МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. Ломоносова
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра общих проблем управления

КУРСОВАЯ РАБОТА

"Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности в фиксированные моменты времени по неточным исходным данным."

"Optimal recovery of the solution of the heat equation at fixed moments of time from inaccurate input data"

Выполнила студентка 4 курса
Смирнова А.А.

Научный руководитель
Осипенко К.Ю.

Москва 2012

Введение.

Многие стороны практической деятельности человека связаны с тем, что ему приходится судить об изучаемых объектах по неполной или неточной информации. К примеру, имеется возможность измерить температуру некоторого тела в моменты времени $t_1, \ldots, t_k$ с некоторой погрешностью. Возникает вопрос: как наилучшим образом воспользоваться полученной информацией, чтобы восстановить его температуру в какие-нибудь другие моменты времени.

Таким образом, ставится задача об оптимальном восстановлении решения уравнения теплопроводности в некоторые моменты времени по приближенным измерениям этого решения в другие моменты времени. Такая задача была рассмотрена ранее в статьях [1] — [2], но в случае, когда требуется восстановить решение в одной точке. В данной работе рассматривается задача об одновременном восстановлении решения уравнения теплопроводности в нескольких точках и приводятся явные выражения для оптимального метода восстановления и его погрешности.

1. Постановка задачи.

Распределение температуры бесконечного стержня в $\mathbb{R}$ описывается, как известно, уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

($u(\cdot,\cdot)$ — функция на $[0,+\infty)\times\mathbb{R}$) с заданным начальным распределением температуры

$$u(0,\cdot) = u_0(\cdot). \tag{2}$$

Предполагаем, что $u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$. Единственным решением задачи (1)-(2) является интеграл Пуассона

$$u(t,x) = u(t,x;u_0(\cdot)) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} u_0(\xi)d\xi,$$

где $u(t,\cdot) \to u_0(t)$ при $t \to 0$ в метрике $L_2(\mathbb{R})$.

Ставится следующая задача. Пусть в моменты времени $0 \le t_1 < \ldots < t_n$ приближенно известны распределения температур $u(t_1,\cdot),\ldots,u(t_n,\cdot)$, т. е. известны функции $y_j(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ такие, что

$$\|u(t_j,\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} < \delta_j, \quad j = 1,\ldots,n,$$

где $\delta_j > 0, \quad j = 1,\ldots,n$.

Мы хотим каждому такому набору функций сопоставить набор функций из $L_2(\mathbb{R})$, который бы в некотором смысле наилучшим образом аппроксимировал истинное распределение температур стержня в фиксированные моменты времени $\tau_1 < \ldots < \tau_k$.

Под этим понимается следующее. Любое отображение m из $(L_2(\mathbb{R}))^n = L_2(\mathbb{R}) \times \ldots \times L_2(\mathbb{R})$ в $(L_2(\mathbb{R}))^k$ назовем методом восстановления (температуры в $\mathbb{R}$ в моменты времени $(\tau_1,\ldots,\tau_k)$ по данной информации). Погрешностью этого метода назовем величину

$$e(\tau,\overline{\delta},m) = \sup_{\substack{u_0(\cdot),\overline{y}(\cdot)\in(L_2(\mathbb{R}))^n, \\ \|u(t_j,\cdot)-y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}<\delta_j, j=1,\ldots,n}} \sqrt{\sum_{i=1}^{k} p_j \|u(\tau_j,\cdot) - m_j(\overline{y}(\cdot))(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}} \ ,$$

где $m = (m_1 \ldots m_k)$, $\overline{y}(\cdot) = (y_1(\cdot),\ldots,y_n(\cdot))$, $\overline{\delta} = (\delta_1,\ldots,\delta_n)$, а p_j — некоторые неотрицательные весовые коэффициенты (предполагается, что все p_j не могут одновременно обратиться в ноль).

Нас интересует величина

$$E(\tau,\overline{\delta})=\inf_{m:(L_2(\mathbb{R}))^n\to(L_2(\mathbb{R}))^k} e(\tau,\overline{\delta},m),$$

которую назовем погрешностью оптимального восстановления и метод $\widehat{m}$, на котором нижняя грань достигается, т. е. для которого

$$E(\tau,\overline{\delta})=e(\tau,\overline{\delta},\widehat{m});$$

$\widehat{m}$ называется оптимальным методом восстановления.

Свяжем с задачей оптимального восстановления следующую экстремальную задачу

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{k} p_j\|u\left(\tau_j,\cdot\right)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}}\to\max,\ \ \|u(t_j,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\delta_j,\ \ j=1,\dots,n,$$

которую назовем двойственной.

Докажем, что $E(\tau,\overline{\delta})\ge\sup\limits_{\substack{u_0(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}),\\ \|u(t_j,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\delta_j, j=1,\dots,n}}\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{k} p_j\|u\left(\tau_j,\cdot\right)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}}$.

