ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2010, т. 269, с. 181–192

УДК 517.51

О восстановлении операторов сверточного типа по неточной информации[1]

©2010 г. Г. Г. Магарил-Ильяев[2], К. Ю. Осипенко[3]

Поступило в декабре 2009 г.

Решается задача оптимального восстановления значений линейного оператора на $\mathbb{R}^d$ или $\mathbb{Z}^d$ по приближенно заданным значениям других операторов. Действие каждого из операторов в образах Фурье есть умножение на некоторую функцию. В качестве одного из приложений приводятся явные выражения для оптимальных методов восстановления решения уравнения теплопроводности (для непрерывной и разностной моделей) в данный момент времени по неточным его измерениям в другие моменты.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Пусть $T=\mathbb{R}^d$ или $\mathbb{Z}^d$, где d — натуральное число, а $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Z}$ — множества действительных и целых чисел. Обозначим $\widehat{T}=\mathbb{R}^d$, если $T=\mathbb{R}^d$, и $\widehat{T}=\mathbb{T}^d$ ($\mathbb{T}$ — единичная окружность), если $T=\mathbb{Z}^d$.

Пусть $\alpha(\cdot)$ — непрерывная функция на $\widehat{T}$ (вообще говоря, комплекснозначная), $R>0$ и $F\colon L_2(T)\to L_2(\widehat{T})$ — преобразование Фурье. Положим

$$X_\alpha^R(T)=\bigl\{x(\cdot)\in L_2(T)\bigm|\alpha^r(\cdot)Fx(\cdot)\in L_2(\widehat{T})\ \forall\, r\in[0,R]\bigr\}.^4$$

Для каждого $r\in[0,R]$ определим оператор $A_r\colon X_\alpha^R(T)\to L_2(T)$ по правилу

$$A_rx(\cdot)=F^{-1}\bigl(\alpha^r(\cdot)Fx(\cdot)\bigr)(\cdot),$$

где $F^{-1}\colon L_2(\widehat{T})\to L_2(T)$ — обратное преобразование Фурье.

В терминах обобщенных функций такой оператор всегда можно записать в виде свертки с некоторым ядром.

Естественные задачи, связанные с восстановлением функций и их производных, решений дифференциальных уравнений и др., сводятся к восстановлению такого сорта операторов. Приведем два простых примера. Пусть $T=\mathbb{R}$ и $\alpha(\xi)=i\xi$. Тогда $A_rx(\cdot)$ — это r-я (дробная) производная по Вейлю. Если $\alpha(\xi)=e^{-\xi^2}$, то $A_rx(\cdot)$ — распределение температуры в бесконечном стержне в момент времени r при начальном распределении $x(\cdot)$.

Мы ставим следующую задачу: восстановить значения оператора A_{r_0} при условии, что приближенно известны значения операторов $A_{r_1},\dots,A_{r_n}$, $r_j\in[0,R]$, $j=0,1,\dots,n$ (в терминах приведенных примеров это восстановление функции и/или ее производных по приближенно

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 08-01-00450, 10-01-00188) и гранта Президента РФ (проект НШ-3233.2008.1).

[2]Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет), Москва, Россия; Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН, Владикавказ, Россия.
E-mail: magaril@mirea.ru

[3]Российский государственный технологический университет им. К.Э. Циолковского (МАТИ), Москва, Россия; Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН, Владикавказ, Россия.
E-mail: kosipenko@yahoo.com

[4]Здесь $\alpha^r(\xi)=|\alpha(\xi)|^r\exp(ir\arg\alpha(\xi))$, где arg — главное значение аргумента.

известным другим производным, восстановление температуры стержня в данный момент времени по приближенным ее измерениям в другие моменты времени).

Точная постановка такова. Пусть известны функции $y_j(\cdot) \in L_2(T)$, $j = 1, \ldots, n$, такие, что

$$\|A_{r_j}x(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(T)} \le \delta_j, \qquad j = 1, \ldots, n, \quad 0 \le r_1 < \ldots < r_n \le R,$$

и $\delta_j > 0$, $j = 1, \ldots, n$. Под задачей оптимального восстановления значений A_{r_0} по данной информации понимается следующее. Любое отображение $m\colon (L_2(T))^n \to L_2(T)$ объявляется методом восстановления. Погрешностью метода m называется величина

$$e_{r_0}(\overline{r}, \overline{\delta}, m) = \sup_{\substack{x(\cdot), y_1(\cdot), \ldots, y_n(\cdot) \in L_2(T) \\ \|A_{r_j}x(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(T)} \le \delta_j,\ j=1,\ldots,n}} \|A_{r_0}x(\cdot) - m(\overline{y}(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(T)};$$

здесь $\overline{r} = (r_1, \ldots, r_n)$, $\overline{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ и $\overline{y}(\cdot) = (y_1(\cdot), \ldots, y_n(\cdot))$. Нас интересуют величина

$$E_{r_0}(\overline{r}, \overline{\delta}) = \inf_{m\colon (L_2(T))^n \to L_2(T)} e_{r_0}(\overline{r}, \overline{\delta}, m),$$

которая называется *погрешностью оптимального восстановления*, и метод $\widehat{m}$, на котором нижняя грань достигается, называемый *оптимальным методом восстановления*.

Для формулировки основного результата понадобятся некоторые определения. Скажем, что непрерывная функция $\alpha(\cdot)$ на $\widehat{T}$ удовлетворяет условию $\mathcal{A}$, если

1) величины $a = \inf_{t \in \widehat{T}} |\alpha(t)|$ в случае $a > 0$ и $b = \sup_{t \in \widehat{T}} |\alpha(t)|$ в случае $b < \infty$ достигаются на $\widehat{T}$;
2) множество функций $y(\cdot) \in L_2(T)$ таких, что

$$F^{-1}\biggl(\frac{\alpha^{r_1}(\cdot)}{|\alpha(\cdot)|^{2r_1} + |\alpha(\cdot)|^{2r_2}} Fy(\cdot)\biggr)(\cdot) \in X^R_\alpha(T)$$

для всех $r_1, r_2 \in [0, R]$, плотно в $L_2(T)$.

