МАТИ—МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени К. Э. Циолковского

На правах рукописи

БАЛОВА Елена Александровна

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ТИПА И ВОССТАНОВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(01.01.01—математический анализ)
Д и с с е р т а ц и я
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель—
доктор физико-математических наук,
профессор К. Ю. Осипенко

Москва—2009

Оглавление

Глава 1

Введение

1.1. Исторический обзор

В работе рассматривается задача оптимального восстановления решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в d-мерном шаре и d-мерном шаровом поясе по неточно заданным граничным условиям. Кроме этого, решается задача оптимального восстановления решения уравнения Пуассона с нулевыми граничными условиями по неточно заданной правой части уравнения.

В 1965г. С. А. Смоляком была поставлена задача об оптимальном восстановлении линейного функционала x' на некотором подмножестве W из линейного пространства X по значениям линейных функционалов $x'_1, \ldots, x'_n$. Было введено понятие погрешности оптимального восстановления, которая определялась формулой

$$e(x', W, I) = \inf_{\varphi:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}} \sup_{x \in W} | < x', x > -\varphi(Ix)|,$$

где $Ix := (< x'_1, x >, \ldots, < x'_n, x >)$. Метод φ, на котором достигалась нижняя грань, назывался оптимальным. С. А. Смоляк доказал, что в случае, когда W—выпуклое множество, среди оптимальных методов есть аффинный, а если W—выпуклое уравновешенное множество, то среди оптимальных методов есть линейный. Эта постановка, идейно восходящая к работам А.Н.Колмогорова, послужила началом направления, котороое в дальнейшем стало называться теорией оптимального восстановления.

Приблизительно в это же время С. Б. Стечкиным была поставлена близкая к рассматриваемой задача о приближении неограниченного оператора ограниченным. Исследования задачи Стечкина, проведенные В. В. Арестовым и В. Н. Габушиным, выявили её тесную связь с оптимальным восстановлением по приближённой информации. В 1976г. К. Ю. Осипенко обобщил теорему Смоляка на комплексный случай и решил ряд конкретных задач оптимального восстановления на классах ограниченных аналитических функций. С конца 70-х годов оптимальным восстановлением активно занимались американские математики Ч. Мичелли и Т. Ривлин, значительно расширившие исходную постановку, специалисты по оптимальным алгоритмам Дж. Трауб, Х. Вожньяковский и др.

В начале этого десятилетия в работах Г. Г. Магарил-Ильяева и К. Ю. Осипенко был разработан метод оптимального восстановления линейного оператора по неточным исходным данным. Эта проблематика тесно связана решением некоторых экстремальных задач, берущих начало от одной экстремальной задачи, известной как теорема Адамара о трёх кругах. Имеется голоморфная функция $f(z)$, определенная в кольце $r_1 < r < r_2$. Пусть

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Тогда $\ln M(r)$ есть выпуклая функция от $\ln r$, и результат теоремы можно сформулировать в виде неравенства

$$M(r) \leq M(r_1)^{\frac{\ln(r_2/r)}{\ln(r_2/r_1)}} M(r_2)^{\frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}},$$

справедливое для любых трёх концентрических окружностей радиусов $r_1 < r < r_2$.

Теорема, известная как теорема Адамара о трёх кругах, была сформулирована и доказана Дж. Е. Литтлвудом в 1912г., но он не упоминал о её авторстве, рассматривая как известный факт. Г. Бор и Е. Ландау утверждали, что теорема впервые была сформулирована Д. Адамаром в 1896г., хотя Адамар не опубликовал её доказательства.

Теорема о трёх кругах даёт значение следующей экстремальной задачи

$$M(r) \to \max, \ M(r_1) \leq \delta_1, \ M(r_2) \leq \delta_2.$$

Точное решение этой задачи, выраженное через эллиптические функции, было получено Р. М. Робинсоном в 1943г.

В 1913г. Е. Ландау рассмотрел похожую задачу, где роль кругов выполняли производные, и показал, что для любых функций f, $f \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$, с первой производной, локально абсолютно непрерывной на $\mathbb{R}_+$, и $f'' \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$, имеет место неравенство

$$\|x'\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \leq 2\|x\|^{1/2}_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \, \|x''\|^{1/2}_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}.$$

Таким образом, было найдено точное решение экстремальной задачи

$$\|x'\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \to \max, \ \|x\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \leq \delta_1, \ \|x''\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \leq \delta_2.$$

В 1914г. Адамар решил аналогичную задачу для $\mathbb{R}$.

В 1938г. А. Н. Колмогоров получил общий результат в этой области, построив точное решение экстремальной задачи

$$\|x^{(k)}\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \to \max, \ \|x\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq \delta_1, \ \|x^{(m)}\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \leq \delta_2, \ 1 \leq k < m.$$

Этот класс экстремальных задач известен как неравенства Ландау-Колмогорова для производных, и эти задачи подобны задаче Адамара о трёх кругах.

Экстремальные задачи типа теоремы Адамара о трёх кругах тесно связаны с задачами оптимального восстановления. Оказывается, что почти с каждой такой задачей можно связать некоторую задачу об оптимальном восстановлении оператора. И наоборот, задачи оптимального восстановления линейного оператора, как правило, сводятся к решению некоторой экстремальной задачи типа теоремы Адамара о трёх кругах.

1.2. Краткое содержание работы

Во 2-й главе рассматривается общая постановка задачи оптимального восстановления линейного оператора: для векторного пространства X, нормированного пространства Z и линейного оператора T требуется восстановить значения T на некотором множестве $W \subset X$ по неточной информации о каждом элементе $x \in W$, задаваемой с помощью некоторого информационного отображения $I(x)$, вообще говоря, многозначного, из W в векторное пространство Y. Даются определения понятий погрешности восстановления для данного метода φ, погрешности оптимального восстановления и оптимального метода восстановления. Описывается метод оптимального восстановления линейного оператора по информации, заданной с погрешностью, разработанный в работах Г. Г. Магарил-Ильяева и К. Ю. Осипенко. Сформулирован ряд результатов этих авторов, показывающий, что существенной частью построения оптимального метода является решение экстремальных задач типа теоремы о трёх кругах Адамара, а выражение для погрешности оптимального метода является значением задачи такого типа. Эти результаты были использованы при решении задач, рассмотренных в **главах** 3 и 4.

Далее, в пункте 2.2, рассмотрены две экстремальные задачи, представляющие из себя задачи линейного программирования, и сформулированы и доказаны **леммы** 1 и 2, дающие точные решения этих задач. Эти результаты используются в **главе** 4 данной работы.

В пункте 2.3 приведены сведения, обосновывающие правомерность тех подходов, которые использованы в третьей и четвёртой главах при решении задач оптимального восстановления решений уравнений Лапласа и Пуассона по неточной исходной информации. Указаны классы, которым принадлежат обобщённые решения этих задач, приведены формулировки теорем, позволяющие искать решения в виде соответствующих рядов. Приводится краткая информация о сферических функциях, которые используются при решении задач в **главах** 3 и 4.

В 3-й главе рассматриваются три задачи оптимального восстановления решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа по неточной информации о граничных функциях.

В пункте 3.1 рассматривается задача о восстанавлении решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в d-мерном единичном шаре на сфере радиуса r по следам решения на сферах радиусов R_1 и R_2, заданным приближённо, $0 < R_1 < r < R_2 \leq 1$. Предполагается, что приближённо заданные следы принадлежат пространству $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, где $\mathbb{S}^{d-1}$—единичная $(d-1)$-мерная сфера в пространстве $\mathbb{R}^d$. Для данной задачи сформулирована и доказана теорема 10, которая позволяет вычислить оптимальную погрешность восстановления. Кроме того, предложен метод оптимального восстановления, имеющий линейную структуру.

В пунктах 3.2 и 3.3 сформулированы задачи оптимального восстановления решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в d-мерном шаре $B^d(d > 2)$ и в d-мерном шаровом поясе $(d \geq 2)$ по неточно заданным граничным функциям. Предполагается, что функции принадлежат некоторому классу из $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ и известно конечное число коэффициентов их разложений в ряды Фурье по шаровым функциям, причём эти коэффициенты известны с погрешностями. Рассмотрены два случая определения погрешностей (в среднеквадратичной и равномерной метриках), для каждого из этих случаев сформулированы и доказаны теоремы 11—12 и 13—14, позволяющие вычислить величины оптимальных погрешностей восстановления, а также предложены оптимальные методы восстановления.

<u>В 4-й главе</u> решается задача об оптимальном восстановлении решения обобщённого уравнения Пуассона.

В пункте 3.1 рассматривается задача оптимального восстановления решения обобщённого уравнения Пуассона для ограниченной области Q с нулевым граничным условием на границе области ∂Q. Правая часть уравнения представлена своим разложением в ряд Фурье по собственным функциям линейного дифференциального оператора левой части уравнения для области Q. Предполагается, что функция, описывающая правую часть уравнения, принадлежит некоторому классу $W(\partial Q)$, и известно конечное число коэффициентов её разложения, причём эти коэффициенты заданы с погрешностями. Рассмотрены два случая задания погрешности (в евклидовой и равномерной метриках,) сформулированы и доказаны теоремы 15 и 16, соответствующие этим случаям. Построены формулы для вычисления значений погрешностей оптимального восстановления и предложены оптимальные методы восстановления.

В пункте 4.2 приведён пример применения результатов, полученных в пункте 4.1. Здесь рассматривается задача оптимального восстановления решения задачи Дирихле с нулевым граничным условием для уравнения Пуассона в единичном d-мерном шаре, когда левая часть уравнения есть обобщённый оператор Лапласа.

Пункт 4.3 посвящён задаче восстановления решения уравнения Пуассона на единичной $(d-1)$-мерной сфере с левой частью, представляющей из себя обобщённый оператор Бельтрами-Лапласа. Правая часть уравнения представлена функцией, ортогональной единице, которая разложена в ряд Фурье по сферическим функциям, являющимися собственными функциями для оператора Бельтрами-Лапласа. Предполагается, что функция из правой части уравнения принадлежит некоторому классу $W(\mathbb{S}^{d-1})$ и задана конечным числом коэффициентов своего ряда Фурье, которые определены неточно. Как и в предыдущих задачах, погрешности рассмотрены в двух метриках, среднеквадратичной и равномерной. Для каждого из этих случаев сформулированы и доказаны теоремы 17 и 18, вычислены погрешности оптимального восстановления и построены оптимальные методы восстановления.

1.3. Доклады и публикации

Основные результаты, представленные в работе, были доложены на:

Международной конференции "Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования", Владикавказ, 14-18 июня 2006г.;

Международной школе-семинаре по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова, Абрау-Дюрсо, 2006 г.;

Международной конференции EPCoRA-2007, Москва, 2007 г.;

3-й Международной конференции "Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования", Москва, 2008 г.;

научном семинаре кафедры "Высшая математика" МАТИ-РГТУ им. К. Э. Циолковского;

научном семинаре кафедры "Общие проблемы управления" механико-математического факультета МГУ

и отражены в пяти публикациях [**18**]—[**22**].

Глава 2

Предварительные сведения

2.1. Задача об оптимальном восстановлении линейного оператора

В главах 3 и 4 рассматриваются задачи оптимального восстановления решений задачи Дирихле для уравнений Лапласа и Пуассона по неточным исходным данным. Метод оптимального восстановления линейного оператора по неточной исходной информации, используемый при решении этих задач, был разработан Г. Г. Магарил-Ильяевым и К. Ю. Осипенко. При этом авторы метода в значительной степени использовали лагранжев подход к решению экстремальных задач, более подробно изложенный в работе [**8**]. Начнём с общей постановки задачи.

Пусть X—линейное пространство, $Y_1, \dots Y_n$ — пространства с полускалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_{Y_j}$ и соответствующими нормами $\|\cdot\|_{Y_j}$, $j=1,\dots,n$, пусть $I_j : X \to Y_j$ $j=1,\dots,n$ — линейные операторы, а Z—линейное нормированное пространство. Рассмотрим задачу оптимального восстановления линейного оператора $T : X \to Z$ на множестве

$$W_k = \{x \in X : \|I_j x\|_{Y_j} \le \delta_j, \quad j = 1,\dots,k\}, 0 \le k \le n$$

по значениям операторов $I_{k+1},\dots,I_n$, заданным с погрешностями (при $k=0$ положим $W_0 = X$). Будем считать, что для каждого $x \in W_k$ нам известен вектор $y = (y_{k+1},\dots,y_n) \in Y = Y_{k+1} \times \ldots \times Y_n$ такой, что $\|I_j x - y_j\|_{Y_j} \le \delta_j$, $j = k+1,\dots,n$.

В качестве методов восстановления оператора T рассматриваются всевозможные операторы $\varphi : Y \to Z$.

Погрешностью восстановления для данного метода φ называется величина

$$e(T, W_k, I, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x \in W_k,\, y \in Y \\ \|I_j x - y_j\| \le \delta_j,\, j=k+1,\dots,n}} \|Tx - \varphi(y)\|_Z,$$

где $I = (I_{k+1},\dots,I_n)$, $\delta = (\delta_{k+1},\dots,\delta_n)$.

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(T, W_k, I, \delta) = \inf_{\varphi : Y \to Z} e(T, W_k, I, \delta, \varphi),$$

а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным.

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\|Tx\|_Z^2 \to \max,\ \|I_jx\|_{Y_j}^2 \le \delta_j^2\ ,\ j=1,\dots,n,\quad x\in X, \tag{2.1}$$

которая, как будет показано ниже, тесно связана с рассматриваемой задачей восстановления.

Теорема 1. *Пусть существуют $\widehat{\lambda}_j \ge 0$, $j=1,\dots,n$ такие, что значение задачи* (2.1) *совпадает со значением задачи*

$$\|Tx\|_Z^2 \to \max,\quad \sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j\|I_jx\|_{Y_j}^2 \le \sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j\delta_j^2,\quad x\in X, \tag{2.2}$$

и пусть для любого $y=(y_{k+1},\dots,y_n)\in\widetilde{Y}=\widetilde{Y}_{k+1}\times\dots\widetilde{Y}_n$, где $\widetilde{Y}_j$ есть всюду плотные множества в Y_j, $j=k+1,\dots,n$, существует $x_y\in X$, являющийся решением экстремальной задачи

$$\sum_{j=1}^k \widehat{\lambda}_j\|I_jx\|_{Y_j}^2 + \sum_{j=k+1}^n \widehat{\lambda}_j\|I_jx-y_j\|_{Y_j}^2 \to \min,\ x\in X. \tag{2.3}$$

Пусть, кроме того, имеется непрерывный линейный оператор $A: Y\to Z$ с нормой в Y, определённой формулой

$$\|y\|_Y = \left(\sum_{j=k+1}^n \|y_j\|_{Y_j}^2\right)^{1/2},$$

и для каждого $y=(y_{k+1},\dots,y_n)\in\widetilde{Y}$ выполнено

$$Ay = Tx_y.$$

Тогда

$$E(T,W_k,I,\delta) = \sup_{\substack{x\in X,\\ \|I_jx\|_{Y_j}\le\delta_j,\, j=1,\dots,n}} \|Tx\|_Z,$$

и метод

$$\varphi_0(y) = Ay \tag{2.4}$$

является оптимальным.

Доказательство. Сначала получим оценку снизу. Пусть φ — произвольный метод восстановления и $x\in X$ такое, что

$$\|I_jx\|_{Y_j}\le\delta_j,\ j=1,\dots,k,$$

(то есть x и $(-x)$ принадлежат W_k). Тогда, взяв $y=(y_{k+1},\dots,y_n)=(0,\dots,0)$, имеем

$$2\|Tx\|_Z \le \|Tx-\varphi(0)\|_Z + \|T(-x)-\varphi(0)\|_Z \le 2e(T,W_k,I,\delta,\varphi).$$

Для выбранного метода φ, после перехода к верхней грани, получим

$$e(T,W_k,I,\delta,\varphi) \ge \sup_{\substack{x\in X,\\ \|I_jx\|_{Y_j}\le\delta_j,\, j=1,\dots,n}} \|Tx\|_Z.$$

Следовательно,

$$E(T,W_k,I,\delta)=\inf_{\varphi:Y_{k+1}\times\ldots\times Y_n\to Z,}e(T,W_k,I,\delta,\varphi)\geq \tag{2.5}$$
$$\geq \sup_{\substack{x\in X,\\ \|I_jx\|_{Y_j}\leq\delta_j,\, j=1,\,\dots\,,\,n}}\|Tx\|_Z.$$

Получим оценку сверху и докажем оптимальность метода (2.4). Рассмотрим линейное пространство $E = Y_1\times\ldots\times Y_n$ с полускалярным произведением

$$(y^{(1)},y^{(2)})_E=\sum_{j=1}^n\widehat{\lambda}_j(y_j^{(1)},y_j^{(2)})_{Y_j},$$

где $y^{(1)}=(y_1^{(1)},\ldots,y_n^{(1)}),y^{(2)}=(y_1^{(2)},\ldots,y_n^{(2)})$. Тогда экстремальную задачу (2.3) можно переписать в виде

$$\|\widetilde{I}x-\widehat{y}\|_E^2\to\min,\ x\in X,$$

где $\widetilde{I}x=(I_1x,\ldots,I_nx)$ и $\widehat{y}=(0,\ldots,0,y_{k+1},\ldots,y_n)\in E$. Если x_y является решением этой новой задачи, то, как нетрудно показать, для любого $x\in X$ выполнено равенство

$$(\widetilde{I}x_y-\widehat{y},\widetilde{I}x)_E=0.$$

Отсюда следует, что

$$\|\widetilde{I}x-\widehat{y}\|_E^2=\|\widetilde{I}x-\widetilde{I}x_y+\widetilde{I}x_y-\widehat{y}\|_E^2=$$
$$=\|\widetilde{I}x-\widetilde{I}x_y\|_E^2+2Re(\widetilde{I}x-\widetilde{I}x_y,\widetilde{I}x_y-\widehat{y})_E+\|\widetilde{I}x_y-\widehat{y}\|_E^2=$$
$$=\|\widetilde{I}x-\widetilde{I}x_y\|_E^2+\|\widetilde{I}x_y-\widehat{y}\|_E^2.$$

Следовательно, для всех $x\in X$

$$\|\widetilde{I}x-\widetilde{I}x_y\|_E^2\leq\|\widetilde{I}x-\widehat{y}\|_E^2= \tag{2.6}$$
$$=\sum_{j=1}^k\widehat{\lambda}_j\|I_jx\|_{Y_j}^2+\sum_{j=k+1}^n\widehat{\lambda}_j\|I_jx-y_j\|_{Y_j}^2.$$

Пусть $x\in W_k$ и $y=(y_{k+1},\ldots,y_n)\in Y_{k+1}\times\ldots\times Y_n$ таковы, что $\|I_jx-y_j\|_{Y_j}\leq\delta_j,\ j=k+1,\ldots,n$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует $\widetilde{y}=(\widetilde{y}_{k+1},\ldots,\widetilde{y}_n)\in\widetilde{Y}$ такое, что $\|y_j-\widetilde{y}_j\|_{Y_j}\leq\varepsilon,\ j=k+1,\ldots,n$, и

$$\|I_jx-\widetilde{y}_j\|_{Y_j}\leq\|I_jx-y_j\|_{Y_j}+\|y_j-\widetilde{y}_j\|_{Y_j}\leq\delta_j+\varepsilon,\ j=k+1,\ldots,n. \tag{2.7}$$

Положив $z=x-x_y$, с учётом (2.6) и (2.7), мы получаем неравенство

$$\sum_{j=1}^n\widehat{\lambda}_j\|I_jz\|_{Y_j}^2\leq\sum_{j=1}^n\widetilde{\delta}_j^2\widehat{\lambda}_j, \tag{2.8}$$

где

$$\widetilde{\delta}_j = \begin{cases} \delta_j, & 1 \le j \le k, , \\ \delta_j + \varepsilon, & k+1 \le j \le n. \end{cases}$$

Введём обозначения

$$S = \sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j \delta_j^2, \quad \widetilde{S} = \sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j \widetilde{\delta}_j^2.$$

Нетрудно увидеть, положив $z = (\widetilde{S}/S)^{1/2} x$, что

$$\sup_{\substack{z \in X \\ \sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j \|I_j z\|^2_{Y_j} \le \widetilde{S}}} \|Tz\|_Z = \sqrt{\frac{\widetilde{S}}{S}} \sup_{\substack{x \in X \\ \sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j \|I_j x\|^2_{Y_j} \le S}} \|Tx\|_Z. \tag{2.9}$$

Для оценки погрешности метода $\varphi_0(y) = Ay$ имеем

$$\|Tx - Ay\|_Z \le \|Tx - A\widetilde{y}\|_Z + \|A(\widetilde{y} - y)\|_Z \le \|Tx - Tx_{\widetilde{y}}\|_Z + \|A\|(n-k)\varepsilon.$$

Отсюда, учитывая (2.8), (2.9), а также то, что $A\widetilde{y} = T_{x_{\widetilde{y}}}$ и значения задач (2.1) и (2.2) совпадают, имеем

$$\|Tx - Tx_{\widetilde{y}}\|_Z = \|Tz\|_Z \le \sup_{\substack{z \in X \\ \sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j \|I_j z\|^2_{Y_j} \le \widetilde{S}}} \|Tz\|_Z =$$

$$= \sqrt{\frac{\widetilde{S}}{S}} \sup_{\substack{x \in X \\ \sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j \|I_j x\|^2_{Y_j} \le S}} \|Tx\|_Z = \sqrt{\frac{\widetilde{S}}{S}} \sup_{\substack{x \in X \\ \|I_j x\|_{Y_j} \le \delta_j,\ j=1,\dots,n}} \|Tx\|_Z.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то устремляя ε к нулю, получаем

$$\|Tx - Ay\|_Z \le \sup_{\substack{x \in X \\ \|I_j x\|_{Y_j} \le \delta_j,\ j=1,\dots,n}} \|Tx\|_Z.$$

Учитывая оценку (2.5), приходим к равенству

$$E(T, W_k, I, \delta) = \sup_{\substack{x \in X, \\ \|I_j x\|_{Y_j} \le \delta_j,\, j=1,\, \dots\, ,\, n}} \|Tx\|_Z.$$

Отсюда и из предыдущего неравенства следует, что метод φ_0 является оптимальным. $\square$

Формулировка и схема доказательства этой теоремы были сообщены автору работы К.Ю. Осипенко.