Действительно, пусть $u_0(\cdot)$ таково, что $\|u(t_j,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\delta_j, j=1,\dots,n$, и $m=(m_1,\dots,m_k)$ — произвольный метод восстановления. Тогда

$$2\sqrt{\sum_{j=1}^{k} p_j\|u\left(\tau_j,\cdot\right)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}}=$$

$$=\sqrt{\sum_{j=1}^{k} p_j\|u\left(\tau_j,\cdot\right)-m_j(\cdot)-(-u\left(\tau_j,\cdot\right)-m_j(\cdot))\|^2_{L_2(\mathbb{R})}}\le$$

$$\le\sqrt{\sum_{j=1}^{k} p_j\|u\left(\tau_j,\cdot\right)-m_j(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}}+\sqrt{\sum_{j=1}^{k} p_j\|u\left(\tau_j,\cdot\right)-m_j(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}}\le 2e(\tau,\overline{\delta},m).$$

Переходя к верхней грани по всем указанным $u_0(\cdot)$, получаем, что для всех m справедливо неравенство

$$e(\tau,\overline{\delta},m)\ge\sup_{\substack{u_0(\cdot)\in L_2(\mathbb{R})\\ \|u(t_j,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\delta_j,\ j=1,\dots,n}}\sqrt{\sum_{j=1}^{k} p_j\|u\left(\tau_j,\cdot\right)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}}.$$

Следовательно,

$$E(\tau,\overline{\delta}) = \inf_{m:(L_2(\mathbb{R}))^n\to(L_2(\mathbb{R}))^k} e(\tau,\overline{\delta},m) \geq$$

$$\geq \sup_{\substack{u_0(\cdot)\in L_2(\mathbb{R})\\ \|u(t_j,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\leq\delta_j,\ j=1,\ldots,n}} \sqrt{\sum_{j=1}^{k} p_j \|u\left(\tau_j,\cdot\right)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}},$$

что и требовалось доказать.

Пусть $f_i : A \to \mathbb{R}$, где A — некоторое множество. Рассмотрим задачу:

$$f_0(x) \to \max,\ \ f_i(x) \leq 0, \quad i = 1,\ldots,n,\ x \in A.$$

Положим $\mathcal{L}(x,\lambda) = -f_0(x) + \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x), \quad \lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n).$

Лемма 1.

Если $\exists \widehat{\lambda_i} \geq 0, \ \ i = 1,\ldots,n$ и $\widehat{x}$ — допустимый ($f_i(\widehat{x}) \leq 0, \ \ i = 1,\ldots,n$), что:

1) $\min\limits_{x\in A} \mathcal{L}(x,\widehat{\lambda}) = \mathcal{L}(\widehat{x},\widehat{\lambda}),$ 2) $\sum\limits_{i=1}^{n} \widehat{\lambda}_i f_i(\widehat{x}) = 0,$

то $\widehat{x}$ - решение задачи.

2. Случай n — произвольное, $k = 2$.

Лемма 2.

Пусть $0 < \tau_1 < \ldots < \tau_k < T < \tau_{k+1} < \ldots < \tau_n$, $1 \leq k < n$. Если уравнение

$$(1) \quad \sum_{j=1}^{n} p_j - \sum_{j=1}^{n} p_j x_0^{\frac{\tau_j}{T}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\tau_j p_j}{T} x_0^{\frac{\tau_j}{T}-1} (1 - x_0)$$

имеет решение $x_0 \in (0,1)$,то это решение единственно, при этом

$$G(x_0) = \sum_{j=1}^{n} p_j x_0^{\frac{\tau_j}{T}} \left(1 - \frac{\tau_j}{T}\right) > 0.$$

$\lhd$ Доказательство.

Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} p_j x^{\frac{\tau_j}{T}}.$$

Тогда

$$f'(x) = \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\tau_j}{T} x^{\frac{\tau_j}{T}-1},$$

$$f''(x) = \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\tau_j}{T} \left(\frac{\tau_j}{T} - 1\right) x^{\frac{\tau_j}{T}-2},$$

$$f''(x) = x^{\frac{\tau_1}{T}-2} g(x),$$

где

$$g(x) = -a_1 - a_2 x^{c_2} - \ldots - a_k x^{c_k} + a_{k+1} x^{c_{k+1}} + \ldots + a_n x^{c_n}$$

причем

$$c_j = \frac{\tau_j - \tau_1}{T} \ ,$$

$$a_j = \begin{cases} \dfrac{p_j \tau_j}{T} \left(1 - \dfrac{\tau_j}{T}\right), & 1 \leq j \leq k, \\ \dfrac{p_j \tau_j}{T} \left(\dfrac{\tau_j}{T} - 1\right), & k+1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

Таким образом, $a_j > 0, j = 1, \ldots, n$, $0 < c_1 < \ldots < c_n$.

Поскольку $g(0) < 0$, $g(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$ и функция $g(x)$ непрерывна на $(0, +\infty)$, существует точка x_0 такая, что $g(x_0) = 0$. Докажем, что такая точка единственна и, кроме того, $g'(x) \geq 0$ при $x \geq x_0$, $g(x) < 0$ при $0 < x < x_0$.

Доказательство проведем индукцией по числу отрицательных слагаемых.

При $k = 1$ утверждение очевидно.

