И. С. Максимова, К. Ю. Осипенко

Оптимальное восстановление решения системы линейных дифференциальных уравнений по исходной информации со случайной ошибкой

Рассматривается задача оптимального восстановления решения системы линейных дифференциальных уравнений по исходной информации со случайной ошибкой. Среди всевозможных методов восстановления (не обязательно линейных) ищутся оптимальные. Построенные оптимальные методы восстановления, оказавшиеся линейными, используют в зависимости от заданной дисперсии случайных ошибок лишь часть доступной информации.

Библиография: 17 названий.

Ключевые слова: оптимальное восстановление, системы линейных дифференциальных уравнений, информация со случайными ошибками.

DOI: https://doi.org/10.4213/sm10109

§ 1. Введение

Общая постановка задачи восстановления заключается в определении значений заданного функционала или оператора на некоторых классах функций по неполной информации о них. Классы обычно связывают со свойствами гладкости или аналитичности входящих в них функций. Локальная или индивидуальная информация обычно состоит в том, что нам оказываются доступными некоторые характеристики функции (например, ее значения в отдельных точках, моменты, коэффициенты Фурье или Тейлора, преобразование Фурье и т.п.). Эта информация может задаваться с детерминированной ошибкой или со случайной.

К настоящему времени имеется значительное число работ, в которых для различных задач восстановления найдены оптимальные методы. Задачи с детерминированными ошибками рассматривались, например, в работах [1]–[9].

Задачи со случайными ошибками изучались в работах [10]–[16]. В работе [11] оценка методов восстановления берется по линейным функционалам, в работе [12] получена оценка для нелинейного метода восстановления через оценки линейных методов.

Задача оценивания погрешности метода восстановления по случайной величине, имеющей нормальное распределение, рассмотрена в работе [13]. В ней получено неравенство для оценки минимаксного нелинейного риска.

Задача восстановления решения системы линейных однородных уравнений рассматривалась в [17], но в случае детерминированной ошибки.

Настоящая работа посвящена построению оптимальных методов восстановления решения системы линейных дифференциальных однородных уравнений по исходной информации, заданной со случайной ошибкой. Мы следуем постановке, предложенной в работе [14], и используем ряд идей из этой работы для доказательства общего результата в конечномерном случае. Рассмотрены различные варианты задания исходной информации: задача решается в предположении, что начальная точка принадлежит некоторому эллипсоиду и ее координаты в начальный момент времени известны со случайной ошибкой. Требуется восстановить решение в момент времени $\tau > 0$. Также рассматривается задача, в которой решение известно с некоторой случайной ошибкой в момент времени $t = T_1$. Требуется восстановить решение в некоторый момент времени $0 < \tau < T_1$.

Общий результат применяется также к задаче о восстановлении k-й производной тригонометрического полинома по его коэффициентам, известным со случайной ошибкой.

В рассматриваемых задачах мы не ограничиваемся лишь нормальным распределением случайной величины, а рассматриваем произвольные распределения случайного вектора с фиксированным математическим ожиданием и фиксированной оценкой для дисперсии. Как и в задачах с детерминированной ошибкой, здесь обнаруживаются такие эффекты, как линейность оптимального метода и возможность использовать не всю доступную для измерений информацию.

§ 2. Постановка задачи об оптимальном восстановлении решения системы линейных дифференциальных уравнений

Рассмотрим задачу Коши для системы линейных однородных дифференциальных уравнений
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{2.1}$$
где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \geqslant 0$, и
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Предположим, что матрица A является самосопряженной,
$$\mu_1,\ \mu_2,\ \dots,\ \mu_n$$
– собственные числа матрицы A. Обозначим через $\{e_j\}_{j=1}^n$ ортонормированный базис из собственных векторов, соответствующих собственным значениям μ_j, $j = 1, \dots, n$. Пусть
$$x_0 = \sum_{j=1}^n x_j e_j.$$

Тогда решение задачи (2.1) записывается в виде

$$x(t)=\sum_{j=1}^{n} e^{\mu_j t} x_j e_j.$$

Предположим, что координаты начальной точки x_0 известны со случайной ошибкой. Пусть, кроме того, известен некоторый эллипсоид, в котором находится точка x_0. Требуется восстановить решение в момент $\tau>0$.

Перейдем к точной постановке задачи. Положим для $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$

$$W=\biggl\{x\in\mathbb{R}^n:\sum_{j=1}^{n}\nu_j x_j^2\leqslant 1\biggr\},\qquad Tx=(e^{\mu_1\tau}x_1,\dots,e^{\mu_n\tau}x_n),\qquad Ix=(x_1,\dots,x_n).$$

Зафиксируем $\delta>0$ и для каждого $x\in W$ будем рассматривать множество случайных векторов

$$Y_\delta(x)=\bigl\{y=(y_1,\dots,y_n)\colon \mathbf{E}(y)=Ix,\ \mathbf{D}(y_j)\leqslant\delta^2,\ j=1,\dots,n\bigr\}.$$

Обозначим через l_2^n пространство векторов $x=(x_1,\dots,x_n)$ с нормой

$$\|x\|_{l_2^n}=\biggl(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2\biggr)^{1/2}.$$

Всякий метод восстановления сопоставляет случайному вектору $y\in Y_\delta(x)$ элемент из пространства l_2^n, принимаемый за приближение к значению Tx. Погрешностью метода восстановления $\varphi\colon\mathbb{R}^n\to l_2^n$ называется величина

$$e(T,W,I,\delta,\varphi)=\Bigl(\sup_{x\in W,\,y\in Y_\delta(x)}\mathbf{E}\bigl(\|Tx-\varphi(y)\|_{l_2^n}^2\bigr)\Bigr)^{1/2}$$

(рассматриваются только измеримые отображения φ). Задача состоит в нахождении погрешности оптимального восстановления

$$E(T,W,I,\delta)=\inf_{\varphi\colon\mathbb{R}^n\to l_2^n}e(T,W,I,\delta,\varphi)$$

и метода, на котором достигается нижняя грань, называемого оптимальным.

Для решения сформулированной задачи мы рассмотрим более общую задачу, решим ее и затем применим полученный результат к поставленной исходной задаче.

§ 3. Общий результат

Пусть X – линейное пространство, Z – линейное нормированное пространство и $T\colon X\to Z$ – линейный оператор. Требуется восстановить значения оператора T на некотором множестве (классе) $W\subset X$ по значениям линейного оператора $I\colon X\to\mathbb{R}^n$, заданным со случайной ошибкой. Для каждого $x\in W$ и $\delta>0$ рассмотрим множество случайных векторов

$$Y_\delta(x)=\bigl\{y=(y_1,\dots,y_n)\colon \mathbf{E}(y)=Ix,\ \mathbf{D}(y_j)\leqslant\delta^2,\ j=1,\dots,n\bigr\}$$

и аналогично § 2 определим погрешность метода восстановления $\varphi\colon\mathbb{R}^n\to Z$ по формуле

$$e(T,W,I,\delta,\varphi)=\Bigl(\sup_{x\in W,\,y\in Y_\delta(x)}\mathbf{E}\bigl(\|Tx-\varphi(y)\|_Z^2\bigr)\Bigr)^{1/2}$$

(рассматриваются только измеримые методы φ). Задача состоит в поиске оптимального метода восстановления (если он существует) и погрешности оптимального восстановления

$$E(T,W,I,\delta)=\inf_{\varphi\colon\mathbb{R}^n\to Z}e(T,W,I,\delta,\varphi). \tag{3.1}$$

Положим

$$W=\biggl\{x\in\mathbb{R}^n\colon\ \sum_{j=1}^n\nu_j|x_j|^2\leqslant1\biggr\},$$

где $\nu_j>0$, $j=1,\dots,n$. Определим линейные операторы $T\colon\mathbb{R}^n\to l_2^n$ и $I\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$Tx=(\mu_1x_1,\dots,\mu_nx_n),\qquad Ix=(x_1,\dots,x_n),$$

$|\mu_j|>0$, $j=1,\dots,n$.

Введем обозначения

$$\gamma_j=\frac{\sqrt{\nu_j}}{|\mu_j|},\quad j=1,\dots,n,\qquad \xi_j=\biggl(\sum_{k=1}^j\nu_k\biggl(\frac{\gamma_j}{\gamma_k}-1\biggr)\biggr)^{1/2},\quad j=1,\dots n.$$

Будем считать, что $\gamma_1\leqslant\dots\leqslant\gamma_n$. Нетрудно убедиться, что $0=\xi_1\leqslant\dots\leqslant\xi_n$.