Для проверки совпадений значений задач (2.1) и (2.2) удобно использовать следующую теорему

Теорема 2. *Пусть*

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = -\|Tx\|^2_Z + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \|I_j x\|^2_{Y_j}$$

— функция Лагранжа задачи (2.1)*, где* $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$*— множители Лагранжа. Пусть существуют* $\widehat{\lambda}_j \geq 0$*,* $j = 1, \dots, n$ *и допустимый в задаче* (2.1) *элемент* $\widehat{x}$ *такие, что*

$$(a) \quad \min_{x \in X} \mathcal{L}(x, \widehat{\lambda}) = \mathcal{L}(\widehat{x}, \widehat{\lambda}), \ \widehat{\lambda} = (\widehat{\lambda}_1, \dots, \widehat{\lambda}_n),$$

$$(b) \quad \sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j (\|I_j \widehat{x}\|^2_{Y_j} - \delta_j^2) = 0.$$

Тогда $\widehat{x}$*—решение задачи* (2.1) *и*

$$\sup_{\substack{x \in X, \\ \|I_j x\|^2_{Y_j} \leq \delta_j^2, \, j=1,\dots,n}} \|Tx\|^2_Z = \sup_{\substack{x \in X, \\ \sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j \|I_j x\|^2_{Y_j} \leq \sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j \delta_j^2, \\ j=1,\dots,n}} \|Tx\|^2_Z = \sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j \delta_j^2.$$

Доказательство. Положим

$$S = \sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j \delta_j^2.$$

Пусть x—допустимый элемент в (2.1). Тогда, с учётом (a) и (b), имеем

$$- \|Tx\|^2_Z \geq -\|Tx\|^2_Z + \sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j (\|I_j x\|^2_{Y_j} - \delta_j^2) = \mathcal{L}(x, \widehat{\lambda}) - S \geq$$

$$\geq \mathcal{L}(\widehat{x}, \widehat{\lambda}) - S = -\|T\widehat{x}\|^2_Z + \sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j (\|I_j \widehat{x}\|^2_{Y_j} - \delta_j^2) = -\|T\widehat{x}\|^2_Z,$$

то есть $\widehat{x}$—решение задачи (2.1). Аналогично можно показать, что $\widehat{x}$ является одновременно и решением задачи (2.2).

Покажем, что $\mathcal{L}(\widehat{x}, \widehat{\lambda}) = 0$. Действительно, предположив, что $\mathcal{L}(\widehat{x}, \widehat{\lambda}) > 0$, и положив $x_0 = \alpha \widehat{x}$, где $|\alpha| < 1$, имеем

$$\mathcal{L}(x_0, \widehat{\lambda}) = \alpha^2 \mathcal{L}(\widehat{x}, \widehat{\lambda}) < \mathcal{L}(\widehat{x}, \widehat{\lambda}),$$

что противоречит (a). Если же $\mathcal{L}(\widehat{x}, \widehat{\lambda}) < 0$, то для $x_0 = \alpha \widehat{x}$, где $|\alpha| > 1$, опять имеем

$$\mathcal{L}(x_0, \widehat{\lambda}) = \alpha^2 \mathcal{L}(\widehat{x}, \widehat{\lambda}) < \mathcal{L}(\widehat{x}, \widehat{\lambda}),$$

и снова приходим к противоречию. Следовательно, $\mathcal{L}(\widehat{x}, \widehat{\lambda}) = 0$ и

$$\sup_{\substack{x \in X, \\ \|I_j x\|^2_{Y_j} \leq \delta_j^2, \, j=1,\dots,n}} \|Tx\|^2_Z = \|T\widehat{x}\|^2_Z = -\mathcal{L}(\widehat{x}, \widehat{\lambda}) + S = S.$$

$\square$

При решении довольно большого числа задач оптимального восстановления можно использовать следующую теорему, более простую по сравнению с **теоремой** 1.

Теорема 3. *Пусть*

$$\mathcal{L}(x,\lambda) = -\|Tx\|_Z^2 + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \|I_j x\|_{Y_j}^2$$

— функция Лагранжа задачи (2.1), *где* $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$*— множители Лагранжа. Пусть* $\widehat{\lambda}_j \geq 0,\ j = 1, \dots, n$ *и допустимый в* (2.1) *элемент* $\widehat{x}$ *таковы, что выполнены условия:*

$$(a)\quad \min_{x\in X} \mathcal{L}(x,\widehat{\lambda}) = \mathcal{L}(\widehat{x},\widehat{\lambda}),\ \widehat{\lambda} = (\widehat{\lambda}_1, \dots, \widehat{\lambda}_n),$$

$$(b)\quad \sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j (\|I_j x\|_{Y_j}^2 - \delta_j^2) = 0.$$

Тогда значение экстремальной задачи (2.1) *равно*

$$\sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j \delta_j^2.$$

Если при этом для всех $y = (y_{k+1}, \dots, y_n) \in Y_{k+1} \times \dots Y_n$ *существует* x_y*—решение экстремальной задачи*

$$\sum_{j=1}^{k} \widehat{\lambda}_j \|I_j x\|_{Y_j}^2 + \sum_{j=k+1}^{n} \widehat{\lambda}_j \|I_j x - y_j\|_{Y_j}^2 \to \min, \quad x \in X, \tag{2.10}$$

то

$$\widehat{\varphi}(y) = Tx_y \tag{2.11}$$

—оптимальный метод восстановления и

$$E(T, W_k, I, \delta) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j \delta_j^2}\ . \tag{2.12}$$

Более подробно формулировки и доказательства **теорем** 2 и 3 изложены в работах Г.Г. Магарил-Ильяева и К.Ю. Осипенко (см., например, [**7**]).

2.2. Две леммы

При решении некоторых классов задач оптимального восстановления возникают задачи, связанные с нахождением максимальных значений сумм вида $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k u_k$ при некоторых специального вида ограничениях на u_k. Ниже сформулированы и доказаны две леммы, связанные с исследованием таких сумм. Полученные результаты используются в третьей главе.

2.2.1. Первая лемма.

Пусть k_0 — некоторое фиксированное натуральное число, и имеются две последовательности положительных чисел

$$\{\mu_k\}_1^\infty,\ \mu_{k+1} < \mu_k,\ 1 \le k \le k_0,\ \mu_k \le \mu_{k_0},\ k > k_0,$$

$$\{\gamma_k\}_1^\infty,\ \gamma_k < \gamma_{k+1},\ 1 \le k \le k_0,\ \gamma_{k_0} \le \gamma_k,\ k > k_0.$$

Пусть $u = \{u_k\}_1^\infty,\ u_k \ge 0,\ J = \{1, \dots, k_0\}$, и $A \subseteq J$.

Рассмотрим следующую экстремальную задачу:

$$(2.13)\qquad \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k u_k \to \max,\ \ \sum_{k\in A} u_k \le \delta^2,\ \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k u_k \le 1,$$
$$u_k \ge 0,\ k \ge 1.$$

Функция Лагранжа для задачи (2.13) имеет вид

$$\mathcal{L}_1(u, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{k=1}^{\infty} (-\mu_k + \lambda_2 \gamma_k) u_k + \lambda_1 \sum_{k\in A} u_k,$$

где λ_1 и λ_2—множители Лагранжа. Согласно **теореме** 2, если найдутся неотрицательные $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$, а также допустимая в задаче (2.13) последовательность $\widehat{u}$ такие, что выполняются условия

$$(a)\quad \mathcal{L}_1(\widehat{u}, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = \min_{u_k \ge 0} \mathcal{L}_1(u, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2),$$

$$(b)\quad \widehat{\lambda}_1 (\sum_{k\in A} \widehat{u}_k - \delta^2) + \widehat{\lambda}_2 (\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \widehat{u}_k - 1) = 0,$$

то $\widehat{u}$—решение этой задачи.

Положим

$$k^* = \begin{cases} \min\bigl(k:\ k \in \mathbb{N}\backslash A\bigr), & \delta^2 < \gamma_1^{-1}, \\ 1, & \delta^2 \ge \gamma_1^{-1}. \end{cases}$$

Лемма 1. *Пусть* $\delta > 0$. *Тогда*

1) *если* $k^* = 1$, *то*

$$\widehat{\lambda}_1 = 0,\ \widehat{\lambda}_2 = \frac{\mu_1}{\gamma_1}$$

и последовательность $\widehat{u}$, *задаваемая соотношениями*

$$(*)\qquad \widehat{u}_1 = \frac{1}{\gamma_1},\ \widehat{u}_k = 0,\ k > 1,$$

является решением задачи (2.13);

2) *если* $k^* > 1$, *то*

$$\widehat{\lambda}_1 = \mu_1 - \frac{\gamma_1 \mu_{k^*}}{\gamma_{k^*}},\quad \widehat{\lambda}_2 = \frac{\mu_{k^*}}{\gamma_{k^*}}$$

и последовательность $\widehat{u}$, задаваемая соотношениями

$$(**) \qquad \widehat{u}_1 = \delta^2,\ \widehat{u}_{k^*} = \frac{1-\delta^2\gamma_1}{\gamma_{k^*}}\ ,\ \widehat{u}_k = 0,\ k \geq 2, k \neq k^*,$$

— решение задачи (2.13).

Доказательство. 1) Пусть $k^* = 1$. Тогда для последовательности $\widehat{u}$, заданной соотношениями $(*)$, имеем

$$\widehat{u}_k \geq 0,\ k \geq 1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \widehat{u}_k = 1.$$

Условие

$$\sum_{k \in A} \widehat{u}_k \leq \delta^2$$

тоже выполняется, так как или $\widehat{u}_1 = \gamma_1^{-1} \leq \delta^2$, или 1 не принадлежит множеству A и $\widehat{u}_1$ не входит в эту сумму, следовательно, последовательность $\widehat{u}$ допустима в (2.13). Покажем, что условия (a) и (b) также выполнены. В этом случае

$$\widehat{\lambda}_1 = 0, \quad \widehat{\lambda}_2 = \frac{\mu_1}{\gamma_1}\ ,$$

и в силу того, что $\mu_k < \mu_1$ и $\gamma_k > \gamma_1$ при $k > 1$, получаем, что

$$\mathcal{L}_1(u, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = \sum_{k=1}^{\infty} (-\mu_k + \frac{\mu_1}{\gamma_1}\gamma_k) u_k \geq 0$$

для произвольных неотрицательных u_k, в том числе и для допустимых в нашей задаче. Легко убедиться в том, что $\mathcal{L}_1(\widehat{u}, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = 0$, то есть условие (a) выполнено. Выполнение условия (b) проверяется непосредственной подстановкой. Таким образом, получаем, что последовательность $\widehat{u}$, заданная соотношениями $(*)$, является решением задачи (2.13).

2) Рассмотрим теперь случай, когда $k^* > 1$. Допустимость последовательности $\widehat{u}$, задаваемой соотношениями $(**)$, следует из определения k^*, так как на $\widehat{u}_{k^*}$ не распространяется ограничение

$$\sum_{k \in A} u_k \leq \delta^2,$$

поэтому остается показать, что выполнены условия (a) и (b). Подставив в функцию Лагранжа $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$, имеем

$$\mathcal{L}_1(u,\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2) =$$

$$= \sum_{k\in A}\big(\mu_1 - \frac{\mu_{k^*}}{\gamma_{k^*}}\gamma_1\big)u_k + \sum_{k=1}^{\infty}\big(-\mu_k + \frac{\mu_{k^*}}{\gamma_{k^*}}\gamma_k\big)u_k =$$

$$= \sum_{k\in A}\big(- \mu_k + \mu_1 - \frac{\mu_{k^*}}{\gamma_{k^*}}\gamma_1 + \frac{\mu_{k^*}}{\gamma_{k^*}}\gamma_k\big)u_k +$$

$$+ \sum_{k\in J\setminus A}\big(- \mu_k + \frac{\mu_{k^*}}{\gamma_{k^*}}\gamma_k\big)u_k + \sum_{k=k_0+1}^{\infty}\big(- \mu_k + \frac{\mu_{k^*}}{\gamma_{k^*}}\gamma_k\big)u_k \geq 0$$

для всех неотрицательных u_k, так как во второй и третьей суммах $k \geq k^*$ в силу определения k^*, а μ_k и γ_k монотонно убывают и возрастают соответственно. Подставляя $\widehat{u}$ в функцию Лагранжа, получаем

$$\mathcal{L}_1(\widehat{u},\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2) = 0,$$

то есть условие (a) выполнено. Условие (b) проверяется непосредственной подстановкой. □

2.2.2. Вторая лемма.

Пусть есть $\{r_k\}_1^{\infty}$—последовательность натуральных чисел. Пусть дана последовательность множеств

$$\{J_k\},\ k \geq 1,\ J_k = \{1,...,r_k\},$$

и имеется набор множеств A_k, $1 \leq k \leq k_0$, $A_{k_0} \neq \emptyset$, где A_k—произвольные подмножества множеств J_k и k_0—заданное натуральное число.

Пусть даны две последовательности положительных чисел

$$\{\mu_k\}_1^{\infty}:\ \mu_k > \mu_{k+1},\ 1 \leq k \leq k_0+1,\ \mu_k \leq \mu_{k_0+1},\ k > k_0+1$$

и

$$\{\gamma_k\}_1^{\infty}:\ \gamma_k < \gamma_{k+1},\ 1 \leq k \leq k_0+1,\ \gamma_{k_0+1} \leq \gamma_k,\ k > k_0+1.$$

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k\sum_{j=1}^{r_k}b_{kj} \to \max,\quad \sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\sum_{j=1}^{r_k}b_{kj} \leq 1, \tag{2.14}$$

$$b_{kj} \leq \delta^2,\ k = 1,...,k_0,\ j \in A_k,$$

$$b_{kj} \geq 0,\ k \geq 1,\ j = 1,...,r_k,$$

где δ—произвольное положительное число. Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид

$$\mathcal{L}_2(b,\lambda,\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{r_k}\big(-\mu_k + \zeta\gamma_k\big)b_{kj} + \sum_{k=1}^{k_0}\sum_{j\in A_k}\lambda_{kj}b_{kj},$$

где $b = \{b_{kj}\}, k \geq 1, j = 1, \ldots, r_k,\ \lambda = \{\lambda_{kj}\}, k = 1, \ldots, k_0,\ j \in A_k$, где λ_{kj} и ζ—множители Лагранжа. Из **теоремы** 2 вытекает, что если найдутся неотрицательные $\widehat{\lambda}_{kj}$ и $\widehat{\zeta}$, а также допустимые в задаче (2.14) $\widehat{b}$ такие, что выполняются условия

$$(c) \quad \mathcal{L}_2(\widehat{b}, \widehat{\lambda}, \widehat{\zeta}) = \min_{b_{kj} \geq 0} \mathcal{L}_2(b, \widehat{\lambda}, \widehat{\zeta}),$$

$$(d) \quad \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{j \in A_k} \widehat{\lambda}_{kj}(\widehat{b}_{kj} - \delta^2) + \widehat{\zeta}(\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \sum_{j=1}^{r_k} \widehat{b}_{kj} - 1) = 0,$$

то $\widehat{b}$—решение этой задачи.

Положим

$$A_{k_0+1} = \emptyset.$$

Введем множество

$$\{q_k\},\ k = 1, \ldots, k_0 + 1,$$

где q_k—число элементов A_k. Положим

$$k^* = \min(k:\ A_k \neq J_k,\ 1 \leq k \leq k_0 + 1),$$

$$\widetilde{k} = \begin{cases} 0, & \delta^2 \geq (\gamma_1 r_1)^{-1}, \\ \max(k : \delta^2 \sum_{i=1}^{k} \gamma_i r_i < 1,\ 1 \leq k), & \delta^2 < (\gamma_1 r_1)^{-1}, \end{cases}$$

$$m = \begin{cases} \widetilde{k} + 1, & \widetilde{k} + 1 < k^*, \\ k^*, & \widetilde{k} + 1 \geq k^*. \end{cases}$$

Для задачи (2.14) имеет место следующая

Лемма 2. *Пусть $\delta > 0$—произвольное положительное число. Тогда*

1. *Если $m = 1$, то*

$$\widehat{\lambda}_{kj} = 0,\ 1 \leq k \leq k_0, j \in A_k,\ \widehat{\zeta} = \frac{\mu_1}{\gamma_1}$$

и последовательность $\{\widehat{b}_{kj}\}$, задаваемая соотношениями:

$$\widehat{b}_{kj} = 0,\ k \geq 2,\ j = 1, \ldots, r_k;$$

и если $k^* = 1$, то

$$\widehat{b}_{1j} = \begin{cases} (\gamma_1(r_1 - q_1))^{-1}, & k = 1, j \in J_1 \backslash A_1, \\ 0, & k = 1, j \in A_1; \end{cases}$$

если $k^* > 1$, то

$$\widehat{b}_{1j} = (\gamma_1 r_1)^{-1},\ j = 1, \ldots, r_1;$$

является решением задачи (2.14).