На плоскости (t, x) построим следующее множество:

$$M = \operatorname{co}\bigl\{(r_j, \ln(1/\delta_j)),\ 1 \le j \le n\bigr\} + \bigl\{(t, t\ln(1/a)) \mid t \le 0\bigr\} + \bigl\{(t, t\ln(1/b)) \mid t \ge 0\bigr\},$$

где co обозначает выпуклую оболочку соответствующего множества, а второе (третье) слагаемое отсутствует, если $a = 0$ ($b = \infty$). Определим функцию $\theta(\cdot)$ на $[0, R]$ по правилу $\theta(t) = \max\{x \mid (t, x) \in M\}$ и $\theta(t) = -\infty$, если $(t, x) \notin M$ для всех x. Ясно, что $\theta(\cdot)$ — вогнутая ломаная на $[r_1, r_n]$. Пусть $r_{s_1} < \ldots < r_{s_k}$ — ее точки излома (см. рисунок при $a > 0$ и $b < \infty$).

Теорема 1. *Пусть $\alpha(\cdot)$ — непрерывная функция на $\widehat{T}$, удовлетворяющая условию $\mathcal{A}$. Тогда*

$$E_{r_0}(\overline{r}, \overline{\delta}) = e^{-\theta(r_0)}.$$

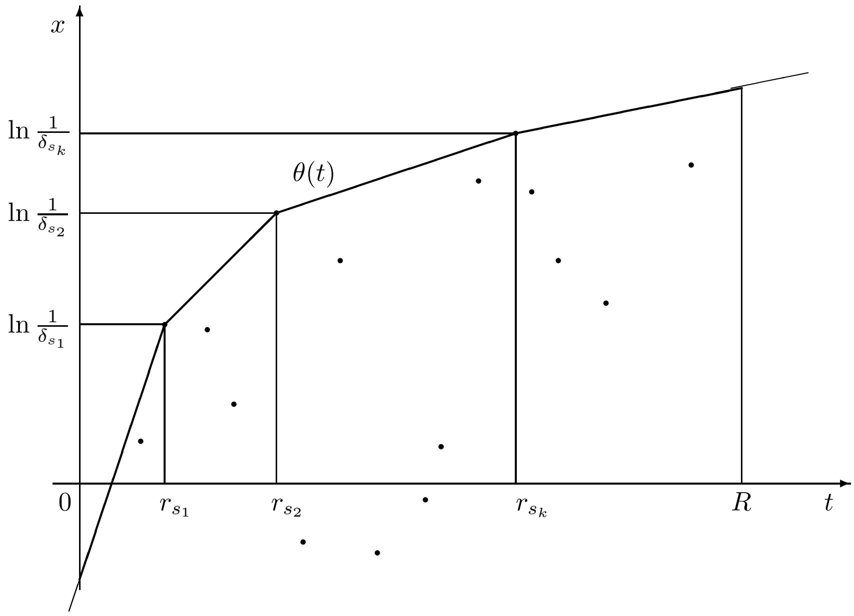
Если $r_0 \in [r_{s_j}, r_{s_{j+1}}]$, $1 \le j \le k-1$, то метод

$$\widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot) = F^{-1}\Bigl(\alpha^{r_0 - r_{s_j}}(\cdot)\beta_j(\cdot)Fy_{s_j}(\cdot) + \alpha^{r_0 - r_{s_{j+1}}}(\cdot)(1 - \beta_j(\cdot))Fy_{s_{j+1}}(\cdot)\Bigr)(\cdot),$$

где

$$\beta_j(\cdot) = \frac{(r_{s_{j+1}} - r_0)\delta^2_{s_{j+1}}|\alpha(\cdot)|^{2r_{s_j}}}{(r_{s_{j+1}} - r_0)\delta^2_{s_{j+1}}|\alpha(\cdot)|^{2r_{s_j}} + (r_0 - r_{s_j})\delta^2_{s_j}|\alpha(\cdot)|^{2r_{s_{j+1}}}},$$

является оптимальным.



Если $a>0$ *и* $0\le r_0<r_{s_1}$, *то метод*

$$\widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot)=F^{-1}\big(\alpha^{r_0-r_{s_1}}(\cdot)Fy_{s_1}(\cdot)\big)(\cdot)$$

оптимален.

Если $b<\infty$ *и* $r_{s_k}<r_0\le R$, *то метод*

$$\widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot)=F^{-1}\big(\alpha^{r_0-r_{s_k}}(\cdot)Fy_{s_k}(\cdot)\big)(\cdot)$$

оптимален.

Отметим, что оптимальный метод линеен, использует не более двух измерений и эти измерения предварительно “сглаживаются”.

2. ПРИМЕРЫ

1. Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности. Рассмотрим задачу об оптимальном восстановлении температуры в $\mathbb{R}^d$ в момент времени τ по ее приближенным измерениям в моменты $t_1,\dots,t_n$. Распространение тепла в $\mathbb{R}^d$ описывается уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u, \qquad (1)$$

где Δ — оператор Лапласа, с заданным начальным распределением температуры

$$u(0,x)=u_0(x), \qquad x\in\mathbb{R}^d. \qquad (2)$$

Мы предполагаем, что $u_0(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^d)$. Единственным решением задачи (1), (2) при $t>0$ является интеграл Пуассона

$$u(t,x)=u(t,x;u_0(\cdot))=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{\mathbb{R}^d}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}}u_0(\xi)\,d\xi,$$

и при этом $u(t,\cdot)\to u_0(\cdot)$ при $t\to0$ в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Пусть в моменты времени $0=t_1<\ldots<t_n$ приближенно известны распределения температур $u(t_1,\cdot),\dots,u(t_n,\cdot)$, т.е. известны функции $y_j(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^d)$ такие, что $\|u(t_j,\cdot)-y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\le$ $\le\delta_j$, где $\delta_j>0$, $j=1,\dots,n$. Нас интересует восстановление температуры в момент времени

$\tau > 0$ на основании информации о функциях $y_1(\cdot), \ldots, y_n(\cdot)$. Здесь погрешность оптимального восстановления имеет вид

$$E_\tau(\overline{t}, \overline{\delta}) = \inf_m \sup_{\substack{u_0(\cdot), y_1(\cdot), \ldots, y_n(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d) \\ \|u(t_j, \cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \delta_j, \ j=1,\ldots,n}} \|u(\tau, \cdot) - m(\overline{y}(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

где нижняя грань берется по всем методам $m\colon (L_2(\mathbb{R}^d))^n \to L_2(\mathbb{R}^d)$ ($\overline{t} = (t_1, \ldots, t_n)$, $\overline{y}(\cdot) = (y_1(\cdot), \ldots, y_n(\cdot))$, а $\overline{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$).