$g(x) = -a_1 + a_2x^{c_2} + \ldots + a_nx^{c_n}$ — строго возрастающая функция ($g'(x) > 0\ \forall x \geq 0$), $g(0) = -a_1$, $g(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$. Отсюда следует, что $\exists! x_0 : g(x_0) = 0$. Так как $g(x)$ возрастает на $(0, +\infty)$, то $\forall x > x_0\ g(x) > g(x_0) = 0$

Предположим, что утверждение доказано при всех $k \leq n-1$. Докажем утверждение для $k = n$. Имеем:

$$g(x) = -a_1 - a_2x^{c_2} - \ldots - a_kx^{c_k} + a_{k+1}x^{c_{k+1}} + \ldots + a_nx^{c_n} = -a_1 + x^{c_2}h(x),$$

где

$$h(x) = -a_2 - a_3x^{c_3-c_2} - \ldots - a_kx^{c_k-c_2} + a_{k+1}x^{c_{k+1}-c_2} + \ldots + a_nx^{c_n-c_2}.$$

В силу предположения индукции существует точка x_1 такая, что $h(x_1) = 0$, $h'(x) \geq 0$ при $x \geq x_1$ и $h(x) < 0$ при $0 < x < x_1$. Тогда

$$g'(x) = (x^{c_2}h(x))' = c_2x^{c_2-1}h(x) + x^{c_2}h'(x).$$

Так как $h(x_1) = 0$, $h'(x) \geq 0$ при $x \geq x_1$, то $h(x) > 0$ и $(x^{c_2}h(x))' > 0$ при $x \geq x_1$. Тем самым функция $x^{c_2}h(x)$ монотонно возрастает при $x > x_1$, обращается в ноль при $x = x_1$ и отрицательна при $0 < x < x_1$. Следовательно, существует единственная точка x_0, для которой $x^{c_2}h(x) = a_1$. Тогда $g(x_0) = 0$, $g'(x) \geq 0$ при $x > x_0$ и $g(x) < 0$ при $0 < x < x_0$.

Перепишем уравнение $(*)$ в следующем виде:

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\tau_j}{T} x^{\frac{\tau_j}{T}-1} + \sum_{j=1}^{n} p_j x^{\frac{\tau_j}{T}} \left(1 - \frac{\tau_j}{T}\right) - \sum_{j=1}^{n} p_j = 0.$$

Рассмотрим функцию $F(x)$ на интервале $(0, 1)$.

$F'(x) = f''(x)(1-x) = x^{\frac{\tau_1}{T}-2}g(x)(1-x)$. По доказанному выше, $\exists! x_p : g(x_p) = 0$.

Предположим, что $x_p \in (0, 1)$. Тогда $F'(x) < 0$ при $0 < x < x_p$ и $F'(x) \geq 0$ при $x > x_p$. Получаем, что $F(x)$ убывает на $(0; x_p)$ и возрастает на $(x_p;1)$, x_p - локальный минимум функции $F(x)$. Тогда $F(x_p) < F(1) = 0$.

Так как $F(x) \to +\infty$ при $x \to 0$, а $F(x_p) < 0$ и функция $F(x)$ монотонна на $(0;x_p)$, то $\exists!\ x_0 \in (0;x_p)$, что $F(x_0) = 0$.

Предположим теперь, что $x_p > 1$. Тогда $F'(x) < 0\ \forall x \in (0,1)$ и $F(x)$ убывает на интервале $(0,1)$. Таким образом, $\forall x \in (0,1)\ F(x) > F(1) = 0$.

Тем самым показали, что уравнение (1) на интервале $(0,1)$ имеет не более одного решения.

Рассмотрим функцию

$$G(x) = \sum_{j=1}^{n} p_j x_0^{\frac{\tau_j}{T}} \left(1 - \frac{\tau_j}{T}\right).$$

$$G'(x) = -xf''(x) = -x^{\frac{\tau_1}{T}-1} g(x).$$

Считаем, что $x_p \in (0,1)$, тогда $x_0 \in (0,x_p)$. Так как $g(x) < 0$ при $0 < x < x_p$, то $G'(x) > 0, x \in (0,x_p)$. Получаем, что функция $G(x)$ монотонно возрастает на $(0,x_p)$, тогда $G(x_0) > G(0) = 0$.

Таким образом лемма доказана.

$\blacktriangleright$

Теорема 1.

Пусть в поставленной задаче n — произвольное, $k = 2, t_1 = 0,\ t_2 = T$, $0 < \tau_1 < \ldots < \tau_k < T < \tau_{k+1} < \ldots < \tau_n$, $1 \le k < n$, а $x_0 \in (0;1), \delta_0$ и δ_T таковы, что $\sqrt{x_0} \le \frac{\delta_T}{\delta_0} \le 1$, где x_0 — решение уравнения (1).

Тогда имеет место равенство $E^2(\tau,\delta_0,\delta_T) = \widehat{\lambda_0}\delta_0^2 + \widehat{\lambda_T}\delta_T^2$, где

$$\widehat{\lambda_0} = \sum_{j=1}^{n} p_j x_0^{\frac{\tau_j}{T}} \left(1 - \frac{\tau_j}{T}\right),$$

$$\widehat{\lambda_T} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\tau_j p_j}{T} x_0^{\frac{\tau_j}{T}-1}.$$

Все методы $m = (m_1, \ldots, m_n)$ вида
$Fm_j(\overline{y}) = \alpha_0^j(\xi)Fy_0(\xi) + \alpha_T^j(\xi)Fy_T(\xi)$, для которых выполнено:

$$\begin{cases} \alpha_0^j + \alpha_T^j e^{-\xi^2 T} = e^{-\xi^2 \tau_j}, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_j \left(\frac{\left|\alpha_0^j(\xi)\right|^2}{\lambda_0} + \frac{\left|\alpha_T^j(\xi)\right|^2}{\lambda_T} \right) \leq 1, \end{cases}$$

являются оптимальными. При этом множество оптимальных методов непусто.

