МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. Ломоносова
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра общих проблем управления

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

"Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности в фиксированные моменты времени по нескольким измерениям."

"Optimal recovery of the solution of the heat equation on several measurements"

Выполнила студентка 5 курса
Смирнова А.А.

Научный руководитель
Осипенко К.Ю.

Москва 2013

Введение.

Приближенные формулы вычисления некоторых функций и констант были известны с глубокой древности. Началом современной теории приближения принято считать работу П.Л. Чебышева 1857 г., посвященную полиномам, наименее уклоняющимся от нуля. Теория оптимального восстановления представляет собой один из разделов теории приближения, связанный с решением задач о приближении линейных операторов по некоторой информации о них.

Многие стороны практической деятельности человека связаны с тем, что ему приходится судить об изучаемых объектах по неполной или неточной информации. К примеру, имеется возможность измерить температуру некоторого тела в моменты времени $t_1, \ldots, t_k$ с некоторой погрешностью. Возникает вопрос: как наилучшим образом воспользоваться полученной информацией, чтобы восстановить его температуру в какие-нибудь другие моменты времени.

Таким образом, ставится задача об оптимальном восстановлении решения уравнения теплопроводности в некоторые моменты времени по приближенным измерениям этого решения в другие моменты времени. Такая задача была рассмотрена ранее в статьях [1] — [2], но в случае, когда требуется восстановить решение в одной точке. В данной работе рассматривается задача об одновременном восстановлении решения уравнения теплопроводности в нескольких точках и приводятся явные выражения для оптимального метода восстановления и его погрешности.

1. Постановка задачи.

Распределение температуры бесконечного стержня в $\mathbb{R}$ описывается, как известно, уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

($u(\cdot,\cdot)$ — функция на $[0,+\infty)\times\mathbb{R}$) с заданным начальным распределением температуры

$$u(0,\cdot) = u_0(\cdot). \tag{2}$$

Предполагаем, что $u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$. Единственным решением задачи (1)-(2) является интеграл Пуассона

$$u(t,x) = u(t,x;u_0(\cdot)) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} u_0(\xi)d\xi,$$

где $u(t,\cdot) \to u_0(t)$ при $t \to 0$ в метрике $L_2(\mathbb{R})$.

Ставится следующая задача. Пусть в моменты времени $0 \le t_1 < \ldots < t_k$ приближенно известны распределения температур $u(t_1,\cdot),\ldots,u(t_k,\cdot)$, т. е. известны функции $y_j(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ такие, что

$$\|u(t_j,\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} < \delta_j, \quad j = 1,\ldots,k,$$

где $\delta_j > 0, \quad j = 1,\ldots,k$.

Мы хотим каждому такому набору функций сопоставить набор функций из $L_2(\mathbb{R})$, который бы в некотором смысле наилучшим образом аппроксимировал истинное распределение температур стержня в фиксированные моменты времени $\tau_1 < \ldots < \tau_n$.

Под этим понимается следующее. Любое отображение m из $(L_2(\mathbb{R}))^k = L_2(\mathbb{R}) \times \ldots \times L_2(\mathbb{R})$ в $(L_2(\mathbb{R}))^n$ назовем методом восстановления (температуры в $\mathbb{R}$ в моменты времени $(\tau_1,\ldots,\tau_n)$ по данной информации). Погрешностью этого метода назовем величину

$$e(\tau,\overline{\delta},m) = \sup_{\substack{u_0(\cdot),\overline{y}(\cdot)\in(L_2(\mathbb{R}))^n,\\ \|u(t_j,\cdot)-y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}<\delta_j, j=1,\ldots,k}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_j \|u(\tau_j,\cdot) - m_j(\overline{y}(\cdot))(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}} \ ,$$

где $m = (m_1 \ldots m_n)$, $\overline{y}(\cdot) = (y_1(\cdot),\ldots,y_k(\cdot))$, $\overline{\delta} = (\delta_1,\ldots,\delta_k)$, а p_j — некоторые неотрицательные весовые коэффициенты (предполагается, что все p_j не могут одновременно обратиться в ноль).

Нас интересует величина

$$E(\tau, \overline{\delta}) = \inf_{m:(L_2(\mathbb{R}))^k \to (L_2(\mathbb{R}))^n} e(\tau, \overline{\delta}, m),$$

которую назовем погрешностью оптимального восстановления и метод $\widehat{m}$, на котором нижняя грань достигается, т. е. для которого

$$E(\tau, \overline{\delta}) = e(\tau, \overline{\delta}, \widehat{m});$$

$\widehat{m}$ называется оптимальным методом восстановления.

Свяжем с задачей оптимального восстановления следующую экстремальную задачу

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n} p_j \|u\,(\tau_j, \cdot)\,\|^2_{L_2(\mathbb{R})}} \to \max, \;\; \|u(t_j, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \delta_j, \;\; j = 1, \ldots, k,$$

которую назовем двойственной.

Докажем, что $E(\tau, \overline{\delta}) \ge \sup\limits_{\substack{u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}),\\ \|u(t_j, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \delta_j, j=1,\ldots,k}} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} p_j \|u\,(\tau_j, \cdot)\,\|^2_{L_2(\mathbb{R})}}$.

Действительно, пусть $u_0(\cdot)$ таково, что $\|u(t_j, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \delta_j$, $j = 1, \ldots, k$, и $m = (m_1, \ldots, m_n)$ — произвольный метод восстановления. Тогда

$$2\sqrt{\sum_{j=1}^{n} p_j \|u\,(\tau_j, \cdot)\,\|^2_{L_2(\mathbb{R})}} =$$

$$= \sqrt{\sum_{j=1}^{n} p_j \|u\,(\tau_j, \cdot) - m_j(\cdot) - (-u\,(\tau_j, \cdot) - m_j(\cdot))\|^2_{L_2(\mathbb{R})}} \le$$

$$\le \sqrt{\sum_{j=1}^{n} p_j \|u\,(\tau_j, \cdot) - m_j(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}} + \sqrt{\sum_{j=1}^{n} p_j \|u\,(\tau_j, \cdot) - m_j(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}} \le 2e(\tau, \overline{\delta}, m).$$

Переходя к верхней грани по всем указанным $u_0(\cdot)$, получаем, что для всех m справедливо неравенство

$$e(\tau, \overline{\delta}, m) \ge \sup_{\substack{u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})\\ \|u(t_j, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \delta_j, \; j=1,\ldots,k}} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} p_j \|u\,(\tau_j, \cdot)\,\|^2_{L_2(\mathbb{R})}}.$$

Следовательно,

$$E(\tau,\overline{\delta}) = \inf_{m:(L_2(\mathbb{R}))^k\to(L_2(\mathbb{R}))^n} e(\tau,\overline{\delta},m) \geq$$

$$\geq \sup_{\substack{u_0(\cdot)\in L_2(\mathbb{R})\\ \|u(t_j,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\leq\delta_j,\ j=1,\ldots,k}} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} p_j \|u\left(\tau_j,\cdot\right)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}},$$

что и требовалось доказать.

