma_1}\right)^{1/p} \left(\frac{1-\gamma_1}{n-l}\right)^{1/2} \left(\frac{B(q_1 \gamma_1/p, q_1(1-\gamma_1)/2) I (2\pi)^{dq_1(1-\gamma_1)/2}}{|\nu_1 - \nu + d(1/2 - 1/p)| (2\gamma_1 + (1-\gamma_1)p)}\right)^{1/2-1/p},$$

является оптимальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично неравенству (1.2) имеем

$$E_{p\infty}(\Lambda, \mathcal{D}) \geq \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_p^{\mathcal{D}} \\ \|F(D_j x(\cdot))(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \leq \delta, j=1, \dots, l}} \|\Lambda x(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

Пусть  $x(\cdot) \in W_p^{\mathcal{D}}$  и  $\|F(D_j x(\cdot))(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \leq \delta, j = 1, \dots, l$ . Если функция  $\widehat{x}(\cdot)$  такова, что  $F\widehat{x}(\xi) = \varepsilon(\xi)e^{-i(t,\xi)}Fx(\xi)$ , где

$$\varepsilon(\xi) = \begin{cases} \frac{\overline{\psi(\xi)Fx(\xi)}}{|\psi(\xi)Fx(\xi)|}, & \psi(\xi)Fx(\xi) \neq 0, \\ 0, & \psi(\xi)Fx(\xi) = 0, \end{cases}$$

то  $\widehat{x}(\cdot) \in W_p^{\mathcal{D}}, \|F(D_j \widehat{x}(\cdot))(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \leq \delta, j = 1, \dots, l$ , и

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} \psi(\xi)F\widehat{x}(\xi)e^{i(t,\xi)} d\xi \right| = \int_{\mathbb{R}^d} |\psi(\xi)Fx(\xi)| d\xi.$$

Следовательно,

$$E_{p\infty}(\Lambda, \mathcal{D}) \geq \frac{1}{(2\pi)^d} \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_p^{\mathcal{D}} \\ \|F(D_j x(\cdot))(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \leq \delta, j=1, \dots, l}} \int_{\mathbb{R}^d} |\psi(\xi)Fx(\xi)| d\xi.$$

Из (2.3) следует, что

$$E_{p\infty}(\Lambda, \mathcal{D}) \geq \frac{1}{(2\pi)^d} E(p, 1, 2),$$

если в задаче о нахождении  $E(p, 1, 2)$  функции  $\varphi_j(\cdot)$  заменить на функции  $(2\pi)^{-d/2}\varphi_j(\cdot), j = l + 1, \dots, n$ . Из теоремы 3 вытекает, что

$$E_{p\infty}(\Lambda, \mathcal{D}) \geq \frac{1}{(2\pi)^{d(1+\gamma_1)/2}} C_4 \delta_1^\gamma \Delta^{1-\gamma_1}.$$

Из той же теоремы следует, что

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\psi(\xi)F(\xi) - \widehat{m}_1(y(\cdot))(\xi)| d\xi \leq E(p, 1, 2),$$

где

$$\widehat{m}_1(y(\cdot))(\xi) = k_1(\widehat{\xi}_1^{1/(\nu_1 - \nu + d(1/2 - 1/p))}) \xi \frac{\psi(\xi)}{s_{p,l}(\xi)} \sum_{j=1}^l \frac{|\varphi_j(\xi)|^p}{\varphi_j(\xi)} y_j(\xi).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(\xi)F(\xi)e^{i(t,\xi)} d\xi - \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{m}_1(y(\cdot))(\xi)e^{i(t,\xi)} d\xi \right| \\ & \leq \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\psi(\xi)F(\xi) - \widehat{m}_1(y(\cdot))(\xi)| d\xi \leq \frac{1}{(2\pi)^d} E(p, 1, 2) \leq E_{p\infty}(\Lambda, \mathcal{D}). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что метод (4.2) является оптимальным.

Теорема доказана.