$\triangleleft$ Доказательство.

Найдем оценку снизу для погрешности оптимального восстановления. Для этого рассмотрим двойственную задачу. В этом случае двойственная задача примет вид:

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n} p_j \|u\left(\tau_j, \cdot\right)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}} \to \max,$$

$$\|u_0(\cdot)\| \leq \delta_0,$$

$$\|u(T, \cdot)\| \leq \delta_T.$$

Решение уравнения теплопроводности в образах Фурье имеет вид:

$$Fu(t, \xi) = e^{-\xi^2 t} Fu_0(\xi).$$

Для удобства будем рассматривать квадрат максимизируемого значения. Переходя к образам Фурье, в силу теоремы Планшереля получаем:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{n} p_j \int_{\mathbb{R}} e^{-2\xi^2 \tau_j} |Fu_0(\xi)|^2 d\xi \to \max,$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |Fu_0|^2 d\xi \leq \delta_0^2, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-2\xi^2 T} |Fu_0|^2 d\xi \leq \delta_T^2.$$

Рассмотрим расширенную задачу:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \int_{\mathbb{R}} e^{-2\xi^2 \tau_j} d\mu \to \max, \quad \int_{\mathbb{R}} d\mu \leq \delta_0^2, \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-2\xi^2 T} d\mu \leq \delta_T^2, \quad d\mu \geq 0, \quad (3)$$

где $d\mu(\cdot)$ - мера на $\mathbb{R}$.

Положим

$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot), \lambda_0, \lambda_T) = \int_{\mathbb{R}} \left(-\sum_{j=1}^{n} p_j e^{-2\xi^2 \tau_j} + \lambda_0 + \lambda_T e^{-2\xi^2 T} \right) d\mu, \ \ \lambda_0 \geq 0, \lambda_T \geq 0.$$

Рассмотрим кривую в плоскости (x, y), заданную параметрически:

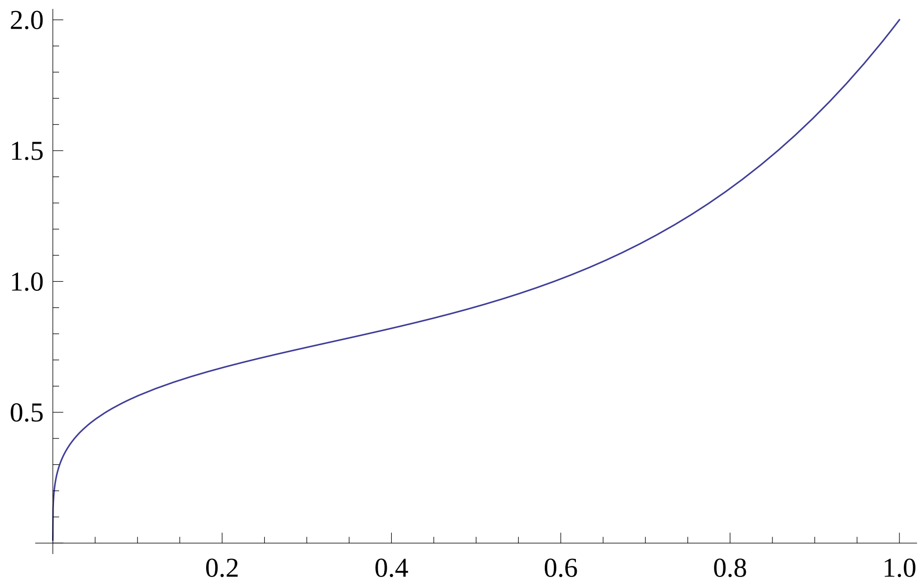
$$\begin{cases} y = \sum_{j=1}^{n} p_j e^{-2\xi^2 \tau_j}, \\ x = e^{-2\xi^2 T}, \end{cases}$$

где ξ - параметр.

Выражая ξ через x и подставляя полученное выражение в первое уравнение системы, получаем:

$$y = \sum_{j=1}^{n} p_j x^{\tau_j / T}.$$

Из условий теоремы и леммы 2 следует, что график данной функции имеет вид:



Из точки $(1, p_1+p_2)$ проведем к графику прямую, касающуюся графика в некоторой точке $x_0 \in (0,1)$.

Уравнение касательной:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

где (x_0, y_0) — точка касания. Учитывая, что

$$y_0 = \sum_{j=1}^{n} p_j x_0^{\tau_j/T},$$

получаем уравнение:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j - \sum_{j=1}^{n} p_j x_0^{\frac{\tau_j}{T}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\tau_j p_j}{T} x_0^{\frac{\tau_j}{T}-1} \left(1 - x_0\right).$$

Получаем следующее уравнение касательной: $y = \lambda_0 + \lambda_T x$, где

$$\widehat{\lambda_T} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\tau_j p_j}{T} x_0^{\frac{\tau_j}{T}-1},$$

$$\widehat{\lambda_0} = \sum_{j=1}^{n} p_j x_0^{\frac{\tau_j}{T}} \left(1 - \frac{\tau_j}{T}\right).$$

Из леммы 2 следует, что $\widehat{\lambda_0} > 0$.