Решение уравнения теплопроводности в образах Фурье имеет вид (см., например, [1])

$$Fu(t, \xi) = e^{-|\xi|^2 t} F u_0(\xi).$$

Тем самым поставленная задача является частным случаем задачи, рассмотренной в разд. 1 для $T = \mathbb{R}^d$ и $\alpha(\xi) = e^{-|\xi|^2}$.

Нетрудно проверить, что условия теоремы 1 выполнены. В данном случае

$$\inf_{\xi \in \mathbb{R}^d} |\alpha(\xi)| = 0, \qquad \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} |\alpha(\xi)| = 1,$$

поэтому

$$M = \operatorname{co}\big\{(t_j, \ln 1/\delta_j),\ 1 \le j \le n\big\} + \big\{(t, 0) \mid t \ge 0\big\}.$$

Функция $\theta(\cdot)$ на $[t_1, +\infty)$ определена равенством $\theta(t) = \max\{x \mid (t, x) \in M\}$. Пусть $t_{s_1} < \ldots < t_{s_k}$ — точки излома $\theta(\cdot)$.

Из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. *Имеет место равенство*

$$E_\tau(\overline{t}, \overline{\delta}) = e^{-\theta(\tau)}.$$

При $\tau \in [t_{s_j}, t_{s_{j+1}}]$, $1 \le j \le k-1$, *метод*

$$\widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot) = F^{-1}\Big(e^{-(\tau - t_{s_j})|\xi|^2} \beta_j(\xi) F y_{s_j}(\xi) + e^{-(\tau - t_{s_{j+1}})|\xi|^2} (1 - \beta_j(\xi)) F y_{s_{j+1}}(\xi)\Big)(\cdot),$$

где

$$\beta_j(\xi) = \frac{(t_{s_{j+1}} - \tau)\delta_{s_{j+1}}^2 e^{-2t_{s_j}|\xi|^2}}{(t_{s_{j+1}} - \tau)\delta_{s_{j+1}}^2 e^{-2t_{s_j}|\xi|^2} + (\tau - t_{s_j})\delta_{s_j}^2 e^{-2t_{s_{j+1}}|\xi|^2}},$$

является оптимальным. При $\tau > t_{s_k}$ *метод*

$$\widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot) = F^{-1}\big(e^{-(\tau - t_{s_k})|\xi|^2} F y_{s_k}(\xi)\big)(\cdot)$$

оптимальный.

2. Восстановление температуры стержня по неточным дискретным данным. Рассмотрим задачу оптимального восстановления температуры в $\mathbb{R}^d$ по неточным ее значениям в дискретном наборе точек в моменты времени $t_1, \ldots, t_n$. Будем считать, что процесс распределения температуры описывается неявной разностной схемой

$$\frac{u_{s+1,j} - u_{sj}}{\tau} = \sum_{p=1}^{d} \frac{u_{s+1,j+e_p} - 2u_{s+1,j} + u_{s+1,j-e_p}}{h^2}, \tag{3}$$

где $u_{sj} = u(s\tau, jh)$ — температура стержня в точке jh, $j \in \mathbb{Z}^d$, в момент времени $s\tau$, $s \in \mathbb{Z}_+$, а $e_1, \ldots, e_d$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^d$.

Предположим, что имеются приближенные значения температуры стержня в точках jh в моменты времени $t_k = r_k\tau$: $y_k = \{y_{kj}\}_{j\in\mathbb{Z}^d}$, где $0 \le r_1 < \ldots < r_n$, $r_k \in \mathbb{Z}_+$, $k = 1,\ldots,n$. Будем предполагать, что $\|u_{r_k} - y_k\|_{l_2} \le \delta_k$, $k = 1,\ldots,n$, где $u_s = \{u_{sj}\}_{j\in\mathbb{Z}^d}$, и для $x = \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}^d}$

$$\|x\|_{l_2} = \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}|x_j|^2\right)^{1/2}.$$

Требуется восстановить значения температуры в тех же точках jh в момент времени $r_0\tau$, $r \ge 0$, зная векторы y_k, $k = 1,\ldots,n$. В качестве методов восстановления будем рассматривать всевозможные отображения $m\colon (l_2)^n \to l_2$. Для данного метода m его погрешностью назовем величину

$$e_{r_0}(\overline{r},\overline{\delta},m) = \sup_{\substack{u_0,y_1,\ldots,y_n\in l_2\\ \|u_{r_k}-y_k\|_{l_2}\le\delta_k,\ k=1,\ldots,n}} \|u_r - m(\overline{y})\|_{l_2},$$

где, как и раньше, $\overline{r} = (r_1,\ldots,r_n)$, $\overline{\delta} = (\delta_1,\ldots,\delta_n)$ и $\overline{y}(\cdot) = (y_1(\cdot),\ldots,y_n(\cdot))$. Величина

$$E_{r_0}(\overline{r},\overline{\delta}) = \inf_{m\colon (l_2)^n\to l_2} e_{r_0}(\overline{r},\overline{\delta},m)$$

называется погрешностью оптимального восстановления, а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным.

Преобразование Фурье для вектора u_s имеет вид

$$Fu_s(\xi) = \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} u_{sj}e^{-i\langle j,\xi\rangle}.$$

Переходя в (3) к образам Фурье, получаем

$$\frac{Fu_{s+1}(\xi) - Fu_s(\xi)}{\tau} = \sum_{p=1}^{d}\frac{e^{i\xi_p}Fu_{s+1}(\xi) - 2Fu_{s+1}(\xi) + e^{-i\xi_p}Fu_{s+1}(\xi)}{h^2},$$

откуда

$$Fu_{s+1}(\xi) = \left(1 + \frac{2\tau}{h^2}\sum_{p=1}^{d}(1-\cos\xi_p)\right)^{-1}Fu_s(\xi).$$

Следовательно,

$$Fu_s(\xi) = \alpha^s(\xi)Fu_0(\xi), \qquad \alpha(\xi) = \left(1 + \frac{2\tau}{h^2}\sum_{p=1}^{d}(1-\cos\xi_p)\right)^{-1}.$$

В рассматриваемом случае

$$a = \inf_{\xi\in\mathbb{T}^d}|\alpha(\xi)| = \left(1 + \frac{4d\tau}{h^2}\right)^{-1}, \qquad b = \sup_{\xi\in\mathbb{T}^d}|\alpha(\xi)| = 1.$$

Поэтому

$$M = \operatorname{co}\bigl\{(r_j,\ln(1/\delta_j)),\ 1\le j\le n\bigr\} + \bigl\{(r,0) \mid r\ge 0\bigr\} + \left\{\left(r, -r\ln\left(1+\frac{4d\tau}{h^2}\right)\right) \Bigm| r\le 0\right\}.$$

Функция $\theta(\cdot)$ на $[0,+\infty)$ определена равенством $\theta(t) = \max\{x \mid (t,x)\in M\}$, а $r_{s_1} < \ldots < r_{s_k}$ — точки излома $\theta(\cdot)$.