2. *Если $m > 1$, то*

$$\widehat{\lambda}_{kj} = \mu_k - \frac{\mu_m}{\gamma_m}\gamma_k\ ,\ k = 1, \ldots, m-1, j = 1, \ldots, r_k,$$
$$\widehat{\lambda}_{kj} = 0,\ m \le k \le k_0,\ j \in A_k,\ \widehat{\zeta} = \frac{\mu_m}{\gamma_m}\ \ ,$$

а последовательность $\{\widehat{b}_{kj}\}$, *задаваемая соотношениями*

$$\widehat{b}_{kj} = \begin{cases} \delta^2, & k = 1, \ldots, m-1, j = 1, \ldots, r_k, \\ 0, & k > m, j = 1, \ldots, r_k, \end{cases}$$

и

$$\widehat{b}_{mj} = \Big(1 - \delta^2 \sum_{k=1}^{m-1} \gamma_k r_k\Big)\big(\gamma_m r_m\big)^{-1}, j = 1, \ldots, r_m,$$

если $m = \widetilde{k} + 1$,

$$\widehat{b}_{mj} = \begin{cases} \Big(1 - \delta^2 \sum\limits_{k=1}^{m-1} \gamma_k r_k\Big)\big(\gamma_m (r_m - q_m)\big)^{-1}, & j \in J_m \backslash A_m, \\ 0, & j \in A_m, \end{cases}$$

если $m = k^*$,

является решением задачи (2.14).

Доказательство. Начнем доказательство леммы с пункта 1, когда $m = 1$. Сначала покажем допустимость последовательности $\widehat{b} = \{\widehat{b}_{kj}\},\ k \ge 1, j = 1, \ldots, r_k$. Все $\widehat{b}_{kj} \ge 0$, что следует из их определения. Если $k^* > 1$, то $\widetilde{k} = 0$ и элементы последовательности $\widehat{b}$ равны 0 при $k \ge 2$, а $\widehat{b}_{1j} = \big(\gamma_1 r_1\big)^{-1} \le \delta^2,\ j = 1, \ldots, r_1$, и последовательность $\widehat{b}$ допустима. Если же $k^* = 1$, то $r_1 - q_1 \ne 0$, а на $b_{1j},\ j \in J_1 \backslash A_1$, условия $b_{kj} \le \delta^2$ не накладываются. Следовательно, и в этом случае последовательность $\widehat{b}$ допустима. Осталось проверить выполнение условий (c) и (d). Подставив в функцию Лагранжа $\widehat{\lambda}$ и $\widehat{\zeta}$, получаем, что

$$\mathcal{L}_2(b, \widehat{\lambda}, \widehat{\zeta}) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{r_k}\big(-\mu_k + \frac{\mu_1}{\gamma_1}\gamma_k\big) b_{kj} \ge 0$$

для любых $b_{kj} \ge 0$, так как $\mu_1 > \mu_k,\ \gamma_1 < \gamma_k$ для всех $k > 1$. С другой стороны, $\mathcal{L}_2(\widehat{b}, \widehat{\lambda}, \widehat{\zeta}) = 0$, следовательно, условие (c) выполнено. Выполнение условия (d) легко проверяется непосредственной подстановкой.

Перейдем к случаю 2. Как и в случае 1, начнем доказательства допустимости последовательности $\widehat{b}$. Для этого изучим поведение $\widehat{b}_{mj}$, так как все остальные $\widehat{b}_{kj}$ равны 0 или δ^2.

Пусть $m = k^*$. В этом случае $J_m \backslash A_m \ne \emptyset,\ (r_m - q_m) \ne 0,\ \widehat{b}_{mj} \ge 0$, и при $j \in J_m \backslash A_m$ значения $\widehat{b}_{mj}$ можно, как и выше, задавать, не учитывая ограничений $b_{kj} \le \delta^2$.

Для случая $m = \widetilde{k} + 1$ покажем, что $\widehat{b}_{mj} \leq \delta^2$. Предположим противное: пусть выполнено неравенство

$$\frac{1}{\gamma_m r_m}\left(1 - \delta^2 \sum_{k=1}^{m-1} \gamma_k r_k\right) > \delta^2.$$

После несложных преобразований имеем

$$1 - \delta^2 \sum_{k=1}^{m-1} \gamma_k r_k - \delta^2 \gamma_m r_m = 1 - \delta^2 \sum_{k=1}^{m} \gamma_k r_k > 0,$$

а это противоречит определению $\widetilde{k}$, так как мы получили, что

$$\delta \sum_{k=1}^{\widetilde{k}+1} \gamma_k r_k < 1.$$

Теперь перейдем к доказательству выполнения условий (c) и (d). Подставим в функцию Лагранжа $\widehat{\lambda}$ и $\widehat{\zeta}$:

$$\mathcal{L}_2(b, \widehat{\lambda}, \widehat{\zeta}) = \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{r_k} \big(-\mu_k + \frac{\mu_m}{\gamma_m}\gamma_k + \mu_k - \frac{\mu_m}{\gamma_m}\gamma_k\big) b_{kj} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{r_m} (-\mu_m + \frac{\mu_m}{\gamma_m}\gamma_m) b_{kj} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{r_k} (-\mu_k + \frac{\mu_m}{\gamma_m}\gamma_k) b_{kj}.$$

Две первые суммы в полученном выражении равны нулю всегда, скобка $(-\mu_k + \dfrac{\mu_m}{\gamma_m}\gamma_k)$ в третьей сумме неотрицательна, так как $\mu_k < \mu_m$, $\gamma_k > \gamma_m$ для $k > m$. Следовательно, $\mathcal{L}_2(b, \widehat{\lambda}, \widehat{\zeta}) \geq 0$ для всех неотрицательных b_{kj}. Несложно проверить с помощью непосредственной подстановки, что $\mathcal{L}_2(\widehat{b}, \widehat{\lambda}, \widehat{\zeta}) = 0$, то есть и в этом случае условие (c) выполнено. Проверка выполнения условия (d) также не представляет большого труда. Из всего выше сказанного следует, что построенная последовательность $\widehat{b}$ есть решение задачи (2.14). □

2.3. Общие сведения

В задачах, рассматриваемых в **главах** 3 и 4, восстановление решений уравнений Лапласа и Пуассона проводится на пространствах L_2. Ниже приводятся сведения, касающиеся обобщённых решений уравнений Лапласа и Пуассона, а также свойств этих решений (см., например, [**9**], [**10**], [**15**]).

2.3.1. Пространства $L_{2,\,loq}(Q), H^k_{loq}(Q), H^{\circ k}(Q)$ и $H^k(Q)$.

Пусть Q—ограниченная область в d-мерном пространстве, x—элемент Q, ∂Q—кусочно-гладкая $(d-1)$—мерная поверхность, ограничивающая Q, x'— элемент ∂Q. Множество интегрируемых в Q функций, квадрат модуля которых интегрируем по любой строго внутренней подобласти $Q'(\rho(Q,Q')>0)$, обозначим через $L_{2,\,loq}(Q)$. Ясно, что $L_{2,\,loq}(Q)$ есть линейное пространство, и $L_2(Q)\subset L_{2,\,loq}(Q)$.

Множество функций из $L_{2,\,loq}(Q)$, имеющих все обобщённые производные до порядка k, $k\in\mathbb{N}$ включительно, принадлежащих пространству $L_{2,\,loq}(Q)$, обозначим через $H^k_{loq}(Q)$. Через $H^k(Q)$ обозначим подмножество $H^k_{loq}(Q)$, элементы которого вместе со всеми обобщёнными производными до порядка k включительно принадлежат $L_2(Q)$. Ясно, что $H^k_{loq}(Q)$ и $H^k(Q)$ являются линейными пространствами и $H^k(Q)\subset H^k_{loq}(Q)$. Пространство $H^k(Q)$, кроме того, представляет из себя гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f,g)_{H^k(Q)}=\sum_{|\alpha|\le k}\int_Q D^\alpha f D^\alpha \overline{g}dx$$

и нормой

$$\|f\|_{H^k(Q)}=\sqrt{\sum_{|\alpha|\le k}\int_Q |D^\alpha f|^2dx}.$$

Подмножество $\dot{C}^k_{\partial Q}(\overline{Q})$ функций из $\dot{C}^k(\overline{Q})$, обращающихся в ноль в пересечении Q с некоторой окрестностью ∂Q, является линейным многообразием в $H^k(Q)$. Замыкание $\dot{C}^k_{\partial Q}(\overline{Q})$ в норме $H^k(Q)$ является подпространством пространства $H^k(Q)$. Обозначим его через $H^{\circ k}(Q)$.

2.3.2. Классические и обобщённые решения задачи Дирихле.

Рассмотрим в d-мерной области Q $(d\ge 2)$ общее уравнение Пуассона

$$\mathfrak{L}u\equiv-(\operatorname{div}(k(x)\nabla u(x))-a(x)u(x))=f(x), \tag{2.15}$$

где $k(x)\in C^1(Q)$, $k(x)\ge K>0$, $a(x)\in C(\overline{Q})$. Функция $u(x)\in C^2(Q)\cap C(\overline{Q})$ называется классическим решением первой краевой задачи (задачи Дирихле) для (2.15), если $u(x)$ удовлетворяет в Q уравнению (2.15), а на границе области ∂Q—граничному условию

$$u\,|_{\partial Q}=\varphi(x'),\ x'\in\partial Q. \tag{2.16}$$

Пусть $u(x)$—классическое решение задачи (2.15)—(2.16) в Q. Умножим обе части уравнения (2.15) на некоторую функцию $\overline{v}(x)\in$

$\dot{C}^1(Q)$, где $\dot{C}^1(Q)$— множество финитных функций в $C^1(Q)$. Интегрируя теперь равенство по Q и используя формулу Гаусса-Остроградского, получим

$$\int_Q (k\nabla u \nabla \overline{v} + au\overline{v})dx = \int_Q f\overline{v}dx. \tag{2.17}$$

Если предположить, что $u_{x_i} \in L_2(Q), i = 1, \ldots, d$, то есть $u(x) \in H^1(Q)$, и $f(x) \in L_2(Q)$, то (2.17) будет выполняться не только для всех $v(x) \in \dot{C}^1(Q)$, но и для всех $v(x) \in H^{\circ 1}Q$. Следовательно, если $f(x) \in L_2(Q)$, то классическое решение задачи Дирихле $u(x) \in H^1(Q)$ удовлетворяет (2.17) при всех $v(x) \in H^{\circ 1}(Q)$.

Функция $u(x) \in H^1(Q)$ называется обобщённым решением (из класса $H^1(Q)$) задачи Дирихле при $f(x) \in L_2(Q)$, если она удовлетворяет интегральному равенству (2.17) при всех $v(x) \in H^{\circ 1}(Q)$, а также граничному условию (2.16). В граничном условии равенство понимается как равенство элементов из $L_2(\partial Q)$, где $u|_{\partial Q}$—след функции $u(x)$ из $L_2(Q)$ на ∂Q.

Условия существования и единственности обобщённого решения задачи Дирихле с нулевым граничным условием даёт следующая теорема:

Теорема 4. *Если $a(x) \geq 0$ в Q, то для любой $f(x) \in L_2(Q)$ существует единственное обобщённое решение $u(x) \in H^{\circ 1}(Q)$ задачи* (2.15),(2.16) *при $u|_{\partial Q} \equiv 0$.*

2.3.3. Собственные функции и собственные значения оператора $\mathfrak{L}$.

Функция $u(x)$, не равная тождественно нулю, называется классической собственной функцией первой краевой задачи для оператора

$$\mathfrak{L} \equiv -(\operatorname{div}(k(x)\nabla) - a(x)),$$

если существует число λ такое, что $u(x)$ является классическим решением задачи

$$-(\operatorname{div}(k(x)\nabla u(x)) - a(x)u(x)) = \lambda u(x), \quad u|_{\partial Q} = 0. \tag{2.18}$$

Число λ называют собственным значением, соответствующим $u(x)$. Так как $cu(x)$— тоже собственная функция, то можно считать, что $\| u \|_{L_2(Q)} = 1$.

2.3.4. Обобщённые собственные функции.

Пусть λ—собственное значение, $u(x)$—соответствующая λ собственная функция первой краевой задачи для оператора $\mathfrak{L}$, и пусть $u(x) \in H^{\circ 1}(Q)$. Умножим (2.18) на $\overline{v}(x) \in H^{\circ 1}(Q)$ и проинтегрируем по Q :

$$\int_Q (k\nabla u \nabla \overline{v} + au\overline{v})dx = \lambda \int_Q u\overline{v}dx. \tag{2.19}$$

Это равенство выполнено при любых $v(x) \in H^{\circ 1}(Q)$.

Не равная нулю функция $u(x) \in H^{\circ 1}(Q)$ называется обобщённой собственной функцией (из $H^1(Q)$) первой краевой задачи для оператора $\mathfrak{L}$, если существует число λ такое, что $u(x)$ при всех $v(x) \in H^{\circ 1}(Q)$ удовлетворяет интегральному равенству (2.19). Число λ называют собственным значением, соответствующим u. Функцию $u(x)$ можно нормировать: $\| u(x) \|_{L_2(Q)} = 1$.

Показано, что у первой краевой задачи для оператора $\mathfrak{L}$ существует не более чем счетное множество собственных значений, оно не содержит конечных предельных точек, все собственные значения вещественны. Каждому собственному значению соответствует конечное число (равное кратности значения) взаимно ортогональных в $H^{\circ 1}(Q)(H^1(Q))$ собственных функций, собственные функции, соответствующие разным собственным значениям, также ортогональны в $H^{\circ 1}(Q)(H^1(Q))$.

Обобщённые собственные функции $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_s(x), \ldots$ образуют ортонормированный базис в $L_2(Q)$, то есть любая функция $f(x) \in L_2(Q)$ может быть разложена в ряд Фурье по этим функциям, сходящийся в $L_2(Q)$. При этом имеет место равенство Парсеваля-Стеклова

$$\|f\|^2_{L_2(Q)} = \sum_{s=1}^{\infty} |f_s|^2,$$

где $f_s = (f, u_s)$—коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Если $f(x) \in H^{\circ 1}(Q)$, то ряд по обобщённым собственным функциям сходится в $H^{\circ 1}(Q)$.

Если $a(x) \geq 0$, то имеет место следующая

Теорема 5. *Собственные значения λ_s первой краевой задачи для оператора $\mathfrak{L} \equiv -(\operatorname{div}(k(x)\nabla) - a(x))$ вещественны, $\lambda_s > 0$ для $s = 1, 2, \ldots$ и $\lambda_s \to \infty$ при $s \to \infty$.*

Обобщённые собственные функции этой задачи $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_s(x), \ldots$ образуют ортонормированный базис в $L_2(Q)$, то есть любая функция $f(x) \in L_2(Q)$ может быть разложена в ряд Фурье

$$\sum_{s=1}^{\infty} f_s u_s(x)$$

по этим функциям, сходящийся в $L_2(Q)$. Для функции $f(x) \in H^{\circ 1}(Q)$ ряд по обобщённым собственным функциям сходится в $H^{\circ 1}(Q)$.

2.3.5. Разрешимость первой краевой задачи(задачи Дирихле).

Приведём формулировки теорем о разрешимости задачи Дирихле в достаточно общих постановках:

Теорема 6. *При любой $f(x) \in L_2(Q)$ существует единственное обобщенное решение $u(x)$ первой краевой задачи для уравнения* (2.15) *при нулевых граничных условиях* (2.16) ($\varphi = 0$), *если нуль не является собственным значением соответствующей краевой задачи для оператора $\mathfrak{L}$.*

Для неоднородных граничных условий имеет место

Теорема 7. *Если $a(x) \geq 0$, а функция φ является граничным значением некоторой функции из $H^1(Q)$, то существует единственное обобщенное решение $u(x)$ задачи Дирихле* (2.15)—(2.16).

Достаточным условием того, что функция $\varphi(x) \in L_2(\partial Q)$ есть граничное значение (след) некоторой функции из $H^1(Q)$, является условие принадлежности ее $C^1(\partial Q)$. Если область Q—единичный круг в $\mathbb{R}^2$, то имеет место следующая теорема

Теорема 8. *Для того, чтобы функция $\varphi(\theta)$ из $L_2(0, 2\pi)$ была следом на окружности $\{|x| = 1\}$ некоторой функции из $H^1(|x| <$ 1), *небходимо и достаточно, чтобы сходился ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(a_k^2 + b_k^2),$$

где a_k и b_k—коэффициенты Фурье функции $\varphi(\theta)$.

2.3.6. Обобщённые решения задачи Дирихле с неоднородными краевыми условиями.

Из определения обобщённого решения вытекает естественное условие на граничную функцию φ. Нужно требовать, чтобы её можно было продолжить в область Q функцией из пространства $H^1(Q)$, если это требование не выполнено, то обобщённое решение задачи (2.15),(2.16) не может существовать. Если $\varphi \in C^1(\partial Q)$, то такое продолжение существует. Если же $\varphi \in L_2(\partial Q)$, то такое продолжение может не существовать.

Введем более широкое понятие решения—решения из пространства $H^1_{loq}(Q)$. Ниже будет определено, в каком смысле будет пониматься удовлетворение функцией из $H^1_{loq}(Q)$ граничному условию и в каком смысле функция из $H^1_{loq}(Q)$ является решением уравнения. Все функции далее считаются вещественнозначными.

Пусть для простоты область Q есть d-мерный единичный шар $Q = \{|x| < 1\}$, а $\partial Q = \{x' : |x'| = 1\}$ есть $(d-1)$-мерная единичная сфера. Будем говорить, что функция $u(x) \in H^1_{loq}(Q)$ удовлетворяет граничному условию

$$u\,|_{\partial Q} = \varphi \tag{2.20}$$

где $\varphi(x') \in L_2(\partial Q)$, в среднем, если

$$\lim_{r \to 1-0} \int_{\partial Q} (u(rx') - \varphi(x'))^2 dx' = 0. \tag{2.21}$$

Рассмотрим в шаре $Q = \{|x| < 1\}$ уравнение

$$-(\operatorname{div}(k(x)\nabla u(x)) - a(x)u(x)) = f(x), \tag{2.22}$$

где $k(x) \in C^1(Q)$, $\min_{x\in\overline{Q}} k(x) \geq K > 0$, $a(x) \in C(\overline{Q})$, $a(x) \geq 0$, $f(x) \in L_2(Q)$.

Функция $u(x) \in H^1_{loq}(Q)$ называется решением из $H^1_{loq}(Q)$ уравнения (2.22), если для любой финитной в Q функции $v(x)$ из $H^1(Q)$ имеет место равенство

$$\int_Q (k\nabla u\nabla v + auv)dx = \int_Q fvdx. \tag{2.23}$$

Функцию $u(x) \in H^1_{loq}(Q)$ будем называть решением из $H^1_{loq}(Q)$ задачи Дирихле (2.15)—(2.16), если она является решением из $H^1_{loq}(Q)$ уравнения (2.22) и удовлетворяет граничному условию (2.20) в среднем, т.е. в смысле равенства (2.21). Это определение естественным образом можно обобщить для случая произвольной области Q.

2.3.7. Разрешимость задачи Дирихле с граничной функцией из $L_2(\partial Q)$.