Положим $\widehat{d\mu}(\xi) = A\delta(\xi) + B\delta(\xi - \xi_0)$, где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция, $\xi_0 = \sqrt{-\frac{\ln x_0}{2T}}$, а A и B выбраны так, чтобы выполнялись условия дополняющей нежесткости:

$$\lambda_0 \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{d\mu}(\xi) - \delta_0^2 \right) = 0, \quad \lambda_T \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-2\xi^2 T} \widehat{d\mu}(\xi) - \delta_T^2 \right) = 0.$$

Так как $\widehat{\lambda_0} > 0, \widehat{\lambda_T} > 0$, получаем систему:

$$\begin{cases} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{d\mu}(\xi) - \delta_0^2 \right) = 0, \\ \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-2\xi^2 T} \widehat{d\mu}(\xi) - \delta_T^2 \right) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} A + B - \delta_0^2 = 0, \\ A + Be^{-2\xi_0^2 T} - \delta_T^2 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, $A = \frac{\delta_T^2 - x_0\delta_0^2}{1-x_0}$, $B = \frac{\delta_0^2-\delta_T^2}{1-x_0}$, где x_0 — решение уравнения (1). Так как по условию теоремы $\sqrt{x_0} \le \frac{\delta_T}{\delta_0} \le 1$, то $A \ge 0, B \ge 0$ и $d\mu(\cdot) \ge 0$ — допустимая мера на $\mathbb{R}$.

Тогда

$$\widehat{d\mu}(\xi) = \frac{\delta_T^2 - x_0\delta_0^2}{1-x_0}\delta(\xi) + \frac{\delta_0^2 - \delta_t^2}{1-x_0}\delta(\xi - \xi_0).$$

$$\widehat{\lambda_0} = \sum_{j=1}^n p_j x_0^{\frac{\tau_j}{T}} \left(1 - \frac{\tau_j}{T}\right),$$

$$\widehat{\lambda_T} = \sum_{j=1}^n \frac{\tau_j p_j}{T} x_0^{\frac{\tau_j}{T}-1}.$$

Для таких $\widehat{d\mu}(\cdot)$, $\widehat{\lambda_0}$, $\widehat{\lambda_T}$ выполнены условия дополняющей нежесткости и $\min\limits_{d\mu\ge0} \mathcal{L}(d\mu(\cdot), \widehat{\lambda_0}, \widehat{\lambda_T}) = \mathcal{L}(\widehat{d\mu(\cdot)}, \widehat{\lambda_0}, \widehat{\lambda_T})$, тогда по лемме 1 $\widehat{d\mu}(\cdot)$ является решением двойственной задачи и оценка снизу для погрешности оптимального восстановления имеет вид:

$$E^2(\alpha, \beta, \delta_0, \delta_T) \ge \widehat{\lambda_0}\delta_0^2 + \widehat{\lambda_T}\delta_T^2 \quad .$$

Найдем теперь оценку сверху для погрешности оптимального восстановления и докажем, что она совпадает с оценкой снизу.

Погрешность метода:

$$e^2(m) = \sup_{\substack{u_0(\cdot),\ y_0,\ y_T \in L_2(\mathbb{R}),\\ \|u_0(\cdot)-y_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\delta_0,\\ \|u(T,\cdot)-y_T(\cdot)\|\le\delta_T}} \sum_{j=1}^n p_j \|u(\tau_j, \cdot) - m_j(y_0(\cdot), y_T(\cdot))(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}$$

Будем рассматривать такие методы, которые в образах Фурье имеют вид: $Fm_j(\overline{y}) = \alpha_0^j(\xi)Fy_0(\xi) + \alpha_T^j(\xi)Fy_T(\xi)$ Имеем следующую задачу:

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^n p_j \int_{\mathbb{R}} \left| e^{-\xi^2\tau_j} Fu_0(\xi) - \alpha_0^j Fy_0(\xi) - \alpha_T^j Fy_T(\xi)\right|^2 d\xi \to \max,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |Fu_0(\xi) - Fy_0(\xi)|^2\, d\xi \le \delta_0^2,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \left|e^{-\xi^2 T} Fu_0(\xi) - Fy_T(\xi)\right|^2 d\xi \le \delta_T^2.$$

Положим $z_0(\xi) = Fu_0(\xi) - Fy_0(\xi)$ и $z_T = e^{-\xi^2 T} Fu_0(\xi) - Fy_T(\xi)$. Тогда задача перепишется в виде:

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n} p_j \int_{\mathbb{R}} \left|\left(e^{-\xi^2\tau_j} - \alpha_0^j - \alpha_T^j e^{-\xi^2 T}\right) Fu_0(\xi) + \alpha_0^j z_0(\xi) + \alpha_T^j z_T(\xi)\right|^2 d\xi \to \max,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |z_0(\xi)|^2\, d\xi \le \delta_0^2,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |z_T(\xi)|^2\, d\xi \le \delta_T^2.$$