Пусть $f_i : A \to \mathbb{R}$, где A — некоторое множество. Рассмотрим задачу:

$$f_0(x) \to \max,\ f_i(x) \leq 0, \quad i = 1,\ldots,n,\ x \in A.$$

Положим $\mathcal{L}(x,\lambda) = -f_0(x) + \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x), \quad \lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$.

Лемма 1.

Если $\exists\widehat{\lambda_i} \geq 0,\ \ i = 1,\ldots,n$ и $\widehat{x}$ — допустимый $(f_i(\widehat{x}) \leq 0,\ \ i = 1,\ldots,n)$, что:

1) $\min\limits_{x\in A}\mathcal{L}(x,\widehat{\lambda}) = \mathcal{L}(\widehat{x},\widehat{\lambda})$, 2) $\sum\limits_{i=1}^{n}\widehat{\lambda}_i f_i(\widehat{x}) = 0$,

то $\widehat{x}$ - решение задачи.

Лемма 2.

Пусть $0 < \tau_1 < \ldots < \tau_k < T < \tau_{k+1} < \ldots < \tau_n$, $1 \leq k < n$. Если уравнение

$$(1) \quad \sum_{j=1}^{n} p_j - \sum_{j=1}^{n} p_j x_0^{\frac{\tau_j}{T}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\tau_j p_j}{T} x_0^{\frac{\tau_j}{T}-1}\left(1 - x_0\right)$$

имеет решение $x_0 \in (0,1)$,то это решение единственно, при этом

$$G(x_0) = \sum_{j=1}^{n} p_j x_0^{\frac{\tau_j}{T}} \left(1 - \frac{\tau_j}{T}\right) > 0.$$

$\lhd$ Доказательство.

Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} p_j x^{\frac{\tau_j}{T}}.$$

Тогда

$$f'(x) = \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\tau_j}{T} x^{\frac{\tau_j}{T}-1},$$

$$f''(x) = \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\tau_j}{T} \left(\frac{\tau_j}{T} - 1\right) x^{\frac{\tau_j}{T}-2},$$

$$f''(x) = x^{\frac{\tau_1}{T}-2} g(x),$$

где

$$g(x) = -a_1 - a_2 x^{c_2} - \ldots - a_k x^{c_k} + a_{k+1} x^{c_{k+1}} + \ldots + a_n x^{c_n}$$

причем

$$c_j = \frac{\tau_j - \tau_1}{T} \ ,$$

$$a_j = \begin{cases} \dfrac{p_j \tau_j}{T} \left(1 - \dfrac{\tau_j}{T}\right), & 1 \le j \le k, \\ \dfrac{p_j \tau_j}{T} \left(\dfrac{\tau_j}{T} - 1\right), & k+1 \le j \le n. \end{cases}$$

Таким образом, $a_j > 0, j = 1, \ldots, n$, $0 < c_1 < \ldots < c_n$.

Поскольку $g(0) < 0$, $g(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$ и функция $g(x)$ непрерывна на $(0, +\infty)$, существует точка x_0 такая, что $g(x_0) = 0$. Докажем, что такая точка единственна и, кроме того, $g'(x) \ge 0$ при $x \ge x_0$, $g(x) < 0$ при $0 < x < x_0$.

Доказательство проведем индукцией по числу отрицательных слагаемых.

При $k = 1$ утверждение очевидно.

$g(x) = -a_1 + a_2 x^{c_2} + \ldots + a_n x^{c_n}$ — строго возрастающая функция ($g'(x) > 0 \ \forall x \ge 0$), $g(0) = -a_1$, $g(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$. Отсюда следует, что $\exists! x_0 : g(x_0) = 0$. Так как $g(x)$ возрастает на $(0, +\infty)$, то $\forall x > x_0 \ g(x) > g(x_0) = 0$

Предположим, что утверждение доказано при всех $k \le n-1$. Докажем утверждение для $k = n$. Имеем:

$$g(x) = -a_1 - a_2 x^{c_2} - \ldots - a_k x^{c_k} + a_{k+1} x^{c_{k+1}} + \ldots + a_n x^{c_n} = -a_1 + x^{c_2} h(x),$$

где

$$h(x) = -a_2 - a_3 x^{c_3 - c_2} - \ldots - a_k x^{c_k - c_2} + a_{k+1} x^{c_{k+1} - c_2} + \ldots + a_n x^{c_n - c_2}.$$

В силу предположения индукции существует точка x_1 такая, что $h(x_1) = 0$, $h'(x) \geq 0$ при $x \geq x_1$ и $h(x) < 0$ при $0 < x < x_1$. Тогда

$$g'(x) = (x^{c_2} h(x))' = c_2 x^{c_2 - 1} h(x) + x^{c_2} h'(x).$$

Так как $h(x_1) = 0$, $h'(x) \geq 0$ при $x \geq x_1$, то $h(x) > 0$ и $(x^{c_2} h(x))' > 0$ при $x \geq x_1$. Тем самым функция $x^{c_2} h(x)$ монотонно возрастает при $x > x_1$, обращается в ноль при $x = x_1$ и отрицательна при $0 < x < x_1$. Следовательно, существует единственная точка x_0, для которой $x^{c_2} h(x) = a_1$. Тогда $g(x_0) = 0$, $g'(x) \geq 0$ при $x > x_0$ и $g(x) < 0$ при $0 < x < x_0$.

Перепишем уравнение $(*)$ в следующем виде:

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\tau_j}{T} x^{\frac{\tau_j}{T} - 1} + \sum_{j=1}^{n} p_j x^{\frac{\tau_j}{T}} \left(1 - \frac{\tau_j}{T}\right) - \sum_{j=1}^{n} p_j = 0.$$

Рассмотрим функцию $F(x)$ на интервале $(0,1)$.

$F'(x) = f''(x)(1-x) = x^{\frac{\tau_1}{T} - 2} g(x)(1-x)$. По доказанному выше, $\exists! x_p$: $g(x_p) = 0$.

Предположим, что $x_p \in (0,1)$. Тогда $F'(x) < 0$ при $0 < x < x_p$ и $F'(x) \geq 0$ при $x > x_p$. Получаем, что $F(x)$ убывает на $(0; x_p)$ и возрастает на $(x_p; 1)$, x_p - локальный минимум функции $F(x)$. Тогда $F(x_p) < F(1) = 0$.