Обозначим через $\widetilde{H}(Q)$ множество всех функций $u(x)$ из $L_2(Q)$, имеющих в Q обобщённые производные первого порядка, для которых

$$\int_Q |\nabla u|^2(1-|x|^2)dx < \infty.$$

Множество $\widetilde{H}(Q)$ есть гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u,v)_{\widetilde{H}(Q)} = \int_Q [(\nabla u\nabla v)(1-|x|^2) + uv]dx$$

и с нормой

$$\|u\|_{\widetilde{H}(Q)} = \left(\int_Q [|\nabla u|^2(1-|x|^2) + u^2]dx\right)^{1/2}. \tag{2.24}$$

Очевидно, что $H^1(Q) \subset \widetilde{H}(Q) \subset L_2(Q)$. Кроме того, пространство $\widetilde{H}(Q)$ есть пополнение $H^1(Q)$ по норме (2.24). Пусть функции $a(x)$, $k(x)$ удовлетворяют ограничениям

$$\min_{x\in\overline{Q}} k(x) \geq K > 0, \ a(x) \geq 0.$$

В этом случае имеет место

Теорема 9. *Для любых $\varphi \in L_2(\partial Q)$ и $f \in L_2(Q)$ задача* (2.15),(2.16) *имеет единственное решение $u(x)$ из $H^1_{loq}(Q)$, и это решение принадлежит пространству $\widetilde{H}(Q)$.*

2.3.8. Сферические функции.

Во второй и третьей главах работы рассмотрены задачи оптимального восстановления, в которых используются сферические функции. Ниже приводится краткая информация об этих функциях и перечислены их основные свойства.

Рассмотрим d-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^d$ точек $x = (x_1, \dots, x_d)$, и выделим в нём однородные полиномы степени k, удовлетворяющие уравнению Лапласа, где k—любое неотрицательное целое число. Такие полиномы гармоничны в любой области. Подпространство всех гармонических полиномов степени k от $x \in \mathbb{R}^d$ имеет размерность

$$a_0 = 1, \quad a_k = \frac{(2k+d-2)(k+d-3)!}{(d-2)!k!}.$$

От декартовых координат $x_1, \dots, x_d$ перейдем к сферическим координатам $r, \theta_1, \dots, \theta_{d-1}$ по формулам

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\theta_1, \\ x_2 &= r\sin\theta_1\cos\theta_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{d-1} &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\dots\sin\theta_{d-2}\cos\theta_{d-1}, \\ x_d &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\dots\sin\theta_{d-2}\sin\theta_{d-1}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Сферические координаты меняются в пределах

$$0 \le r < \infty; \quad 0 \le \theta_m \le \pi, \ 1 \le m \le d-2; \quad 0 \le \theta_{d-1} \le 2\pi.$$

При $r = 1$ получаем точку единичной сферы, которая вполне определяется своими угловыми координатами $\theta_1, \dots, \theta_{d-1}$. Обратно, задание угловых координат вполне определяет точку на единичной сфере.

Пусть $P_{k,\,d}(x)$—однородный гармонический полином степени k от переменных $x_1, \dots, x_d$. Перейдём к сферической системе координат по формулам (2.25). Так как $P_k(x)$—однородный полином степени k, то после замены получим, что

$$P_k(x) = r^k X_{k,\,d}(x'), \tag{2.26}$$

где $x' = \dfrac{x}{|x|}$ —точка единичной сферы $\mathbb{S}^{d-1} = \{x' \in \mathbb{R}^d : \ |x'| = 1\}$ и $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_d^2}$.

Функция $X(x')$, определённая формулой (2.26), называется d-мерной сферической функцией порядка k. Множество всех сферических функций порядка k, обозначаемое в дальнейшем $\mathcal{H}_k$, представляет из себя сужение подпространства всех гармонических полиномов степени k от $x \in \mathbb{R}^d$ на единичную сферу. При этом $\dim \mathcal{H}_k = a_k$. Ниже перечислены основные свойства сферических функций.

1. Сферические функции суть полиномы от синусов и косинусов угловых координат.

2. $X_{0,\,d}(x') = const.$

3. Сферические функции различных порядков ортогональны на единичной сфере:

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} X_{k,\,d}(x') X_{k',\,d}(x') dx' = 0, \;\; k' \neq k'.$$

4. Если $k \neq 0$, то существует a_k линейно-независимых сферических функций данного порядка k. Обозначим эти функции через $Y_j^{(k)}(x'), \;\; j = 1, \ldots, a_k$.

5. При данном k функции $Y_j^{(k)}(x')$ можно ортогонализировать. Тогда система функций

$$\{Y_j^{(k)}(x')\}, \;\; k = 0, 1, \ldots, j = 1, \ldots, a_k \tag{2.27}$$

ортонормирована по единичной сфере $\mathbb{S}^{d-1}$:

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} Y_j^{(k)}(x') Y_i^{(l)}(x') dx = \begin{cases} 0, & (k \neq l) \vee (j \neq i), \\ 1, & (k = l) \wedge (j = i). \end{cases}$$

6. Система сферических функций (2.27) полна в $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Из этого следует, что любая функция, определённая почти всюду на единичной сфере $\mathbb{S}^{d-1}$ и на ней квадратично суммируемая, может быть разложена по сферическим функциям, и на сфере $\mathbb{S}^{d-1}$ этот ряд будет сходиться в среднем к данной функции. Разложение функции $f(x') \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ в ряд по сферическим функциям имеет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x'),$$

где

$$c_{kj} = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(x') Y_j^{(k)}(x') dx'$$

—коэффициенты Фурье функции $f(x')$.

7. Если $d = 2$, то существуют две ортогональные функции порядка $k > 0$. За такие функции можно взять $\cos k\theta$ и $\sin k\theta$, где θ—полярный угол в двумерной плоскости.

8. Функции

$$r^k Y_j^{(k)}(x') \, , \, \frac{Y_j^{(k)}(x')}{r^{d+k-2}} \; , \;\; k \geq 0$$

гармоничны: первая—в любой конечной области, вторая—в любой области, не содержащей начала координат.

9. Сферический лапласиан или оператор Бельтрами-Лапласа, определяется для функций, заданных на единичной сфере $\mathbb{S}^{d-1}$,

следующим образом

$$\Delta_S Y(x') = \Delta Y\left(\frac{x}{|x|}\right)\Big|_{x=x'}.$$

Собственные значения Λ оператора Δ_S, отвечающие условию

$$\Delta_S Y = -\Lambda Y,$$

задаются соотношениями

$$\Lambda_k = k(k+d-2),\ k = 0, 1, \ldots.$$

Собственными функциями оператора Бельтрами-Лапласа, соответствующими собственному значению Λ_k, являются сферические функции $Y_j^{(k)}(x'),\ j = 1, \ldots, a_k,\ x' \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Глава 3

Оптимальное восстановление решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа по неточным исходным данным

В этой главе рассматривается задача оптимального восстановления решения задачи Дирихле в d-мерном шаре на сфере радиуса r по неточно заданным следам решения на сферах радиусов R_1 и R_2, $R_1 < r < R_2$. Изучаются также задачи оптимального восстановления решения задачи Дирихле в d-мерном шаре и d-мерном шаровом слое по конечному набору коэффициентов Фурье граничных функций, заданных с погрешностью в среднеквадратичной и равномерной метриках; предполагается, что граничные функции принадлежат соболевскому классу $W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1})$.

Для каждой из рассматриваемых задач найдены значения погрешностей оптимального восстановления, а также построены оптимальные методы восстановления, имеющие линейную структуру.

3.1. Оптимальное восстановление решения задачи Дирихле на сфере радиуса r по неточно заданной информации на сферах радиусов R_1 и R_2, $R_1 < r < R_2$

Пусть

$$\mathbb{B}^d = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : |x|^2 = \sum_{j=1}^{d} x_j^2 < 1 \right\}$$

— единичный d-мерный шар,

$$\mathbb{S}^{d-1} = \left\{ x' = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : |x'| = 1 \right\}$$

-единичная $(d-1)$-мерная сфера, $d \geq 2$, при $d = 2$ сфера вырождается в $\mathbb{T}$ — отрезок $[-\pi, \pi]$ с идентифицированными концами.

Рассмотрим в шаре $\mathbb{B}^d$ задачу Дирихле

$$\begin{aligned} &\Delta u = 0, \\ &u_{\big|\mathbb{S}^{d-1}} = f(x'), \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $u(x) \in L_2(\mathbb{B}^d)$—искомая функция, $f(x') \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$.

Известно, что $L_2(\mathbb{S}^{d-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k$, где $\mathcal{H}_k$ — множество сферических гармоник порядка k, $\dim \mathcal{H}_0 = a_0 = 1$,

$$\dim \mathcal{H}_k = a_k = (2k+d-2)\frac{(k+d-3)!}{(d-2)!\,k!}, \quad k = 1, 2, \dots \ .$$

Выберем в H_k ортонормированный базис $\{Y_j^{(k)}(x')\}_{j=1}^{a_k}, k = 0, 1, \dots$. Если функция $f(x')$ задана своим рядом Фурье

$$f(x') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x'),$$

то решение задачи (3.1) можно записать в виде

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x'),$$

где $x = rx'$, $0 \le r \le 1$, $x' \in \mathbb{S}^{d-1}$. Будем считать, что известны две функции $y_1(x'), y_2(x') \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, такие, что

$$\|u(R_1x') - y_1(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \le \delta_1, \quad 0 < R_1 < R_2 \le 1,$$
$$\|u(R_2x') - y_2(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \le \delta_1, \quad 0 < R_1 < R_2 \le 1.$$

Требуется по информации о функциях $y_1(x')$ и $y_2(x')$ наилучшим образом восстановить решение $u(x)$ задачи (3.1) на сфере радиуса r, где $R_1 < r < R_2$. В качестве методов восстановления будем рассматривать всевозможные отображения $\varphi\colon L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \times L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \to L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Погрешностью данного метода φ назовем величину

$$e_r(R_1, R_2, \delta_1, \delta_2, \varphi) = \sup_{\substack{f(x'),\ y_1(x'),\ y_2(x') \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \\ \|u(R_i x') - y_i(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \le \delta_j,\ j=1,2}} \|u(rx') - \varphi(y_1, y_2)(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E_r(R_1, R_2, \delta_1, \delta_2) = \inf_{\varphi\colon L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \times L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \to L_2(\mathbb{S}^{d-1})} e_r(R_1, R_2, \delta_1, \delta_2, \varphi),$$

а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным.

Установим связь между рассматриваемой задачей и **теоремой** 1. Пространство X здесь совпадает с $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, $Z = L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, линейный оператор T_r, подлежащий восстановлению, действует из $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ в пространство $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, является следом решения на сфере радиуса r, и определён равенством

$$T_r f(x') = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x').$$

Имеются два линейных оператора T_{R_1} и T_{R_2}, приближённые значения которых задают информацию. Пространства Y_1 и Y_2 совпадают с $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Пусть $\widetilde{Y}_1, \widetilde{Y}_2$—подмножества $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, содержащие все функции $f(x') \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ вида

$$f(x') = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x'),$$

где $n = 0, 1, \dots$. Очевидно, что $\widetilde{Y}_1$ и $\widetilde{Y}_2$ являются всюду плотными подмножествами $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$.

Для данной задачи восстановления имеет место

Теорема 10. *Пусть* $0 < R_1 < r < R_2 < 1$, $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$. *Положим*

$$(3.2)\qquad \begin{gathered} \widehat{\lambda}_1 = \begin{cases} \left(\dfrac{r}{R_1}\right)^{2(m-1)} \dfrac{R_2^2 - r^2}{R_2^2 - R_1^2}, & \delta_1 < \delta_2, \\ 0, & \delta_1 \geq \delta_2, \end{cases} \\ \widehat{\lambda}_2 = \begin{cases} \left(\dfrac{r}{R_2}\right)^{2(m-1)} \dfrac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}, & \delta_1 < \delta_2, \\ 1, & \delta_1 \geq \delta_2, \end{cases} \end{gathered}$$

где m—натуральное число, удовлетворяющее неравенству

$$\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^m \leq \frac{\delta_1}{\delta_2} < \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{m-1}.$$

Тогда

$$E_r(R_1, R_2, \delta_1, \delta_2) = \sqrt{\widehat{\lambda}_1 \delta_1^2 + \widehat{\lambda}_2 \delta_2^2}\,,$$

а метод

$$\varphi(y_1, y_2)(x') = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \sum_{j=0}^{a_k} \frac{\widehat{\lambda}_1 R_1^k y_{kj}^{(1)} + \widehat{\lambda}_2 R_2^k y_{kj}^{(2)}}{\widehat{\lambda}_1 R_1^{2k} + \widehat{\lambda}_2 R_2^{2k}} Y_j^{(k)}(x'),$$

где

$$y_{kj}^{(i)} = \int_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} y_i(x') Y_j^{(k)}(x')\, dx', \quad i = 1, 2,$$

является оптимальным.

Доказательство. Рассмотрим экстремальную задачу

$$(3.3)\qquad \|u(rx')\|^2_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \to \max, \quad \|u(R_i x')\|^2_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta_i^2,\ i = 1, 2, \\ f(x') \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}),$$

где $u(x)$ — решение задачи (3.1). Если

$$(3.4)\qquad f(x') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x'),$$

то решение задачи (3.1) записывается в виде

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty} r^k \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x'), \tag{3.5}$$

где $r=|x|,\ x=rx',\ x'\in\mathbb{S}^{d-1}$. Используя равенство Парсеваля, сведем задачу (3.3) к следующему виду

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^{2k}\sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 \to \max,\quad \sum_{k=0}^{\infty} R_i^{2k}\sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 \le \delta_i^2,\ i=1,2. \tag{3.6}$$

Положим

$$u_k=\sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2.$$

Теперь задача (3.6) описывается следующими соотношениями:

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^{2k}u_k \to \max,\quad \sum_{k=0}^{\infty} R_i^{2k}u_k \le \delta_i^2,\ i=1,2, \tag{3.7}$$
$$u_k\ge 0,\ k=0,1,2,\dots\ .$$

Рассмотрим функцию Лагранжа для этой новой задачи

$$\mathcal{L}(u,\lambda_1,\lambda_2)=\sum_{k=0}^{\infty}(-r^{2k}+\lambda_1R_1^{2k}+\lambda_2R_2^{2k})u_k,$$

где $u=\{u_k\}_{k=0}^{\infty},\ \lambda_1,\ \lambda_2$—множители Лагранжа. Из **теоремы** 2 вытекает, что если найдутся такие $\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2\ge 0$, что для допустимой в задаче (3.7) последовательности $\widehat{u}=\{\widehat{u}_k\}_{k=0}^{\infty}$ выполнены условия

$$(a)\quad \min_{u_k\ge 0}\mathcal{L}(u,\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2)=\mathcal{L}(\widehat{u},\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2),$$
$$(b)\quad \sum_{i=1}^{2}\widehat{\lambda}_i\left(\sum_{k=0}^{\infty}R_i^{2k}\widehat{u}_k-\delta_i^2\right)=0,$$

то $\widehat{u}$ — решение задачи (3.7), а ее значение равно $\widehat{\lambda}_1\delta_1^2+\widehat{\lambda}_2\delta_2^2$. Запишем функцию Лагранжа в виде

$$\mathcal{L}(u,\lambda_1,\lambda_2)=\sum_{k=0}^{\infty} r^{2k}g(k)u_k,$$

где

$$g(t)=-1+\lambda_1\left(\frac{R_1}{r}\right)^{2t}+\lambda_2\left(\frac{R_2}{r}\right)^{2t}.$$

Пусть $\delta_1<\delta_2$ и $m\in\mathbb{N}$ таково, что

$$\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{m}\le\frac{\delta_1}{\delta_2}<\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{m-1}.$$

Нетрудно проверить, что для $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$, определенных равенствами (3.2), функция $g(t)$ при $t = m-1, m$ равна нулю. Так как функция $g(t)$ является выпуклой ($g''(t) > 0$ при $\lambda_1 = \widehat{\lambda}_1, \lambda_2 = \widehat{\lambda}_2$ $\forall t$), то $g(k) \geq 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, при всех $u_k \geq 0$, $k = 0, 1, \ldots$ выполнено неравенство

$$\mathcal{L}(u, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) \geq 0.$$

Положим

$$\widehat{u}_k = 0, \ k \neq m-1, m,$$
$$\widehat{u}_{m-1} = R_1^2 R_2^2 \frac{\delta_1^2 R_1^{-2m} - \delta_2^2 R_2^{-2m}}{R_2^2 - R_1^2},$$
$$\widehat{u}_m = \frac{\delta_2^2 R_2^{-2(m-1)} - \delta_1^2 R_1^{-2(m-1)}}{R_2^2 - R_1^2} .$$

Последовательность $\widehat{u}$ допустима в задаче (3.7). Действительно, $\widehat{u}_{m-1}$ и $\widehat{u}_m$ неотрицательны, что следует из их определения и определения числа m, и выполнено условие

$$\sum_{k=0}^{\infty} R_i^{2k} \widehat{u}_k \leq \delta_i^2, \ i = 1, 2,$$

что легко проверяется непосредственной подстановкой. Равенство

$$\mathcal{L}(\widehat{u}, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = 0,$$

также выполнено, и, следовательно, выполнено условие (a). Непосредственной проверкой можно убедиться, что условия (b) также выполняются. Тем самым доказано, что $\widehat{u}$ — решение задачи (3.7).

Если $\delta_1 \geq \delta_2$, то положим

$$\widehat{\lambda}_1 = 0, \quad \widehat{\lambda}_2 = 1, \quad \widehat{u}_0 = \delta^2, \quad \widehat{u}_k = 0, \ k = 1, 2, \ldots \ .$$

Нетрудно проверить, что определенные так $\widehat{u}$, $\widehat{\lambda}_1$, $\widehat{\lambda}_2$ удовлетворяют условиям $(a), (b)$ и $\widehat{u}$ — допустимая в (3.7) последовательность, а, следовательно, $\widehat{u}$ — решение задачи (3.7). Из **теоремы** 2 в этом случае также следует, что построенная последовательность $\widehat{u}$ будет решением и задачи

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^{2k} u_k \to \max, \quad \sum_{i=1}^{2} \widehat{\lambda}_i \sum_{k=0}^{\infty} R_i^{2k} u_k \leq \sum_{i=1}^{2} \widehat{\lambda}_i \delta_i^2, \ u_k \geq 0, \tag{3.8}$$

и значения задач (3.7) и (3.8) совпадают. Таким образом, мы можем применить **теорему** 1.