Будем оценивать методы, удовлетворяющие условию:

$$\alpha_0^j + \alpha_T^j e^{-\xi^2 T} = e^{-\xi^2\tau_j}, j = 1, \ldots, k$$

Можно показать, что для методов, которые не удовлетворяют этому условию, погрешность восстановления равна ∞. Тогда задача сводится к следующей:

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n} p_j \int_{\mathbb{R}} \left|\ \alpha_0^j z_0(\xi) + \alpha_T^j z_T(\xi)\right|^2 d\xi \to \max,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |z_0(\xi)|^2\, d\xi \le \delta_0^2,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |z_T(\xi)|^2\, d\xi \le \delta_T^2.$$

По неравенству Коши - Буняковского имеем:

$$\left|\alpha_0^j z_0(\xi) + \alpha_T^j z_T(\xi)\right|^2 = \left|\frac{\alpha_0^j(\xi)}{\sqrt{\lambda_0}}\sqrt{\lambda_0} z_0 + \frac{\alpha_T^j(\xi)}{\sqrt{\lambda_T}}\sqrt{\lambda_T} z_T\right|^2 \le$$

$$\leq \left(\frac{\left|\alpha_0^j(\xi)\right|^2}{\lambda_0} + \frac{\left|\alpha_T^j(\xi)\right|^2}{\lambda_T} \right) \left(\lambda_0 \left|z_0(\xi)\right|^2 + \lambda_T \left|z_T(\xi)\right|^2\right)$$

Тем самым рассматриваемая экстремальная задача оценивается следующим образом:

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \sum_{j=1}^{n} p_j \left(\frac{\left|\alpha_0^j(\xi)\right|^2}{\lambda_0} + \frac{\left|\alpha_T^j(\xi)\right|^2}{\lambda_T} \right) \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\lambda_0 \left|z_0(\xi)\right|^2 + \lambda_T \left|z_T(\xi)\right|^2\right) d\xi \leq$$

$$\leq (\lambda_0\delta_0^2 + \lambda_T\delta_T^2) \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \sum_{j=1}^{k} p_j \left(\frac{\left|\alpha_0^j(\xi)\right|^2}{\lambda_0} + \frac{\left|\alpha_T^j(\xi)\right|^2}{\lambda_T} \right)$$

Если при всех $\xi \in \mathbb{R}$

$$S(\xi) = \sum_{j=1}^{n} p_j \left(\frac{\left|\alpha_0^j(\xi)\right|^2}{\lambda_0} + \frac{\left|\alpha_T^j(\xi)\right|^2}{\lambda_T} \right) \leq 1,$$

то оценка сверху совпадает с оценкой снизу, соответствующий метод является оптимальным и система для нахождения $\alpha_0 = (\alpha_0^1, \ldots, \alpha_0^n)$ и $\alpha_T = (\alpha_T^1, \ldots, \alpha_T^n)$ запишется в виде:

$$\begin{cases} \alpha_0^j + \alpha_T^j e^{-\xi^2 T} = e^{-\xi^2\tau_j}, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{k} p_j \left(\frac{\left|\alpha_0^j(\xi)\right|^2}{\lambda_0} + \frac{\left|\alpha_T^j(\xi)\right|^2}{\lambda_T} \right) \leq 1. \end{cases}$$

Таким образом теорема доказана.

▶

Теорема 2.

Пусть в поставленной задаче n — произвольное, $k = 2, t_1 = 0,\ t_2 = T$, $0 < \tau_1 < \ldots < \tau_k < T < \tau_{k+1} < \ldots < \tau_n$, $1 \leq k < n$, а x_0, δ_0 и δ_T таковы, что $\frac{\delta_T}{\delta_0} \leq 1$ и $\frac{\delta_T}{\delta_0} < \sqrt{x_0}$, где x_0 — решение уравнения (1).

Тогда имеет место равенство $E^2(\tau, \delta_0, \delta_T) = \widehat{\lambda_0}\delta_0^2 + \widehat{\lambda_T}\delta_T^2$, где

$$\widehat{\lambda_0} = \sum_{j=1}^{n} p_j x_1^{\frac{\tau_j}{T}} \left(1 - \frac{\tau_j}{T}\right),$$

$$\widehat{\lambda_T} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\tau_j p_j}{T} x_1^{\frac{\tau_j}{T}-1},$$

где $x_1 = \left(\frac{\delta_T}{\delta_0}\right)^2$.

Все методы $m = (m_1, \dots, m_n)$ вида $Fm_j(\overline{y}) = \alpha_0^j(\xi)Fy_0(\xi) + \alpha_T^j(\xi)Fy_T(\xi)$, для которых выполнено:

$$\begin{cases} \alpha_0^j + \alpha_T^j e^{-\xi^2 T} = e^{-\xi^2 \tau_j}, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} p_j \left(\dfrac{\left|\alpha_0^j(\xi)\right|^2}{\lambda_0} + \dfrac{\left|\alpha_T^j(\xi)\right|^2}{\lambda_T} \right) \leq 1, \end{cases}$$

являются оптимальными. При этом множество оптимальных методов непусто.