Так как $F(x) \to +\infty$ при $x \to 0$, а $F(x_p) < 0$ и функция $F(x)$ монотонна на $(0; x_p)$, то $\exists!\ x_0 \in (0; x_p)$, что $F(x_0) = 0$.

Предположим теперь, что $x_p > 1$. Тогда $F'(x) < 0$ $\forall x \in (0,1)$ и $F(x)$ убывает на интервале $(0,1)$. Таким образом, $\forall x \in (0,1)$ $F(x) > F(1) = 0$.

Тем самым показали, что уравнение (1) на интервале $(0,1)$ имеет не более одного решения.

Рассмотрим функцию

$$G(x) = \sum_{j=1}^{n} p_j x_0^{\frac{\tau_j}{T}} \left(1 - \frac{\tau_j}{T}\right).$$

$$G'(x) = -x f''(x) = -x^{\frac{\tau_1}{T} - 1} g(x).$$

Считаем, что $x_p \in (0,1)$, тогда $x_0 \in (0, x_p)$. Так как $g(x) < 0$ при $0 < x < x_p$, то $G'(x) > 0, x \in (0, x_p)$. Получаем, что функция $G(x)$ монотонно возрастает на $(0, x_p)$, тогда $G(x_0) > G(0) = 0$.

Таким образом лемма доказана.

▶

2. Случай n — произвольное, $k=3$.

Пусть x_0 - решение уравнения

$$\sum_{j=1}^{n} p_j - \sum_{j=1}^{n} p_j x_0^{\frac{\tau_j}{T_1}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\tau_j p_j}{T_1} x_0^{\frac{\tau_j}{T_1}-1} (1-x_0)\,.$$

Зафиксируем δ_0 и обозначим:

$$U_1 = \{(\delta_1, \delta_2) : \delta_1 \geq 0, \delta_2 \geq 0\},$$

$$U_2 = \{(\delta_1, \delta_2) : \sqrt{x_0}\delta_0 \leq \delta_1 \leq \delta_0, \delta_0 \left(\frac{\delta_1}{\delta_0}\right)^{T_1/T_2} \leq \delta_2 \leq \frac{\delta_1^2 - x_0\delta_0^2}{1-x_0} + \frac{\delta_0^2 - \delta_1^2}{1-x_0} x_0^{T_2/T_1}\}.$$

Рассмотрим область $U = U_1 \backslash U_2$, для нее верна

Теорема 1. Пусть выполнено следующее: $0 < \tau_1 < \ldots < \tau_k < T_1 < \tau_{k+1} < \ldots < T_2$. Тогда имеет место равенство:

$$E^2(\tau_1, \ldots \tau_n, \delta_0, \delta_1, \delta_2) = \widehat{\lambda}_0 \delta_0^2 + \widehat{\lambda}_1 \delta_1^2 + \widehat{\lambda}_2 \delta_2^2,$$

где по крайней мере один из коэффициентом $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ равен нулю.

Все методы $m = (m_1, \ldots, m_n)$ вида

$Fm_j(\overline{y}) = \alpha_0^j(\xi) Fy_0(\xi) + \alpha_k^j(\xi) Fy_k(\xi)$, (k соответствует номеру ненулевого множителя Лагранжа)для которых выполнено:

$$\begin{cases} \alpha_0^j + \alpha_k^j e^{-\xi^2 T_k} = e^{-\xi^2 \tau_j}, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_j \left(\frac{\left|\alpha_0^j(\xi)\right|^2}{\lambda_0} + \frac{\left|\alpha_k^j(\xi)\right|^2}{\lambda_k} \right) \leq 1, \end{cases}$$

являются оптимальными. При этом множество оптимальных методов непусто.

$\lhd$ Доказательство.

Найдем оценку снизу для погрешности оптимального восстановления. Для этого рассмотрим двойственную задачу. В этом случае двойственная задача примет вид:

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n} p_j \| u\left(\tau_j, \cdot\right) \|^2_{L_2(\mathbb{R})}} \to \max,$$

$$\|u_0(\cdot)\| \le \delta_0,$$

$$\|u(T_1, \cdot)\| \le \delta_1.$$

$$\|u(T_2, \cdot)\| \le \delta_2.$$

Решение уравнения теплопроводности в образах Фурье имеет вид:

$$Fu(t, \xi) = e^{-\xi^2 t} Fu_0(\xi).$$

Для удобства будем рассматривать квадрат максимизируемого значения. Переходя к образам Фурье, в силу теоремы Планшереля получаем:

$$\frac{1}{2\pi}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j \int_{\mathbb{R}} e^{-2\xi^2\tau_j} |Fu_0(\xi)|^2 d\xi\right) \to \max,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |Fu_0|^2 d\xi \le \delta_0^2, \quad \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-2\xi^2 a}|Fu_0|^2 d\xi \le \delta_1^2, \quad \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-2\xi^2 b}|Fu_0|^2 d\xi \le \delta_2^2.$$

Рассмотрим расширенную задачу:

$$\frac{1}{2\pi}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j \int_{\mathbb{R}} e^{-2\xi^2\tau_j} d\mu(\xi)\right) \to \max,$$

$$\int_{\mathbb{R}} d\mu(\xi) \le \delta_0^2, \tag{1}$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2\xi^2 T_1} d\mu(\xi) \le \ \delta_1^2, \tag{2}$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2\xi^2 T_2} d\mu(\xi) \le \ \delta_2^2. \tag{3}$$

где $d\mu(\cdot)$ — мера на $\mathbb{R}$.

Положим

$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot), \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) = \int_{\mathbb{R}} \left(-\sum_{j=1}^{n} p_j e^{-2\xi^2\tau_j} + \lambda_0 + \lambda_1 e^{-2\xi^2 T_1} + \lambda_2 e^{-2\xi^2 T_2}\right) d\mu \ .$$

Запишем уравнения дополняющей нежесткости:

$$\lambda_0 \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{d\mu}(\xi) - \delta_0^2 \right) = 0,$$

$$\lambda_1 \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-2\xi^2 T_1} \widehat{d\mu}(\xi) - \delta_1^2 \right) = 0,$$

$$\lambda_2 \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-2\xi^2 T_2} \widehat{d\mu}(\xi) - \delta_2^2 \right) = 0.$$

Предположим, что $\widehat{\lambda_1} = 0$.

Пусть $\delta_0 > \delta_2$.