Аналогично следствию 1 получаем

**СЛЕДСТВИЕ 5.** Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда для всех  $x \in X_p$  имеет место точное неравенство

$$\| \Lambda x(\cdot) \|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{C_4}{(2\pi)^{d(1+\gamma_1)/2}} \max_{1 \leq j \leq l} \| F(D_j x(\cdot))(\cdot) \|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^{\gamma_1} \max_{l+1 \leq j \leq n} \| D_j x(\cdot) \|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{1-\gamma_1}.$$

Обозначим через  $\Lambda_\theta$  оператор  $\Lambda$ , определенный равенством (4.1) для  $\psi(\cdot) = \psi_\theta(\cdot)$ . Отметим, что  $\Lambda_2 = -\Delta$ , где  $\Delta$  – оператор Лапласа. Через  $\Lambda_\theta^{\eta/2}$  обозначим оператор  $\Lambda$ , определенный равенством (4.1) для  $\psi(\cdot) = \psi_\theta^{\eta/2}(\cdot)$ .

Пусть  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}_+^d$ . Определим оператор  $D^\alpha$  (производная по Вейлю порядка  $\alpha$ ) равенством

$$D^\alpha x(\cdot) = F^{-1}((i\xi)^\alpha Fx(\xi))(\cdot),$$

где  $(i\xi)^\alpha = (i\xi_1)^{\alpha_1} \dots (i\xi_d)^{\alpha_d}$ . Ясно, что если  $x(\cdot)$  – достаточно гладкая функция на  $\mathbb{R}^d$ ,  $t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d$  и  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ , то

$$D^\alpha x(t) = \frac{\partial x^{\alpha_1 + \dots + \alpha_d}(t)}{\partial t_1^{\alpha_1} \dots \partial t_d^{\alpha_d}}.$$

Пусть  $\Lambda = \Lambda_\theta^{\eta/2}$ ,

$$\mathcal{D} = (D^{\nu e_1}, \dots, D^{\nu e_d}, D^{\nu_1 e_1}, \dots, D^{\nu_1 e_d}), \quad (4.3)$$

где  $e_j$ ,  $j = 1, \dots, d$ , – стандартный базис в  $\mathbb{R}^d$ . Для величины  $I$  из теоремы 4 имеем

$$I = \int_{\Pi^{d-1}} \frac{(\sum_{k=1}^d \tilde{t}_k^\theta(\omega))^{q_1 \eta / \theta} J(\omega) d\omega}{(\sum_{k=1}^d \tilde{t}_k^{\nu}(\omega))^{q_1 \gamma_1 / p} (\sum_{k=1}^d \tilde{t}_k^{2\nu_1}(\omega))^{q_1(1-\gamma_1)/2}}. \quad (4.4)$$

Аналогично тому, как это было сделано ранее (см. (3.3)), доказывается, что  $I < \infty$ . Аналогичным образом доказываются равенства  $I'_1 = \dots = I'_l$  и  $I'_{l+1} = \dots = I'_n$  для соответствующих весов. Таким образом, веса (3.2) удовлетворяют условиям теоремы 4.

**СЛЕДСТВИЕ 6.** Пусть  $1 < p < \infty$  и  $0 \leq \nu - d(1 - 1/p) < \eta < \nu_1 - d/2$ . Тогда имеет место точное неравенство

$$\begin{aligned} & \| \Lambda_\theta^{\eta/2} x(\cdot) \|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq \frac{C_5}{(2\pi)^{d(1+\gamma_1)/2}} \max_{1 \leq j \leq d} \| F(D^{\nu e_j} x(\cdot))(\cdot) \|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^{\gamma_1} \max_{1 \leq j \leq d} \| D^{\nu_1 e_j} x(\cdot) \|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{1-\gamma_1}, \end{aligned}$$

где

$$C_5 = \left( \frac{d}{\gamma_1} \right)^{\gamma_1/p} \left( \frac{d}{1-\gamma_1} \right)^{(1-\gamma_1)/2} \left( \frac{B(q_1 \gamma_1 / p, q_1(1-\gamma_1)/2) I}{(\nu_1 - \nu + d(1/2 - 1/p))(2\gamma_1 + (1-\gamma_1)p)} \right)^{1/q_1},$$

а  $I$  определено равенством (4.4).