Из теоремы 1 непосредственно вытекают равенство для погрешности оптимального метода и вид оптимального метода для соответствующих $\theta(\cdot)$ и $\alpha(\cdot)$.

Если описывать процесс распространения тепла в стержне явной разностной схемой

$$\frac{u_{s+1,j}-u_{sj}}{\tau}=\sum_{p=1}^{d}\frac{u_{s,j+e_p}-2u_{sj}+u_{s,j-e_p}}{h^2},$$

то решение в образах Фурье будет задаваться равенством

$$Fu_s(\xi)=\alpha^s(\xi)Fu_0(\xi),\qquad \alpha(\xi)=1-\frac{2\tau}{h^2}\sum_{p=1}^{d}(1-\cos\xi_p).$$

В этом случае соответствующий результат может быть также легко получен из теоремы 1.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Доказательство теоремы опирается на один факт, касающийся оптимального восстановления линейных операторов. Для его формулировки приведем сначала более общую постановку задачи оптимального восстановления.

Пусть X — векторное пространство, Z — нормированное пространство, $Y_1,\dots,Y_n$ — пространства со скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_{Y_j}$ и соответствующими нормами $\|\cdot\|_{Y_j}$, $I_j\colon X\to Y_j$, $j=1,\dots,n$, — линейные операторы. Рассматривается задача оптимального восстановления линейного оператора $A\colon X\to Z$ на классе

$$W_k=\bigl\{x\in X\colon\ \|I_jx\|_{Y_j}\le\delta_j,\ 1\le j\le k,\ 0\le k<n\bigr\}$$

(при $k=0$ считаем, что $W_0=X$) по информации о значениях операторов $I_{k+1},\dots,I_n$, заданных неточно, т.е. предполагается, что для каждого $x\in W_k$ известен вектор $y=(y_{k+1},\dots,y_n)\in Y_{k+1}\times\ldots\times Y_n$ такой, что

$$\|I_jx-y_j\|_{Y_j}\le\delta_j,\qquad j=k+1,\dots,n.$$

В качестве методов восстановления рассматриваются всевозможные отображения $m\colon Y_{k+1}\times\ldots\times Y_n\to Z$. Погрешностью метода восстановления m называется величина

$$e(A,W_k,I,\delta,m)=\sup_{x\in W_k}\ \sup_{\substack{y=(y_{k+1},\dots,y_n)\in Y_{k+1}\times\ldots\times Y_n\\ \|I_jx-y_j\|_{Y_j}\le\delta_j,\ j=k+1,\dots,n}}\|Ax-m(y)\|_Z.$$

Нас интересуют погрешность оптимального восстановления

$$E(A,W_k,I,\delta)=\inf_{m\colon\, Y_{k+1}\times\ldots\times Y_n\to Z}e(A,W_k,I,\delta,m)$$

и оптимальный метод восстановления $\widehat{m}$, на котором достигается нижняя грань (если таковой существует).

Теорема 3. *Пусть существуют такие числа $\widehat{\lambda}_j\ge0$, $j=1,\dots,n$, что значения задач*[5]

$$\|Ax\|_Z^2\to\max,\qquad \|I_jx\|_{Y_j}^2\le\delta_j^2,\qquad j=1,\dots,n,\qquad x\in X,\tag{4}$$

и

$$\|Ax\|_Z^2\to\max,\qquad \sum_{j=1}^{n}\widehat{\lambda}_j\|I_jx\|_{Y_j}^2\le\sum_{j=1}^{n}\widehat{\lambda}_j\delta_j^2,\qquad x\in X,\tag{5}$$

совпадают.

[5] То есть значения максимизируемых функционалов.

Пусть, далее, $\widetilde{Y}$ *— плотное подмножество в* $Y_{k+1}\times\ldots\times Y_n$ *такое, что для каждого* $y=(y_{k+1},\ldots,y_n)\in\widetilde{Y}$ *существует решение* x_y *задачи*

$$\sum_{j=1}^{k}\widehat{\lambda}_j\|I_jx\|^2_{Y_j}+\sum_{j=k+1}^{n}\widehat{\lambda}_j\|I_jx-y_j\|^2_{Y_j}\to\min,\qquad x\in X, \tag{6}$$

и, кроме того, существует такой линейный непрерывный оператор $\Lambda\colon Y_{k+1}\times\ldots\times Y_n\to Z$,[6] *что* $\Lambda y=Ax_y$ *для всех* $y\in\widetilde{Y}$.

Тогда $E(A,W_k,I,\delta)=S$, *где* S *— общее значение задач* (4) *и* (5), *и метод* $\widehat{m}=\Lambda$ *является оптимальным.*

Доказательство. Оценим сначала снизу величину $E(A,W_k,I,\delta)$. Пусть $x\in X$, $\|I_jx\|_{Y_j}\le$ $\le\delta_j$, $j=1,\ldots,k$, и m — произвольный метод восстановления. Тогда

$$\begin{aligned}2\|Ax\|_Z&=\|Ax-m(0)-(-Ax-m(0))\|_Z\le\|Ax-m(0)\|_Z+\|-Ax-m(0)\|_Z\le\\&\le 2e(A,W_k,I,\delta,m).\end{aligned}$$

Переходя к верхней грани по всем указанным x, а затем к нижней грани по всем m, получаем

$$E(A,W_k,I,\delta)\ge\sup_{\|I_jx\|_{Y_j}\le\delta_j,\ j=1,\ldots,n}\|Ax\|_Z=S.$$