Тогда

$$\widehat{d\mu} = \delta_0^2 \delta \left(\xi - \sqrt{\frac{1}{T_2} \ln \left(\frac{\delta_0}{\delta_2} \right)} \right)$$

$$\widehat{\lambda_0} = \sum_{j=1}^{k} p_j \left(\frac{\delta_2^2}{\delta_0^2} \right)^{\tau_j / T_2} \left(1 - \frac{\tau_j}{T_2} \right)$$

$$\widehat{\lambda_2} = \sum_{j=1}^{k} p_j \frac{\tau_j}{T_2} \left(\frac{\delta_2^2}{\delta_0^2} \right)^{\left(\frac{\tau_j}{T_2} - 1 \right)}$$

Для таких $\widehat{d\mu}$, $\widehat{\lambda_0}$, $\widehat{\lambda_1}$, $\widehat{\lambda_2}$ выполнены условия дополняющей нежесткости и $\min\limits_{d\mu \geq 0} \mathcal{L}(d\mu(\cdot), \widehat{\lambda_0}, \widehat{\lambda_1}, \widehat{\lambda_2}) = \mathcal{L}(\widehat{d\mu(\cdot)}, \widehat{\lambda_0}, \widehat{\lambda_1}, \widehat{\lambda_2})$.

Необходимо,чтобы выполнялось ограничение (2) задачи, т.е.

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2\xi^2 T_1} d\mu(\xi) \leq \ \delta_1^2.$$

Подставляя выражение для $\widehat{d\mu}$, получаем: $\delta_0^2 \left(\frac{\delta_2^2}{\delta_0^2} \right)^{T_1/T_2} \leq \ \delta_1^2$. Выразим отсюда δ_2:

$$\delta_2 \leq \delta_0^2 \left(\frac{\delta_1^2}{\delta_0^2} \right)^{T_2/T_1} .$$

Пусть $\delta_0 < \delta_2$.

Для $\lambda_2 = 0$, $\widehat{\lambda_0} = \sum\limits_{j=1}^{k} p_j$, $\widehat{d\mu(\xi)} = \delta_0^2\delta(\xi)$ выполнены условия дополняющей нежесткости и $\min\limits_{d\mu\geq 0}\mathcal{L}(d\mu(\cdot),\widehat{\lambda_0},\widehat{\lambda_1},\widehat{\lambda_2}) = \mathcal{L}(\widehat{d\mu(\cdot)},\widehat{\lambda_0},\widehat{\lambda_1},\widehat{\lambda_2})$. Чтобы выполнялось условие (2) задачи, необходимо, чтобы $\delta_0 < \delta_1$.

Предположим теперь, что $\widehat{\lambda_2} = 0$.

Пусть выполнено $\sqrt{x_0} \leq \frac{\delta_1}{\delta_0} \leq 1$, где x_0 — решение уравнения:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j - \sum_{j=1}^{n} p_j x_0^{\frac{\tau_j}{T_1}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\tau_j p_j}{T_1} x_0^{\frac{\tau_j}{T_1}-1}(1-x_0)$$

Тогда

$$\widehat{d\mu}(\xi) = \frac{\delta_1^2 - x_0\delta_0^2}{1-x_0}\delta(\xi) + \frac{\delta_0^2-\delta_1^2}{1-x_0}\delta(\xi-\xi_0).$$

$$\widehat{\lambda_0} = \sum_{j=1}^{n} p_j x_0^{\frac{\tau_j}{T_1}}\left(1-\frac{\tau_j}{T_1}\right),$$

$$\widehat{\lambda_1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\tau_j p_j}{T_1} x_0^{\frac{\tau_j}{T_1}-1}.$$

Проверим ограничение (3) задачи, подставив выражение для $\widehat{d\mu}(\xi)$, получим:

$$\frac{\delta_1^2 - x_0\delta_0^2}{1-x_0} + \frac{\delta_0^2-\delta_1^2}{1-x_0}x_0^{T_2/T_1} \leq \delta_2^2.$$

Рассмотрим функцию $F(x_0) = \frac{\delta_1^2 - x_0\delta_0^2}{1-x_0} + \frac{\delta_0^2-\delta_1^2}{1-x_0}x_0^{T_2/T_1}$, найдем $F'(x_0)$:

$$F'(x_0) = \frac{\delta_1^2-\delta_0^2}{(1-x_0)^2} + \frac{(\delta_0^2-\delta_1^2)x_0^{T_2/T_1-1}(x_0+T_2/T_1(1-x_0))}{(1-x_0)^2},$$

$$F'(x_0) = \frac{\delta_0^2-\delta_1^2}{(1-x_0)^2}\left(\frac{T_2}{T_1}x_0^{T_2/T_1-1} - \frac{T_2}{T_1}x_0^{T_2/T_1} + x_0^{T_2/T_1} - 1\right)$$

Выражение в скобках возрастает на отрезке $(0,1)$ и принимает максимальное значение 0, таким образом, $F'(x_0) \leq 0, x \in (0,1)$, $F(x_0)$ убывает на отрезке $(0,\frac{\delta_1}{\delta_0})$, получаем, что $F(x_0) \geq F(\frac{\delta_1}{\delta_0}) \geq \delta_0^2\left(\frac{\delta_1^2}{\delta_0^2}\right)^{T_2/T_1}$

Пусть выполнено $\sqrt{x_0} \geq \frac{\delta_1}{\delta_0}$, тогда

$$\widehat{\lambda_0} = \sum_{j=1}^{n} p_j x_2^{\frac{\tau_j}{T_1}} \left(1 - \frac{\tau_j}{T_1}\right),$$

$$\widehat{\lambda_1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\tau_j p_j}{T_1} x_2^{\frac{\tau_j}{T_1} - 1},$$

