Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

Кафедра общих проблем управления

# Дипломная работа

*Об оптимальном восстановлении линейного функционала на шаре по неточной информации.*

Мокеев Дмитрий Александрович
532 группа

Научный руководитель
д.ф.-м.н. проф. Магарил-Ильяев Г.Г.

Москва 2012

# 1 Введение

Одним из основателей направления "Теория приближений и оптимальное восстановление"является академик А.Н. Колмогоров и его ученик проф. В.М. Тихомиров. В 1936 г. А.Н. Колмогоров опубликовал работу по теории приближений, в которой по сути дела был поставлен вопрос о наилучшем средстве приближения на классе функций, где в качестве аппарата приближения рассматривались всевозможные n-мерные подпространства. В 1965 г. С.А. Смоляк, во многом исходя из идей А.Н. Колмогорова, поставил задачу приближения линейного функционала на некотором множестве, по информации о значениях других функционалов. Впоследствии была обобщена постановка задачи оптимального восстановления на случай задания информации с погрешностью и был получен основной результат о существовании линейных оптимальных методов восстановления на выпуклых центрально-симметричных множествах.

В работе будет рассматриваться задача оптимального восстановления значения полинома в точке по информации о самой функции в норме $L_2[-1,1]$, заданной с погрешностью, а затем в норме $L_2(\mathbb{D})$, где $\mathbb{D}$ - единичный круг.

# 2 Восстановление значения полинома в точке по неточной информации о самой функции в норме $L_2[-1,1]$

**Постановка задачи.**

Будем рассматривать пространство $L_2[-1,1]$ - пространство функций $x(\cdot)$, определенных на $[-1,1]$, для которых

$$\|x(\cdot)\|_{L_2([-1,1])} = \left(\int_{-1}^{1} |x(t)|^2 dt\right)^{1/2} < \infty.$$

Класс $P_n$ - пространство всех полиномов степени, не превосходящей $n$.

На этом классе рассмотрим задачу оптимального восстановления значения полинома $x(\tau)$ в точке $\tau$, лежащей за пределами отрезка $[-1,1]$, по информации о самой функции $x(\cdot)$, заданной с погрешностью $\delta > 0$ в норме $L_2([-1,1])$.

То есть считаем, что для любого полинома $x(\cdot)$ нам известна функция

$$y(\cdot) \in L_2([-1,1]) : \|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2([-1,1])} \leqslant \delta,\ \ \delta > 0.$$

Запишем погрешность:

$$e(x(\tau), m, \delta) = \sup_{\substack{x(\cdot) \in P_n \\ y(\cdot) \in L_2([-1,1]) \\ \|x(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_2([-1,1])} \leqslant \delta}} |x(\tau) - m(y)|.$$

Погрешность оптимального восстановления:

$$E(x(\tau), m, \delta) = \inf_{m: L_2([-1,1]) \to \mathbb{R}} e(x(\tau), m, \delta).$$

Найдем погрешность оптимального восстановления и метод, на котором достигается нижняя грань.

**Решение задачи.**

Получим оценку снизу для погрешности

$$e(x(\tau), m, \delta) = \sup_{\substack{x(\cdot) \in P_n \\ y(\cdot) \in L_2([-1,1]) \\ \|x(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_2([-1,1])} \leqslant \delta}} |x(\tau) - m(y)| :$$

$$2x(\tau) \leqslant |x(\tau) - m(0)| + |-x(\tau) - m(0)| \leqslant 2 \sup_{\substack{x(\cdot) \in P_n \\ y(\cdot) \in L_2([-1,1])}} |x(\tau) - m(y)| \leqslant 2e(x(\tau), m, \delta).$$

Так как неравенство верно для любого метода m, значит

$$E(x(\tau), m, \delta) \geqslant \sup_{\substack{x(\cdot) \in P_n \\ \|x\|_{L_2([-1,1])} \leqslant \delta}} |x(\tau)|.$$

Получаем следующую задачу:

$$x(\tau) \to \max,\ \ \|x(\cdot)\|_{L_2([-1,1])} \leqslant \delta,\ \ x(\cdot) \in P_n.$$