Согласно **теореме** 1 рассмотрим новую экстремальную задачу

$$\begin{aligned} \widehat{\lambda}_1 \| u(R_1 x') - \widetilde{y}_1(x') \|^2_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \\ + \widehat{\lambda}_2 \| u(R_2 x') - \widetilde{y}_2(x') \|^2_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \to \min, \quad f(x') \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}), \end{aligned} \tag{3.9}$$

(где по-прежнему $u(rx')$ — решение задачи (3.1)), $\widetilde{y}_1 \in \widetilde{Y}_1$, $\widetilde{y}_2 \in \widetilde{Y}_2$ и

$$\widetilde{y}_i = \sum_{k=0}^{n_i} \sum_{j=1}^{a_k} y_{kj}^{(i)} Y_j^{(k)}(x'), \ i = 1, 2,$$

n_1 и n_2—некоторые натуральные числа. Перейдем к решению задачи (3.9). Она может быть записана в виде

$$\widehat{\lambda}_1 \Bigg(\sum_{k=0}^{n_1} \sum_{j=1}^{a_k} (R_1^k c_{kj} - y_{kj}^{(1)})^2 + \sum_{k=n_1+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} R_1^{2k} c_{kj}^2 \Bigg) + \\ + \widehat{\lambda}_2 \Bigg(\sum_{k=0}^{n_2} \sum_{j=1}^{a_k} (R_2^k c_{kj} - y_{kj}^{(2)})^2 + \sum_{k=n_2+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} R_2^{2k} c_{kj}^2 \Bigg) \to \min, \\ f(x') \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}),$$

где c_{kj} — коэффициенты Фурье функции $f(x')$ (см. (3.4)). Дифференцируя выражение по c_{kj} и приравнивая производные к нулю, получим систему для нахождения коэффициентов $\widehat{c}_{kj}$. Решая эту систему, имеем

(3.10)

$$\widehat{c}_{kj} = \frac{\widehat{\lambda}_1 R_1^k y_{kj}^{(1)} + \widehat{\lambda}_2 R_2^k y_{kj}^{(2)}}{\widehat{\lambda}_1 R_1^{2k} + \widehat{\lambda}_2 R_2^{2k}}, \ 1 \le k \le \max(n_1, n_2), \ j = 1, \ldots, a_k, \\ \widehat{c}_{kj} = 0, \ k > \max(n_1, n_2), j = 1, \ldots, a_k.$$

Из выпуклости минимизируемой функции вытекает, что найденное решение действительно реализует минимум. Следовательно, решением задачи (3.9) является функция

$$f_{\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \widehat{c}_{kj} Y_j^{(k)}(x'),$$

и задача (3.9) имеет решение для любого $\widetilde{y} = (\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2) \in \widetilde{Y}_1 \times \widetilde{Y}_2$. Применив оператор T_r к $f_{\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2}$, получаем

$$T_r f_{y_1, y_2} = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \sum_{j=1}^{a_k} \frac{\widehat{\lambda}_1 R_1^k y_{kj}^{(1)} + \widehat{\lambda}_2 R_2^k y_{kj}^{(2)}}{\widehat{\lambda}_1 R_1^{2k} + \widehat{\lambda}_2 R_2^{2k}} Y_j^{(k)}(x').$$

Следуя **теореме** 1, рассмотрим линейный оператор $\mathcal{A} : Y_1 \times Y_2 \to Z$, действующий по формуле

$$\mathcal{A}(y_1, y_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k}{\widehat{\lambda}_1 R_1^{2k} + \widehat{\lambda}_2 R_2^{2k}} \sum_{j=1}^{a_k} \big(\widehat{\lambda}_1 R_1^k y_{kj}^{(1)} + \widehat{\lambda}_2 R_2^k y_{kj}^{(2)} \big) Y_j^{(k)}(x').$$

Нетрудно убедиться в том, что для любого $\widetilde{y} = (\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2) \in \widetilde{Y}_1 \times \widetilde{Y}_2$ выполнено равенство

$$\mathcal{A}(\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2) = T_r f_{\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2}.$$

Пусть $y = (y_1, y_2) \in Y = L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \times L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ и норма в пространстве Y определяется как

$$\|y\|_Y = \sqrt{\|y_1\|^2_{Y_1} + \|y_2\|^2_{Y_2}} = \sqrt{\|y_1\|^2_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} + \|y_2\|^2_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}}\,.$$

Покажем, что $\mathcal{A}$—непрерывный оператор. Для этого достаточно показать, что $\|\mathcal{A}\|$ конечна, где

$$\|\mathcal{A}\| = \sup_{\substack{y\in Y\\ \|y\|_Y \le 1,}} \|\mathcal{A}(y)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}.$$

Так как $y_i \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, то

$$\|y_i\|^2_{Y_i} = \|y_i\|^2_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k}\bigl(y^{(i)}_{kj}\bigr)^2.$$

Перейдем к доказательству непрерывности оператора $\mathcal{A}$.

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}\|^2 = \sup_{\substack{y\in Y\\ \|y\|_Y \le 1,}} &\|\mathcal{A}(y)\|^2_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{2k}}{\bigl(\widehat{\lambda}_1 R_1^{2k} + \widehat{\lambda}_2 R_2^{2k}\bigr)^2}\sum_{j=1}^{a_k}\bigl(\widehat{\lambda}_1 R_1^k y^{(1)}_{kj} + \widehat{\lambda}_2 R_2^k y^{(2)}_{kj}\bigr)^2 \le \\ &\le 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{2k}}{\bigl(\widehat{\lambda}_1 R_1^{2k} + \widehat{\lambda}_2 R_2^{2k}\bigr)^2}\sum_{j=1}^{a_k}\bigl[\widehat{\lambda}_1^2 R_1^{2k}\bigl(y^{(1)}_{kj}\bigr)^2 + \widehat{\lambda}_2^2 R_2^{2k}\bigl(y^{(2)}_{kj}\bigr)^2\bigr].\end{aligned}$$

Учитывая, что $R_1 < r < R_2 \le 1$ и $\|y\|_Y \le 1$, для второго слагаемого имеем

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{2k}}{\bigl(\widehat{\lambda}_1 R_1^{2k} + \widehat{\lambda}_2 R_2^{2k}\bigr)^2}\sum_{j=1}^{a_k}\widehat{\lambda}_2^2 R_2^{2k}\bigl(y^{(2)}_{kj}\bigr)^2 = \\ &\qquad = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k}\frac{r^{2k}\bigl(y^{(2)}_{kj}\bigr)^2}{\left(1 + \dfrac{\widehat{\lambda}_1 R_1^{2k}}{\widehat{\lambda}_2 R_2^{2k}}\right)^2} \le \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k}\bigl(y^{(2)}_{kj}\bigr)^2 \le 1.\end{aligned}$$

Если $\widehat{\lambda}_1 \ne 0$, то аналогично рассматривается первое слагаемое. Следовательно, $\|\mathcal{A}\| \le \sqrt{2}$ и оператор $\mathcal{A}$ непрерывен. Из **теорем** 1 и 2 в этом случае вытекает, что метод

$$\varphi(y_1, y_2)(x') = \mathcal{A}(y_1, y_2) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \sum_{j=1}^{a_k}\frac{\widehat{\lambda}_1 R_1^k y^{(1)}_{kj} + \widehat{\lambda}_2 R_2^k y^{(2)}_{kj}}{\widehat{\lambda}_1 R_1^{2k} + \widehat{\lambda}_2 R_2^{2k}} Y_j^{(k)}(x')$$

является оптимальным, а значение погрешности оптимального восстановления может быть вычислено по формуле

$$E_r(R_1, R_2, \delta_1, \delta_2) = \sqrt{\widehat{\lambda}_1 \delta_1^2 + \widehat{\lambda}_2 \delta_2^2}\,.$$

Заметим, что если $\delta_1 \geq \delta_2$, то

$$f_{y_1,\,y_2}(x') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \frac{y_{kj}^{(2)}}{R_2^k} Y_j^{(k)}(x'),$$

$$E_r(R_1, R_2, \delta_1, \delta_2) = \delta_2,$$

а в качестве оптимального можно взять метод

$$\varphi(y_1,\ y_2)(x') = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \sum_{j=1}^{a_k} \frac{y_{kj}^{(2)}}{R_2^k} Y_j^{(k)}(x').$$

□

3.2. Оптимальное восстановление решения задачи Дирихле в d-мерном единичном шаре $(d > 2)$.

Рассмотрим задачу Дирихле

$$\Delta u = 0, \qquad u\Big|_{\mathbb{S}^{d-1}} = f(x'), \tag{3.11}$$

в единичном шаре $\mathbb{B}^d$, где

$$\mathbb{B}^d = \left\{ x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : |x|^2 = \sum_{j=1}^{d} x_j^2 < 1 \right\}$$

и

$$\mathbb{S}^{d-1} = \left\{ \, x' = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : |x'| = 1 \, \right\}$$

—единичная $(d-1)$-мерная сфера.

Пусть $\{Y_j^{(k)}(x')\}$, $k = 0, 1, \dots,$ $j = 1, \dots, a_k$—ортонормированный базис пространства $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, состоящий из сферических гармоник, $f(x') \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ и

$$f(x') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x'). \tag{3.12}$$

Тогда решение задачи (3.11) можно записать в виде

$$u(x) = u(rx') = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x'). \tag{3.13}$$

где $r = |x|,\ x = rx',\ x' \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Рассмотрим ситуацию, когда известен конечный набор неточно заданных коэффициентов Фурье граничной функции $f(x')$. Пусть фиксировано $\delta > 0$ и имеются два числа: $n_0 \in \mathbb{N}$ и целое число $0 \leq J_{n_0} < a_{n_0}$. Положим

$$N = \sum_{j=0}^{n_0-1} a_j + J_{n_0}.$$

Предполагается, что для любой функции $f(x') \in \mathbb{S}^{d-1}$ известен некоторый вектор $\widetilde{f}^N$:

$$\widetilde{f}^N = \{y_{kj}\},\ k = 0, 1, \dots, n_0 - 1,\ j = 1, \dots, a_k, \\ k = n_0,\ j = 1, \dots, J_{n_0},$$

такой, что

$$\|\widetilde{f}^N - f^N\|_{l_p^N} \le \delta,$$

где

$$f^N = \{c_{kj}\},\ k = 0, 1, \dots, n_0 - 1,\ j = 1, \dots, a_k, \\ k = n_0,\ j = 1, \dots, J_{n_0},$$

c_{kj} — коэффициенты Фурье функции $f(x')$ и для $a = (a_1, \dots, a_N)$

$$\|a\|_{l_p^N} = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{N} |a_k|^p \right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \max\limits_{k=1,\dots,N} |a_k|, & p = \infty. \end{cases} \tag{3.14}$$

Наша задача заключается в том, чтобы по информации о векторе $\widetilde{f}^N$ восстановить решение задачи (3.11). Будем предполагать, что функция $f(x')$ принадлежит обобщенному соболевскому классу

$$W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}) = \left\{ f(x') \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}) : \|(-\Delta_S)^{\beta/2} f(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \le 1 \right\},$$

где для произвольного $\beta > 0$ и $g(x') \in \mathbb{S}^{d-1}$,

$$g(x') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} g_{kj} Y_j^{(k)}(x'),$$

оператор $(-\Delta_S)^{\beta/2}$ определяется равенством

$$(-\Delta_S)^{\beta/2} g(x') = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^{\beta/2} \sum_{j=1}^{a_k} g_{kj} Y_j^{(k)}(x'),$$

$\Lambda_k = k(k + d - 2)$ — собственные числа оператора Бельтрами-Лапласа $(-\Delta_S)$. В качестве методов восстановления рассмотрим всевозможные операторы $\varphi\colon l_p^N \to L_2(\mathbb{B}^d)$. Назовем погрешностью восстановления метода φ величину

$$e_{N,p}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta, \varphi) \\ = \sup_{f(x') \in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1})} \sup_{\substack{\widetilde{f}^N \in l_p^N \\ \|f^N - \widetilde{f}^N\|_{l_p^N} \le \delta}} \|u(x) - \varphi(\widetilde{f}^N)(x)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E_{N,p}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta) = \inf_{\varphi\colon l_p^N \to L_2(\mathbb{B}^d)} e_{N,p}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta, \varphi),$$

а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным.

Установим соответствие между данной задачей и **теоремой** 3. Определим пространство X :

$$X = \{f(x') \in L(\mathbb{S}^{d-1}) : \ \|(-\Delta_S)^{\beta/2} f\|_{L(\mathbb{S}^{d-1})} < \infty\}.$$

Пространство Z совпадает с $L_2(\mathbb{B}^d)$, линейный оператор T, подлежащий восстановлению, действует из X в пространство $L_2(\mathbb{B}^d)$ и определён равенством

$$Tf = u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} r^k \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x').$$

Имеются два линейных оператора I_1 и I_2. Первый из них определяет множество $W = W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1})$,

$$I_1 = (-\Delta_S)^{\beta/2} : X \to L_2(\mathbb{S}^{d-1}).$$

Второй оператор $I_2 : X \to l_p^N$ определен равенством

$$I_2 f = f^N,$$

где вектор f^N определён выше.

Рассмотрим сначала случай $p = 2$. Здесь имеет место

Теорема 11. *Пусть δ и β — произвольные положительные числа, $N = a_0 + \ldots + a_{n_0-1} + J_{n_0}$, $0 \le J_{n_0} < a_{n_0}$, $n_0 > 0$. Тогда*

$$E_{N,\,2}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta) = \sqrt{\frac{\delta^2}{d} + \frac{1}{\Lambda_{n_0}^\beta (2n_0 + d)}}\ ,$$

а метод

$$\varphi(\widetilde{f}^N)(x) = \sum_{k=0}^{n_0-1} r^k \left(1 + \frac{d}{2n_0 + d}\left(\frac{\Lambda_k}{\Lambda_{n_0}}\right)^\beta\right)^{-1} \sum_{j=1}^{a_k} y_{kj} Y_j^{(k)}(x')$$

является оптимальным.

Доказательство. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\|u(x)\|^2_{L_2(\mathbb{B}^d)} \to \max, \quad \|f^N\|^2_{l_2^N} \le \delta^2, \quad \|(-\Delta_S)^{\beta/2} f(x')\|^2_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \le 1, \tag{3.15}$$

где $u(x)$ — решение задачи (3.11). Используя равенство Парсеваля и учитывая, что

$$\|u(x)\|^2_{L_2(\mathbb{B}^d)} = \int_{\mathbb{B}^d} |u(x)|^2 dx = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 \int_0^1 r^{2k} r^{d-1} dr,$$

перепишем задачу (3.15) в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+d}\sum_{j=1}^{a_k}c_{kj}^2\to\max,\quad \sum_{k=0}^{n_0-1}\sum_{j=1}^{a_k}c_{kj}^2+\sum_{j=1}^{J_{n_0}}c_{n_0j}^2\le\delta^2,$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\Lambda_k^\beta\sum_{j=1}^{a_k}c_{kj}^2\le 1.$$

Введем обозначения

$$u_k=\sum_{j=1}^{a_k}c_{kj}^2,\ k=0,1,\dots,\quad u'_{n_0}=\sum_{j=1}^{J_{n_0}}c_{n_0j}^2.$$

В новых обозначениях получим

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u_k}{2k+d}\to\max,\quad \sum_{k=0}^{n_0-1}u_k+u'_{n_0}\le\delta^2, \tag{3.16}$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\Lambda_k^\beta u_k\le 1,\quad u_k\ge 0,\ k=0,1,\dots,\quad u_{n_0}\ge u'_{n_0}\ge 0.$$

Введем для задачи (3.16) функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(\{u_k\}_0^\infty,u'_{n_0},\mu_1,\mu_2)=\sum_{k=0}^{n_0-1}\left(-\frac{1}{2k+d}+\mu_1+\mu_2\Lambda_k^\beta\right)u_k+$$
$$+\mu_1u'_{n_0}+\sum_{k=n_0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2k+d}+\mu_2\Lambda_k^\beta\right)u_k,$$

где $\mu_1,\ \mu_2$—множители Лагранжа. Из **теоремы** 3 следует, что если найдутся неотрицательные $\widehat{\mu}_1,\widehat{\mu}_2$ и допустимые в (3.16) $\{\widehat{u}_k\}_0^\infty,\widehat{u}'_{n_0}$ такие, что

$$(a)\qquad \min_{u_k\ge 0,\,u_{n_0}\ge u'_{n_0}\ge 0}\mathcal{L}(\{u_k\}_0^\infty,u'_{n_0},\widehat{\mu}_1,\widehat{\mu}_2)=\mathcal{L}(\{\widehat{u}_k\}_0^\infty,\widehat{u}'_{n_0},\widehat{\mu}_1,\widehat{\mu}_2),$$

$$(b)\quad \widehat{\mu}_1\left(\sum_{k=0}^{n_0-1}\widehat{u}_k+\widehat{u}'_{n_0}-\delta^2\right)+\widehat{\mu}_2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\Lambda_k^\beta\widehat{u}_k-1\right)=0,$$

то $\{\widehat{u}_k\}_0^\infty,\widehat{u}_{n_0}$ — решение задачи (3.16). Если при этом для любого фиксированного вектора $\widetilde{f}^N\in l_2^N$ существует решение $\widehat{f}(x')$ экстремальной задачи

$$\widehat{\mu}_1\|f^N-\widetilde{f}^N\|_{l_2^N}^2+\widehat{\mu}_2\|(-\Delta_S)^{\beta/2}f\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2\to\min, \tag{3.17}$$
$$f(x')\in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}),$$

то метод, задаваемый формулой (3.13) при $f(x')=\widehat{f}(x')$, является оптимальным, а для погрешности оптимального восстановления имеет место равенство

$$E_{N,2}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}),\delta)=\sqrt{\widehat{\mu}_1\delta^2+\widehat{\mu}_2}. \tag{3.18}$$

Положим

$$\widehat{\mu}_1=\frac{1}{d},\quad \widehat{\mu}_2=\frac{1}{\Lambda_{n_0}^\beta(2n_0+d)},\quad \widehat{u}_0=\delta^2,\quad \widehat{u}_{n_0}=\frac{1}{\Lambda_{n_0}^\beta},\quad \widehat{u}'_{n_0}=0,$$
$$\widehat{u}_k=0,\ k\geq 1, k\neq n_0.$$

Нетрудно убедиться в том, что определенные так $\widehat{\mu}_1,\widehat{\mu}_2,\{\widehat{u}_k\}_0^\infty,\widehat{u}'_{n_0}$ удовлетворяют условию (b). Подставляя в функцию Лагранжа $\widehat{\mu}_1$ и $\widehat{\mu}_2$ и учитывая, что $\Lambda_0=0,\ \Lambda_{k+1}>\Lambda_k,\ k\geq 1$, получаем, что

$$\mathcal{L}(\{u_k\}_0^\infty,u'_{n_0},\widehat{\mu}_1,\widehat{\mu}_2)=\sum_{k=0}^{n_0-1}\left(-\frac{1}{2k+d}+\frac{1}{d}+\frac{\Lambda_k^\beta}{\Lambda_{n_0}^\beta(2n_0+d)}\right)u_k+$$
$$+\frac{u'_{n_0}}{d}+\sum_{k=n_0}^\infty\left(-\frac{1}{2k+d}+\frac{\Lambda_k^\beta}{\Lambda_{n_0}^\beta(2n_0+d)}\right)u_k\geq 0$$

для всех $\{u_k\}_0^\infty, u_k\geq 0$ и $u'_{n_0}\geq 0$, а $\mathcal{L}(\{\widehat{u}_k\}_0^\infty,\widehat{u}'_{n_0},\widehat{\mu}_1,\widehat{\mu}_2)=0$, то есть и условие (a) тоже выполнено.