Сформулируем следствие 6 для случая, когда  $p = 2$ . Положим

$$\gamma_2 = \frac{\nu_1 - \eta - d/2}{\nu_1 - \nu}.$$

Воспользуемся тем, что

$$\|F(D^{\nu e_j} x(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = (2\pi)^{d/2} \|D^{\nu e_j} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

а, кроме того, известным равенством

$$B(a, 1 - a) = \frac{\pi}{\sin \pi a}.$$

**СЛЕДСТВИЕ 7.** Пусть  $0 \leq \nu - d/2 < \eta < \nu_1 - d/2$ . Тогда имеет место точное неравенство

$$\|\Lambda_\theta^{\eta/2} x(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{C_6}{(2\pi)^{d/2}} \max_{1 \leq j \leq d} \|D^{\nu e_j} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{\gamma_2} \max_{1 \leq j \leq d} \|D^{\nu_1 e_j} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{1-\gamma_2},$$

где

$$C_6 = \gamma_2^{-\gamma_2/2} (1 - \gamma_2)^{-(1-\gamma_2)/2} \left( \frac{\pi d I_0}{2(\nu_1 - \nu) \sin \pi \gamma_2} \right)^{1/2},$$

а

$$I_0 = \int_{\Pi^{d-1}} \frac{(\sum_{k=1}^d \tilde{t}_k^\theta(\omega))^{2\eta/\theta} J(\omega) d\omega}{(\sum_{k=1}^d \tilde{t}_k^{2\nu}(\omega))^{\gamma_2} (\sum_{k=1}^d \tilde{t}_k^{2\nu_1}(\omega))^{1-\gamma_2}}.$$

При  $p = q = 2$  будем рассматривать несколько измененную задачу восстановления. Пусть

$$\mathcal{W} = \{x(\cdot) \in S^d : (i\xi_j)^\nu Fx(\xi) \in L_2(\mathbb{R}^d), j = 1, \dots, d, \\ (i\xi_j)^{\nu_1} Fx(\xi) \in L_2(\mathbb{R}^d), j = 1, \dots, d\}.$$

Рассмотрим задачу восстановления оператора  $\Lambda_\theta^{\eta/2}$  по неточно заданным производным  $D^{\nu e_1}, \dots, D^{\nu e_d}, D^{\nu_1 e_1}, \dots, D^{\nu_1 e_d}$ . Погрешностью метода восстановления  $m : (L_2(\mathbb{R}^d))^{2d} \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$  назовем величину

$$e(\Lambda_\theta^{\eta/2}, \mathcal{D}, m) = \sup_{\substack{x(\cdot) \in \mathcal{W}, y(\cdot) \in (L_2(\mathbb{R}^d))^{2d} \\ \|D^{\nu e_j} x(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta, j=1, \dots, d \\ \|D^{\nu_1 e_j} x(\cdot) - y_j^1(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \Delta, j=1, \dots, d}} \|\Lambda_\theta^{\eta/2} x(\cdot) - m(y(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

$y(\cdot) = (y_1(\cdot), \dots, y_d, y_1^1(\cdot), \dots, y_d^1(\cdot))$ , а оператор  $\mathcal{D}$  определен равенством (4.3). Величина

$$E(\Lambda_\theta^{\eta/2}, \mathcal{D}) = \inf_{m : (L_2(\mathbb{R}^d))^{2d} \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} e(\Lambda_\theta^{\eta/2}, \mathcal{D}, m)$$

называется погрешностью оптимального восстановления, а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным.

Положим

$$\gamma_3 = \frac{\nu_1 - \eta}{\nu_1 - \nu}.$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть  $0 < \theta/2 \leq \nu < \eta < \nu_1$ . Тогда

$$E(\Lambda_\theta^{\eta/2}, \mathcal{D}) = d^{\eta/\theta} \delta^{\gamma_3} \Delta^{1-\gamma_3}. \quad (4.5)$$

При этом все методы

$$\widehat{m}(y(\cdot))(\cdot) = F^{-1} \left( \psi_\theta^{\eta/2}(\cdot) \left( \sum_{j=1}^d \alpha_j(\cdot) F y_j(\cdot) + \sum_{j=1}^d \alpha_j^1(\cdot) F y_j^1(\cdot) \right) \right) (\cdot), \quad (4.6)$$