Представим полином $x(\tau)$ с помощью полиномов Лежандра $L_k$ (они образуют ортогональную систему многочленов на отрезке [-1,1]):

$$x(\cdot) = \sum_{k=0}^{n} c_k L_k.$$

$$\|x(\cdot)\|_{L_2([-1,1])} = \sum_{k=0}^{n} | < x, L_k > |^2 = \sum_{k=0}^{n} | < \sum_{k=0}^{n} c_k L_k, L_k > |^2 = \sum_{k=0}^{n} c_k^2 \leqslant \delta^2$$

Теперь, применив равенство Парсеваля и обозначив $L_k(\tau) = a_k$, получим следующую задачу:

$$\sum_{k=0}^{n} c_k a_k \to \max,\ \sum_{k=0}^{n} c_k^2 \leqslant \delta^2.$$

Используя неравенство Коши-Буняковского получаем:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} c_k a_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n} |c_k|^2\right)\left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2\right) \leqslant \delta^2 \sum_{k=0}^{n} a_k^2,$$

$$\sum_{k=0}^{n} c_k a_k \leqslant \delta \left(\sum_{k=0}^{n} a_k^2\right)^{1/2}.$$

Имеем:

$$E(x(\tau), m, \delta) \geqslant \delta \left(\sum_{k=0}^{n} a_k^2\right)^{1/2}.$$

Покажем, что метод

$$m(y)(\cdot) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(\tau) = \sum_{k=0}^{n} y_k a_k,$$

где $y_k =< y, L_k >$ является оптимальным.

$$|x(\tau) - m(y)(\cdot)| = \left|\sum_{k=0}^{n} c_k a_k - \sum_{k=0}^{n} y_k a_k\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k \left(c_k - y_k\right)\right|,$$

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k \left(c_k - y_k\right)\right|^2 \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2\right)\left(\sum_{k=0}^{n} |c_k - y_k|^2\right) \leqslant \delta^2 \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2.$$

Получаем:

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k \left(c_k - y_k\right)\right| \leqslant \delta \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2\right)^{1/2}$$

**Вывод:** Метод

$$m(y)(\tau) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(\tau) = \sum_{k=0}^{n} y_k a_k,$$

где $y_k =< y, L_k >$ является оптимальным.

Погрешность оптимального восстановления:

$$E(x(\tau), m, \delta) = \delta \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2\right)^{1/2}.$$

# 3 Восстановление значения полинома в точке по неточной информации о самой функции в норме $L_2(\mathbb{D})$.

**Постановка задачи.**

Будем рассматривать пространство $L_2(\mathbb{D})$ - пространство функций $x(\cdot)$, определенных на $\mathbb{D}$, где $\mathbb{D}$ - единичный круг, для которых

$$\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{D})} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} |x(t)|^2 dt\right)^{1/2} < \infty.$$

Класс $P_n$ - пространство всех полиномов степени, не превосходящей $n$.

На этом классе рассмотрим задачу оптимального восстановления значения полинома в точке $(\rho, \varphi)$, лежащей за пределами круга $\mathbb{D} := \{|z| < 1\}$, по информации о самой функции $x(\cdot)$, заданной с погрешностью $\delta > 0$ в норме $L_2(\mathbb{D})$.

То есть считаем, что для любого полинома $x(\cdot)$ нам известна функция

$$y(\cdot) \in L_2(\mathbb{D}) : \|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{D})} \leqslant \delta,\ \delta > 0.$$

Запишем погрешность:

$$e(x(\rho,\varphi), m, \delta) = \sup_{\substack{x(\cdot)\in P_n \\ y(\cdot)\in L_2(\mathbb{D}) \\ \|x(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{D})}\leqslant\delta}} |x(\rho,\varphi) - m(y)|.$$

Погрешность оптимального восстановления:

$$E(x(\rho,\varphi), m, \delta) = \inf_{m:L_2(\mathbb{D})\to\mathbb{R}} e(x(\rho,\varphi), m, \delta).$$

Найдем погрешность оптимального восстановления и метод, на котором достигается нижняя грань.