Перейдем к оценке сверху $E(A,W_k,I,\delta)$ и построению оптимального метода. Рассмотрим векторное пространство $E=Y_1\times\ldots\times Y_n$ с полускалярным произведением

$$(y^1,y^2)_E=\sum_{j=1}^{n}\widehat{\lambda}_j(y^1_j,y^2_j)_{Y_j},$$

где $y^1=(y^1_1,\ldots,y^1_n)$, $y^2=(y^2_1,\ldots,y^2_n)$. Тогда экстремальная задача (6) может быть переписана в виде

$$\|\widetilde{I}x-\widetilde{y}\|^2_E\to\min,\qquad x\in X, \tag{7}$$

где $\widetilde{I}x=(I_1x,\ldots,I_nx)$, а $\widetilde{y}=(0,\ldots,0,y_{k+1},\ldots,y_n)$. Нетрудно убедиться, что если x_y — решение задачи (7), то для всех $x\in X$ выполняется равенство $(\widetilde{I}x_y-\widetilde{y},\widetilde{I}x)_E=0$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned}\|\widetilde{I}x-\widetilde{y}\|^2_E&=\|\widetilde{I}x-\widetilde{I}x_y+\widetilde{I}x_y-\widetilde{y}\|^2_E=\\&=\|\widetilde{I}x-\widetilde{I}x_y\|^2_E-2\,\mathrm{Re}\big(\widetilde{I}x-\widetilde{I}x_y,\widetilde{I}x_y-\widetilde{y}\big)_E+\|\widetilde{I}x_y-\widetilde{y}\|^2_E=\\&=\|\widetilde{I}x-\widetilde{I}x_y\|^2_E+\|\widetilde{I}x_y-\widetilde{y}\|^2_E.\end{aligned}$$

Таким образом, для всех $x\in X$

$$\|\widetilde{I}x-\widetilde{I}x_y\|^2_E\le\|\widetilde{I}x-\widetilde{y}\|^2_E=\sum_{j=1}^{k}\widehat{\lambda}_j\|I_jx\|^2_{Y_j}+\sum_{j=k+1}^{n}\widehat{\lambda}_j\|I_jx-y_j\|^2_{Y_j}. \tag{8}$$

Пусть $x\in W_k$ и $y=(y_{k+1},\ldots,y_n)\in Y_{k+1}\times\ldots\times Y_n$ таковы, что $\|I_jx-y_j\|_{Y_j}\le\delta_j$, $j=$ $=k+1,\ldots,n$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует элемент $\widetilde{y}=(\widetilde{y}_{k+1},\ldots,\widetilde{y}_n)\in\widetilde{Y}$ такой, что $\|y_j-\widetilde{y}_j\|_{Y_j}<\varepsilon$, $j=1,\ldots,n$, и тем самым

$$\|I_jx-\widetilde{y}_j\|_{Y_j}\le\|I_jx-y_j\|_{Y_j}+\|y_j-\widetilde{y}_j\|_{Y_j}\le\delta_j+\varepsilon,\qquad j=k+1,\ldots,n.$$

[6]Норма элемента $y=(y_{k+1},\ldots,y_n)\in Y_{k+1}\times\ldots\times Y_n$ определяется как $\|y\|=\big(\sum_{j=k+1}^{n}\|y_j\|^2_{Y_j}\big)^{1/2}$.

Положим $z = x - x_y$. Тогда из (8) следует, что

$$\sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j \|I_j z\|_{Y_j}^2 \le \sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j \widetilde{\delta}_j^2, \tag{9}$$

где $\widetilde{\delta}_j = \delta_j$, если $1 \le j \le k$, и $\widetilde{\delta}_j = \delta_j + \varepsilon$, если $k+1 \le j \le n$. Нетрудно убедиться, что при всех $c_1, c_2 > 0$ справедливо равенство

$$\sup_{\substack{z \in X \\ \sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j \|I_j z\|_{Y_j}^2 \le a^2}} \|Az\|_Z = \frac{c_1}{c_2} \sup_{\substack{x \in X \\ \sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j \|I_j x\|_{Y_j}^2 \le b^2}} \|Ax\|_Z.$$

Поэтому, учитывая (9) и совпадение значений задач (4) и (5), получаем

$$\|Ax - Ax_{\widetilde{y}}\|_Z = \|Az\|_Z \le \sup_{\substack{z \in X \\ \sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j \|I_j z\|_{Y_j}^2 \le \sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j \widetilde{\delta}_j^2}} \|Az\|_Z =$$

$$= \left(\frac{\sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j \widetilde{\delta}_j^2}{\sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j \delta_j^2} \right)^{1/2} \sup_{\substack{z \in X \\ \sum_{j=1}^m \widehat{\lambda}_j \|I_j z\|_{Y_j}^2 \le \sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j \delta_j^2}} \|Ax\|_Z$$

$$= \left(\frac{\sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j \widetilde{\delta}_j^2}{\sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j \delta_j^2} \right)^{1/2} \sup_{\substack{x \in X \\ \|I_j x\|_{Y_j} \le \delta_j,\ j=1,\dots,n}} \|Ax\|_Z.$$

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ следует, что

$$\|Ax - \Lambda y\|_Z \le \sup_{\substack{x \in X \\ \|I_j x\|_{Y_j} \le \delta_j,\ j=1,\dots,n}} \|Ax\|_Z = S.$$

Учитывая доказанную оценку снизу, получаем, что $E(A, W_k, I, \delta) = S$ и $\widehat{m} = \Lambda$ — оптимальный метод. $\square$

Теперь, опираясь на этот результат, докажем теорему 1.

Доказательство теоремы 1. Задача, соответствующая задаче (4) из теоремы 3, имеет вид

$$\|A_{r_0} x(\cdot)\|_{L_2(T)}^2 \to \max, \qquad \|A_{r_j} x(\cdot)\|_{L_2(T)}^2 \le \delta_j^2, \qquad j = 1, \dots, n. \tag{10}$$

Найдем значение этой задачи. Переходя к образам Фурье, будем иметь по теореме Планшереля

$$\int_{\widehat{T}} |\alpha(\xi)|^{2r_0} |Fx(\xi)|^2 \, d\xi \to \max, \qquad \int_{\widehat{T}} |\alpha(\xi)|^{2r_j} |Fx(\xi)|^2 \, d\xi \le \delta_j^2, \qquad j = 1, \dots, n.$$

Нетрудно показать, что в этой задаче нет решения, поэтому рассмотрим ее расширение на множество всех неотрицательных мер $d\mu(\cdot)$ на $\widehat{T}$:

$$\int_{\widehat{T}} |\alpha(\xi)|^{2r_0} \, d\mu(\xi) \to \max, \qquad \int_{\widehat{T}} |\alpha(\xi)|^{2r_j} \, d\mu(\xi) \le \delta_j^2, \qquad j = 1, \dots, n. \tag{11}$$

Это задача линейного (бесконечномерного) программирования. Ее функция Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L}(\mu(\cdot), \lambda) = -\int_{\widehat{T}} |\alpha(\xi)|^{2r_0} \, d\mu(\xi) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(\int_{\widehat{T}} |\alpha(\xi)|^{2r_j} \, d\mu(\xi) - \delta_j^2 \right),$$

где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ — набор множителей Лагранжа.