Теорема 1. *Пусть $1/\delta\in(\xi_s,\xi_{s+1}]$ при некотором $1\leqslant s\leqslant n-1$ или $1/\delta\in(\xi_n,+\infty)$ (в этом случае считаем $s=n$). Тогда*

$$E(T,W,I,\delta)=\delta\biggl(\sum_{k=1}^s|\mu_k|^2\biggl(1-\frac{\gamma_k(1-c_1)}{\gamma_1}\biggr)\biggr)^{1/2},$$

где

$$c_1=1-\frac{\delta^2\gamma_1\sum_{k=1}^s(\nu_k/\gamma_k)}{1+\delta^2\sum_{k=1}^s\nu_k}, \tag{3.2}$$

а метод

$$\varphi(y)=\sum_{k=1}^s\biggl(1-\frac{\gamma_k(1-c_1)}{\gamma_1}\biggr)\mu_ky_ke_k,$$

где $\{e_k\}$ – стандартный базис в l_2^n, является оптимальным.

Доказательство. 1. Оценка снизу. Зафиксируем элемент $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n) \in W$ такой, что

$$\tau_1 \geqslant \cdots \geqslant \tau_n > 0.$$

Введем множество

$$B = \{x \in l_2^n\colon\ x_j = \pm\tau_j,\ j = 1, \ldots, n\}.$$

Очевидно, что $B \subset W$. Положим

$$p_j = \frac{\delta^2}{\delta^2 + \tau_j^2}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

В силу условий на монотонность τ_j имеем

$$0 < p_1 \leqslant \cdots \leqslant p_n < 1.$$

Произвольный элемент $x \in B$ записывается в виде

$$x = \sum_{j=1}^{n} s_j(x)\tau_j e_j,$$

где $s_j(x) \in \{-1, 1\}$. Зададим распределение $\eta(x)$ для каждого $x \in B$

$$\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{с вероятностью } p_1, \\ \dfrac{s_1(x)\tau_1}{1-p_1}\, e_1 & \text{с вероятностью } p_2 - p_1, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{2} \frac{s_j(x)\tau_j}{1-p_j}\, e_j & \text{с вероятностью } p_3 - p_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} \frac{s_j(x)\tau_j}{1-p_j}\, e_j & \text{с вероятностью } p_n - p_{n-1}, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{s_j(x)\tau_j}{1-p_j}\, e_j & \text{с вероятностью } 1 - p_n. \end{cases}$$

Таким образом, для координат вектора $\eta(x) = (\eta_1(x), \ldots, \eta_n(x))$ имеем следующие распределения:

$$\eta_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{с вероятностью } p_j, \\ \dfrac{s_j(x)\tau_j}{1-p_j} & \text{с вероятностью } 1 - p_j, \end{cases} \qquad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Несложно убедиться, что $\mathbf{E}(\eta_j(x)) = x_j$, $j = 1, \ldots, n$. Кроме того,

$$\mathbf{D}(\eta_j(x)) = (1 - p_j)\frac{\tau_j^2}{(1-p_j)^2} - \tau_j^2 = \delta^2, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Следовательно, $\eta(x) \in Y_\delta(x)$ для всех $x \in B$.

Пусть φ – произвольный метод восстановления. Учитывая, что число элементов в множестве B равно 2^n, получаем

$$
\begin{aligned}
e^2(T,W,I,\delta,\varphi) &\geqslant \sup_{x\in B}\mathbf{E}\|Tx-\varphi(\eta(x))\|^2_{l_2^n} \\
&= \sup_{x\in B}\left(\sum_{j=1}^{n+1}(p_j-p_{j-1})\left\|Tx-\varphi\left(\sum_{k=1}^{j-1}\frac{s_k(x)\tau_k}{1-p_k}e_k\right)\right\|^2_{l_2^n}\right) \\
&\geqslant \frac{1}{2^n}\sum_{x\in B}\left(\sum_{j=1}^{n+1}(p_j-p_{j-1})\left\|Tx-\varphi\left(\sum_{k=1}^{j-1}\frac{s_k(x)\tau_k}{1-p_k}e_k\right)\right\|^2_{l_2^n}\right) \\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{j=1}^{n+1}(p_j-p_{j-1})\sum_{x\in B}\left\|Tx-\varphi\left(\sum_{k=1}^{j-1}\frac{s_k(x)\tau_k}{1-p_k}e_k\right)\right\|^2_{l_2^n}; \qquad (3.3)
\end{aligned}
$$

здесь $p_0=0$, а $p_{n+1}=1$. Положим

$$
B_{s_1,\ldots,s_{j-1}}=\{x\in B\colon s_1(x)=s_1,\ldots,s_{j-1}(x)=s_{j-1}\},
$$

$j=1,\ldots,n+1$ (при $j=1$ это множество совпадает с B). Тогда

$$
\begin{aligned}
&\frac{p_j-p_{j-1}}{2^n}\sum_{x\in B}\left\|Tx-\varphi\left(\sum_{k=1}^{j-1}\frac{s_k(x)\tau_k}{1-p_k}e_k\right)\right\|^2_{l_2^n} \\
&\qquad= \frac{p_j-p_{j-1}}{2^n}\sum_{s_1,\ldots,s_{j-1}}\ \sum_{x\in B_{s_1,\ldots,s_{j-1}}}\left\|Tx-\varphi\left(\sum_{k=1}^{j-1}\frac{s_k\tau_k}{1-p_k}e_k\right)\right\|^2_{l_2^n}.
\end{aligned}
$$

Если $x\in B_{s_1,\ldots,s_{j-1}}$, то

$$
x=\sum_{k=1}^{j-1}s_k\tau_ke_k+z(x), \qquad z(x)=\sum_{k=j}^{n}s_k(x)\tau_ke_k.
$$

Причем с каждым элементом

$$
\sum_{k=1}^{j-1}s_k\tau_ke_k+z(x)\in B_{s_1,\ldots,s_{j-1}}
$$

в множестве $B_{s_1,\ldots,s_{j-1}}$ содержится и элемент

$$
\sum_{k=1}^{j-1}s_k\tau_ke_k-z(x).
$$

Таким образом,

$$
\begin{aligned}
&\frac{p_j-p_{j-1}}{2^n}\sum_{s_1,\ldots,s_{j-1}}\ \sum_{x\in B_{s_1,\ldots,s_{j-1}}}\left\|Tx-\varphi\left(\sum_{k=1}^{j-1}\frac{s_k\tau_k}{1-p_k}\,e_k\right)\right\|^2_{l_2^n} \\
&= \frac{p_j-p_{j-1}}{2^n}\sum_{s_1,\ldots,s_{j-1}}\ \sum_{x\in B_{s_1,\ldots,s_{j-1}}}\left\|T\left(\sum_{k=1}^{j-1}s_k\tau_ke_k+z(x)\right)-\varphi\left(\sum_{k=1}^{j-1}\frac{s_k\tau_k}{1-p_k}\,e_k\right)\right\|^2_{l_2^n}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{p_j - p_{j-1}}{2^n} \sum_{s_1,\dots,s_{j-1}} \sum_{x \in B_{s_1,\dots,s_{j-1}}} \left\| T\left(\sum_{k=1}^{j-1} s_k \tau_k e_k\right) + Tz(x) - \varphi\left(\sum_{k=1}^{j-1} \frac{s_k \tau_k}{1-p_k}\, e_k\right) \right\|_{l_2^n}^2 \\
&= \frac{p_j - p_{j-1}}{2^{n+1}} \sum_{s_1,\dots,s_{j-1}} \sum_{x \in B_{s_1,\dots,s_{j-1}}} \left(\left\| T\left(\sum_{k=1}^{j-1} s_k \tau_k e_k\right) + Tz(x) \right.\right. \\
&\quad \left.\left. - \varphi\left(\sum_{k=1}^{j-1} \frac{s_k \tau_k}{1-p_k}\, e_k\right) \right\|_{l_2^n}^2 + \left\| T\left(\sum_{k=1}^{j-1} s_k \tau_k e_k\right) - Tz(x) - \varphi\left(\sum_{k=1}^{j-1} \frac{s_k \tau_k}{1-p_k}\, e_k\right) \right\|_{l_2^n}^2 \right) \\
&\geqslant \frac{p_j - p_{j-1}}{2^n} \sum_{s_1,\dots,s_{j-1}} \sum_{x \in B_{s_1,\dots,s_{j-1}}} \|Tz(x)\|_{l_2^n}^2 = \frac{p_j - p_{j-1}}{2^n} \sum_{x \in B} \|Tz(x)\|_{l_2^n}^2 \\
&= (p_j - p_{j-1}) \sum_{k=j}^{n} |\mu_k|^2 \tau_k^2.
\end{aligned}
$$