**Решение задачи.**

Получим оценку снизу для погрешности

$$e(x(\rho,\varphi), m, \delta) = \sup_{\substack{x(\cdot)\in P_n \\ y(\cdot)\in L_2(\mathbb{D}) \\ \|x(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{D})}\leqslant\delta}} |x(\rho,\varphi) - m(y)| :$$

$$2x(\rho,\varphi) \leqslant |x(\rho,\varphi) - m(0)| + |-x(\rho,\varphi) - m(0)| \leqslant 2 \sup_{\substack{x(\cdot)\in P_n \\ y(\cdot)\in L_2(\mathbb{D})}} |x(\rho,\varphi) - m(y)| \leqslant 2e(x(\rho,\varphi), m, \delta).$$

Так как неравенство верно для любого метода m, значит

$$E(x(\rho,\varphi), m, \delta) \geqslant \sup_{\substack{x(\cdot)\in P_n \\ \|x\|_{L_2(\mathbb{D})}\leqslant\delta}} |x(\rho,\varphi)|.$$

Получаем следующую задачу:

$$x(\rho,\varphi) \to \max,\ \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{D})} \leqslant \delta,\ x(\cdot) \in P_n.$$

Представим полином $x(\rho,\varphi)$ с помощью полиномов Цернике (они образуют ортогональную систему многочленов на круге):

$$x(\cdot) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=0}^{k} c_{km} Z_k^m.$$

$$\|x(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{D})} = \sum_{k=0}^{n} | < x, Z_k^m > |^2 = \sum_{k=0}^{n} | < \sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k} c_{km} Z_k^m, Z_k^m > |^2 = \sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k} c_{km}^2 \leqslant \delta^2$$

Теперь, применив равенство Парсеваля и обозначив $Z_k^m(\rho,\varphi) = a_{km}$, получим следующую задачу:

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k} c_{km} a_{km} \to \max, \ \sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k} c_{km}^2 \leqslant \delta^2.$$

Используя неравенство Коши-Буняковского получаем:

$$\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k} c_{km} a_{km}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k} |c_{km}|^2\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k} |a_{km}|^2\right) \leqslant \delta^2 \sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k} |a_{km}|^2,$$

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k} c_{km} a_{km} \leqslant \delta \left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k} |a_{km}|^2\right)^{1/2}.$$

Имеем:

$$E(x(\rho,\varphi), m, \delta) \geqslant \delta \left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k} |a_{km}|^2\right)^{1/2}$$

.

Покажем, что метод

$$m(y)(\cdot) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k} y_{km} Z_k^m = \sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k} y_{km} a_{km},$$

где $y_{km} =< y, Z_k^m >$ является оптимальным.

$$|x(\rho,\varphi) - m(y)(\cdot)| = \left|\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k} c_{km} a_{km} - \sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k} y_{km} a_{km}\right| = \left|\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k} a_{km}\left(c_{km} - y_{km}\right)\right|,$$

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k} a_{km}(c_{km} - y_{km})\right|^2 \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k} |a_{km}|^2\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k} |c_{km} - y_{km}|^2\right) \leqslant \delta^2 \sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k} |a_{km}|^2.$$

Получаем:

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k} a_{km}\left(c_{km}-y_{km}\right)\right| \leqslant \delta\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k}|a_{km}|^2\right)^{1/2}$$

**Вывод:** Метод

$$m(y)(\rho,\varphi)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k} y_{km}Z_k^m(\rho,\varphi)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k} y_{km}a_{km},$$

где $y_{km} =< y, Z_k^m >$ является оптимальным.

Погрешность оптимального восстановления:

$$E(x(\rho,\varphi),m,\delta)=\delta\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k}|a_{km}|^2\right)^{1/2}.$$

# 4 Список литературы


1. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., Оптимальное восстановление операторов по неточной информации. Итоги науки. Южный федеральный округ. Математический форум. Том 2. "Исследования по выпуклому анализу Владикавказ, 2009, с. 158-192.

2. Weisstein, Eric W., "Zernike Polynomial"from MathWorld.