Если мы найдем допустимую в (11) меру $d\widehat{\mu}(\cdot)$ и множители Лагранжа $\widehat{\lambda}_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$, такие, что ($\widehat{\lambda} = (\widehat{\lambda}_1, \ldots, \widehat{\lambda}_n)$)

$$\min_{d\mu(\cdot)\geq 0} \mathcal{L}(d\mu(\cdot), \widehat{\lambda}) = \mathcal{L}(d\widehat{\mu}(\cdot), \widehat{\lambda}) \tag{12}$$

и

$$\widehat{\lambda}_j \left(\int_{\widehat{T}} |\alpha(\xi)|^{2r_j}\, d\widehat{\mu}(\xi) - \delta_j^2 \right) = 0, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{13}$$

то $d\widehat{\mu}(\cdot)$ будет решением задачи (11). Действительно, пусть $d\mu(\cdot)$ — допустимая мера в (11). Тогда, используя это обстоятельство (и учитывая, что $\widehat{\lambda}_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$), а затем (12) и (13), будем иметь

$$-\int_{\widehat{T}} |\alpha(\xi)|^{2r_0}\, d\mu(\xi) \geq -\int_{\widehat{T}} |\alpha(\xi)|^{2r_0}\, d\mu(\xi) + \sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j \left(\int_{\widehat{T}} |\alpha(\xi)|^{2r_j}\, d\mu(\xi) - \delta_j^2 \right) = \mathcal{L}(d\mu(\cdot), \widehat{\lambda}) \geq$$

$$\geq \mathcal{L}(d\widehat{\mu}(\cdot), \widehat{\lambda}) = -\int_{\widehat{T}} |\alpha(\xi)|^{2r_0}\, d\widehat{\mu}(\xi) + \sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j \left(\int_{\widehat{T}} |\alpha(\xi)|^{2r_j}\, d\widehat{\mu}(\xi) - \delta_j^2 \right) =$$

$$= -\int_{\widehat{T}} |\alpha(\xi)|^{2r_0}\, d\widehat{\mu}(\xi),$$

откуда следует требуемое.

Пусть $r_0 \in [r_{s_j}, r_{s_{j+1}}]$, $1 \leq j \leq k-1$. Предъявим такую допустимую в (11) меру $d\widehat{\mu}(\cdot)$ и набор множителей Лагранжа $\widehat{\lambda}$, что выполняются условия (12) и (13). Положим $d\widehat{\mu}(\xi) = C\delta(\xi - \xi_0)$, где $\delta(\cdot - \xi_0)$ — дельта-функция в точке ξ_0, и выберем C и ξ_0 так, чтобы выполнялись равенства

$$\int_{\widehat{T}} |\alpha(\xi)|^{2r_p}\, d\widehat{\mu}(\xi) = \delta_p^2, \qquad p = s_j, s_{j+1}. \tag{14}$$

Отсюда последует, что

$$C = \delta_{s_j}^{\frac{2r_{s_j+1}}{r_{s_{j+1}}-r_{s_j}}} \delta_{s_{j+1}}^{-\frac{2r_{s_j}}{r_{s_{j+1}}-r_{s_j}}}, \qquad \ln\frac{1}{|\alpha(\xi_0)|} = \frac{\ln(1/\delta_{s_{j+1}}) - \ln(1/\delta_{s_j})}{r_{s_{j+1}} - r_{s_j}}. \tag{15}$$

Из вида множества M вытекает, что при $a > 0$ и конечном b

$$\ln\frac{1}{b} < \frac{\ln(1/\delta_{s_{j+1}}) - \ln(1/\delta_{s_j})}{r_{s_{j+1}} - r_{s_j}} < \ln\frac{1}{a}.$$

Следовательно, в силу непрерывности $\alpha(\cdot)$ найдется точка $\xi_0 \in \widehat{T}$, для которой выполнено второе равенство (15). Нетрудно убедиться в существовании такой точки и в случае, когда $a = 0$ и/или $b = \infty$.

Положим $\widehat{\lambda}_k = 0$, $k \neq s_j, s_{j+1}$, а $\widehat{\lambda}_{s_j}$ и $\widehat{\lambda}_{s_{j+1}}$ выберем так, чтобы прямая $y = \widehat{\lambda}_{s_j} + \widehat{\lambda}_{s_{j+1}}x$ была касательной к кривой

$$\begin{cases} y = |\alpha(\xi)|^{2(r_0 - r_{s_j})}, \\ x = |\alpha(\xi)|^{2(r_{s_{j+1}} - r_{s_j})} \end{cases} \tag{16}$$

в точке ξ_0. Простой подсчет показывает, что в этом случае

$$\widehat{\lambda}_{s_j} = \frac{r_{s_{j+1}} - r_0}{r_{s_{j+1}} - r_{s_j}} \left(\frac{\delta_{s_{j+1}}}{\delta_{s_j}} \right)^{\frac{2(r_0 - r_{s_j})}{r_{s_{j+1}} - r_{s_j}}}, \qquad \widehat{\lambda}_{s_{j+1}} = \frac{r_0 - r_{s_j}}{r_{s_{j+1}} - r_{s_j}} \left(\frac{\delta_{s_j}}{\delta_{s_{j+1}}} \right)^{\frac{2(r_{s_{j+1}} - r_0)}{r_{s_{j+1}} - r_{s_j}}}. \tag{17}$$

Ясно, что это положительные числа и поэтому с данной мерой $\widehat{\mu}(\cdot)$ и набором $\widehat{\lambda}$ условия (13) выполняются.