Подставляя эту оценку в (3.3), получаем

$$
\begin{aligned}
e^2(T, W, I, \delta, \varphi) &\geqslant \sum_{j=1}^{n+1} (p_j - p_{j-1}) \sum_{k=j}^{n} |\mu_k|^2 \tau_k^2 \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(p_j \sum_{k=j}^{n} |\mu_k|^2 \tau_k^2 - p_j \sum_{k=j+1}^{n} |\mu_k|^2 \tau_k^2 \right) = \sum_{j=1}^{n} p_j |\mu_j|^2 \tau_j^2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta^2}{\delta^2 + \tau_j^2} |\mu_j|^2 \tau_j^2.
\end{aligned}
$$

В силу произвольности метода φ имеет место следующая оценка:

$$
E^2(T, W, I, \delta) \geqslant \sup_{\substack{\tau \in W \\ \tau_1 \geqslant \dots \geqslant \tau_n > 0}} \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta^2}{\delta^2 + \tau_j^2} |\mu_j|^2 \tau_j^2. \tag{3.4}
$$

Рассмотрим вектор $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_k, 0, \dots, 0) \in W$ такой, что $\tau_1 \geqslant \dots \geqslant \tau_k > 0$, $1 \leqslant k < n$. Для достаточно малых $\varepsilon > 0$ положим $\tau_\varepsilon = (\tau_1(\varepsilon), \dots, \tau_n(\varepsilon))$, где

$$
\tau_j(\varepsilon) = \begin{cases} \sqrt{\tau_j^2 - \varepsilon}, & 1 \leqslant j \leqslant k, \\ C\sqrt{\varepsilon}, & k+1 \leqslant j \leqslant n, \end{cases}
$$

$$
C = \left(\frac{\sum_{j=1}^{k} \nu_j}{\sum_{j=k+1}^{n} \nu_j} \right)^{1/2}.
$$

Тогда

$$
\sum_{j=1}^{n} \nu_j \tau_j^2(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{k} \nu_j \tau_j^2 - \varepsilon \sum_{j=1}^{k} \nu_j + C^2 \varepsilon \sum_{j=k+1}^{n} \nu_j = \sum_{j=1}^{k} \nu_j \tau_j^2 \leqslant 1.
$$

Тем самым $\tau_\varepsilon \in W$. При $\varepsilon < \tau_k^2/(1 + C^2)$ справедливо неравенство

$$
\sqrt{\tau_k^2 - \varepsilon} > C\sqrt{\varepsilon}.
$$

Следовательно, при таких ε

$$\tau_1(\varepsilon) \geqslant \dots \geqslant \tau_n(\varepsilon) > 0.$$

Из (3.4) вытекает, что

$$E^2(T, W, I, \delta) \geqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta^2}{\delta^2 + \tau_j^2(\varepsilon)} |\mu_j|^2 \tau_j^2(\varepsilon).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$E^2(T, W, I, \delta) \geqslant \sum_{j=1}^{k} \frac{\delta^2}{\delta^2 + \tau_j^2} |\mu_j|^2 \tau_j^2.$$

Таким образом,

$$E^2(T, W, I, \delta) \geqslant \sup_{\substack{\tau \in W \\ \tau_1 \geqslant \dots \geqslant \tau_n \geqslant 0}} \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta^2}{\delta^2 + \tau_j^2} |\mu_j|^2 \tau_j^2. \tag{3.5}$$

2. Оценка сверху. Найдем погрешность методов, имеющих вид

$$\varphi(y) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j e_j.$$

Положим $z(x) = y(x) - Ix$. Тогда $\mathbf{E}(z(x)) = 0$, $\mathbf{D}(z_j(x)) \leqslant \delta^2$, $j = 1, \dots, n$. Имеем

$$\begin{aligned} e^2(T, W, I, \delta, \varphi) &= \sup_{\substack{x \in W \\ y(x) \in Y_\delta(x)}} \mathbf{E}\big(\|Tx - \varphi(y(x))\|_{l_2^n}^2\big) \\ &= \sup_{\substack{x \in W \\ y(x) \in Y_\delta(x)}} \mathbf{E}\big(\|Tx - \varphi(Ix) - \varphi(z(x))\|_{l_2^n}^2\big) \\ &= \sup_{\substack{x \in W \\ y(x) \in Y_\delta(x)}} \big(\|Tx - \varphi(Ix)\|_{l_2^n}^2 + \mathbf{E}(\|\varphi(z(x))\|_{l_2^n}^2) - 2\mathbf{E}(\varphi(z(x)), Tx - \varphi(Ix))\big); \end{aligned}$$

здесь $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в l_2^n. Из вида φ следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\varphi(z(x)), Tx - \varphi(Ix)) &= \mathbf{E}\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j z_j(x) e_j, Tx - \varphi(Ix)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (e_j, Tx - \varphi(Ix)) \alpha_j \mathbf{E}(z_j(x)) = 0. \end{aligned}$$

Так как

$$\mathbf{E}(\|\varphi(z(x))\|_{l_2^n}^2) = \mathbf{E}\left(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 |z_j(x)|^2\right) = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 \mathbf{D}(z_j(x)),$$

то

$$e^2(T,W,I,\delta,\varphi) = \sup_{\substack{x\in W\\ y(x)\in Y_\delta(x)}} \left(\|Tx-\varphi(Ix)\|^2_{l_2^n} + \sum_{j=1}^n |\alpha_j|^2\mathbf{D}(z_j(x))\right)$$
$$= \sup_{x\in W}\|Tx-\varphi(Ix)\|^2_{l_2^n} + \delta^2\sum_{j=1}^n|\alpha_j|^2.$$

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\|Tx-\varphi(Ix)\|^2_{l_2^n} \to \max, \qquad x\in W.$$

Перепишем эту задачу в виде

$$\sum_{j=1}^n |\mu_j-\alpha_j|^2|x_j|^2 \to \max, \qquad \sum_{j=1}^n \nu_j|x_j|^2 \leqslant 1.$$

Из неравенства

$$\sum_{j=1}^n |\mu_j-\alpha_j|^2|x_j|^2 = \sum_{j=1}^n \frac{|\mu_j-\alpha_j|^2}{\nu_j}\nu_j|x_j|^2$$
$$\leqslant \max\left\{\frac{|\mu_1-\alpha_1|^2}{\nu_1},\dots,\frac{|\mu_n-\alpha_n|^2}{\nu_n}\right\}\sum_{j=1}^n\nu_j|x_j|^2$$

получаем

$$\sup_{x\in W}\|Tx-\varphi(Ix)\|^2_{l_2^n} \leqslant \max\left\{\frac{|\mu_1-\alpha_1|^2}{\nu_1},\dots,\frac{|\mu_n-\alpha_n|^2}{\nu_n}\right\}.$$

Таким образом,

$$e^2(T,W,I,\delta,\varphi) \leqslant \max\left\{\frac{|\mu_1-\alpha_1|^2}{\nu_1},\dots,\frac{|\mu_n-\alpha_n|^2}{\nu_n}\right\} + \delta^2\sum_{j=1}^n|\alpha_j|^2.$$

Положим

$$c_j = \frac{\alpha_j}{\mu_j}, \qquad j=1,\dots,n.$$

Тогда для погрешности метода φ имеем

$$e^2(T,W,I,\delta,\varphi) \leqslant \max\left\{\frac{|1-c_1|^2}{\gamma_1^2},\dots,\frac{|1-c_n|^2}{\gamma_n^2}\right\} + \delta^2\sum_{j=1}^n|\mu_j|^2|c_j|^2.$$

2.1. Пусть $1/\delta \in (\xi_s,\xi_{s+1}]$ при некотором $1\leqslant s\leqslant n-1$. Тогда нетрудно показать, что выполняются неравенства

$$\frac{1}{\gamma_{s+1}} \leqslant \frac{\delta^2\sum_{k=1}^s(\nu_k/\gamma_k)}{1+\delta^2\sum_{k=1}^s\nu_k} < \frac{1}{\gamma_s}.$$

Если определить c_1 равенством (3.2), то

$$\frac{1}{\gamma_{s+1}} \leqslant \frac{1-c_1}{\gamma_1} < \frac{1}{\gamma_s}.$$