где измеримые функции  $\alpha_j(\cdot)$ ,  $\alpha_j^1(\cdot)$ ,  $j = 1, \dots, d$ , удовлетворяют условиям

$$\sum_{j=1}^d \left( (i\xi_j)^\nu \alpha_j(\xi) + (i\xi_j)^{\nu_1} \alpha_j^1(\xi) \right) = 1, \quad (4.7)$$

$$\psi_\theta^\eta(\xi) \sum_{j=1}^d \left( \frac{|\alpha_j(\xi)|^2}{\lambda} + \frac{|\alpha_j^1(\xi)|^2}{\lambda_1} \right) \leq 1, \quad (4.8)$$

а

$$\lambda = d^{2\eta/\theta-1} \gamma_3 \left( \frac{\Delta}{\delta} \right)^{2(1-\gamma_3)}, \quad \lambda_1 = d^{2\eta/\theta-1} (1-\gamma_3) \left( \frac{\delta}{\Delta} \right)^{2\gamma_3},$$

являются оптимальными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично неравенству (1.2) имеем

$$E(\Lambda_\theta^{\eta/2}, \mathcal{D}) \geq \sup_{\substack{x(\cdot) \in \mathcal{W} \\ \|D^{\nu e_j} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta, j=1, \dots, d \\ \|D^{\nu_1 e_j} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \Delta, j=1, \dots, d}} \|\Lambda_\theta^{\eta/2} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \quad (4.9)$$

Для  $0 < \varepsilon < (\Delta/\delta)^{1/(\nu_1-\nu)}$  положим

$$\widehat{\xi}_\varepsilon = \left( \frac{\Delta}{\delta} \right)^{1/(\nu_1-\nu)} (1, \dots, 1) - (\varepsilon, \dots, \varepsilon), \quad B_\varepsilon = \{\xi \in \mathbb{R}^d: |\xi - \widehat{\xi}_\varepsilon| < \varepsilon\}.$$

Рассмотрим функцию  $x_\varepsilon(\cdot)$ , для которой

$$F x_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} (2\pi)^{d/2} \left( \frac{\delta^{\nu_1}}{\Delta^\nu} \right)^{1/(\nu_1-\nu)} \frac{1}{\sqrt{\text{mes } B_\varepsilon}}, & \xi \in B_\varepsilon, \\ 0, & \xi \notin B_\varepsilon. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|D^{\nu e_j} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 &= \left( \frac{\delta^{\nu_1}}{\Delta^\nu} \right)^{2/(\nu_1-\nu)} \frac{1}{\text{mes } B_\varepsilon} \int_{B_\varepsilon} \xi_j^{2\nu} d\xi \\ &\leq \left( \frac{\delta^{\nu_1}}{\Delta^\nu} \right)^{2/(\nu_1-\nu)} \left( \frac{\Delta}{\delta} \right)^{2\nu/(\nu_1-\nu)} = \delta^2, \quad j = 1, \dots, d. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \|D^{\nu_1 e_j} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 &= \left(\frac{\delta^{\nu_1}}{\Delta^\nu}\right)^{2/(\nu_1-\nu)} \frac{1}{\text{mes } B_\varepsilon} \int_{B_\varepsilon} \xi_j^{2\nu_1} d\xi \\ &\leq \left(\frac{\delta^{\nu_1}}{\Delta^\nu}\right)^{2/(\nu_1-\nu)} \left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^{2\nu_1/(\nu_1-\nu)} = \Delta^2, \quad j = 1, \dots, d. \end{aligned}$$

В силу (4.9) имеем

$$\begin{aligned} E^2(\Lambda_\theta^{\eta/2}, \mathcal{D}) &\geq \|\Lambda_\theta^{\eta/2} x_\varepsilon(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &= \left(\frac{\delta^{\nu_1}}{\Delta^\nu}\right)^{2/(\nu_1-\nu)} \frac{1}{\text{mes } B_\varepsilon} \int_{B_\varepsilon} \psi_\theta^\eta(\xi) d\xi = \left(\frac{\delta^{\nu_1}}{\Delta^\nu}\right)^{2/(\nu_1-\nu)} \psi_\theta^\eta(\tilde{\xi}_\varepsilon), \quad \tilde{\xi}_\varepsilon \in B_\varepsilon. \end{aligned}$$

Устремляя  $\varepsilon$  к нулю, получаем оценку

$$E^2(\Lambda_\theta^{\eta/2}, \mathcal{D}) \geq d^{2\eta/\theta} \delta^{2\gamma_3} \Delta^{2(1-\gamma_3)}.$$