Так как кривая (16) вогнута, то для всех $\xi \in \widehat{T}$

$$|\alpha(\xi)|^{2(r_0 - r_{s_j})} \le \widehat{\lambda}_{s_j} + \widehat{\lambda}_{s_{j+1}} |\alpha(\xi)|^{2(r_{s_{j+1}} - r_{s_j})}$$

или, равносильно, для всех $\xi \in \widehat{T}$

$$-|\alpha(\xi)|^{2r_0} + \widehat{\lambda}_{s_j} |\alpha(\xi)|^{2r_{s_j}} + \widehat{\lambda}_{s_{j+1}} |\alpha(\xi)|^{2r_{s_{j+1}}} \ge 0.$$

Отсюда нетрудно вывести, что выполняется условие (12).

Наконец, так как для любых $p = 1, \dots, n$

$$\int\limits_{\widehat{T}} |\alpha(\xi)|^{2r_p} \, d\widehat{\mu}(\xi) = C|\alpha(\xi_0)|^{2r_p} = \delta_{s_j}^{2\frac{r_{s_{j+1}} - r_p}{r_{s_{j+1}} - r_{s_j}}} \delta_{s_{j+1}}^{2\frac{r_p - r_{s_j}}{r_{s_{j+1}} - r_{s_j}}} = e^{-2\theta_j(r_p)} \le e^{-2\theta(r_p)} \le \delta_p^2,$$

где $\theta_j(\cdot)$ — прямая, проходящая через точки $(r_{s_j}, \ln(1/\delta_{s_j}))$ и $(r_{s_{j+1}}, \ln(1/\delta_{s_{j+1}}))$, то мера $d\widehat{\mu}(\cdot)$ допустима в (11).

Таким образом, $d\widehat{\mu}(\cdot)$ — решение задачи (11) и ее значение таково:

$$\int\limits_{\widehat{T}} |\alpha(\xi)|^{2r_0} \, d\widehat{\mu}(\xi) = C|\alpha(\xi_0)|^{2r_0} = \delta_{s_j}^{2\frac{r_{s_{j+1}} - r_0}{r_{s_{j+1}} - r_{s_j}}} \delta_{s_{j+1}}^{2\frac{r_0 - r_{s_j}}{r_{s_{j+1}} - r_{s_j}}} = e^{-2\theta(r_0)}.$$

Рассмотрим случай, когда $r_{s_k} < r_0 \le R$. Пусть сначала $b < \infty$. Положим

$$\widehat{\lambda}_{s_k} = b^{2(r_0 - r_{s_k})}, \qquad \widehat{\lambda}_j = 0, \quad j \ne s_k, \qquad d\widehat{\mu}(\cdot) = \delta_{s_k}^2 b^{-2r_{s_k}} \delta(\cdot - \xi_b),$$

где ξ_b — точка, в которой достигается верхняя грань $|\alpha(\cdot)|$ (напомним, равная b). Нетрудно проверяется, что выполнены условия (12) и (13) и мера допустима, поскольку для всех $p = 1, \dots, n$

$$\int\limits_{\widehat{T}} |\alpha(\xi)|^{2r_p} \, d\widehat{\mu}(\xi) = \delta_{s_k}^2 b^{2(r_p - r_{s_k})} = e^{-2\theta_k(r_p)} \le e^{-2\theta(r_p)} \le \delta_p^2,$$

где $\theta_k(\cdot)$ — прямая, совпадающая с ломаной $\theta(\cdot)$ при $r > r_{s_k}$. Таким образом, $d\widehat{\mu}(\cdot)$ — решение задачи (11), а ее значение равно

$$\int\limits_{\widehat{T}} |\alpha(\xi)|^{2r_0} \, d\widehat{\mu}(\xi) = \delta_{s_k}^2 b^{2(r_0 - r_{s_k})} = e^{-2\theta(r_0)}.$$

Пусть теперь $b = \infty$, тогда $s_k = n$. Существует последовательность ξ_l такая, что $b_l = |\alpha(\xi_l)| \to \infty$ при $l \to \infty$. Положим $d\widehat{\mu}_l(\cdot) = \delta_n^2 b_l^{-2r_n} \delta(\cdot - \xi_l)$. Если уравнение $\theta(\cdot)$ при $r_{s_{k-1}} < r \le r_{s_k} = r_n$ имеет вид $\theta(r) = \beta(r - r_n) + \ln(1/\delta_n)$, то при $b_l > e^{-\beta}$

$$\int\limits_{\widehat{T}} |\alpha(\xi)|^{2r_p} \, d\widehat{\mu}_l(\xi) = \delta_n^2 b_l^{2(r_p - r_n)} \le e^{-2\theta(r_p)} \le \delta_p^2.$$

Тем самым меры $d\widehat{\mu}_l(\cdot)$ являются допустимыми, а

$$\int\limits_{\widehat{T}} |\alpha(\xi)|^{2r_0}\, d\widehat{\mu}_l(\xi) = \delta_n^2 b_l^{2(r_0-r_n)} \to \infty$$

при $l\to\infty$. Отсюда следует, что значение задачи (11) равно $+\infty$.

При $r_1 < r_0 < r_{s_1}$ (в этом случае $a>0$) положим

$$\widehat{\lambda}_{s_1} = a^{2(r_0-r_{s_1})}, \qquad \widehat{\lambda}_j = 0, \quad j\ne s_1, \qquad d\widehat{\mu}(\cdot) = \delta_{s_1}^2 a^{-2r_{s_1}}\delta(\cdot-\xi_a),$$

где ξ_a — точка, где достигается нижняя грань $|\alpha(\cdot)|$. Аналогично предыдущим случаям показывается, что мера $d\widehat{\mu}(\cdot)$ — решение задачи (11) и значение ее равно $e^{-2\theta(r_0)}$.

Когда $a=0$, значение задачи (11) равно $+\infty$ и рассуждения здесь такие же, как в случае $b=\infty$.

Итак, для всех возможных случаев найдено значение задачи (11). Осуществляя стандартную аппроксимацию δ-функции δ-образными последовательностями, получаем, что значение этой задачи совпадает со значением задачи (10). Покажем теперь, что в свою очередь значение задачи (10) совпадает со значением такой задачи:

$$\|A_{r_0}x(\cdot)\|^2_{L_2(T)} \to \max, \qquad \sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j \|A_{r_j}x(\cdot)\|^2_{L_2(T)} \le \sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j\delta_j^2, \tag{18}$$

где $(\widehat{\lambda}_1,\dots,\widehat{\lambda}_n)$ — найденный выше набор множителей Лагранжа. Эта задача соответствует задаче (5) из теоремы 3.