$\lhd$ Доказательство.

Аналогично теореме 1 найдем оценку снизу для погрешности оптимального восстановления, используя расширенную двойственную задачу.

Функция Лагранжа записывается в виде:

$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot), \lambda_0, \lambda_T) = \int_{\mathbb{R}} \left(-\sum_{j=1}^{n} p_j e^{-2\xi^2 \tau_j} + \lambda_0 + \lambda_T e^{-2\xi^2 T} \right) d\mu, \;\; \lambda_0 \geq 0, \lambda_T \geq 0.$$

Рассмотрим кривую в плоскости (x, y), заданную параметрически:

$$\begin{cases} y = \sum\limits_{j=1}^{n} p_j e^{-2\xi^2 \tau_j}, \\ x = e^{-2\xi^2 T}, \end{cases}$$

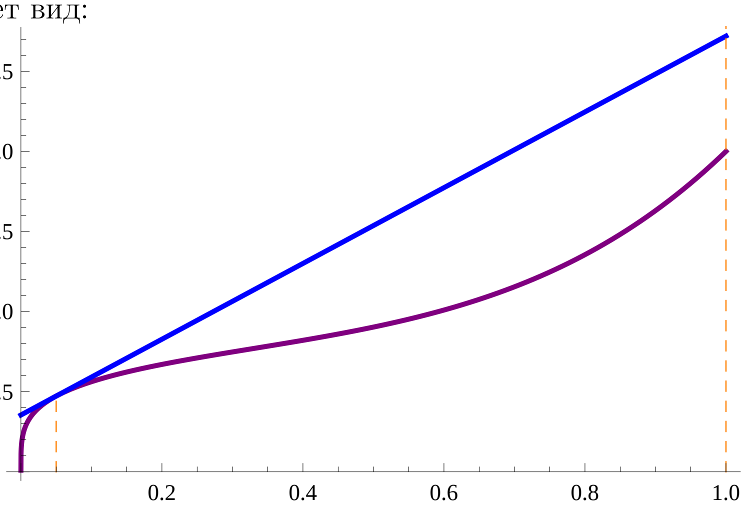
где ξ - параметр.

Выражая ξ через x и подставляя полученное выражение в первое уравнение системы, получаем:

$$y = \sum_{j=1}^{n} p_j x^{\tau_j / T}. \quad (2)$$

Возможны 2 случая: когда x_0 принадлежит интервалу $(0;1)$ и когда не принадлежит.

Пусть x_0 принадлежит интервалу $(0;1)$. Тогда график функции (2) имеет вид:



Пусть $y = \lambda_0 + \lambda_T x$, - касательная к данной кривой в точке (x_2, y_2), где $x_2 = \left(\frac{\delta_T}{\delta_0}\right)^2$, $y_2 = f(x_2) = \sum_{j=1}^{n} p_j x_2^{\tau_j/T}$. Покажем, что для всех точек заданной кривой выполнено: $-f(x) + \lambda_0 + \lambda_T x \geq 0 \quad (3)$.

На отрезке $(0; x_p)$ это неравенство выполнено, т.к. функция f(x)на этом отрезке вогнутая возрастающая.

Из точки $(1; \sum_{j=1}^{n} p_j)$ проведем касательную к графику функции $y = f(x)$.

Пусть $y = \beta_0 + \beta_T x$ - уравнение данной касательной. Как было показано ранее, справедливо неравенство: $-f(x) + \beta_0 + \beta_T x \geq 0$. Очевидно, что на отрезке $(x_p; 1)$ выполнено: $\lambda_0 + \lambda_T x \geq \beta_0 + \beta_T x$, откуда следует, что неравенство (3) выполнено для всех точек кривой f(x).

$$\widehat{\lambda_0} = \sum_{j=1}^{n} p_j x_2^{\frac{\tau_j}{T}} \left(1 - \frac{\tau_j}{T}\right),$$

$$\widehat{\lambda_T} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\tau_j p_j}{T} x_2^{\frac{\tau_j}{T}-1},$$

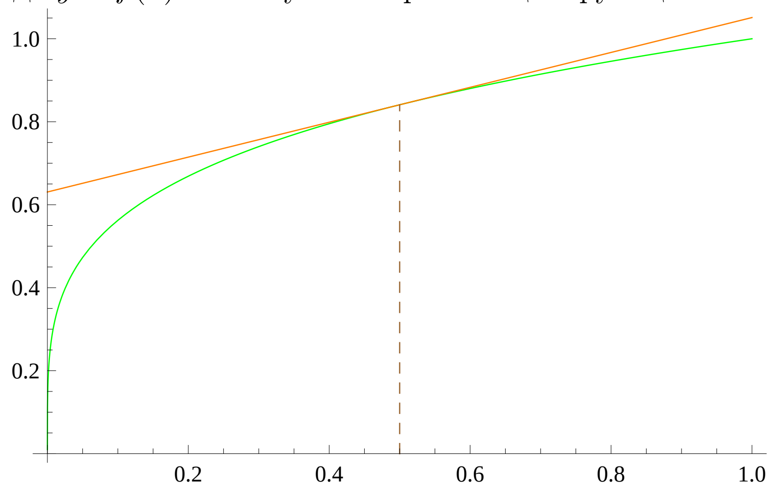
$\widehat{\lambda_T} > 0$ и $\widehat{\lambda_T} > 0$ (следует из леммы 2).