Оценим погрешность метода (4.6). Рассмотрим экстремальную задачу

$$\begin{aligned} \|\Lambda_\theta^{\eta/2} x(\cdot) - \widehat{m}(y(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 &\rightarrow \max, \\ \|D^{\nu e_j} x(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 &\leq \delta^2, \quad j = 1, \dots, d, \\ \|D^{\nu_1 e_j} x(\cdot) - y_j^1(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 &\leq \Delta^2, \quad j = 1, \dots, d. \end{aligned}$$

Переходя к преобразованиям Фурье, приходим к следующей задаче:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \psi_\theta^\eta(\xi) \left| Fx(\xi) - \left( \sum_{j=1}^d \alpha_j(\xi) Fy_j(\xi) + \sum_{j=1}^d \alpha_j^1(\xi) Fy_j^1(\xi) \right) \right|^2 d\xi &\rightarrow \max, \\ \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |(i\xi_j)^\nu Fx(\xi) - Fy_j(\xi)|^2 d\xi &\leq \delta^2, \quad j = 1, \dots, d, \\ \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |(i\xi_j)^{\nu_1} Fx(\xi) - Fy_j^1(\xi)|^2 d\xi &\leq \Delta^2, \quad j = 1, \dots, d. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Положим

$$z_j(\xi) = (i\xi_j)^\nu Fx(\xi) - Fy_j(\xi), \quad z_j^1(\xi) = (i\xi_j)^{\nu_1} Fx(\xi) - Fy_j^1(\xi), \quad j = 1, \dots, d.$$

Тогда с учетом условия (4.7) задача (4.10) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \psi_\theta^\eta(\xi) \left| \sum_{j=1}^d (\alpha_j(\xi) z_j(\xi) + \alpha_j^1(\xi) z_j^1(\xi)) \right|^2 d\xi &\rightarrow \max, \\ \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |z_j(\xi)|^2 d\xi &\leq \delta^2, \quad j = 1, \dots, d, \\ \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |z_j^1(\xi)|^2 d\xi &\leq \Delta^2, \quad j = 1, \dots, d. \end{aligned}$$

Из неравенства Коши–Буняковского следует, что

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^d (\alpha_j(\xi) z_j(\xi) + \alpha_j^1(\xi) z_j^1(\xi)) \right|^2 \\ & \leq \sum_{j=1}^d \left( \frac{|\alpha_j(\xi)|^2}{\lambda} + \frac{|\alpha_j^1(\xi)|^2}{\lambda_1} \right) \sum_{j=1}^d (\lambda |z_j(\xi)|^2 + \lambda_1 |z_j^1(\xi)|^2). \end{aligned}$$

Применяя это неравенство, получаем оценку

$$\begin{aligned} & \|\Lambda_\theta^{\eta/2} x(\cdot) - \widehat{m}(y(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ & \leq \text{vraisup}_{\xi \in \mathbb{R}^d} S(\xi) \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j=1}^d (\lambda |z_j(\xi)|^2 + \lambda_1 |z_j^1(\xi)|^2) d\xi, \end{aligned}$$

где

$$S(\xi) = \psi_\theta^\eta(\xi) \sum_{j=1}^d \left( \frac{|\alpha_j(\xi)|^2}{\lambda} + \frac{|\alpha_j^1(\xi)|^2}{\lambda_1} \right).$$

Из условия (4.8) вытекает, что  $S(\xi) \leq 1$ . Тем самым для погрешности метода  $\widehat{m}(y(\cdot))(\cdot)$  имеем

$$\begin{aligned} e(\Lambda_\theta^{\eta/2}, \mathcal{D}, \widehat{m}) & \leq \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j=1}^d (\lambda |z_j(\xi)|^2 + \lambda_1 |z_j^1(\xi)|^2) d\xi \\ & \leq d\lambda\delta^2 + d\lambda_1\Delta^2 = d^{2\eta/\theta} \delta^{2\gamma_3} \Delta^{2(1-\gamma_3)} \leq E^2(\Lambda_\theta^{\eta/2}, \mathcal{D}). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает оптимальность метода  $\widehat{m}(y(\cdot))(\cdot)$  и равенство (4.5).