Для построения оптимального метода решим экстремальную задачу (3.17), которая может быть представлена в виде

$$\widehat{\mu}_1\left(\sum_{k=0}^{n_0-1}\sum_{j=1}^{a_k}(c_{kj}-y_{kj})^2+\sum_{j=1}^{J_{n_0}}(c_{n_0j}-y_{n_0j})^2\right)+\widehat{\mu}_2\sum_{k=1}^\infty\Lambda_k^\beta\sum_{j=1}^\infty c_{kj}^2\to\min,$$
$$f(x')\in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}).$$

В силу выпуклости исследуемого выражения достаточные условия экстремума совпадают с необходимыми. Дифференцируя минимизируемое выражение по c_{kj} и приравнивая полученные производные нулю, получим систему уравнений для нахождения коэффициентов c_{kj} :

$$\widehat{\mu}_1(c_{kj}-y_{kj})+\widehat{\mu}_2\Lambda_k^\beta c_{kj}=0,$$

$$k=0,1,\dots,n_0-1,\ j=1,\dots,a_k, k=n_0,\ j=1,\dots,J_{n_0};$$

$$\widehat{c}_{kj}=0,\ k=n_0,\ j=J_{n_0+1},\dots,a_{n_0},\ k\geq n_0+1,\ j=1,\dots,a_k.$$

Решив эту систему, после подстановки значений $\widehat{\mu}_1$ и $\widehat{\mu}_2$ получаем, что

$$\widehat{c}_{kj}=\left(1+\frac{\Lambda_k^\beta}{\Lambda_{n_0}^\beta(2n_0+d)}\right)^{-1}y_{kj}$$

для $k=0,1,\dots,n_0-1,\ j=1,\dots,a_k,\ k=n_0,\ j=1,\dots,J_{n_0}$ и
$\widehat{c}_{kj}=0,$ когда $k=n_0,\ j=J_{n_0+1},\dots,a_{n_0},\ k\geq n_0+1,\ j=1,\dots,a_k.$

Следовательно, решением задачи (3.17) является функция

$$\widehat{f}(x') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \widehat{c}_{kj} Y_j^{(k)}(x').$$

Подставляя коэффициенты $\widehat{c}_{kj}$ в формулу (3.13), получаем, что метод

$$\varphi_1(\widetilde{f}^N)(x) = \sum_{k=0}^{n_0-1} r^k \left(1 + \frac{d}{2n_0+d}\left(\frac{\Lambda_k}{\Lambda_{n_0}}\right)^{\beta}\right)^{-1} \sum_{j=1}^{a_k} y_{kj} Y_j^{(k)}(x') +$$
$$+ r^{n_0} \frac{2n_0+d}{2(n_0+d)} \sum_{j=1}^{J_{n_0}} y_{n_0 j} Y_j^{(n_0)}(x')$$

является оптимальным. Подставляя в формулу (3.18) $\widehat{\mu}_1$ и $\widehat{\mu}_2$, получаем

$$E_{N,\,2}(W_2^{\beta}(\mathbb{S}^{d-1}), \delta) = \sqrt{\frac{\delta^2}{d} + \frac{1}{\Lambda_{n_0}^{\beta}(2n_0+d)}}\ .$$

Покажем, что другой метод

$$\varphi(\widetilde{f}^N)(x) = \sum_{k=0}^{n_0-1} r^k \left(1 + \frac{d}{2n_0+d}\left(\frac{\Lambda_k}{\Lambda_{n_0}}\right)^{\beta}\right)^{-1} \sum_{j=1}^{a_k} y_{kj} Y_j^{(k)}(x'),$$

использующий меньший объем информации, также является оптимальным. Положим

$$N_1 = \sum_{k=0}^{n_0-1} a_k.$$

Рассмотрим задачу восстановления с вектором $\widetilde{f}^{N_1}$, когда $J_{n_0} = 0$. По доказанному выше метод

$$\varphi(\widetilde{f}^{N_1})(x) = \sum_{k=0}^{n_0-1} r^k \left(1 + \frac{d}{2n_0+d}\left(\frac{\Lambda_k}{\Lambda_{n_0}}\right)^{\beta}\right)^{-1} \sum_{j=1}^{a_k} y_{kj} Y_j^{(k)}(x')$$

является оптимальным для этого случая и

$$E_{N_1,\,2}(W_2^{\beta}(\mathbb{S}^{d-1}), \delta) = \sqrt{\frac{\delta^2}{d} + \frac{1}{\Lambda_{n_0}^{\beta}(2n_0+d)}}.$$

Используя определение оптимального метода и погрешности оптимального восстановления, применяя метод φ к вектору $\widetilde{f}^N$, а также учитывая, что

$$\|f^{N_1} - \widetilde{f}^{N_1}\|_{l_2^{N_1}} \le \|f^N - \widetilde{f}^N\|_{l_2^N}$$

и

$$\varphi(\widetilde{f}^{N_1})(x) \equiv \varphi(\widetilde{f}^N)(x),$$

имеем

$$E_{N_1,\,2}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}),\delta) =$$
$$= \sup_{f\in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1})} \sup_{\substack{\widetilde{f}^{N_1}\in\, l_2^{N_1}\\ \|f^{N_1}-\widetilde{f}^{N_1}\|_{l_2^{N_1}}\le\delta}} \|u(x)-\varphi(\widetilde{f}^{N_1})(x)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}$$
$$\ge \sup_{f\in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1})} \sup_{\substack{\widetilde{f}^{N}\in\, l_2^{N}\\ \|f^{N}-\widetilde{f}^{N}\|_{l_2^{N}}\le\delta}} \|u(x)-\varphi(\widetilde{f}^{N})(x)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}$$
$$\ge \sup_{f\in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1})} \sup_{\substack{\widetilde{f}^{N}\in\, l_2^{N}:\\ \|f^{N}-\widetilde{f}^{N}\|_{l_2^{N}}\le\delta}} \|u(x)-\varphi_1(\widetilde{f}^{N})(x)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)} =$$
$$= E_{N,\,2}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}),\delta).$$

В силу равенства

$$E_{N_1,\,2}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}),\delta) = E_{N,\,2}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}),\delta),$$

получаем, что метод $\varphi(\widetilde{f}^N)(x)$ является оптимальным. □

Из доказанной теоремы следует, что можно построить оптимальный метод, не использующий коэффициенты $y_{n_0 j}$, $j = 1,\dots,J_{n_0}$, если $0 < J_{n_0} < a_{n_0}$ (то есть количество коэффициентов в последней группе меньше размерности H_{n_0}.)

Перейдем к случаю равномерной метрики ($p=\infty$). Положим

$$m_0 = \max\Big\{m\in\mathbb{N} : \delta^2\sum_{k=1}^{m-1} a_k\Lambda_k^\beta < 1\},$$

$$\widehat{m} = \begin{cases} m_0, & m_0\le n_0,\\ n_0, & m_0 > n_0.\end{cases}$$

Теорема 12. *Пусть δ и β — произвольные положительные числа. Тогда*

$$(3.19)\quad E_{N,\,\infty}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}),\delta)$$
$$= \sqrt{\delta^2\sum_{k=0}^{\widehat{m}-1}\left(\frac{1}{2k+d}-\left(\frac{\Lambda_k}{\Lambda_{\widehat{m}}}\right)^\beta\frac{1}{2\widehat{m}+d}\right)a_k+\frac{1}{\Lambda_{\widehat{m}}^\beta(2\widehat{m}+d)}}\ ,$$

а метод

$$(3.20)\qquad \varphi(\widetilde{f}^N)(x) = \sum_{k=0}^{\widehat{m}-1} r^k\sum_{j=1}^{a_k}\left(1-\frac{2k+d}{2\widehat{m}+d}\left(\frac{\Lambda_k}{\Lambda_{\widehat{m}}}\right)^\beta\right)y_{kj}Y_j^{(k)}(x')$$

является оптимальным.

Доказательство. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\|u\|^2_{L_2(\mathbb{B}^d)} \to \max, \quad \|f^N\|^2_{l^N_\infty} \le \delta^2, \quad \|(-\Delta_S)^{\beta/2} f\|^2_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \le 1. \tag{3.21}$$

Используя равенство Парсеваля, перепишем ее в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+d} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 \to \max, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^\beta \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 \le 1,$$

$$c_{kj}^2 \le \delta^2,\ k = 0, 1, \ldots, n_0 - 1, j = 1, \ldots, a_k,\ k = n_0, j = 1, \ldots, J_{n_0}.$$

Введем обозначения $c_{kj}^2 = v_{kj}$. Задача (3.21) в этих переменных имеет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+d} \sum_{j=1}^{a_k} v_{kj} \to \max, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^\beta \sum_{j=1}^{a_k} v_{kj} \le 1, \tag{3.22}$$
$$v_{kj} \ge 0, \quad k = 0, 1, \ldots,\ j = 1, \ldots, a_k,$$
$$v_{kj} \le \delta^2, k = 0, 1, \ldots, n_0 - 1, j = 1, \ldots, a_k, k = n_0, j = 1, \ldots, J_{n_0}.$$

Рассмотрим функцию Лагранжа для этой задачи

$$\mathcal{L}(v, \mu, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2k+d} + \lambda \Lambda_k^\beta \right) \sum_{j=1}^{a_k} v_{kj} + \sum_{k=0}^{n_0-1} \sum_{j=1}^{a_k} \mu_{kj} v_{kj} + \sum_{j=1}^{J_{n_0}} \mu_{n_0 j} v_{n_0 j},$$

где

$$v = \{v_{kj}\}, \quad k = 0, 1, \ldots,\ j = 1, ..., a_k,$$
$$\mu = \{\mu_{kj}\}, k = 0, 1, \ldots, n_0 - 1, j = 1, \ldots, a_k, k = n_0, j = 1, \ldots, J_{n_0}.$$

Используя те же общие результаты **теоремы** 3, что и в предыдущем доказательстве, будем искать неотрицательные $\widehat{\mu}_{kj}$, $\widehat{\lambda}$ и допустимые в задаче (3.22) $\widehat{v}_{kj}$ такие, что

$$(a) \quad \min_{v_{kj} \ge 0} \mathcal{L}(v, \widehat{\mu}, \widehat{\lambda}) = \mathcal{L}(\widehat{v}, \widehat{\mu}, \widehat{\lambda}),$$

$$(b) \quad \sum_{k=0}^{n_0-1} \sum_{j=1}^{a_k} \widehat{\mu}_{kj} (\widehat{v}_{kj} - \delta^2) + \sum_{j=1}^{J_{n_0}} \widehat{\mu}_{n_0 j} (\widehat{v}_{n_0 j} - \delta^2) + \widehat{\lambda} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^\beta \sum_{j=1}^{a_k} \widehat{v}_{kj} - 1 \right) = 0.$$

Если при этом для любого фиксированного вектора $\widetilde{f}^N \in l_\infty^N$ можно найти решение $\widehat{f}(x')$ экстремальной задачи

$$\sum_{k=0}^{n_0-1}\sum_{j=1}^{a_k}\widehat{\mu}_{kj}(c_{kj}-y_{kj})^2+\sum_{j=1}^{J_{n_0}}\widehat{\mu}_{n_0j}(c_{n_0j}-y_{n_0j})^2 + \widehat{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\Lambda_k^\beta\sum_{j=1}^{a_k}c_{kj}^2 \to \min, \quad f(x') \in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \tag{3.23}$$

где c_{kj} — коэффициенты Фурье функции $f(x')$, то метод, задаваемый формулой (3.13) при $f(x') = \widehat{f}(x')$, будет оптимальным и

$$E_{N,\infty}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}),\delta) = \sqrt{\delta^2\left(\sum_{k=0}^{n_0-1}\sum_{j=1}^{a_k}\widehat{\mu}_{kj}+\sum_{j=1}^{J_{n_0}}\widehat{\mu}_{n_0j}\right)+\widehat{\lambda}}\ . \tag{3.24}$$

Положим

$$\widehat{v}_{kj} = \delta^2, \quad k = 0,1,\ldots,\widehat{m}-1,\ j = 1,\ldots,a_k,$$

$$\widehat{v}_{kj} = 0,\ k > \widehat{m},\ j = 1,...,a_k.$$

Значения для $\widehat{v}_{\widehat{m}j}$ зададим формулами:

если $m_0 \le n_0$, то $\widehat{m} = m_0$ и

$$\widehat{v}_{\widehat{m}j} = \widehat{v}_{m_0j} = \frac{1}{a_{m_0}\Lambda_{m_0}^\beta}\big(1-\delta^2\sum_{k=1}^{m_0-1}a_k\Lambda_k^\beta\big),\ j = 1,\ldots,a_{m_0};$$

если $m_0 > n_0$, то $\widehat{m} = n_0$ и

$$\widehat{v}_{\widehat{m}j} = \widehat{v}_{n_0j} = \begin{cases}\delta^2, & j = 1,\ldots,J_{n_0},\\ \dfrac{1-\delta^2\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0-1}a_k\Lambda_k^\beta + J_{n_0}\Lambda_{n_0}^\beta\right)}{a_{n_0}-J_{n_0}}, & j = J_{n_0}+1,\ldots,a_{n_0}.\end{cases}$$

Докажем допустимость последовательности $\widehat{v}$. Если $\widehat{m} = n_0$, то из определения $\widehat{m}$ и m_0 следует, что $m_0 > n_0$ и

$$\delta^2\sum_{k=1}^{n_0}a_k\Lambda_k^\beta < 1.$$

Следовательно, можно взять $\widehat{v}_{n_0j} = \delta^2$ при $j = 1,\ldots,J_{n_0}$, а на оставшиеся коэффициенты $\widehat{v}_{n_0j}$ условия $\widehat{v}_{kj} \le \delta^2$ не распространяются. При таком задании $\widehat{v}_{kj}$ выполнено равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k}\widehat{v}_{kj}\Lambda_k^\beta = 1.$$

В случае, когда $\widehat{m} = m_0 < n_0$, достаточно показать, что выполняются неравенства $\widehat{v}_{m_0 j} \le \delta^2, j = 1, \dots, a_{m_0}$. Предполагая противное, имеем

$$\frac{1 - \delta^2 \sum\limits_{k=1}^{m_0-1} a_k \Lambda_k^\beta}{a_{m_0} \Lambda_{m_0}^\beta} > \delta^2.$$

Отсюда вытекает, что

$$\delta^2 \sum_{k=1}^{m_0} a_k \Lambda_k^\beta < 1,$$

что противоречит определению m_0. Положим

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{\Lambda_{\widehat{m}}^\beta (2\widehat{m} + d)}\ , \quad \widehat{\mu}_{kj} = \frac{1}{2k+d} - \frac{1}{2\widehat{m} + d} \left(\frac{\Lambda_k}{\Lambda_{\widehat{m}}} \right)^\beta,$$
$$k = 0, 1, \dots, \widehat{m} - 1,\ j = 1, \dots, a_k.$$

Остальные $\widehat{\mu}_{kj}$ положим равными 0. Подставляя в функцию Лагранжа $\widehat{\mu}$ и $\widehat{\lambda}$ и учитывая, что Λ_k монотонно возрастают, нетрудно проверить, что для всех v таких, что $v_{kj} \ge 0$, выполняется неравенство

$$\mathcal{L}(v, \widehat{\mu}, \widehat{\lambda}) \ge 0$$

Выполнение равенства $\mathcal{L}(\widehat{v}, \widehat{\mu}, \widehat{\lambda}) = 0$ также легко проверяется. Следовательно, условие (a) выполнено. Непосредственная проверка показывает, что условие (b) тоже выполнено, и $\widehat{v}$—решение задачи (3.22).

Перейдем к построению оптимального метода. Для этого рассмотрим задачу (3.23). Продифференцируем выражение по c_{kj}. Приравнивая производные нулю, с учётом вида $\widehat{\mu}_{kj}$, получим систему для определения $\widehat{c}_{kj}$, которые в силу выпуклости задачи являются решением задачи на минимум:

$$\widehat{\mu}_{kj}(\widehat{c}_{kj} - y_{kj}) + \widehat{\lambda} \Lambda_k^\beta \widehat{c}_{kj} = 0,$$
$$0 \le k \le \widehat{m} - 1, j = 1, \dots, a_k;$$
$$\widehat{c}_{kj} = 0,\ k \ge \widehat{m}, j = 1, \dots, a_k.$$

Ее решением будут коэффициенты

$$\widehat{c}_{kj} = \frac{\widehat{\mu}_{kj}}{\widehat{\mu}_{kj} + \widehat{\lambda} \Lambda_k^\beta}\ y_{kj}, \quad k = 0, 1, \dots, \widehat{m} - 1,\ j = 1, \dots, a_k,$$
$$\widehat{c}_{kj} = 0, \quad k \ge \widehat{m},\ j = 1, \dots, a_k.$$

Подставляя эти коэффициенты в формулу (3.13) и учитывая вид $\widehat{\mu}_{kj}$ и $\widehat{\lambda}$, получаем, что метод (3.20) является оптимальным. Подставляя $\widehat{\mu}_{kj}$ и $\widehat{\lambda}$ в формулу (3.24), получаем, что

$$E_{N,\infty}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}),\delta)$$
$$=\sqrt{\delta^2\sum_{k=0}^{\widehat{m}-1}\left(\frac{1}{2k+d}-\left(\frac{\Lambda_k}{\Lambda_{\widehat{m}}}\right)^\beta\frac{1}{2\widehat{m}+d}\right)a_k+\frac{1}{\Lambda_{\widehat{m}}^\beta(2\widehat{m}+d)}}\,.$$

□

Пусть фиксирована погрешность $\delta>0$ вычисления коэффициентов Фурье граничной функции $f(x')$ в задаче Дирихле. Из **теоремы** 12 вытекает, что при $m_0<n_0$ для максимально точного восстановления решения задачи Дирихле по приближенным значениям коэффициентов Фурье функции $f(x')$ требуется знание только первых $N_2=\displaystyle\sum_{k=0}^{m_0-1}a_k$ коэффициентов. Вычисление следующих коэффициентов Фурье (при условии, что они вычисляются с той же погрешностью,) не приводит к уменьшению погрешности оптимального восстановления. Аналогичный эффект насыщения наблюдается в задачах оптимального восстановления производных по неточным коэффициентам Фурье (см. [**4**]) и при оптимальном восстановлении решения уравнения теплопроводности по неточной информации о начальной температуре (см. [**6**]).

Данная задача оптимального восстановления для случая $d=2$ рассмотрена К.Ю.Осипенко в работе [**11**].

3.3. Оптимальное восстановление решения задачи Дирихле в d-мерном шаровом поясе по неточно заданным граничным условиям ($d\geq 2$).

Пусть имеется область D_1, представляющая из себя d-мерный шаровой пояс

$$D_1=\{x\in\mathbb{R}^d:\ 0<R<|x|<1\},$$

и

$$\mathbb{S}^{d-1}=\{x'\in\mathbb{R}^d:\ |x'|=1\}-$$

единичная $(d-1)$-мерная сфера, $d\geq 2$.