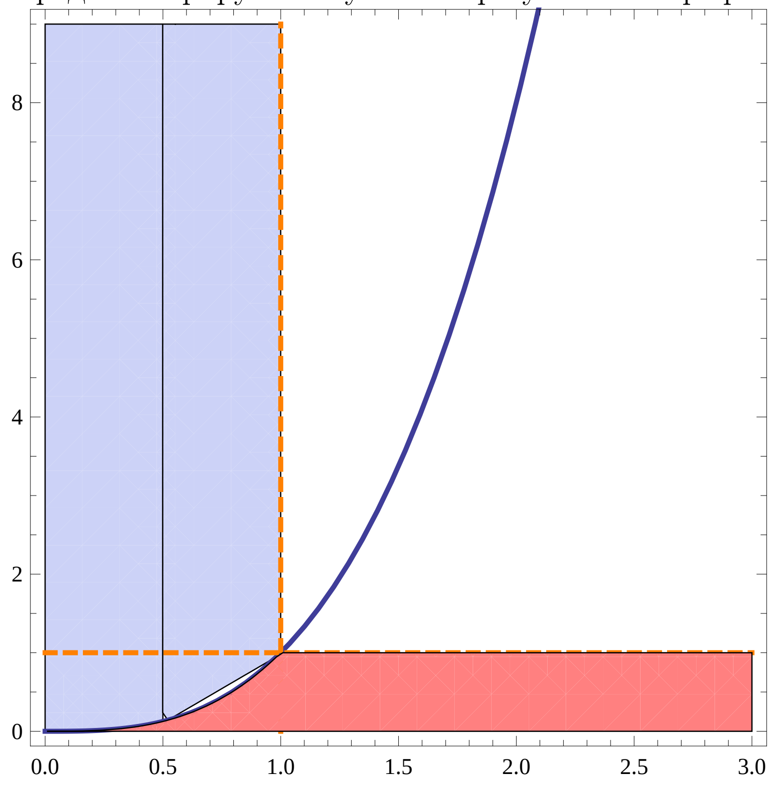
$$x_2 = \left(\frac{\delta_1^2}{\delta_0^2}\right)^2$$

$\widehat{d\mu} = A\delta\left(\xi - \xi_0\right)$, где $\delta(\cdot)$ - дельта-функция в точке 0, $\xi_0 = \sqrt{\frac{1}{T_1}\ln\left(\frac{\delta_0}{\delta_1}\right)}$
, а $A = \delta_0^2$.

Подставляя полученное выражение для $\widehat{d\mu}$ в ограничение (3), получаем:

$$\delta_2 \geq \delta_0^2 \left(\frac{\delta_1^2}{\delta_0^2}\right)^{T_2/T_1}.$$

Продемонстрируем полученный результат на графике:



где синим отмечена область, где $\lambda_2 = 0$, красным - $\lambda_1 = 0$, белым - $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, кривая соответствует $\delta_2 = \delta_0^2 \left(\frac{\delta_1^2}{\delta_0^2}\right)^{T_2/T_1}$.

Таким образом, рассмотренные случаи полностью описывают все возможные соотношения между $\delta_0, \delta_1, \delta_2$ в области Uи не существует случая, когда $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$ одновременно.

Таким образом получаем оценку снизу для погрешности оптимального восстановления:

$$E^2(\tau_1, \dots \tau_n, \delta_0, \delta_1, \delta_2) \geq \widehat{\lambda}_0\delta_0^2 + \widehat{\lambda}_1\delta_1^2 + \widehat{\lambda}_2\delta_2^2,$$

причем λ_1 и λ_2 не могут быть одновременно отличны от нуля.

Найдем теперь оценку сверху для погрешности оптимального восстановления и докажем, что она совпадает с оценкой снизу.

Погрешность метода:

$$e^2(m) = \sup_{\substack{u_0(\cdot),\ y_0,\ y_1, y_2 \in L_2(\mathbb{R}),\\ \|u_0(\cdot) - y_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta_0,\\ \|u(T_k, \cdot) - y_k(\cdot)\| \leq \delta_k}} \sum_{j=1}^{n} p_j \|u(\tau_j, \cdot) - m_j(y_0(\cdot), y_1(\cdot), y_2(\cdot))(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}$$

Будем рассматривать такие методы, которые в образах Фурье имеют вид: $Fm_j(\overline{y}) = \alpha_0^j(\xi)Fy_0(\xi) + \alpha_k^j(\xi)Fy_k(\xi)$, где $k = 1, 2$ соответствует отличному от нуля множителю Лагранжа. Имеем следующую задачу:

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n} p_j \int_{\mathbb{R}} \left| e^{-\xi^2\tau_j} Fu_0(\xi) - \alpha_0^j Fy_0(\xi) - \alpha_k^j Fy_k(\xi)\right|^2 d\xi \to \max,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |Fu_0(\xi) - Fy_0(\xi)|^2 \, d\xi \leq \delta_0^2,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \left|e^{-\xi^2 T_k} Fu_0(\xi) - Fy_k(\xi)\right|^2 d\xi \leq \delta_k^2.$$

Положим $z_0(\xi) = Fu_0(\xi) - Fy_0(\xi)$ и $z_k = e^{-\xi^2 T_k}Fu_0(\xi) - Fy_k(\xi)$. Тогда задача перепишется в виде:

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n} p_j \int_{\mathbb{R}} \left| \left(e^{-\xi^2\tau_j} - \alpha_0^j - \alpha_k^j e^{-\xi^2 T_k}\right) Fu_0(\xi) + \alpha_0^j z_0(\xi) + \alpha_k^j z_k(\xi)\right|^2 d\xi \to \max,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |z_0(\xi)|^2 \, d\xi \leq \delta_0^2,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |z_k(\xi)|^2\, d\xi \le \delta_k^2.$$

Будем оценивать методы, удовлетворяющие условию:

$$\alpha_0^j + \alpha_k^j e^{-\xi^2 T_k} = e^{-\xi^2 \tau_j}, j = 1, \ldots, n$$

Можно показать, что для методов, которые не удовлетворяют этому условию, погрешность восстановления равна ∞. Тогда задача сводится к следующей:

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n} p_j \int_{\mathbb{R}} \left| \ \alpha_0^j z_0(\xi) + \alpha_k^j z_k(\xi) \right|^2 d\xi \to \max,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |z_0(\xi)|^2\, d\xi \le \delta_0^2,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |z_k(\xi)|^2\, d\xi \le \delta_T^2.$$

По неравенству Коши - Буняковского имеем:

$$\left|\alpha_0^j z_0(\xi) + \alpha_k^j z_k(\xi)\right|^2 = \left| \frac{\alpha_0^j(\xi)}{\sqrt{\lambda_0}}\sqrt{\lambda_0} z_0 + \frac{\alpha_k^j(\xi)}{\sqrt{\lambda_k}}\sqrt{\lambda_k} z_k \right|^2 \le$$

$$\le \left(\frac{\left|\alpha_0^j(\xi)\right|^2}{\lambda_0} + \frac{\left|\alpha_k^j(\xi)\right|^2}{\lambda_k} \right) \left(\lambda_0 \left|z_0(\xi)\right|^2 + \lambda_k \left|z_k(\xi)\right|^2\right)$$

Тем самым рассматриваемая экстремальная задача оценивается следующим образом:

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \sum_{j=1}^{n} p_j \left(\frac{\left|\alpha_0^j(\xi)\right|^2}{\lambda_0} + \frac{\left|\alpha_k^j(\xi)\right|^2}{\lambda_k} \right) \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \left(\lambda_0 \left|z_0(\xi)\right|^2 + \lambda_k \left|z_k(\xi)\right|^2\right) d\xi \le$$

$$\le (\lambda_0\delta_0^2 + \lambda_k\delta_k^2) \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \sum_{j=1}^{n} p_j \left(\frac{\left|\alpha_0^j(\xi)\right|^2}{\lambda_0} + \frac{\left|\alpha_k^j(\xi)\right|^2}{\lambda_k} \right)$$

Если при всех $\xi \in \mathbb{R}$

$$S(\xi) = \sum_{j=1}^{n} p_j \left(\frac{\left|\alpha_0^j(\xi)\right|^2}{\lambda_0} + \frac{\left|\alpha_k^j(\xi)\right|^2}{\lambda_k} \right) \le 1,$$

то оценка сверху совпадает с оценкой снизу, соответствующий метод является оптимальным и система для нахождения $\alpha_0 = (\alpha_0^1, \dots, \alpha_0^n)$ и $\alpha_k = (\alpha_k^1, \dots, \alpha_k^n)$ запишется в виде:

$$\begin{cases} \alpha_0^j + \alpha_k^j e^{-\xi^2 T_k} = e^{-\xi^2 \tau_j}, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} p_j \left(\dfrac{\left|\alpha_0^j(\xi)\right|^2}{\lambda_0} + \dfrac{\left|\alpha_k^j(\xi)\right|^2}{\lambda_k} \right) \leq 1. \end{cases}$$

Таким образом теорема доказана.

▶

2. Частные случаи.

Теорема 2.

Пусть в поставленной задаче n — произвольное, $k = 3, t_1 = 0,\ t_2 = T_1, t_3 = T_2$, и они таковы, что выполнено $\quad 0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n < T_1 < T_2$, пусть $\delta_0 > \delta_1, \quad \delta_0 > \delta_2$

Тогда имеет место равенство $E^2(\tau, \delta_0, \delta_1, \delta_2) = \widehat{\lambda}_0\delta_0^2 + \widehat{\lambda}_1\delta_1^2 + \widehat{\lambda}_1\delta_2^2$,
где

$$\lambda_0 = \sum_{j=1}^{n} p_j \left(1 - \frac{\tau_j}{T_1}x_0\right) x_0^{\tau_j/T_1 - 1},$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\tau_j}{T_2} x_0^{\frac{\tau_j - T_2}{T_1}}, \quad \delta_1 > e^{T_2/T_1}\delta_2$$

$$\lambda_2 = 0, \lambda_1 = \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\tau_j}{T_1} x_0^{\frac{\tau_j}{T_1} - 1}, \quad \delta_1 < e^{T_2/T_1}\delta_2$$

Все методы $m = (m_1, \ldots, m_n)$ вида
$Fm_j(\overline{y}) = \alpha_0^j(\xi)Fy_0(\xi) + \alpha_k^j(\xi)Fy_T(\xi)$, (k соответствует номеру ненулевого множителя Лагранжа)для которых выполнено:

$$\begin{cases} \alpha_0^j + \alpha_k^j e^{-\xi^2 T_k} = e^{-\xi^2 \tau_j}, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_j \left(\frac{\left|\alpha_0^j(\xi)\right|^2}{\lambda_0} + \frac{\left|\alpha_k^j(\xi)\right|^2}{\lambda_k}\right) \le 1, \end{cases}$$

являются оптимальными. При этом множество оптимальных методов непусто.

$\lhd$ Доказательство.

Действуя аналогично рассмотренному выше случаю, запишем расширенную двойственную задачу:

$$\frac{1}{2\pi}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j \int_{\mathbb{R}} e^{-2\xi^2\tau_j} d\mu(\xi)\right) \to \max,$$

$$\int_{\mathbb{R}} d\mu(\xi) \le \delta_0^2, \tag{1}$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2\xi^2 T_1} d\mu(\xi) \leq \ \delta_1^2, \tag{2}$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2\xi^2 T_2} d\mu(\xi) \leq \ \delta_2^2. \tag{3}$$

Рассмотрим кривую в плоскости (x, y), заданную параметрически:

$$\begin{cases} y = \sum_{j=1}^{n} p_j e^{-2\xi^2 \tau_j}, \\ x = e^{-2\xi^2 T_1}, \end{cases}$$

где ξ — параметр.

Выражая ξ через x и подставляя полученное выражение в первое уравнение системы, получаем:

$$y = \sum_{j=1}^{n} p_j x^{\frac{\tau_j}{T_1}}$$

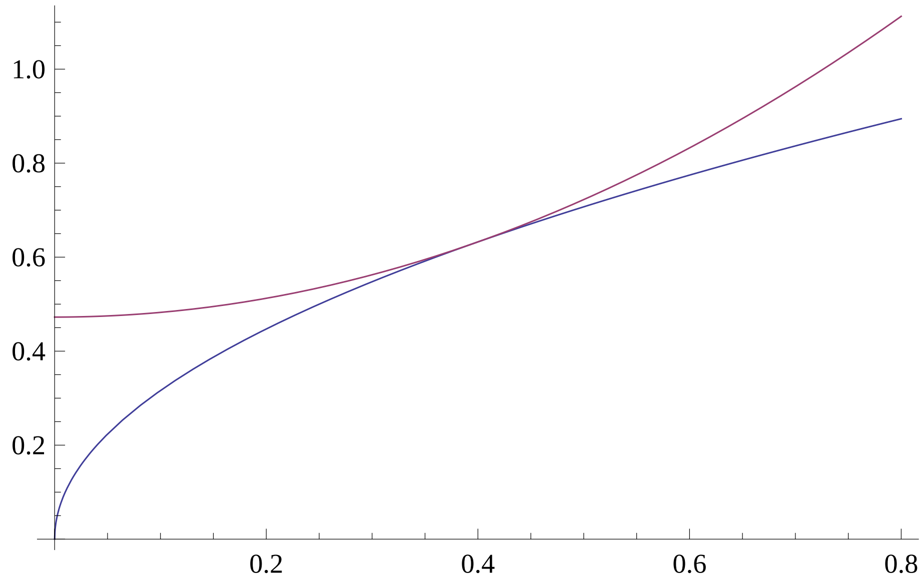
По условию $0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n < T_1 < T_2$, тогда $y(x)$ является вогнутой возрастающей.