Пусть

$$c_k = 1 - \gamma_k \frac{1-c_1}{\gamma_1}, \quad k = 2, \ldots, s, \qquad c_k = 0, \quad k = s+1, \ldots, n.$$

Имеем

$$\frac{(1-c_k)^2}{\gamma_k^2} = \frac{(1-c_1)^2}{\gamma_1^2}, \qquad k = 2, \ldots, s.$$

При $k \geqslant s+1$

$$\frac{(1-c_k)^2}{\gamma_k^2} = \frac{1}{\gamma_k^2} \leqslant \frac{1}{\gamma_{s+1}^2} \leqslant \frac{(1-c_1)^2}{\gamma_1^2}.$$

Поэтому

$$\max\left\{\frac{|1-c_1|^2}{\gamma_1^2}, \ldots, \frac{|1-c_n|^2}{\gamma_n^2}\right\} = \frac{(1-c_1)^2}{\gamma_1^2}. \tag{3.6}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
e^2(T, W, I, \delta, \varphi) &\leqslant \frac{(1-c_1)^2}{\gamma_1^2} + \delta^2 \sum_{k=1}^{s} |\mu_k|^2 c_k^2 \\
&= \frac{(1-c_1)^2}{\gamma_1^2} + \delta^2 \sum_{k=1}^{s} |\mu_k|^2 ((1-c_k)^2 - (1-c_k) + c_k) \\
&= \frac{(1-c_1)^2}{\gamma_1^2} + \delta^2 \sum_{k=1}^{s} |\mu_k|^2 \frac{\gamma_k^2}{\gamma_1^2} (1-c_1)^2 \\
&\qquad - \delta^2 \sum_{k=1}^{s} |\mu_k|^2 \frac{\gamma_k}{\gamma_1} (1-c_1) + \delta^2 \sum_{k=1}^{s} |\mu_k|^2 c_k \\
&= \delta^2 \sum_{k=1}^{s} |\mu_k|^2 c_k + \frac{1-c_1}{\gamma_1^2} \left(1 - c_1 + \delta^2 \sum_{k=1}^{s} \nu_k (1-c_1) - \delta^2 \gamma_1 \sum_{k=1}^{s} \frac{\nu_k}{\gamma_k}\right) \\
&= \delta^2 \sum_{k=1}^{s} |\mu_k|^2 c_k + \frac{1-c_1}{\gamma_1^2} \left((1-c_1)\left(1 + \delta^2 \sum_{k=1}^{s} \nu_k\right) - \delta^2 \gamma_1 \sum_{k=1}^{s} \frac{\nu_k}{\gamma_k}\right) \\
&= \delta^2 \sum_{k=1}^{s} |\mu_k|^2 c_k.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Рассмотрим вектор $\widehat{\tau} \in l_2^n$, имеющий вид

$$\widehat{\tau}_k^2 = \delta^2 \left(\frac{\gamma_1}{(1-c_1)\gamma_k} - 1\right), \quad k = 1, \ldots, s, \qquad \widehat{\tau}_k = 0, \quad k = s+1, \ldots, n.$$

Имеем

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \nu_k \widehat{\tau}_k^2 &= \delta^2 \sum_{k=1}^{s} \nu_k \left(\frac{\gamma_1}{(1-c_1)\gamma_k} - 1\right) = \frac{\delta^2 \gamma_1}{1-c_1} \sum_{k=1}^{s} \frac{\nu_k}{\gamma_k} - \delta^2 \sum_{k=1}^{s} \nu_k \\
&= \left(1 + \delta^2 \sum_{k=1}^{s} \nu_k\right) - \delta^2 \sum_{k=1}^{s} \nu_k = 1.
\end{aligned}$$

Таким образом, $\widehat{\tau} \in W$. Подставляя $\widehat{\tau}$ в оценку (3.5), получаем

$$E^2(T,W,I,\delta) \geqslant \sum_{k=1}^{s} \frac{\delta^2|\mu_k|^2\widehat{\tau}_k^2}{\delta^2+\widehat{\tau}_k^2} = \sum_{k=1}^{s} \frac{\delta^4|\mu_k|^2(\gamma_1/((1-c_1)\gamma_k)-1)}{\delta^2\gamma_1/((1-c_1)\gamma_k)}$$
$$= \delta^2\sum_{k=1}^{s}|\mu_k|^2\left(1-\frac{(1-c_1)\gamma_k}{\gamma_1}\right) = \delta^2\sum_{k=1}^{s}|\mu_k|^2c_k \geqslant e^2(T,W,I,\delta,\varphi).$$

Отсюда следует, что метод φ является оптимальным.

2.2. Пусть теперь $1/\delta > \xi_n$. Тогда

$$\frac{\delta^2\sum_{k=1}^{n}(\nu_k/\gamma_k)}{1+\delta^2\sum_{k=1}^{n}\nu_k} < \frac{1}{\gamma_n}.$$

Положим

$$c_1 = 1-\gamma_1\frac{e\delta^2\sum_{k=1}^{n}(\nu_k/\gamma_k)}{1+\delta^2\sum_{k=1}^{n}\nu_k}.$$

Тогда

$$\frac{1-c_1}{\gamma_1} < \frac{1}{\gamma_n}.$$

Пусть

$$c_k = 1-\gamma_k\frac{1-c_1}{\gamma_1}, \qquad k=2,\dots,n.$$

Имеем

$$\frac{(1-c_k)^2}{\gamma_k^2} = \frac{(1-c_1)^2}{\gamma_1^2}, \qquad k=2,\dots,n.$$

Тем самым, как и в предыдущем случае, справедливо равенство (3.6). Повторяя выкладки (3.7) для $s=n$, получаем

$$e^2(T,W,I,\delta,\varphi) \leqslant \delta^2\sum_{k=1}^{n}|\mu_k|^2c_k.$$

Рассмотрим вектор $\widehat{\tau} \in l_2^n$, имеющий вид

$$\widehat{\tau}_k^2 = \delta^2\left(\frac{\gamma_1}{(1-c_1)\gamma_k}-1\right), \qquad k=1,\dots,n.$$

Имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\nu_k\widehat{\tau}_k^2 = \delta^2\sum_{k=1}^{n}\nu_k\left(\frac{\gamma_1}{(1-c_1)\gamma_k}-1\right) = \frac{\delta^2\gamma_1}{1-c_1}\sum_{k=1}^{n}\frac{\nu_k}{\gamma_k} - \delta^2\sum_{k=1}^{n}\nu_k$$
$$= \left(1+\delta^2\sum_{k=1}^{n}\nu_k\right) - \delta^2\sum_{k=1}^{n}\nu_k = 1.$$

Таким образом, $\widehat{\tau} \in W$. Подставляя $\widehat{\tau}$ в оценку (3.5), получаем

$$E^2(T,W,I,\delta) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta^2|\mu_k|^2\widehat{\tau}_k^2}{\delta^2+\widehat{\tau}_k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta^4|\mu_k|^2(\gamma_1/((1-c_1)\gamma_k)-1)}{\delta^2\gamma_1/((1-c_1)\gamma_k)}$$
$$= \delta^2\sum_{k=1}^{n}|\mu_k|^2\left(1-\frac{(1-c_1)\gamma_k}{\gamma_1}\right) = \delta^2\sum_{k=1}^{n}|\mu_k|^2c_k \geqslant e^2(T,W,I,\delta,\varphi).$$

Отсюда следует, что метод φ является оптимальным.

Теорема 1 доказана.

§ 4. Оптимальное восстановление решения системы линейных дифференциальных уравнений

Здесь дается решение задачи о восстановлении для начальной точки в эллипсоиде, затем рассматривается частный случай шара. Потом задача о восстановлении по коэффициентам в момент времени T и для конечной точки в эллипсоиде. Затем приводится частный случай шара.

4.1. Восстановление решений линейных дифференциальных уравнений по исходной информации со случайной ошибкой в начальный момент времени. Рассмотрим задачу Коши для системы линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{4.1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \geqslant 0$ и $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}$.

Предположим, что матрица A является самосопряженной,

$$\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_n$$

– собственные числа матрицы A. Обозначим через $\{e_j\}_{j=1}^n$ ортонормированный базис из собственных векторов, соответствующих собственным значениям μ_j, $j = 1, \dots, n$.