Остается доказать существование функций  $\alpha_j(\cdot)$ ,  $\alpha_j^1(\cdot)$ ,  $j = 1, \dots, d$ , удовлетворяющих условиям (4.7) и (4.8). Положим

$$\begin{aligned} \alpha_j(\xi) & = \frac{\lambda(-i\xi_j)^\nu}{\lambda \sum_{j=1}^d |\xi_j|^{2\nu} + \lambda_1 \sum_{j=1}^d |\xi_j|^{2\nu_1}}, \\ \alpha_j^1(\xi) & = \frac{\lambda_1(-i\xi_j)^{\nu_1}}{\lambda \sum_{j=1}^d |\xi_j|^{2\nu} + \lambda_1 \sum_{j=1}^d |\xi_j|^{2\nu_1}}, \quad j = 1, \dots, d. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Нетрудно убедиться, что условие (4.7) выполнено. Докажем, что условие (4.8) также выполнено. Имеем

$$\psi_\theta^\eta(\xi) \sum_{j=1}^d \left( \frac{|\alpha_j(\xi)|^2}{\lambda} + \frac{|\alpha_j^1(\xi)|^2}{\lambda_1} \right) = \frac{\psi_\theta^\eta(\xi)}{\lambda \sum_{j=1}^d |\xi_j|^{2\nu} + \lambda_1 \sum_{j=1}^d |\xi_j|^{2\nu_1}}. \quad (4.12)$$

Так как  $\theta \leq 2\nu$ , то из неравенства Гёльдера следует, что

$$\sum_{j=1}^d |\xi_j|^\theta \leq \left( \sum_{j=1}^d |\xi_j|^{2\nu} \right)^{\theta/(2\nu)} d^{1-\theta/(2\nu)}.$$

Положив  $\rho = (|\xi_1|^\theta + \dots + |\xi_d|^\theta)^{1/\theta}$ , получим

$$\sum_{j=1}^d |\xi_j|^{2\nu} \geq \rho^{2\nu} d^{1-2\nu/\theta}.$$

Аналогично получаем, что

$$\sum_{j=1}^d |\xi_j|^{2\nu_1} \geq \rho^{2\nu_1} d^{1-2\nu_1/\theta}.$$

Следовательно,

$$\frac{\psi_\theta^\eta(\xi)}{\lambda \sum_{j=1}^d |\xi_j|^{2\nu} + \lambda_1 \sum_{j=1}^d |\xi_j|^{2\nu_1}} \leq \frac{\rho^{2\eta}}{\lambda \rho^{2\nu} d^{1-2\nu/\theta} + \lambda_1 \rho^{2\nu_1} d^{1-2\nu_1/\theta}}.$$

Рассмотрим функцию

$$f(\rho) = -\rho^{2\eta} + \lambda \rho^{2\nu} d^{1-2\nu/\theta} + \lambda_1 \rho^{2\nu_1} d^{1-2\nu_1/\theta} = \rho^{2\nu} g(\rho),$$

где

$$g(\rho) = -\rho^{2(\eta-\nu)} + d^{2(\eta-\nu)/\theta} \gamma_3 \left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^{2(1-\gamma_3)} + d^{2(\eta-\nu_1)/\theta} (1-\gamma_3) \left(\frac{\delta}{\Delta}\right)^{2\gamma_3} \rho^{2(\nu_1-\nu)}.$$

Имеем

$$g\left(d^{1/\theta} \left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^{1/(\nu_1-\nu)} s^{1/(2(\nu_1-\nu))}\right) = d^{2(\eta-\nu)/\theta} \left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^{2(1-\gamma_3)} g_1(s),$$

где

$$g_1(s) = -s^{1-\gamma_3} + \gamma_3 + (1-\gamma_3)s.$$

Нетрудно убедиться, что функция  $g_1(\cdot)$  на  $[0, +\infty)$  достигает минимума в точке  $s_0 = 1$ , кроме того,  $g_1(s_0) = 0$ . Таким образом,  $g_1(s) \geq 0$  для всех  $s \geq 0$ . Следовательно,  $f(\rho) \geq 0$ . Из этого неравенства вытекает, что

$$\frac{\psi_\theta^\eta(\xi)}{\lambda \sum_{j=1}^d |\xi_j|^{2\nu} + \lambda_1 \sum_{j=1}^d |\xi_j|^{2\nu_1}} \leq 1.$$

Учитывая равенство (4.12), получаем, что функции, определенные равенствами (4.11), удовлетворяют условию (4.8).