В плоскости (x, y) проведем кривую $z(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^{T_2/T_1}$, которая касается $y(x)$ в одной точке, т.е. выполнено следующее:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x^{\frac{\tau_j}{T_1}} = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^{T_2/T_1},$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\tau_j}{T_1} x^{\frac{\tau_j}{T_1} - 1} = \lambda_1 + \lambda_2 \frac{T_2}{T_1} x^{(T_2/T_1 - 1)}.$$

Из второго уравнения следует, что такая точка существует и единственна, если $\lambda_0 \neq 0$. Обозначим эту точку x_0 .



Положим $\widehat{d\mu}(\xi) = A\delta(\xi - \xi_0)$, где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция, а A выбрана так, чтобы выполнялись условия дополняющей нежесткости:

$$\lambda_0 \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{d\mu}(\xi) - \delta_0^2 \right) = 0, \quad \lambda_1 \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-2\xi^2 T_1} \widehat{d\mu}(\xi) - \delta_1^2 \right) = 0, \quad \lambda_2 \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-2\xi^2 T_2} \widehat{d\mu}(\xi) - \delta_2^2 \right) = 0$$

Из условий дополняющей нежесткости следует, что $A = \delta_0^2$, т.к. $\lambda_0 \neq 0$.

Далее из условий дополняющей нежесткости, предполагая $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$, находим:

$$\xi_1 = \sqrt{\frac{1}{a} \ln \left(\frac{\delta_0}{\delta_1} \right)}$$

$$\xi_2 = \sqrt{\frac{1}{b} \ln \left(\frac{\delta_0}{\delta_2} \right)}$$

Пусть $\delta_0 > \delta_1$ и $\delta_0 > \delta_2$, рассмотри 2 случая.

Случай 1.

$\xi_1 > \xi_2$, т.е. $\delta_1 < e^{T_2/T_1} \delta_2$

Тогда

$$e^{-2\xi_1^2 T_2} < e^{-2\xi_2^2 T_2} < \delta_2^2.$$

Положим в этом случае $\xi_0 = \xi_1, \quad \lambda_2 = 0,$

$$\lambda_1 = \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\tau_j}{T_1} x_0^{\frac{\tau_j}{T_1}-1}$$

$$\lambda_0 = \sum_{j=1}^{n} p_j \left(1 - \frac{\tau_j}{T_1} x_0\right) x_0^{\tau_j/T_1-1}$$

Для таких $\widehat{d\mu}(\cdot),\ \widehat{\lambda}_0,\ \widehat{\lambda}_1,\ \widehat{\lambda}_2$ выполнены условия дополняющей нежесткости и $\min\limits_{d\mu\geq 0} \mathcal{L}(d\mu(\cdot), \widehat{\lambda}_0, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = \mathcal{L}(\widehat{d\mu(\cdot)}, \widehat{\lambda}_0, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2)$, тогда $\widehat{d\mu}(\cdot)$ является решением расширенной задачи .

Случай 2.

$\xi_2 > \xi_1$, т.е. $\delta_1 > e^{T_2/T_1}\delta_2$

Тогда

$$e^{-2\xi_2^2 T_1} < e^{-2\xi_1^2 T_1} < \delta_1^2.$$

Положим в этом случае $\xi_0 = \xi_2, \quad \lambda_1 = 0,$

$$\lambda_2 = \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\tau_j}{T_2} x_0^{\frac{\tau_j - T_2}{T_1}}$$

$$\lambda_0 = \sum_{j=1}^{n} p_j \left(1 - \frac{\tau_j}{T_1} x_0\right) x_0^{\tau_j/T_1-1}.$$

Таким образом получаем оценку снизу для погрешности оптимального восстановления:

$$E^2(\tau_1, \dots \tau_n, \delta_0, \delta_1, \delta_2) \geq \widehat{\lambda}_0 \delta_0^2 + \widehat{\lambda}_1 \delta_1^2 + \widehat{\lambda}_2 \delta_2^2,$$

причем λ_1 и λ_2 не могут быть одновременно отличны от нуля.

Оценка сверху погрешности оптимального восстановления и построение оптимального метода проводятся абсолютно аналогично теореме 1.

Таким образом теорема доказана.

►

Теорема 3.

Пусть в поставленной задаче n — произвольное, $k = 3, t_1 = 0,\ t_2 = T_1, t_3 = T_2$, и они таковы, что выполнено $\ 0 < T_1 < \tau_1 < \ldots < \tau_n < T_2$, тогда имеет место равенство $E^2(\tau, \delta_0, \delta_1, \delta_2) = \widehat{\lambda}_0\delta_0^2 + \widehat{\lambda}_1\delta_1^2 + \widehat{\lambda}_1\delta_2^2$, причем по крайней мере один из коэффициентов Лагранжа равен нулю.

$\lhd$ Доказательство.

Проведем доказательство аналогично Теореме 1.

Предположим, что $\lambda_0 = 0$, тогда

$$\widehat{d\mu} = \delta_1^{2T_2/(T_2-T_1)}\delta_2^{-2T_1/(T_2-T_1)}\delta\left(\xi - \sqrt{\frac{1}{T_2-T_1}\ln\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)}\right)$$

$$\widehat{\lambda}_0 = \sum_{j=1}^{k} p_j \left(\frac{\delta_2^2}{\delta_1^2}\right)^{\tau_{j-T_1/(T_2-T_1)}}\left(1 - \frac{\tau_{j-T_1}}{T_2-T_1}\right)$$

$$\widehat{\lambda}_2 = \sum_{j=1}^{k} p_j \frac{\tau_{j-T_1}}{T_2-T_1}\left(\frac{\delta_2^2}{\delta_0^2}\right)^{\left(\frac{\tau_{j-T_1}}{T_2-T_1}-1\right)}$$

Для таких $\widehat{d\mu},\ \widehat{\lambda}_0,\ \widehat{\lambda}_1,\ \widehat{\lambda}_2$ выполнены условия дополняющей нежесткости и $\min\limits_{d\mu\geq 0}\mathcal{L}(d\mu(\cdot), \widehat{\lambda}_0, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = \mathcal{L}(\widehat{d\mu(\cdot)}, \widehat{\lambda}_0, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2)$.