Пусть

$$x_0 = \sum_{j=1}^n x_j e_j.$$

Тогда решение задачи (4.1) записывается в виде

$$x(t) = \sum_{j=1}^n e^{\mu_j t} x_j e_j.$$

Предположим, что координаты начальной точки x_0 известны со случайной ошибкой. Пусть, кроме того, известен некоторый эллипсоид, в котором находится точка x_0. Требуется восстановить решение в момент τ, $\tau > 0$.

Положим для $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$W = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n \nu_j x_j^2 \leqslant 1 \right\}, \qquad Tx = (e^{\mu_1 \tau} x_1, \dots, e^{\mu_n \tau} x_n), \qquad Ix = (x_1, \dots, x_n).$$

Как и в общей постановке, всякий метод восстановления сопоставляет случайному вектору $y \in Y_\delta(x)$ элемент из пространства $\mathbb{R}^n$, принимаемый за приближение к значению Tx. Таким образом, поставленная задача восстановления сводится к задаче, рассмотренной выше. Применим теорему 1.

Обозначим

$$\gamma_j = \frac{\sqrt{\nu_j}}{e^{\mu_j \tau}}, \quad j = 1, \dots, n, \qquad \xi_j = \left(\sum_{k=1}^j \nu_k \left(\frac{\gamma_j}{\gamma_k} - 1 \right) \right)^{1/2}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Теорема 2. *Пусть* $1/\delta \in (\xi_s, \xi_{s+1}]$ *при некоторых* $1 \leqslant s \leqslant n-1$ *или* $1/\delta \in (\xi_n, +\infty)$ *(в этом случае считаем* $s = n$*). Тогда*

$$E(T, W, I, \delta) = \delta\biggl(\sum_{k=1}^{s} e^{2\mu_k\tau}\biggl(1 - \frac{\gamma_k(1-c_1)}{\gamma_1}\biggr)\biggr)^{1/2},$$

где

$$c_1 = 1 - \frac{\delta^2\gamma_1\sum_{k=1}^{s}(\nu_k/\gamma_k)}{1 + \delta^2\sum_{k=1}^{s}\nu_k}, \tag{4.2}$$

а метод

$$\varphi(y) = \sum_{k=1}^{s}\biggl(1 - \frac{\gamma_k(1-c_1)}{\gamma_1}\biggr)e^{\mu_k\tau}y_k e_k,$$

является оптимальным.

Предположим, что матрица A является самосопряженной,

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_m$$

– собственные числа матрицы A и r_k – кратность собственного числа λ_k, $k = 1, \ldots, m$. Обозначим через $\{e_{kj}\}_{j=1}^{r_k}$ ортонормированную систему векторов, соответствующую собственному значению λ_k. Тогда система векторов

$$e_{11},\ \ldots,\ e_{1r_1},\ \ldots,\ e_{m1},\ \ldots,\ e_{mr_m}$$

является ортонормированным базисом в $\mathbb{R}^n$.

Пусть

$$x_0 = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{r_k} c_{kj}e_{kj}.$$

Тогда решение задачи (4.1) записывается в виде

$$x(t) = \sum_{k=1}^{m} e^{\lambda_k t}\sum_{j=1}^{r_k} c_{kj}e_{kj}.$$

Теперь предположим, что в начальный момент времени точка x_0 находится в некотором шаре радиуса R:

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{r_k} x_{kj}^2 \leqslant R^2.$$

Тогда задача восстановления решения в момент времени τ, $\tau > 0$, сводится к предыдущей для

$$W = \biggl\{x \in l_2^n\colon \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{r_k} R^{-2}x_{kj}^2 \leqslant 1\biggr\},$$

$$Tx = (e^{\lambda_1\tau}x_{11}, \ldots, e^{\lambda_1\tau}x_{1r_1}, \ldots, e^{\lambda_m\tau}x_{m1}, \ldots, e^{\lambda_m\tau}x_{mr_m}),$$

$$Ix = (x_{11}, \ldots, x_{1r_1}, \ldots, x_{m1}, \ldots, x_{mr_m}).$$

Положим

$$\xi_k = R^{-1}\left(\sum_{j=1}^{k} r_j\bigl(e^{(\lambda_j-\lambda_k)\tau}-1\bigr)\right)^{1/2}, \qquad k=1,\dots,m.$$

Теорема 3. *Пусть* $1/\delta\in(\xi_s,\xi_{s+1}]$ *при некоторых* $1\leqslant s\leqslant m-1$ *или* $1/\delta\in(\xi_m,+\infty)$ *(в этом случае считаем* $s=m$*). Тогда*

$$E(T,W,I,\delta)=\delta\left(\sum_{k=1}^{s} e^{2\lambda_k\tau} r_k\bigl(1-e^{(\lambda_1-\lambda_k)\tau}(1-c_1)\bigr)\right)^{1/2},$$

где

$$c_1 = 1-\frac{\delta^2R^{-2}e^{-\lambda_1\tau}\sum_{k=1}^{s} r_k e^{\lambda_k\tau}}{1+\delta^2R^{-2}\sum_{k=1}^{s} r_k}, \tag{4.3}$$

а метод

$$\varphi(y)=\sum_{k=1}^{s}\bigl(e^{\lambda_k\tau}-e^{\lambda_1\tau}(1-c_1)\bigr)\sum_{j=1}^{r_k} y_{kj}e_{kj},$$

является оптимальным.

4.2. Восстановление решений линейных дифференциальных уравнений по исходной информации со случайной ошибкой в момент времени T_1. Рассмотрим задачу Коши для системы линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=Ax, \\ x(0)=x_0, \end{cases} \tag{4.4}$$

где $x(t)\in\mathbb{R}^n$, $t\geqslant 0$, и $A=(a_{ij})$, $a_{ij}\in\mathbb{R}$.

Предположим, что матрица A является самосопряженной,

$$\lambda_1>\lambda_2>\dots>\lambda_n$$

– собственные числа матрицы A. Обозначим через $\{e_j\}_{j=1}^n$ ортонормированный базис из собственных векторов, соответствующих собственным значениям λ_j, $j=1,\dots,n$.

Пусть

$$x_0=\sum_{j=1}^{n} x_j e_j.$$

Тогда решение задачи (4.4) записывается в виде

$$x(t)=\sum_{j=1}^{n} e^{\lambda_j t}x_j e_j.$$

Кроме того, считается, что в начальный момент времени x_0 принадлежит некоторому эллипсоиду

$$B=\left\{x\in\mathbb{R}^n\colon\ \sum_{j=1}^{n} b_j x_j^2\leqslant 1\right\}.$$

Требуется восстановить решение в момент τ, $0 < \tau < T_1$. Если через x_j обозначить координаты решения в момент времени T_1, то условие принадлежности точки x_0 эллипсоиду будет означать, что

$$\sum_{j=1}^{n} b_j e^{-2\lambda_j T_1} x_j^2 \leqslant 1.$$

Таким образом, поставленная задача восстановления сводится к задаче, рассмотренной выше, для

$$W = \left\{ x \in l_2^n \colon \sum_{j=1}^{n} \nu_j x_j^2 \leqslant 1 \right\},$$

где $\nu_j = b_j e^{-2\lambda_j T_1}$, $j = 1, \ldots, n$.

Положим для $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$Tx = (e^{\lambda_1 (T_1 - \tau)} x_1, \ldots, e^{\lambda_n (T_1 - \tau)} x_n), \qquad Ix = (x_1, \ldots, x_n).$$

Как и в общей постановке, всякий метод восстановления сопоставляет случайному вектору $y \in Y_\delta(x)$ элемент из пространства $\mathbb{R}^n$, принимаемый за приближение к значению Tx. Для решения поставленной задачи восстановления применим теорему 1.

Обозначим

$$\gamma_j = \frac{\sqrt{\nu_j}}{e^{-\lambda_j (T_1 - \tau)}}, \quad \xi_j = \left(\sum_{k=1}^{j} \nu_k \left(\frac{\gamma_j}{\gamma_k} - 1 \right) \right)^{1/2}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Будем считать, что $\gamma_1 \leqslant \cdots \leqslant \gamma_n$.

Теорема 4. *Пусть* $1/\delta \in (\xi_s, \xi_{s+1}]$ *при некоторых* $1 \leqslant s \leqslant n-1$ *или* $1/\delta \in (\xi_n, +\infty)$ *(в этом случае считаем* $s = n$*). Тогда*

$$E(T, W, I, \delta) = \delta \left(\sum_{k=1}^{s} e^{-2\lambda_k (T_1 - \tau)} \left(1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_1} (1 - c_1) \right) \right)^{1/2},$$

где

$$c_1 = 1 - \frac{\delta^2 \gamma_1 \sum_{k=1}^{s} (\nu_k / \gamma_k)}{1 + \delta^2 \sum_{k=1}^{s} \nu_k}, \tag{4.5}$$

а метод

$$\varphi(y) = \sum_{k=1}^{s} \left((1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_1} (1 - c_1) \right) e^{-\lambda_k (T_1 - \tau)} y_k e_k,$$

является оптимальным.