Теорема 5 доказана.

Из (4.5) вытекает точное неравенство

$$\|\Lambda_\theta^{\eta/2} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq d^{\eta/\theta} \max_{1 \leq j \leq d} \|D^{\nu e_j} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{\gamma_3} \max_{1 \leq j \leq d} \|D^{\nu_1 e_j} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{1-\gamma_3}.$$

Можно рассмотреть задачу о восстановлении оператора  $\Lambda_\theta^{\eta/2}$  на классе

$$W = \{x(\cdot) \in \mathcal{W} : \|D^{\nu_1 e_j} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \Delta, j = 1, \dots, d\}$$

по приближенно заданным производным  $D^{\nu e_j}$ ,  $j = 1, \dots, d$ , с погрешностью  $\delta$ . Используя схему доказательства, аналогичную применяемой при доказательстве теоремы 5, получаем то же значение для погрешности оптимального восстановления (см. (4.5)) и семейство оптимальных методов

$$\widehat{m}_1(y(\cdot))(\cdot) = F^{-1} \left( \psi_{\theta}^{\eta/2}(\cdot) \sum_{j=1}^d \alpha_j(\cdot) F y_j(\cdot) \right) (\cdot),$$

где  $\alpha_j(\cdot)$ ,  $j = 1, \dots, d$ , – любые функции из семейства функций, удовлетворяющих условиям (4.7) и (4.8). Более подробное описание способа построения семейств оптимальных методов восстановления можно найти в работе [11].

### Список литературы

- [1] F. Carlson, “Une inégalité”, *Ark. Mat. Astr. Fys. B*, **25**:1 (1934), 1–5.
- [2] В. И. Левин, “Точные константы в неравенствах типа Карлсона”, *Докл. АН СССР*, **59**:4 (1948), 635–638.
- [3] Ф. И. Андрианов, “Многомерные аналоги неравенства Карлсона и его обобщений”, *Изв. вузов. Матем.*, 1967, № 1, 3–7.
- [4] S. Barza, V. Burenkov, J. Pečarić, L.-E. Persson, “Sharp multidimensional multiplicative inequalities for weighted  $L_p$  spaces with homogeneous weights”, *Math. Inequal. Appl.*, **1**:1 (1998), 53–67.
- [5] L. Larsson, L. Maligranda, J. Pečarić, L.-E. Persson, *Multiplicative inequalities of Carlson type and interpolation*, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2006, xiv+201 pp.
- [6] Min-Jie Luo, R. K. Raina, “A new extension of Carlson’s inequality”, *Math. Inequal. Appl.*, **19**:2 (2016), 417–424.
- [7] К. Ю. Осипенко, “Optimal recovery of operators and multidimensional Carlson type inequalities”, *J. Complexity*, **32**:1 (2016), 53–73.
- [8] К. Ю. Осипенко, “Inequalities for derivatives with the Fourier transform”, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, **53** (2021), 132–150.
- [9] К. Ю. Осипенко, “Optimal recovery and generalized Carlson inequality for weights with symmetry properties”, *J. Complexity*, **81** (2024), 101807, 35 pp.
- [10] К. Ю. Осипенко, “Оптимальное восстановление линейных операторов в неевклидовых метриках”, *Матем. сб.*, **205**:10 (2014), 77–106; англ. пер.: К. Ю. Осипенко, “Optimal recovery of linear operators in non-Euclidean metrics”, *Sb. Math.*, **205**:10 (2014), 1442–1472.
- [11] К. Ю. Осипенко, “О построении семейств оптимальных методов восстановления линейных операторов”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **88**:1 (2024), 98–120; англ. пер.: К. Ю. Осипенко, “On the construction of families of optimal recovery methods for linear operators”, *Izv. Math.*, **88**:1 (2024), 92–113.

**Константин Юрьевич Осипенко**  
(Konstantin Yu. Osipenko)

Механико-математический факультет,  
Московский государственный университет  
имени М. В. Ломоносова;  
Институт проблем передачи информации  
им. А. А. Харкевича  
Российской академии наук, г. Москва  
E-mail: [kosipenko@yahoo.com](mailto:kosipenko@yahoo.com)

Поступила в редакцию  
27.03.2025 и 05.09.2025