Подставляя полученное выражение для $\widehat{d\mu}$ в ограничение (1) задачи, получаем:

$$\delta_1^{2T_2/(T_2-T_1)}\delta_2^{-2T_1/(T_2-T_1)} \leq \delta_0^2, \quad \delta_2 < \delta_1.$$

Пусть теперь $\lambda_1 = 0$, тогда:

$$\widehat{d\mu} = \delta_0^2\delta\left(\xi - \sqrt{\frac{1}{T_2}\ln\left(\frac{\delta_0}{\delta_2}\right)}\right)$$

$$\widehat{\lambda}_0 = \sum_{j=1}^{k} p_j \left(\frac{\delta_2^2}{\delta_0^2}\right)^{\tau_{j/T_2}}\left(1 - \frac{\tau_j}{T_2}\right)$$

$$\widehat{\lambda}_2 = \sum_{j=1}^{k} p_j \frac{\tau_j}{T_2}\left(\frac{\delta_2^2}{\delta_0^2}\right)^{\left(\frac{\tau_j}{T_2}-1\right)}$$

Подставляя в ограничение (2), получаем:

$$\delta_0^2 \left(\frac{\delta_2^2}{\delta_0^2}\right)^{T_1/T_2} \leq \delta_1^2,$$

Перепишем:

$$\delta_1^{2T_2/(T_2-T_1)} \delta_2^{-2T_1/(T_2-T_1)} \geq \delta_0^2, \quad \delta_0 > \delta_2.$$

Предположим, что $\lambda_2 = 0$.

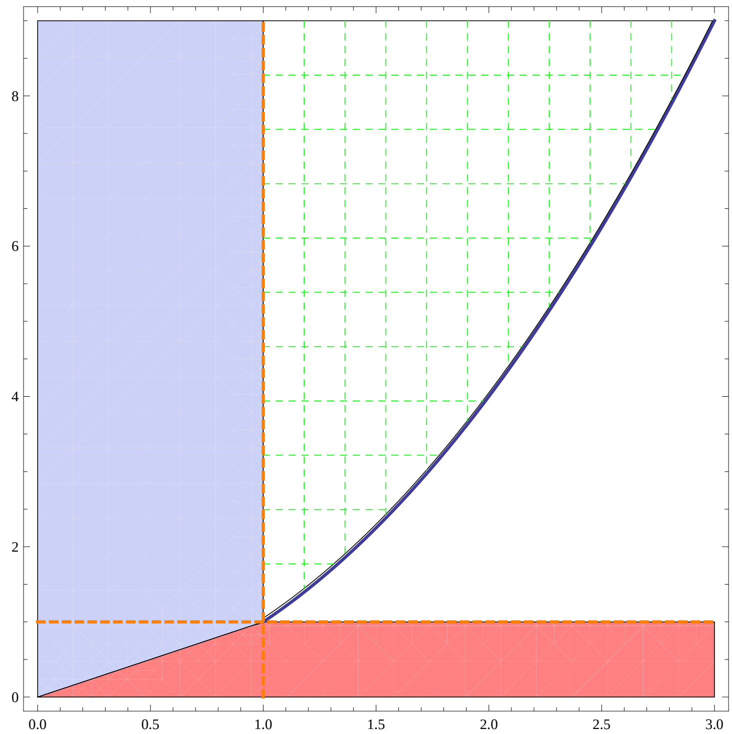
Возможны 2 случая.

Случай 1. $\lambda_0 = \sum_{j=1}^n p_j, \quad \lambda_1 = 0$. При этом из ограничений задачи (2) - (3) следует, что $\delta_0 < \delta_1, \quad \delta_0 < \delta_2$.

Случай 2. $\lambda_1 = \sum_{j=1}^n p_j, \quad \lambda_0 = 0$. При этом из ограничений задачи (1) и (3) следует, что $\delta_1 < \delta_0, \quad \delta_1 < \delta_2$.

Полученный результат можно продемонстрировать на схеме. Зафиксируем δ_2. Синим отмечена область, где $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, красным - $\lambda_0 = \lambda_2 = 0$, штриховкой - $\lambda_0 = 0$, белым - $\lambda_1 = 0$.

Кривая соответствует $\delta_1^{T_2/(T_2-T_1)} \delta_2^{-T_1/(T_2-T_1)} = \delta_0$



Таким образом описаны все возможные соотношения между $\delta_0,\ \delta_1,\ \delta_2$. Оценка сверху и построение оптимального метода проводятся аналогично Теореме 1.

►

Заключение.

Продемонстрируем преимущество одновременного восстановления на примере. Пусть $t_1 = 0, \quad t_2 = T, \quad \tau_1 = 1/2T, \quad \tau_2 = 3/2T, \quad \delta_1 < \delta_0$.

Рассмотрим сначала поточечное восстановление.

Обозначим: $M = co\{(t_j, \ln(1/\delta_j)|1 \le j \le n)\} + \{(t, 0)|t \ge 0\}$.

Определим $\theta(t) = \max\{x|(t, x) \in M\}$.

Как было показано в [1], в этом случае погрешность восстановления в точке $1/2T$ будет равна $E_1' = \left(\frac{\delta_1}{\delta_0}\right)^{\frac{\tau_1}{T}} \delta_0$, погрешность восстановления в точке $3/2T$ будет равна $E_2' = \delta_1$. Таким образом, суммарная погрешность будет равна $E_1^2 = E_1'^2 + E_2'^2 = \left(\frac{\delta_1^2}{\delta_0^2}\right)^{\frac{\tau_1}{T}} \delta_0^2 + \delta_1^2 = \delta_0\delta_1 + \delta_1^2$.

При одновременном восстановлении погрешность оптимального восстановления будет равна $E_2^2 = \delta_0^2 \left(x_0^{\frac{\tau_1}{T}} \left(1 - \frac{\tau_1}{T}\right) + x_0^{\frac{\tau_2}{T}} \left(1 - \frac{\tau_2}{T}\right)\right) + \delta_1^2 \left(\frac{\tau_1}{T} x_0^{\frac{\tau_1}{T}-1} + \frac{\tau_2}{T} x_0^{\frac{\tau_2}{T}-1}\right)$,

$E_2^2 \le \delta_0^2 \left(\frac{\delta_1^2}{\delta_0^2}\right)^{\frac{\tau_1}{T}} + \delta_0^2 \left(\frac{\delta_1^2}{\delta_0^2}\right)^{\frac{\tau_2}{T}} = \delta_0\delta_1 + \frac{\delta_1^3}{\delta_0} = \delta_0\delta_1 + \delta_1^2 \frac{\delta_1}{\delta_0}$.

Так как $\delta_1 < \delta_0$, то $\frac{\delta_1}{\delta_0} < 1$, тогда $E_2^2 < E_1^2$, таким образом, с помощью одновременного восстановления можно построить более точный метод.

Список литературы

[1] Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю. — Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям

[2] Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю., Тихомиров В.М. — Неопределенность знания об объекте и точность методов его восстановления

[3] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. — Элементы теории функций и функционального анализа, М.: Наука, 1972

[4] Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю. — Оптимальное восстановление линейных операторов по неточной информации