Рассмотрим задачу Коши для системы линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{4.6}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \geqslant 0$, и $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Предположим, что матрица A является самосопряженной,

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_m$$

– собственные числа матрицы A и r_k – кратность собственного числа λ_k, $k = 1, \dots, m$. Обозначим через $\{e_{kj}\}_{j=1}^{r_k}$ ортонормированную систему векторов, соответствующую собственному значению λ_k. Тогда система векторов

$$e_{11},\ \dots,\ e_{1r_1},\ \dots,\ e_{m1},\ \dots,\ e_{mr_m}$$

является ортонормированным базисом в $\mathbb{R}^n$.

Пусть

$$x_0 = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{r_k} c_{kj}e_{kj}.$$

Тогда решение задачи (4.6) записывается в виде

$$x(t) = \sum_{k=1}^{m} e^{\lambda_k t}\sum_{j=1}^{r_k} c_{kj}e_{kj}.$$

Предположим, что решение задачи (4.6) известно с некоторыми случайными погрешностями в момент времени $t = T_1$. Как и в общей постановке, всякий метод восстановления сопоставляет случайному вектору $y \in Y_\delta(x)$ элемент из пространства $\mathbb{R}^n$, принимаемый за приближение к значению Tx. Кроме того, считается, что в начальный момент времени $\|x_0\| \leqslant R$ ($\|\cdot\|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^n$). Требуется восстановить решение в момент τ, $0 < \tau < T_1$. Если через x_{kj} обозначить координаты решения в момент времени T, то условие $\|x_0\| \leqslant R$ будет означать, что

$$\sum_{k=1}^{m} e^{-2\lambda_k T_1}\sum_{j=1}^{r_k} x_{kj}^2 \leqslant R^2.$$

Таким образом, поставленная задача восстановления сводится к задаче, рассмотренной выше, для

$$W = \left\{x \in l_2^n\colon\ \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{r_k} \nu_{kj}x_{kj}^2 \leqslant 1\right\},$$

где $\nu_k = \nu_{kj} = R^{-2}e^{-2\lambda_k T_1}$, $k = 1, \dots, m$,

$$Tx = (e^{-\lambda_1(T_1-\tau)}x_{11}, \dots, e^{-\lambda_1(T_1-\tau)}x_{1r_1}, \dots, e^{-\lambda_m(T_1-\tau)}x_{m1}, \dots, e^{-\lambda_m(T_1-\tau)}x_{mr_m}),$$
$$Ix = (x_{11}, \dots, x_{1r_1}, \dots, x_{m1}, \dots, x_{mr_m}).$$

Положим

$$\xi_k = R^{-1}\left(\sum_{j=1}^{k} r_j e^{-2\lambda_j T_1}\left(e^{(\lambda_j-\lambda_k)\tau} - 1\right)\right)^{1/2}, \qquad k = 1, \dots, m.$$

Теорема 5. *Пусть* $1/\delta \in (\xi_s, \xi_{s+1}]$ *при некоторых* $1 \leqslant s \leqslant m-1$ *или* $1/\delta \in (\xi_m, +\infty)$ *(в этом случае считаем* $s = m$*). Тогда*

$$E(T, W, I, \delta) = \delta\biggl(\sum_{k=1}^{s} r_k e^{-2\lambda_k(T_1-\tau)}\bigl(1 - e^{(\lambda_1-\lambda_k)\tau}(1-c_1)\bigr)\biggr)^{1/2},$$

где

$$c_1 = 1 - \frac{\delta^2 R^{-2} e^{-\lambda_1\tau} \sum_{k=1}^{s} r_k e^{(-2T_1+\tau)\lambda_k}}{1 + \delta^2 R^{-2} \sum_{k=1}^{s} r_k e^{-2\lambda_k T_1}}, \tag{4.7}$$

а метод

$$\varphi(y) = \sum_{k=1}^{s}\bigl(e^{-\lambda_k(T_1-\tau)} - e^{\lambda_1\tau-\lambda_k T_1}(1-c_1)\bigr)\sum_{j=1}^{r_k} y_{kj} e_{kj},$$

является оптимальным.

§ 5. Восстановление тригонометрических полиномов

Обозначим через $\mathcal{T}_n$ – множество тригонометрических полиномов

$$p_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n}(a_j \cos jt + b_j \sin jt). \tag{5.1}$$

Положим

$$\mathcal{T}_n^r = \{p_n(\cdot) \in \mathcal{T}_n \colon \|p_n^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant 1,\ r \geqslant 1\},$$

где $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$ с идентифицированными концами, а

$$\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} = \left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} |x(t)|^2\, dt\right)^{1/2}.$$

Рассматривается задача о восстановлении k-й производной полинома из множества $\mathcal{T}_n^r$ по его коэффициентам, известным со случайной ошибкой, при $0 \leqslant k < r$. Сведем эту задачу к общей задаче (3.1). Множество $\mathcal{T}_n^r$ представляет из себя множество полиномов (5.1), для которых

$$\sum_{j=1}^{n} j^{2r}(a_j^2 + b_j^2) \leqslant 1.$$

Поэтому, положив

$$x = (a_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n), \qquad W = \biggl\{x \in \mathbb{R}^{2n+1} \colon \sum_{j=1}^{n} j^{2r}(a_j^2 + b_j^2) \leqslant 1\biggr\},$$

$$Ix = x, \qquad Tx = \left(\frac{a_0}{\sqrt{2}}\chi_k, a_1, b_1, \dots, n^k a_n, n^k b_n\right), \qquad \chi_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \geqslant 1, \end{cases}$$

мы приходим к задаче (3.1). Надо отметить, что значения оператора T представляют из себя коэффициенты разложения по ортонормированному базису

$$\left(\frac{a_0}{\sqrt{2}}, \cos\left(t + \frac{\pi k}{2}\right), \sin\left(t + \frac{\pi k}{2}\right), \dots, \cos\left(nt + \frac{\pi k}{2}\right), \sin\left(nt + \frac{\pi k}{2}\right)\right).$$

К поставленной задаче нельзя применить теорему 1, так как здесь $\nu_1 = 0$. В связи с этим приходится применять модифицированный вариант этой теоремы. Рассмотрим множество W и оператор T для случая, когда $\nu_1 = 0$, а $\mu_1 \geqslant 0$. Введем обозначения

$$\gamma_j = \frac{\sqrt{\nu_j}}{|\mu_j|}, \quad j = 2, \dots, n, \qquad \xi_j = \left(\sum_{k=2}^{j} \nu_k \left(\frac{\gamma_j}{\gamma_k} - 1\right)\right)^{1/2}, \quad j = 2, \dots n.$$

Будем считать, что $\gamma_2 \leqslant \dots \leqslant \gamma_n$.

Теорема 6. *Пусть $1/\delta \in (\xi_s, \xi_{s+1}]$ при некотором $2 \leqslant s \leqslant n-1$ или $1/\delta \in (\xi_n, +\infty)$ (в этом случае считаем $s = n$). Тогда*

$$E(T, W, I, \delta) = \delta \left(|\mu_1|^2 + \sum_{k=2}^{s} |\mu_k|^2 \left(1 - \frac{\gamma_k (1 - c_2)}{\gamma_2}\right)\right)^{1/2},$$

где

$$c_2 = 1 - \frac{\delta^2 \gamma_2 \sum_{k=2}^{s} (\nu_k / \gamma_k)}{1 + \delta^2 \sum_{k=2}^{s} \nu_k}, \tag{5.2}$$

а метод

$$\varphi(y) = \mu_1 y_1 e_1 + \sum_{k=2}^{s} \left(1 - \frac{\gamma_k (1 - c_2)}{\gamma_2}\right) \mu_k y_k e_k$$

является оптимальным.

Доказательство. Те же рассуждения, которые использовались при оценке снизу при доказательстве теоремы 1, приводят к неравенству (3.5).