Выберем в $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ ортонормированный базис $\{Y_j^{(k)}(x')\}_{j=1}^{a_k}$, $k=0,1,\dots$, состоящий из сферических функций, и рассмотрим в области D_1 задачу Дирихле

$$\begin{aligned}&\Delta u=0,\\ &u\Big|_{|x|=R}=f_1(x'),\quad u\Big|_{|x|=1}=f_2(x'),\quad 0<R<1,\end{aligned}\tag{3.25}$$

где функции $f_1(x'), f_2(x') \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ и заданы своими рядами Фурье

$$f_1(x') = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}Y_j^{(k)}(x'), \quad f_2(x') = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k} d_{kj}Y_j^{(k)}(x'). \tag{3.26}$$

Известно, (см., например, [**10**],) что решение этой задачи может быть записано в виде

$$\begin{aligned} u(x) = A(r)Y_1^{(0)}(x') + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k}\Bigg(&\frac{c_{kj}R_2^{2-d-k} - d_{kj}R_1^{2-d-k}}{R_1^kR_2^{2-d-k} - R_2^kR_1^{2-d-k}}\ r^k + \\ &+\frac{d_{kj}R_1^k - c_{kj}R_2^k}{R_1^kR_2^{2-d-k} - R_2^kR_1^{2-d-k}}\ r^{2-d-k}\Bigg)Y_j^{(k)}(x'), \end{aligned} \tag{3.27}$$

где R_1 и R_2 суть внутренний и внешний радиусы шарового пояса, $x = rx', r = |x|,\ x' \in \mathbb{S}^{d-1}$, и

$$A(r) = \begin{cases} \dfrac{c_{01}R_2^{2-d} - d_{01}R_1^{2-d}}{R_2^{2-d} - R_1^{2-d}} + \dfrac{d_{01} - c_{01}}{R_2^{2-d} - R_1^{2-d}}\ r^{2-d}, & d \geq 3, \\ \dfrac{d_{01} - c_{01}}{\ln R_2 - \ln R_1}\ln r + \dfrac{c_{01}\ln R_2 - d_{01}\ln R_1}{\ln R_2 - \ln R_1}\ , & d = 2. \end{cases}$$

Учитывая, что в рассматриваемой задаче $R_1 = R,\ R_2 = 1$, после небольшой перегруппировки слагаемых выражение для $u(x)$ можно представить в виде

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k}\big(F_{1k}(r)c_{kj} + F_{2k}(r)d_{kj}\big)Y_j^{(k)}(x'), \tag{3.28}$$

где коэффициенты $F_{1k}(r)$ и $F_{2k}(r)$ задаются формулами:

1) если $d = 2$ и $k = 0$, то

$$F_{10}(r) = \frac{\ln r}{\ln R}\ ,\ F_{20}(r) = 1 - \frac{\ln r}{\ln R}\ ;$$

2) в остальных случаях

$$F_{1k}(r) = \frac{r^k - r^{2-k-d}}{R^k - R^{2-k-d}}\ , \quad F_{2k}(r) = \frac{R^kr^{2-k-d} - R^{2-k-d}r^k}{R^k - R^{2-k-d}}\ .$$

Теперь сформулируем задачу оптимального восстановления. Нам надо восстановить решение задачи (3.25), когда известен конечный набор приближенно заданных коэффициентов Фурье граничных функций. Более точно, предположим, что для любых функций $f_1(x'), f_2(x') \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ известны векторы

$$\widetilde{f}_i^N = \{y_{kj}^{(i)}\},\ k = 0, 1, \ldots, k_0,\ j = 1, \ldots, a_k, N = \sum_{k=0}^{k_0} a_k,\ i = 1, 2$$

такие, что

$$\|\widetilde{f}_i^N - f_i^N\|_{l_p^N} \leq \delta_i,\ i = 1, 2,$$

где $\|(a_1,\dots,a_N)\|_{l_p^N}$ определена соотношениями (3.14), $\delta_i > 0$ — произвольные числа, $k_0 \geq 0$—фиксированное целое число,

$$f_1^N = \{c_{kj}\},\ f_2^N = \{d_{kj}\},\ k = 0,1,\dots,k_0,\ j = 1,\dots,a_k.$$

Наша задача заключается в том, чтобы по информации о векторах $\widetilde{f}_1^N, \widetilde{f}_2^N$ восстановить решение задачи (3.25). Будем предполагать, что функции $f_i(x')$, $i = 1,2$, принадлежат обобщённому соболевскому классу

$$W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}) = \left\{f(x') \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}) : \|(-\Delta_S)^{\beta/2} f(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq 1\right\},$$

где для произвольного $\beta > 0$ и $g(x') \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, заданной своим рядом Фурье

$$g(x') = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k} g_{kj} Y_j^{(k)}(x'),$$

оператор $(-\Delta_S)^{\beta/2}$ определяется равенством

$$(-\Delta_S)^{\beta/2} g(x') = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^{\beta/2} \sum_{j=1}^{a_k} g_{kj} Y_j^{(k)}(x'),$$

а $\Lambda_k = k(k+d-2)$ — собственные числа оператора Бельтрами-Лапласа $(-\Delta_S)$. В качестве методов восстановления рассмотрим всевозможные операторы $\varphi\colon l_p^N \times l_p^N \to L_2(D_1)$. Назовем погрешностью восстановления метода φ величину

$$e_{N,p}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta_1, \delta_2, \varphi) = \sup_{\substack{f_i(x') \in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}),\\ i=1,2}} \ \sup_{\substack{\widetilde{f}_i^N \in\ l_p^N,\\ \|f_i^N - \widetilde{f}_i^N\|_{l_p^N} \leq \delta_i,\ i=1,2}} \|u(x) - \varphi(\widetilde{f}_1^N, \widetilde{f}_2^N)(x)\|_{L_2(D_1)}.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E_{N,p}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta_1, \delta_2) = \inf_{\varphi\colon l_p^N \times l_p^N \to L_2(D_1)} e_{N,p}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta_1, \delta_2, \varphi),$$

а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным. Для решения здесь будет использоваться **теорема** 3, поэтому установим соответствие между этой теоремой и данной задачей восстановления. Пространство X здесь совпадает с $Y \times Y$, где

$$Y = \{f(x') \in L(\mathbb{S}^{d-1}) :\ \|(-\Delta_S)^{\beta/2} f\|_{L(\mathbb{S}^{d-1})} < \infty\}$$

пространство $Z = L_2(D_1)$, линейный оператор T, подлежащий восстановлению, действует из X в пространство $L_2(D_1)$ и определён формулой (3.28).

Имеются четыре линейных оператора I_1, I_2, I_3 и I_4. Первый и второй определяют множество $W = W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1})$,

$$I_j : X \to L_2(\mathbb{S}^{d-1}),$$

$$I_j(f_1, f_2) = -(\Delta_S)^{\beta/2} f_j,\ \delta_j = 1,\ j = 1,2.$$

Третий и четвёртый операторы

$$I_j : X \to l_p^N,\ j = 3, 4,$$

определены равенствами

$$I_3(f_1, f_2) = f_1^N = \{c_{kj}\},\ I_4(f_1, f_2) = f_2^N = \{d_{kj}\},$$
$$k = 1, \dots, n_0,\ j = 1, \dots, a_k.$$

Положим

$$\alpha_k = \int_R^1 F_{1k}^2(r) r^{d-1} dr,$$

$$\beta_k = \int_R^1 F_{2k}^2(r) r^{d-1} dr, \tag{3.29}$$

$$\gamma_k = \int_R^1 F_{1k}(r) F_{2k}(r) r^{d-1} dr.$$

Теперь перейдем к формулировке и доказательству основных результатов для рассматриваемой задачи восстановления. Сначала рассмотрим случай $p = 2$. Здесь имеет место следующая

Теорема 13. *Пусть* δ_1, δ_2*—произвольные положительные числа. Положим*

$$\widehat{\mu}_1 = \alpha_0 + \frac{\delta_2}{\delta_1}\gamma_0,\ \widehat{\mu}_2 = \beta_0 + \frac{\delta_1}{\delta_2}\gamma_0,$$

$$\widehat{\zeta}_1 = \frac{\alpha_{k_0+1} + \gamma_{k_0+1}}{\Lambda_{k_0+1}^{\beta}},\ \widehat{\zeta}_2 = \frac{\beta_{k_0+1} + \gamma_{k_0+1}}{\Lambda_{k_0+1}^{\beta}},$$

Тогда

$$E_{N,2}(W_2^{\beta}(\mathbb{S}^{d-1}), \delta_1, \delta_2) = \tag{3.30}$$
$$= \sqrt{\alpha_0\delta_1^2 + \beta_0\delta_2^2 + 2\gamma_0\delta_1\delta_2 + \frac{\alpha_{k_0+1} + \beta_{k_0+1} + 2\gamma_{k_0+1}}{\Lambda_{k_0+1}^{\beta}}},$$

а метод

$$\varphi(\widetilde{f}_1^N, \widetilde{f}_2^N)(x) = \tag{3.31}$$
$$= \sum_{k=0}^{k_0}\sum_{j=1}^{a_k}\left(\frac{\widehat{\mu}_1}{\widehat{\mu}_1 + \widehat{\zeta}_1\Lambda_k^{\beta}}\ y_{kj}^{(1)} F_{1k}(r) + \frac{\widehat{\mu}_2}{\widehat{\mu}_2 + \widehat{\zeta}_2\Lambda_k^{\beta}}\ y_{kj}^{(2)} F_{2k}(r)\right) Y_j^{(k)}(x'),$$

является оптимальным.

Доказательство. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\|u(x)\|_{L_2(D_1)}^2 \to \max, \quad \|f_i^N\|_{l_2^N}^2 \le \delta_i^2, \tag{3.32}$$
$$\|(-\Delta_S)^{\beta/2} f_i(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 \le 1,\ i = 1, 2,$$

где $u(x)$ — решение задачи (3.25). Используя равенство Парсеваля, запишем ее в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k}\left(\alpha_k c_{kj}^2+\beta_k d_{kj}^2+2\gamma_k c_{kj}d_{kj}\right)\to \max, \tag{3.33}$$

$$\sum_{k=0}^{k_0}\sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2\le\delta_1^2,\quad \sum_{k=0}^{k_0}\sum_{j=1}^{a_k} d_{kj}^2\le\delta_2^2,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Lambda_k^{\beta}\sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2\le 1,\quad \sum_{k=1}^{\infty}\Lambda_k^{\beta}\sum_{j=1}^{a_k} d_{kj}^2\le 1,$$

где α_k, β_k, γ_k определены выше. Покажем, что $\alpha_k,\beta_k,\gamma_k$— монотонно убывающие последовательности положительных чисел. Для этого достаточно показать, что $F_{1k}(r)$ и $F_{2k}(r)$ положительны и монотонно убывают по k для всех $r\in(R,1)$. Начнем со случая, когда $(d,k)\ne(2,0)$.

Перепишем $F_{1k}(r)$ в виде

$$F_{1k}(r)=\left(\frac{r}{R}\right)^{1-d/2}\frac{\left(\dfrac{1}{r}\right)^t-\left(\dfrac{1}{r}\right)^{-t}}{\left(\dfrac{1}{R}\right)^t-\left(\dfrac{1}{R}\right)^{-t}}>0\,,$$

где $t=k+d/2-1>0$ и $R<r<1$. Введем обозначения

$$\left(\frac{1}{r}\right)^t=\exp at,\ a=\ln\left(\frac{1}{r}\right),\left(\frac{1}{R}\right)^t=\exp bt,\ b=\ln\left(\frac{1}{R}\right),0<a<b.$$

Теперь выражение для F_{1k} можно записать в виде

$$F_{1k}=\left(\frac{r}{R}\right)^{1-d/2}\frac{\exp at-\exp(-at)}{\exp bt-\exp(-bt)}=\left(\frac{r}{R}\right)^{1-d/2}\frac{\operatorname{sh}at}{\operatorname{sh}bt}\,,$$
$$t>0,\ 0<a<b.$$

Рассмотрим функцию

$$\psi(t)=\frac{\operatorname{sh}at}{\operatorname{sh}bt}$$

при $t\in(0,\infty)$ и $a<b$. Имеем

$$\psi'(t)=\frac{\varphi(t)}{\operatorname{sh}^2 bt}\,,\quad \varphi(t)=a\operatorname{ch}at\operatorname{sh}bt-b\operatorname{sh}at\operatorname{ch}bt.$$

Поскольку при всех $t\in(0,\infty)$

$$\varphi'(t)=(a^2-b^2)\operatorname{sh}at\operatorname{sh}bt\le 0,$$

а $\varphi(0)=0$, то $\varphi(t)\le 0$ для всех $t\in(0,\infty)$. Поэтому $\psi'(t)\le 0$ при $t\in(0,\infty)$. Отсюда следует монотонное убывание функции $\psi(t)$, следовательно, $F_{1k}(r)$ монотонно убывает при увеличении k для любого $r\in(R,1)$.

Представляя $F_{2k}(r)$ в виде

$$F_{2k}(r) = r^{1-d/2}\,\frac{\left(\dfrac{R}{r}\right)^t - \left(\dfrac{R}{r}\right)^{-t}}{\left(\dfrac{1}{R}\right)^t - \left(\dfrac{1}{R}\right)^{-t}}\,,$$

где $t = k + d/2 - 1 > 0$, и вводя обозначения

$$\left(\frac{R}{r}\right)^t = \exp at,\ \ a = \ln\left(\frac{R}{r}\right), \left(\frac{1}{R}\right)^t = \exp bt,\ \ b = \ln\left(\frac{1}{R}\right), 0 < a < b,$$

получаем аналогичный результат для $F_{2k}(r)$.

Осталось показать, что

$$F_{10}(r) \geq F_{11}(r),\ \ F_{20}(r) \geq F_{21}(r),\ \ r \in (R, 1)$$

для случая, когда $d = 2$.

Начнем с первого неравенства. Рассмотрим функцию

$$\psi_1(r) = F_{10}(r) - F_{11}(r) = \frac{\ln r}{\ln R} - \frac{(1-r^2)R}{(1-R^2)r}\,,\ \ R < r < 1.$$

Так как функция $\psi_1(r)$ непрерывно дифференцируема в $(R, 1)$, $\psi_1(R) = \psi_1(1) = 0$ и $\psi_1(r)$ не является тождественным нулем на $(R, 1)$, то на этом интервале существует по крайней мере одна точка экстремума функции $\psi_1(r)$, где $\psi_1(r) \neq 0$ и $\psi_1'(r) = 0$. Покажем, что это точка строгого максимума и других экстремумов у $\psi_1(r)$ в $(R, 1)$ нет. Дифференцируя $\psi_1(r)$, имеем

$$\psi_1'(r) = \frac{1}{r\ln R} + \frac{R}{1-R^2}\left(1 + \frac{1}{r^2}\right) = \frac{\varphi_1(r)}{r}\,,$$

где

$$\varphi_1(r) = \frac{1}{\ln R} + \frac{R}{1-R^2}\left(r + \frac{1}{r}\right).$$

Вычислим производную функции $\varphi_1(r)$

$$\varphi_1'(r) = \frac{R}{1-R^2}\left(1 - \frac{1}{r^2}\right).$$

Знак $\varphi_1'(r) < 0$ на $(R, 1)$, следовательно, функция $\varphi_1(r)$ монотонно убывает на $(R, 1)$. Из монотонности $\varphi_1(r)$ и из того, что функция $\psi_1'(r)$ имеет на $(R, 1)$ хотя бы одну корневую точку, вытекает, что функция $\varphi_1(r)$ имеет интервале $(R, 1)$ ровно один корень r^*, $R < r^* < 1$, и функция $\psi_1'(r) = \dfrac{\varphi_1(r)}{r}$ меняет знаки с $''+''$ на $''-''$ при переходе через r^*. Следовательно, функция $\psi_1(r)$ имеет на интервале $(R, 1)$ один экстремум, и это максимум. Отсюда вытекает, что

$$\psi_1(r) = F_{10}(r) - F_{11}(r) \geq 0,\ \ r \in (R, 1).$$

Аналогично доказывается выполнение неравенства

$$F_{20}(r) \geq F_{21}(r),\ r \in (R, 1).$$

Выписывая функцию Лагранжа для задачи (3.33), имеем

$$\mathcal{L}(c, d, \mu_1, \mu_2, \zeta_1, \zeta_2) = (-\alpha_0 + \mu_1)c_{01}^2 + (-\beta_0 + \mu_2)d_{01}^2 - 2\gamma_0 c_{01} d_{01} +$$
$$\sum_{k=1}^{k_0}\sum_{j=1}^{a_k}\Big[-(\alpha_k c_{kj}^2 + \beta_k d_{kj}^2 + 2\gamma_k c_{kj} d_{kj}) + (\mu_1 + \zeta_1 \Lambda_k^\beta) c_{kj}^2 + (\mu_2 + \zeta_2 \Lambda_k^\beta) d_{kj}^2\Big] +$$
$$+ \sum_{k=k_0+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k}\Big[-(\alpha_k c_{kj}^2 + \beta_k d_{kj}^2 + 2\gamma_k c_{kj} d_{kj}) + \zeta_1 \Lambda_k^\beta c_{kj}^2 + \zeta_2 \Lambda_k^\beta d_{kj}^2\Big],$$

где

$$c = \{c_{kj}\},\ d = \{d_{kj}\},\ k = 0, 1, \ldots,\ j = 1, \ldots, a_k,$$

а μ_1, μ_2, ζ_1 и ζ_2—множители Лагранжа. Для рассматриваемого случая из **теоремы** 3 следует, что если найдутся неотрицательные $\widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2, \widehat{\zeta}_1, \widehat{\zeta}_2$ и допустимые в (3.33) $\widehat{c}, \widehat{d}$ такие, что

$$(a) \quad \min_{c,\ d} \mathcal{L}(c, d, \widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2, \widehat{\zeta}_2, \widehat{\zeta}_2) = \mathcal{L}(\widehat{c}, \widehat{d}, \widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2, \widehat{\zeta}_1, \widehat{\zeta}_2),$$

$$(b) \quad \widehat{\mu}_1\left(\sum_{k=0}^{k_0}\sum_{j=1}^{a_k} \widehat{c}_{kj}^{\,2} - \delta_1^2\right) + \widehat{\mu}_2\left(\sum_{k=0}^{k_0}\sum_{j=1}^{a_k} \widehat{d}_{kj}^{\,2} - \delta_2^2\right) +$$
$$+ \widehat{\zeta}_1\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k} \Lambda_k^\beta \widehat{c}_{kj}^{\,2} - 1\right) + \widehat{\zeta}_2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k} \Lambda_k^\beta \widehat{d}_{kj}^{\,2} - 1\right) = 0,$$

то $\widehat{c}$ и $\widehat{d}$ — решение задачи (3.33). Если при этом для любых фиксированных векторов $\widetilde{f}_1^N, \widetilde{f}_2^N \in l_2^N$ существует решение $\widehat{f}_1(x')$ и $\widehat{f}_2(x')$ экстремальной задачи

$$(3.34) \quad \widehat{\mu}_1\|f_1^N - \widetilde{f}_1^N\|_{l_2^N}^2 + \widehat{\mu}_2\|f_2^N - \widetilde{f}_2^N\|_{l_2^N}^2 +$$
$$+ \widehat{\zeta}_1\|(-\Delta_S)^{\beta/2} f_1\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 + \widehat{\zeta}_2\|(-\Delta_S)^{\beta/2} f_2\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 \to \min,$$
$$f_1(x'), f_2(x') \in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}),$$

то метод, задаваемый формулой (3.28) при $f_1(x') = \widehat{f}_1(x'), f_2(x') = \widehat{f}_2(x')$, является оптимальным, а для погрешности оптимального восстановления имеет место равенство

$$(3.35) \qquad E_{N,2}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta_1, \delta_2) = \sqrt{\widehat{\mu}_1\delta_1^2 + \widehat{\mu}_2\delta_2^2 + \widehat{\zeta}_1 + \widehat{\zeta}_2}.$$

Начнем с проверки условий $(a) - (b)$. Положим

$$\widehat{c}_{01} = \delta_1,\ \widehat{d}_{01} = \delta_2,$$
$$\widehat{c}_{k_0+1,j} = \widehat{d}_{k_0+1,j} = \left(\frac{1}{a_{k_0+1}\Lambda_{k_0+1}^\beta}\right)^{1/2},\quad j = 1, \ldots, a_{k_0+1};$$

$$\widehat{c}_{kj} = \widehat{d}_{kj} = 0,\ k \geq 1, k \neq k_0+1,\ j = 1, \ldots, a_k;$$

$$\widehat{\mu}_1 = \alpha_0 + \frac{\delta_2}{\delta_1}\gamma_0, \quad \widehat{\mu}_2 = \beta_0 + \frac{\delta_1}{\delta_2}\gamma_0,$$

$$\widehat{\zeta}_1 = \frac{\alpha_{k_0+1} + \gamma_{k_0+1}}{\Lambda^\beta_{k_0+1}}\ , \quad \widehat{\zeta}_2 = \frac{\beta_{k_0+1} + \gamma_{k_0+1}}{\Lambda^\beta_{k_0+1}}\ .$$