Положим $\widehat{d\mu} = A\delta\left(\xi - \xi_0\right)$, где $\delta(\cdot)$ - дельта-функция в точке 0, $\xi_0 = \sqrt{\frac{1}{T}\ln\left(\frac{\delta_0}{\delta_T}\right)}$, а $A = \delta_0^2$.

Для таких $\widehat{d\mu}$, $\widehat{\lambda_0}$, $\widehat{\lambda_T}$ выполнены условия дополняющей нежесткости и $\min\limits_{d\mu\geq 0} \mathcal{L}(d\mu(\cdot), \widehat{\lambda_0}, \widehat{\lambda_T}) = \mathcal{L}(\widehat{d\mu(\cdot)}, \widehat{\lambda_0}, \widehat{\lambda_T})$, тогда по лемме 1 $\widehat{d\mu}(\cdot)$ является решением двойственной задачи и оценка снизу для погрешности оптимального восстановления имеет вид:

$$E^2(\tau_1, \dots \tau_k, \delta_0, \delta_T) \geq \widehat{\lambda_0}\delta_0^2 + \widehat{\lambda_T}\delta_T^2.$$

Рассмотрим второй случай. Пусть x_0 не принадлежит интервалу $(0;1)$. Тогда $y = f(x)$ — вогнутая возрастающая функция.



Пусть $y = \lambda_0 + \lambda_T x$, - касательная к данной кривой в точке (x_3, y_3).Так как $y = f(x)$ - вогнутая возрастающая функция, то для всех точек заданной кривой выполнено $-y + \lambda_0 + \lambda_T x \geq 0$. Касательная задается уравнением:

$$y - y_3 = f'(x_3)(x - x_3),$$

$$y = \lambda_0 + \lambda_T x,$$

$$y - y_3 = \left(\sum_{j=1}^{n} p_j \cdot \frac{\tau_j}{T} \cdot x_3^{(\tau_j/T-1)}\right)(x - x_3)\,.$$

Получаем:
$$\lambda_T = \sum_{j=1}^{k} p_j \frac{\tau_j}{T} x_3^{(\tau_j/T-1)}.$$
Таким образом, $\lambda_T > 0 \quad \forall x_3$,
$$\lambda_0 = y_3 - x_3 \cdot \sum_{j=1}^{k} p_j \frac{\tau_j}{T} x_3^{(\tau_j/T-1)} = \sum_{j=1}^{k} p_j \cdot x_3^{\tau_j/T} - \sum_{j=1}^{k} p_j \cdot \frac{\tau_j}{T} \cdot x_3^{\tau_j/T} \ ,$$
$$\lambda_0 = \sum_{j=1}^{k} p_j \cdot x_3^{\tau_j/T} \left(1 - \frac{\tau_j}{T}\right) \ ,$$
$\lambda_0 > 0 \quad \forall x_3$ (следует из леммы 3).

Положим $\widehat{d\mu} = A\delta\left(\xi - \xi_0\right)$, где $\delta(\cdot)$ - дельта-функция в точке 0, а A и ξ_0 выбраны так, чтобы выполнялись условия дополняющей нежесткости:
$$\lambda_0 \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{d\mu} - \delta_0^2\right) = 0, \quad \lambda_T \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-2\xi^2 T}\widehat{d\mu} - \delta_T^2\right) = 0.$$
Подставляя выражение для $\widehat{d\mu}$, получаем:
$$\begin{cases} A - \delta_0^2 = 0, \\ Ae^{-2\xi_0^2 T} - \delta_T^2 = 0. \end{cases}$$
Таким образом, $A = \delta_0^2, \quad \xi_0 = \sqrt{\frac{1}{T}\ln\left(\frac{\delta_0}{\delta_T}\right)}, \quad x_3 = \left(\frac{\delta_T^2}{\delta_0^2}\right)^2$.

Для таких $\widehat{d\mu}$, $\widehat{\lambda}_0$, $\widehat{\lambda_T}$ выполнены условия дополняющей нежесткости и $\min\limits_{d\mu\geq 0} \mathcal{L}(d\mu(\cdot), \widehat{\lambda}_0, \widehat{\lambda_T}) = \mathcal{L}(\widehat{d\mu(\cdot)}, \widehat{\lambda}_0, \widehat{\lambda_T})$, тогда по лемме 1 $\widehat{d\mu}(\cdot)$ является решением двойственной задачи. Таким образом получаем оценку снизу для погрешности оптимального восстановления:
$$E^2(\tau_1, \dots \tau_k, \delta_0, \delta_T) \geq \widehat{\lambda}_0\delta_0^2 + \widehat{\lambda_T}\delta_T^2.$$
Нахождение оценки сверху для погрешности оптимального восстановления и доказательство существования оптимальных методов проводим аналогично тому, как это было сделано в теореме 1.

▶

Список литературы

[1] Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю. — Оптисальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям

[2] Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю., Тихомиров В.М. — Неопределенность знания об объекте и точность методов его восстановления

[3] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. — Элементы теории функций и функционального анализа, М.: Наука, 1972