При оценке сверху погрешности методов, имеющих вид

$$\varphi(y) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j e_j,$$

снова получаем равенство

$$e^2(T, W, I, \delta, \varphi) = \sup_{x \in W} \|Tx - \varphi(Ix)\|_{l_2^n}^2 + \delta^2 \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2.$$

Но экстремальная задача

$$\|Tx - \varphi(Ix)\|_{l_2^n}^2 \to \max, \qquad x \in W,$$

в силу того, что $\nu_1 = 0$, переписывается теперь в виде

$$\sum_{j=1}^{n} |\mu_j - \alpha_j|^2 |x_j|^2 \to \max, \qquad \sum_{j=2}^{n} \nu_j |x_j|^2 \leqslant 1.$$

При $\alpha_1 \neq \mu_1$ значение задачи равно ∞. Поэтому в дальнейшем считаем, что $\alpha_1 = \mu_1$. Из неравенства

$$\begin{aligned}\sum_{j=2}^{n} |\mu_j - \alpha_j|^2 |x_j|^2 &= \sum_{j=2}^{n} \frac{|\mu_j - \alpha_j|^2}{\nu_j} \nu_j |x_j|^2 \\ &\leqslant \max\left\{\frac{|\mu_2 - \alpha_2|^2}{\nu_2}, \dots, \frac{|\mu_n - \alpha_n|^2}{\nu_n}\right\} \sum_{j=2}^{n} \nu_j |x_j|^2\end{aligned}$$

получаем

$$\sup_{x\in W}\|Tx-\varphi(Ix)\|^2_{l_2^n}\leqslant\max\left\{\frac{|\mu_2-\alpha_2|^2}{\nu_1},\dots,\frac{|\mu_n-\alpha_n|^2}{\nu_n}\right\}.$$

Таким образом,

$$e^2(T,W,I,\delta,\varphi)\leqslant\max\left\{\frac{|\mu_2-\alpha_2|^2}{\nu_2},\dots,\frac{|\mu_n-\alpha_n|^2}{\nu_n}\right\}+\delta^2\sum_{j=1}^n|\alpha_j|^2.$$

Положим

$$c_j=\frac{\alpha_j}{\mu_j},\qquad j=2,\dots,n.$$

Тогда для погрешность метода φ имеем

$$e^2(T,W,I,\delta,\varphi)\leqslant\max\left\{\frac{|1-c_2|^2}{\gamma_1^2},\dots,\frac{|1-c_n|^2}{\gamma_n^2}\right\}+\delta^2|\mu_1|^2+\delta^2\sum_{j=2}^n|\mu_j|^2|c_j|^2.$$

Пусть $1/\delta\in(\xi_s,\xi_{s+1}]$ при некотором $2\leqslant s\leqslant n-1$. Тогда нетрудно показать, что выполняются неравенства

$$\frac{1}{\gamma_{s+1}}\leqslant\frac{\delta^2\sum_{k=2}^s(\nu_k/\gamma_k)}{1+\delta^2\sum_{k=2}^s\nu_k}<\frac{1}{\gamma_s}.$$

Если определить c_2 равенством (5.2), то

$$\frac{1}{\gamma_{s+1}}\leqslant\frac{1-c_2}{\gamma_2}<\frac{1}{\gamma_s}.$$

Пусть

$$c_k=1-\gamma_k\frac{1-c_2}{\gamma_2},\quad k=3,\dots,s,\qquad c_k=0,\quad k=s+1,\dots,n.$$

Имеем

$$\frac{(1-c_k)^2}{\gamma_k^2}=\frac{(1-c_2)^2}{\gamma_2^2},\qquad k=3,\dots,s.$$

При $k\geqslant s+1$

$$\frac{(1-c_k)^2}{\gamma_k^2}=\frac{1}{\gamma_k^2}\leqslant\frac{1}{\gamma_{s+1}^2}\leqslant\frac{(1-c_2)^2}{\gamma_2^2}.$$

Поэтому

$$\max\left\{\frac{|1-c_2|^2}{\gamma_2^2},\dots,\frac{|1-c_n|^2}{\gamma_n^2}\right\}=\frac{(1-c_2)^2}{\gamma_2^2}.\tag{5.3}$$

Следовательно,

$$e^2(T,W,I,\delta,\varphi)\leqslant\frac{(1-c_2)^2}{\gamma_2^2}+\delta^2|\mu_1|^2+\delta^2\sum_{k=2}^s|\mu_k|^2c_k^2.$$

Используя преобразования, аналогичные (3.7), получаем

$$e^2(T,W,I,\delta,\varphi)\leqslant \delta^2|\mu_1|^2+\delta^2\sum_{k=2}^{s}|\mu_k|^2c_k.$$

Рассмотрим вектор $\widehat{\tau}\in l_2^n$, имеющий вид

$$\widehat{\tau}_1=\tau_1,\qquad \widehat{\tau}_k^2=\delta^2\left(\frac{\gamma_2}{(1-c_2)\gamma_k}-1\right),\quad k=2,\dots,s,\qquad \widehat{\tau}_k=0,\quad k=s+1,\dots,n.$$

Имеем

$$\sum_{k=2}^{n}\nu_k\widehat{\tau}_k^2=\delta^2\sum_{k=2}^{s}\nu_k\left(\frac{\gamma_2}{(1-c_2)\gamma_k}-1\right)=\frac{\delta^2\gamma_2}{1-c_2}\sum_{k=2}^{s}\frac{\nu_k}{\gamma_k}-\delta^2\sum_{k=2}^{s}\nu_k$$
$$=\left(1+\delta^2\sum_{k=2}^{s}\nu_k\right)-\delta^2\sum_{k=2}^{s}\nu_k=1.$$

Таким образом, $\widehat{\tau}\in W$. Подставляя $\widehat{\tau}$ (при $\tau_1\geqslant\widehat{\tau}_2$) в оценку (3.5), получаем

$$E^2(T,W,I,\delta)\geqslant\sum_{k=1}^{s}\frac{\delta^2|\mu_k|^2\widehat{\tau}_k^2}{\delta^2+\widehat{\tau}_k^2}=\frac{\delta^2|\mu_1|^2\tau_1^2}{\delta^2+\tau_1^2}+\sum_{k=2}^{s}\frac{\delta^4|\mu_k|^2(\gamma_2/((1-c_2)\gamma_k)-1)}{\delta^2\gamma_2/((1-c_2)\gamma_k)}$$
$$=\frac{\delta^2|\mu_1|^2\tau_1^2}{\delta^2+\tau_1^2}+\delta^2\sum_{k=2}^{s}|\mu_k|^2\left(1-\frac{(1-c_2)\gamma_k}{\gamma_2}\right)=\frac{\delta^2|\mu_1|^2\tau_1^2}{\delta^2+\tau_1^2}+\delta^2\sum_{k=1}^{s}|\mu_k|^2c_k.$$

Устремляя τ_1 к бесконечности, получаем

$$E^2(T,W,I,\delta)\geqslant\delta^2|\mu_1|^2+\delta^2\sum_{k=1}^{s}|\mu_k|^2c_k\geqslant e^2(T,W,I,\delta,\varphi).$$

Отсюда следует, что метод φ является оптимальным.

Пусть теперь $1/\delta>\xi_n$. Тогда

$$\frac{\delta^2\sum_{k=2}^{n}(\nu_k/\gamma_k)}{1+\delta^2\sum_{k=2}^{n}\nu_k}<\frac{1}{\gamma_n}.$$

Положим

$$c_2=1-\gamma_2\frac{\delta^2\sum_{k=2}^{n}(\nu_k/\gamma_k)}{1+\delta^2\sum_{k=2}^{n}\nu_k}.$$

Тогда

$$\frac{1-c_2}{\gamma_2}<\frac{1}{\gamma_n}.$$

Пусть

$$c_k=1-\gamma_k\frac{1-c_2}{\gamma_2},\qquad k=3,\dots,n.$$

Имеем

$$\frac{(1-c_k)^2}{\gamma_k^2}=\frac{(1-c_2)^2}{\gamma_2^2},\qquad k=3,\dots,n.$$

Тем самым, как и в предыдущем случае, справедливо равенство (5.3). Используя преобразования, аналогичные (3.7) для $s = n$, получаем

$$e^2(T, W, I, \delta, \varphi) \leqslant \delta^2 |\mu_1|^2 + \delta^2 \sum_{k=2}^{n} |\mu_k|^2 c_k.$$

Рассмотрим вектор $\widehat{\tau} \in l_2^n$, имеющий вид

$$\widehat{\tau}_1 = \tau_1, \qquad \widehat{\tau}_k^2 = \delta^2 \left(\frac{\gamma_2}{(1 - c_2)\gamma_k} - 1 \right), \quad k = 2, \ldots, n.$$