Снова переходя к образам Фурье, а затем к неотрицательным мерам, редуцируем (18) к такой задаче:

$$\int\limits_{\widehat{T}} |\alpha(\xi)|^{2r_0}\, d\mu(\xi) \to \max, \qquad \int\limits_{\widehat{T}} \sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j |\alpha(\xi)|^{2r_j}\, d\mu(\xi) \le \sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j\delta_j^2. \tag{19}$$

Ее функция Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L}_1(d\mu(\cdot),\nu) = -\int\limits_{\widehat{T}} |\alpha(\xi)|^{2r_0}\, d\mu(\xi) + \nu\left(\int\limits_{\widehat{T}} \sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j |\alpha(\xi)|^{2r_j}\, d\mu(\xi) - \sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j\delta_j^2\right).$$

Если $d\widehat{\mu}(\cdot)$ — решение задачи (11) (мера $d\widehat{\mu}(\cdot)$, очевидно, допустима в (19)) и $\widehat{\nu}=1$, то нетрудно видеть, что выполнены аналоги условий (12) и (13) для данного случая и, значит, $d\widehat{\mu}(\cdot)$ — решение задачи (19). Далее, по тем же соображениям, что и выше, значения задач (19) и (18) совпадают. Но поскольку совпадают значения задач (11) и (19), то совпадают значения задач (18) и (10).

Теперь построим оптимальный метод для случая, когда $r_0\in[r_{s_j}, r_{s_{j+1}}]$. Рассмотрим в соответствии с общей теоремой 3 задачу

$$\widehat{\lambda}_{s_j}\|A_{r_{s_j}}x(\cdot) - y_{s_j}(\cdot)\|^2_{L_2(T)} + \widehat{\lambda}_{s_{j+1}}\|A_{r_{s_{j+1}}}x(\cdot) - y_{s_{j+1}}(\cdot)\|^2_{L_2(T)} \to \min, \qquad x(\cdot)\in X^R_\alpha(T). \tag{20}$$

Для всех $y_{s_j}(\cdot)$, $y_{s_{j+1}}(\cdot)$ из плотного множества в $(L_2(T))^n$ (см. условие $\mathcal{A}$, которому удовлетворяет $\alpha(\cdot)$) преобразование Фурье решения $\widehat{x}(\cdot)$ задачи (20) записывается в виде

$$F\widehat{x}(\cdot) = \frac{\widehat{\lambda}_{s_j}\overline{\alpha^{r_{s_j}}(\cdot)}Fy_{s_j}(\cdot) + \widehat{\lambda}_{s_{j+1}}\overline{\alpha^{r_{s_{j+1}}}(\cdot)}Fy_{s_{j+1}}(\cdot)}{\widehat{\lambda}_{s_j}|\alpha(\cdot)|^{2r_{s_j}} + \widehat{\lambda}_{s_{j+1}}|\alpha(\cdot)|^{2r_{s_{j+1}}}}.$$

Этим определен линейный непрерывный оператор из плотного множества в $(L_2(T))^n$ в $L_2(T)$. Беря его суперпозицию с оператором A_{r_0} и продолжая ее по непрерывности на все пространство $(L_2(T))^n$ (подставляя еще вместо множителей Лагранжа их выражения по формулам (17)), получаем оптимальный метод для рассматриваемой ситуации.

Случаи, когда $a > 0$, $0 \le r_0 < r_{s_1}$ и $b < \infty$, $r_{s_k} < r_0 \le R$, рассматриваются вполне аналогично. $\square$

Сделаем несколько заключительных замечаний. Если в задачах восстановления линейных функционалов получены достаточно общие результаты (см., например, [2–4]), то для аналогичных задач с линейными операторами удается строить оптимальные методы, привлекая еще и соображения, связанные со спецификой евклидовых пространств. Первые результаты такого плана были получены в [5]. Дальнейшее развитие эта тематика получила в работах авторов [6–8], где использовался подход, основанный на общих принципах теории экстремума.

Применение теории оптимального восстановления линейных операторов к задачам математической физики можно найти в работах [9–13]. Результат, приведенный в теореме 2 в качестве одного из примеров применения общей теоремы 3, был доказан в работе [14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.
2. *Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю.* Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным // Мат. заметки. 1991. Т. 50, №6. С. 85–93.
3. *Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.* О неравенствах для производных колмогоровского типа // Мат. сб. 1997. Т. 188, №12. С. 73–106.
4. *Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.* Выпуклый анализ и его приложения. М.: Эдиториал УРСС, 2000.
5. *Melkman A.A., Micchelli C.A.* Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data // SIAM J. Numer. Anal. 1979. V. 16. P. 87–105.
6. *Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью // Мат. сб. 2002. Т. 193, №3. С. 79–100.
7. *Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функц. анализ и его прил. 2003. Т. 37, №3. С. 51–64.
8. *Осипенко К.Ю.* Неравенство Харди–Литтлвуда–Полиа для аналитических функций из пространств Харди–Соболева // Мат. сб. 2006. Т. 197, №3. С. 15–34.
9. *Осипенко К.Ю.* О восстановлении решения задачи Дирихле по неточным исходным данным // Владикавказ. мат. журн. 2004. Т. 6, №4. С. 55–62.
10. *Magaril-Il'yaev G.G., Osipenko K.Yu., Tikhomirov V.M* On optimal recovery of heat equation solutions // Approximation theory: A volume dedicated to B. Bojanov / Ed. by D.K. Dimitrov, G. Nikolov, R. Uluchev. Sofia: Marin Drinov Acad. Publ. House, 2004. P. 163–175.
11. *Выск Н.Д., Осипенко К.Ю.* Оптимальное восстановление решения волнового уравнения по неточным начальным данным // Мат. заметки. 2007. Т. 81, №6. С. 803–815.
12. *Балова Е.А.* Об оптимальном восстановлении решений задачи Дирихле по неточным исходным данным // Мат. заметки. 2007. Т. 82, №3. С. 323–334.
13. *Osipenko K.Yu., Wedenskaya E.V.* Optimal recovery of solutions of the generalized heat equation in the unit ball from inaccurate data // J. Complexity. 2007. V. 23, N 4–6. P. 653–661.
14. *Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю.* Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям // Мат. сб. 2009. Т. 200, №5. С. 37–54.