Имеем

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \nu_k \widehat{\tau}_k^2 &= \delta^2 \sum_{k=2}^{n} \nu_k \left(\frac{\gamma_2}{(1 - c_2)\gamma_k} - 1 \right) = \frac{\delta^2 \gamma_2}{1 - c_2} \sum_{k=2}^{n} \frac{\nu_k}{\gamma_k} - \delta^2 \sum_{k=2}^{n} \nu_k \\ &= \left(1 + \delta^2 \sum_{k=2}^{n} \nu_k \right) - \delta^2 \sum_{k=2}^{n} \nu_k = 1.\end{aligned}$$

Таким образом, $\widehat{\tau} \in W$. Подставляя $\widehat{\tau}$ (при $\tau_1 \geqslant \widehat{\tau}_2$) в оценку (3.5), получаем

$$\begin{aligned}E^2(T, W, I, \delta) &\geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta^2 |\mu_k|^2 \widehat{\tau}_k^2}{\delta^2 + \widehat{\tau}_k^2} = \frac{\delta^2 |\mu_1|^2 \tau_1^2}{\delta^2 + \tau_1^2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{\delta^4 |\mu_k|^2 (\gamma_2/((1 - c_2)\gamma_k) - 1)}{\delta^2 \gamma_2/((1 - c_2)\gamma_k)} \\ &= \frac{\delta^2 |\mu_1|^2 \tau_1^2}{\delta^2 + \tau_1^2} + \delta^2 \sum_{k=2}^{n} |\mu_k|^2 \left(1 - \frac{(1 - c_2)\gamma_k}{\gamma_2} \right) \\ &= \frac{\delta^2 |\mu_1|^2 \tau_1^2}{\delta^2 + \tau_1^2} + \delta^2 \sum_{k=1}^{n} |\mu_k|^2 c_k.\end{aligned}$$

Устремляя τ_1 к бесконечности, получаем

$$E^2(T, W, I, \delta) \geqslant \delta^2 |\mu_1|^2 + \delta^2 \sum_{k=1}^{n} |\mu_k|^2 c_k \geqslant e^2(T, W, I, \delta, \varphi).$$

Отсюда следует, что метод φ является оптимальным.

Теорема 6 доказана.

Применим полученную теорему для решения поставленной задачи. Обозначим

$$\xi_j = \left(2 \sum_{l=2}^{j} (l - 1)^{r+k} ((j - 1)^{r-k} - (l - 1)^{r-k}) \right)^{1/2}, \qquad j = 2, \ldots, n + 1.$$

Теорема 7. *Пусть* $1/\delta \in (\xi_s, \xi_{s+1}]$ *при некотором* $2 \leqslant s \leqslant n$ *или* $1/\delta \in (\xi_{n+1}, +\infty)$ *(в этом случае считаем* $s = n + 1$*). Тогда*

$$E(T, W, I, \delta) = \delta \left(\frac{\chi_k^2}{2} + 2 \sum_{l=2}^{s} \big((l - 1)^{2k} - (l - 1)^{r+k} (1 - c_2) \big) \right)^{1/2},$$

где

$$c_2 = 1 - \frac{2\delta^2 \sum_{l=2}^{s}(l-1)^{r+k}}{1 + 2\delta^2 \sum_{l=2}^{s}(l-1)^{2r}}, \tag{5.4}$$

а метод

$$\varphi(y) = \frac{\widetilde{a}_0}{\sqrt{2}}\chi_k + \sum_{l=2}^{s}\big(1 - (l-1)^{r-k}(1-c_2)\big) \times \left((l-1)^k \widetilde{a}_{l-1}\cos\left((l-1)t + \frac{\pi k}{2}\right) + (l-1)^k \widetilde{b}_{l-1}\sin\left((l-1)t + \frac{\pi k}{2}\right)\right)$$

является оптимальным, где $y = (\widetilde{a}_0, \widetilde{a}_1, \widetilde{b}_1, \ldots, \widetilde{a}_n, \widetilde{b}_n)$.

Список литературы

[1] С. М. Никольский, “К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами”, *УМН*, **5**:2(36) (1950), 165–177.

[2] С. А. Смоляк, *Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них*, Дисс. … канд. физ.-матем. наук, МГУ, М., 1965, 152 с.

[3] A. Sard, “Best approximate integration formulas; best approximation formulas”, *Amer. J. Math.*, **71**:1 (1949), 80–91.

[4] Дж. Трауб, Х. Вожьняковский, *Общая теория оптимальных алгоритмов*, Мир, М., 1983, 384 с.; пер. с англ.: J. F. Traub, H. Woźniakowski, *A general theory of optimal algorithms*, ACM Monogr. Ser., Academic Press, Inc., New York–London, 1980, xiv+341 pp.

[5] К. Ю. Осипенко, *Введение в теорию оптимального восстановления*, Лань, СПб., 2022, 388 с.

[6] K. Yu. Osipenko, *Optimal recovery of analytic functions*, Nova Science Publ., Huntington, NY, 2000, 220 pp.

[7] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Точность и оптимальность методов восстановления функций по их спектру”, *Функциональные пространства, теория приближений, смежные разделы математического анализа*, Сборник статей. К 110-летию со дня рождения академика Сергея Михайловича Никольского, Труды МИАН, **293**, МАИК “Наука/Интерпериодика”, М., 2016, 201–216; англ. пер.: G. G. Magaril-Il'yaev, K. Yu. Osipenko, “Exactness and optimality of methods for recovering functions from their spectrum”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **293** (2016), 194–208.

[8] К. Ю. Осипенко, “О восстановлении решения задачи Дирихле по неточным исходным данным”, *Владикавк. матем. журн.*, **6**:4 (2004), 55–62.

[9] В. М. Тихомиров, Г. Г. Магарил-Ильяев, *Выпуклый анализ и его приложения*, 3-е испр. изд., Книжный дом “Либроком”, М., 2011, 176 с.; англ. пер. 2-го изд.: G. G. Magaril-Il'yaev, V. M. Tikhomirov, *Convex analysis: theory and applications*, Transl. Math. Monogr., **222**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003, viii+183 pp.

[10] L. Plaskota, *Noisy information and computational complexity*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996, xii+308 pp.

[11] D. L. Donoho, R. C. Liu, B. MacGibbon, “Minimax risk over hyperrectangles, and implications”, *Ann. Statist.*, **18**:3 (1990), 1416–1437.

[12] D. L. Donoho, “Statistical estimation and optimal recovery”, *Ann. Statist.*, **22**:1 (1994), 238–270.

[13] С. В. Решетов, “Минимаксный риск для квадратично выпуклых множеств”, *Вероятность и статистика*. 15, Зап. науч. сем. ПОМИ, **368**, ПОМИ, СПб., 2009, 181–189; англ. пер.: S. Reshetov, “Minimax risk over quadratically convex sets”, *J. Math. Sci.* (*N. Y.*), **167**:4 (2010), 537–542.

[14] К. Ю. Кривошеев, “Об оптимальном восстановлении значений линейных операторов по информации, известной со случайной ошибкой”, *Матем. сб.*, **212**:11 (2021), 89–108; англ. пер.: K. Yu. Krivosheev, “On optimal recovery of values of linear operators from information known with a stochastic error”, *Sb. Math.*, **212**:11 (2021), 1588–1607.

[15] M. Wilczyński, “Minimax estimation in linear regression with ellipsoidal constraints”, *J. Statist. Plann. Inference*, **137**:1 (2007), 79–86.

[16] M. Wilczyński, “Minimax estimation over ellipsoids in ℓ_2”, *Statistics*, **42**:2 (2008), 95–100.

[17] Е. В. Введенская, “Об оптимальном восстановлении решения системы линейных однородных дифференциальных уравнений”, *Дифференц. уравнения*, **45**:2 (2009), 255–259; англ. пер.: E. V. Vvedenskaya, “On the optimal recovery of a solution of a system of linear homogeneous differential equations”, *Differ. Equ.*, **45**:2 (2009), 262–266.

Ирина Сергеевна Максимова
(Irina S. Maksimova)
Факультет физико-математических и естественных наук, Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, г. Москва
E-mail: `irismax@yandex.ru`

Поступила в редакцию
19.04.2024 и 06.09.2024

Константин Юрьевич Осипенко
(Konstantin Yu. Osipenko)
Механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова;
Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича Российской академии наук, г. Москва
E-mail: `kosipenko@yahoo.com`