Подставляя в $\mathcal{L}(c, d, \mu_1, \mu_2, \zeta_1, \zeta_2)$ значения $\widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2, \widehat{\zeta}_2, \widehat{\zeta}_2$, получаем

$$\mathcal{L}(c, d, \widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2, \widehat{\zeta}_1, \widehat{\zeta}_2) = \gamma_0\delta_1\delta_2\left(\frac{c_{01}}{\delta_1} - \frac{d_{01}}{\delta_2}\right)^2 +$$

$$+\sum_{k=1}^{k_0}\sum_{j=1}^{a_k}\Bigg[(\alpha_0-\alpha_k)c^2_{kj}+(\beta_0-\beta_k)d^2_{kj}+\gamma_0\delta_1\delta_2\left(\frac{c^2_{kj}}{\delta^2_1}+\frac{d^2_{kj}}{\delta^2_2}-2\frac{\gamma_k}{\gamma_0}\frac{c_{kj}}{\delta_1}\frac{d_{kj}}{\delta_2}\right)+$$

$$+(\alpha_{k_0+1} + \gamma_{k_0+1})\left(\frac{\Lambda_k}{\Lambda_{k_0+1}}\right)^\beta c^2_{kj} + (\beta_{k_0+1} + \gamma_{k_0+1})\left(\frac{\Lambda_k}{\Lambda_{k_0+1}}\right)^\beta d^2_{kj}\Bigg]+$$

$$+\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k}\Bigg[\left(-\alpha_k + \frac{\alpha_{k_0+1}\Lambda^\beta_k}{\Lambda^\beta_{k_0+1}}\right)c^2_{kj} + \left(-\beta_k + \frac{\beta_{k_0+1}\Lambda^\beta_k}{\Lambda^\beta_{k_0+1}}\right)d^2_{kj}+$$

$$+\frac{\gamma_{k_0+1}\Lambda^\beta_k}{\Lambda^\beta_{k_0+1}}\left(c^2_{kj} + d^2_{kj} - 2\frac{\gamma_k\Lambda^\beta_{k_0+1}}{\gamma_{k_0+1}\Lambda^\beta_k}\ c_{kj}d_{kj}\right)\Bigg].$$

Покажем, что $\mathcal{L}(c, d, \widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2, \widehat{\zeta}_2, \widehat{\zeta}_2) \geq 0$ для произвольных c, d. Действительно, $(\alpha_0-\alpha_k)$ и $(\beta_0-\beta_k)$ неотрицательны в силу монотонного убывания α_k и β_k при возрастании k,

$$\left(\frac{c^2_{kj}}{\delta^2_1} + \frac{d^2_{kj}}{\delta^2_2} - 2\frac{\gamma_k}{\gamma_0}\frac{c_{kj}}{\delta_1}\frac{d_{kj}}{\delta_2}\right) \geq \left(\frac{c^2_{kj}}{\delta^2_1} + \frac{d^2_{kj}}{\delta^2_2} - 2\frac{c_{kj}}{\delta_1}\frac{d_{kj}}{\delta_2}\right) \geq 0,$$

так как $\gamma_k/\gamma_0 \leq 1$ в силу монотонного убывания γ_k. Скобки

$$\left(-\alpha_k + \frac{\alpha_{k_0+1}\Lambda^\beta_k}{\Lambda^\beta_{k_0+1}}\right),\ \left(-\beta_k + \frac{\beta_{k_0+1}\Lambda^\beta_k}{\Lambda^\beta_{k_0+1}}\right)$$

неотрицательны, так как в соответствующей сумме $k \geq k_0 + 1$ и последовательность Λ_k монотонно возрастает, а

$$\left(c^2_{kj} + d^2_{kj} - 2\frac{\gamma_k\Lambda^\beta_{k_0+1}}{\gamma_{k_0+1}\Lambda^\beta_k}\ c_{kj}d_{kj}\right) \geq \left(c^2_{kj} + d^2_{kj} - 2c_{kj}d_{kj}\right) \geq 0,$$

поскольку $(\gamma_k\Lambda^\beta_{k_0+1})/(\gamma_{k_0+1}\Lambda^\beta_k) \leq 1$. Нетрудно проверить, что

$$\mathcal{L}(\widehat{c}, \widehat{d}, \widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2, \widehat{\zeta}_1, \widehat{\zeta}_2) = 0,$$

то есть условие (a) выполнено. Выполнение условия (b) также легко проверяется непосредственно.

Рассмотрим теперь экстремальную задачу (3.34). Перепишем ее в виде

$$\widehat{\mu}_1 \sum_{k=0}^{k_0} \sum_{j=1}^{a_k} (c_{kj} - y_{kj}^{(1)})^2 + \widehat{\mu}_2 \sum_{k=0}^{k_0} \sum_{j=1}^{a_k} (d_{kj} - y_{kj}^{(2)})^2 + \\ + \widehat{\zeta}_1 \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^\beta \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 + \widehat{\zeta}_2 \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^\beta \sum_{j=1}^{a_k} d_{kj}^2 \to \min, \\ f_1(x'), f_2(x') \in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}).$$

Для определения коэффициентов c_{kj} и d_{kj}, после дифференцирования по c_{kj} и d_{kj}, получаем систему уравнений

$$\widehat{\mu}_1(c_{kj} - y_{kj}^{(1)}) + \widehat{\zeta}_1 \Lambda_k^\beta c_{kj} = 0,\ k = 0, 1, \ldots, k_0,\ j = 1, \ldots, a_k,$$

$$\widehat{\mu}_2(d_{kj} - y_{kj}^{(1)}) + \widehat{\zeta}_2 \Lambda_k^\beta d_{kj} = 0,\ k = 0, 1, \ldots, k_0,\ j = 1, \ldots, a_k,$$

$$\widehat{\zeta}_1 \Lambda_k^\beta c_{kj} = 0,\ \widehat{\zeta}_2 \Lambda_k^\beta d_{kj} = 0,\ k \geq k_0 + 1,\ j = 1, \ldots, a_k.$$

Решение системы имеет вид

$$\widehat{c}_{kj} = \frac{\widehat{\mu}_1}{\widehat{\mu}_1 + \widehat{\zeta}_1 \Lambda_k^\beta}\ y_{kj}^{(1)},\ \widehat{d}_{kj} = \frac{\widehat{\mu}_2}{\widehat{\mu}_2 + \widehat{\zeta}_2 \Lambda_k^\beta}\ y_{kj}^{(2)}, \\ k = 0, 1, \ldots, k_0, j = 1, \ldots, a_k,$$

$$\widehat{c}_{kj} = 0,\ \widehat{d}_{kj} = 0,\ k \geq k_0 + 1,\ j = 1, \ldots, a_k.$$

Из выпуклости задачи вытекает, что найденное решение реализует минимум. Подставляя полученные значения коэффициентов $\widehat{c}_{kj}$ и $\widehat{d}_{kj}$ в формулу (3.28), а выражения для $\widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2, \widehat{\zeta}_1$ и $\widehat{\zeta}_2$ в формулу (3.35), получаем значение погрешности оптимального восстановления и метод, сформулированные в теореме. □

Перейдем к случаю равномерной метрики ($p = \infty$). Положим

$$k^* = \max\left(k : \delta^2 \sum_{l=1}^{k-1} a_l \Lambda_l^\beta < 1,\ 1 \leq k \leq k_0 + 1\right).$$

Здесь имеет место

Теорема 14. *Пусть δ—произвольное положительное число. Тогда*

$$E_{N,\infty}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta, \delta) = \\ = \sqrt{\delta^2 \sum_{k=0}^{k^*-1} a_k(\alpha_k + \beta_k + 2\gamma_k) + \frac{\alpha_{k^*} + \beta_{k^*} + 2\gamma_{k^*}}{\Lambda_{k^*}^\beta}\big(1 - \delta^2 \sum_{k=1}^{k^*-1} a_k \Lambda_k^\beta\big)}$$

и метод

$$\varphi(\widetilde{f}_1^N, \widetilde{f}_2^N)(x) = \\ = \sum_{k=0}^{k^*-1} \sum_{j=1}^{a_k} \left(\frac{\widehat{\mu}_{kj}}{\widehat{\mu}_{kj} + \widehat{\eta}_1 \Lambda_k^\beta} \, y_{kj}^{(1)} F_{1k} + \frac{\widehat{\zeta}_{kj}}{\widehat{\zeta}_{kj} + \widehat{\eta}_2 \Lambda_k^\beta} \, y_{kj}^{(2)} F_{2k} \right) Y_j^{(k)}(x'),$$

где

$$\widehat{\eta}_1 = \frac{\alpha_{k^*} + \gamma_{k^*}}{\Lambda_{k^*}^\beta} \ , \ \widehat{\eta}_2 = \frac{\beta_{k^*} + \gamma_{k^*}}{\Lambda_{k^*}^\beta} \ ,$$

$$\widehat{\mu}_{kj} = \alpha_k + \gamma_k - \frac{\alpha_{k^*} + \gamma_{k^*}}{\Lambda_{k^*}^\beta} \Lambda_k^\beta, \ \widehat{\zeta}_{kj} = \beta_k + \gamma_k - \frac{\beta_{k^*} + \gamma_{k^*}}{\Lambda_{k^*}^\beta} \Lambda_k^\beta,$$

является оптимальным.

Доказательство. Будем использовать тот же метод, что и в предыдущей теореме. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\|u(x)\|^2_{L_2(D)} \to \max, \quad \|f_i^N\|^2_{l_2^N} \le \delta^2, \\ \|(-\Delta_S)^{\beta/2} f_i(x')\|^2_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \le 1, \ i = 1, 2, \tag{3.36}$$

где $u(x)$ — решение (3.25). Перепишем задачу (3.36) в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \left(\alpha_k c_{kj}^2 + \beta_k d_{kj}^2 + 2\gamma_k c_{kj} d_{kj} \right) \to \max, \\ c_{kj}^2 \le \delta^2, \quad d_{kj}^2 \le \delta^2, \quad 0 \le k \le k_0, \ j = 1, \dots, a_k, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^\beta \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 \le 1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^\beta \sum_{j=1}^{a_k} d_{kj}^2 \le 1. \tag{3.37}$$

Функция Лагранжа здесь имеет вид

$$\mathcal{L}(c, d, \mu, \zeta, \eta_1, \eta_2) = (-\alpha_0 + \mu_{01}) c_{01}^2 + (-\beta_0 + \zeta_{01}) d_{01}^2 - 2\gamma_0 c_{01} d_{01} + \\ + \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{j=1}^{a_k} \left[(-\alpha_k + \mu_{kj} + \eta_1 \Lambda_k^\beta) c_{kj}^2 + (-\beta_k + \zeta_{kj} + \eta_2 \Lambda_k^\beta) d_{kj}^2 - 2\gamma_k c_{kj} d_{kj}) \right] + \\ + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \left[(-\alpha_k + \eta_1 \Lambda_k^\beta) c_{kj}^2 + (-\beta_k + \eta_2 \Lambda_k^\beta) d_{kj}^2 - 2\gamma_k c_{kj} d_{kj}) \right], \tag{3.38}$$

где

$$c = \{c_{kj}\}, \quad d = \{d_{kj}\}, \quad k \ge 0, \quad j = 1, \dots, a_k,$$

а $\mu = \{\mu_{kj}\}$, $\zeta = \{\zeta_{kj}\}$, $k = 0, \dots, k_0$, $j = 1, \dots, a_k$, η_1, η_2— множители Лагранжа. Будем искать неотрицательные $\widehat{\mu}_{kj}, \widehat{\zeta}_{kj}, \widehat{\eta}_1$ и $\widehat{\eta}_2$, а также допустимые в задаче (3.37) $\widehat{c}$ и $\widehat{d}$ такие, чтобы выполнялись условия

$$(a)\quad \min_{c,\ d}\mathcal{L}(c,d,\widehat{\mu},\widehat{\zeta},\widehat{\eta}_1,\widehat{\eta}_2)=\mathcal{L}(\widehat{c},\widehat{d},\widehat{\mu},\widehat{\zeta},\widehat{\eta}_1,\widehat{\eta}_2),$$

$$(b)\quad \sum_{k=0}^{k_0}\sum_{j=1}^{a_k}\widehat{\mu}_{kj}\big(\widehat{c}_{kj}^{\,2}-\delta^2\big)+\sum_{k=0}^{k_0}\sum_{j=1}^{a_k}\widehat{\zeta}_{kj}\big(\widehat{d}_{kj}^{\,2}-\delta^2\big)+$$
$$+\widehat{\eta}_1\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k}\Lambda_k^{\beta}\widehat{c}_{kj}^{\,2}-1\right)+\widehat{\eta}_2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k}\Lambda_k^{\beta}\widehat{d}_{kj}^{\,2}-1\right)=0.$$

Тогда $\widehat{c},\widehat{d}$—решение задачи (3.37). Положим

$$\widehat{c}_{kj}=\widehat{d}_{kj}=\delta,\ k=0,\dots,k^*-1,\ j=1,\dots,a_k;$$

$$\widehat{c}_{k^*j}=\widehat{d}_{k^*j}=\left[\frac{1}{a_{k^*}\Lambda_{k^*}^{\beta}}\left(1-\delta^2\sum_{k=1}^{k^*-1}a_k\Lambda_k^{\beta}\right)\right]^{1/2},\ j=1,\dots,a_k;$$

$$\widehat{c}_{k^*j}=\widehat{d}_{k^*j}=0,\ k>k^*,\ j=1,\dots,a_k.$$

Эта последовательность допустима в задаче (3.37). Действительно,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Lambda_k^{\beta}\sum_{j=1}^{a_k}\widehat{c}_{kj}^{\,2}=1,\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\Lambda_k^{\beta}\sum_{j=1}^{a_k}\widehat{d}_{kj}^{\,2}=1.$$

Что касается условий вида

$$c_{kj}^2\le\delta^2,\quad d_{kj}^2\le\delta^2,\quad k\ge 0,\ j=1,\dots,a_k,$$

то для случая $k^*>k_0$ они, очевидно, выполнены. Если же $k^*\le k_0$, то достаточно доказать, что

$$\widehat{c}_{k^*j}^{\,2}\le\delta^2,\quad \widehat{d}_{k^*j}^{\,2}\le\delta^2,\quad j=1,\dots,a_{k^*}.$$

Предположим, что $\widehat{c}_{k^*j}^{\,2}>\delta^2$. Тогда имеем

$$\widehat{c}_{k^*j}^{\,2}=\frac{1}{a_{k^*}\Lambda_{k^*}^{\beta}}\big(1-\delta^2\sum_{k=1}^{k^*-1}a_k\Lambda_k^{\beta}\big)>\delta^2,$$

откуда вытекает, что

$$\delta^2\sum_{k=1}^{k^*}a_k\Lambda_k^{\beta}<1,$$

а это противоречит определению k^*. Допустимость $\widehat{d}$ доказывается аналогично.

Положим

$$\widehat{\eta}_1=\frac{\alpha_{k^*}+\gamma_{k^*}}{\Lambda_{k^*}^{\beta}}\ ,\ \ \widehat{\eta}_2=\frac{\beta_{k^*}+\gamma_{k^*}}{\Lambda_{k^*}^{\beta}}\ ,\ \ \widehat{\mu}_{01}=\alpha_0+\gamma_0,\ \widehat{\zeta}_{01}=\beta_0+\gamma_0,$$

$$\widehat{\mu}_{kj}=\alpha_k+\gamma_k-\frac{\alpha_{k^*}+\gamma_{k^*}}{\Lambda_{k^*}^{\beta}}\Lambda_k^{\beta},$$

$$k = 1, \dots, k^* - 1, \ j = 1, \dots, a_k,$$
$$\widehat{\zeta}_{kj} = \beta_k + \gamma_k - \frac{\beta_{k^*} + \gamma_{k^*}}{\Lambda^\beta_{k^*}} \Lambda^\beta_k,$$
$$k = 1, \dots, k^* - 1, \ j = 1, \dots, a_k,$$
$$\widehat{\mu}_{kj} = \widehat{\zeta}_{kj} = 0, \ k = k^*, \dots, k_0, \ j = 1, \dots, a_k.$$

Покажем, что условия $(a), (b)$ при так определенных $\widehat{\mu}, \widehat{\zeta}, \widehat{\eta}_1, \widehat{\eta}_2, \widehat{c}$ и $\widehat{d}$ выполнены.

$$\mathcal{L}(c, d, \widehat{\mu}, \widehat{\zeta}, \widehat{\eta}_1, \widehat{\eta}_2) = \gamma_0 (c_{01} - d_{01})^2 + \sum_{k=1}^{k^*} \sum_{j=1}^{a_k} \gamma_k (c_{kj} - d_{kj})^2 +$$
$$+ \sum_{k=k^*+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \Bigg[\left(-\alpha_k + \frac{\alpha_{k^*} \Lambda^\beta_k}{\Lambda^\beta_{k^*}} \right) c^2_{kj} + \left(-\beta_k + \frac{\beta_{k^*} \Lambda^\beta_k}{\Lambda^\beta_{k^*}} \right) d^2_{kj} +$$
$$+ \frac{\gamma_{k^*} \Lambda^\beta_k}{\Lambda^\beta_{k^*}} (c^2_{kj} + d^2_{kj}) - 2\gamma_k c_{kj} d_{kj} \Bigg].$$

Из монотонности $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \Lambda_k$ и того, что $k > k^*$ во второй сумме, имеем

$$-\alpha_k + \frac{\alpha_{k^*} \Lambda^\beta_k}{\Lambda^\beta_{k^*}} \geq 0, \ -\beta_k + \frac{\beta_{k^*} \Lambda^\beta_k}{\Lambda^\beta_{k^*}} \geq 0,$$

$$\frac{\gamma_{k^*} \Lambda^\beta_k}{\Lambda^\beta_{k^*}} (c^2_{kj} + d^2_{kj}) - 2\gamma_k c_{kj} d_{kj} \geq \gamma_k (c^2_{kj} + d^2_{kj} - 2 c_{kj} d_{kj}) \geq 0.$$

Следовательно, $\mathcal{L}(c, d, \widehat{\mu}, \widehat{\zeta}, \widehat{\eta}_1, \widehat{\eta}_2) \geq 0$ для любых c и d. Подставляя в функцию Лагранжа еще и $\widehat{c}, \widehat{d}$, убеждаемся, что $\mathcal{L}(\widehat{c}, \widehat{d}, \widehat{\mu}, \widehat{\zeta}, \widehat{\eta}_1, \widehat{\eta}_2) = 0$. Итак, условие (a) выполнено. Выполнение условия (b) проверяется непосредственной подстановкой.

Применяя к данному случаю **теорему** 3, получаем, что если при этом для произвольных фиксированных векторов $\widetilde{f}^N_1$ и $\widetilde{f}^N_2$ существует решение $\widehat{f}_1(x'), \widehat{f}_2(x')$ экстремальной задачи

$$(3.39) \quad \sum_{k=0}^{k_0} \sum_{j=1}^{a_k} \widehat{\mu}_{kj} (c_{kj} - y^{(1)}_{kj})^2 + \sum_{k=0}^{k_0} \sum_{j=1}^{a_k} \widehat{\zeta}_{kj} (d_{kj} - y^{(2)}_{kj})^2 +$$
$$+ \widehat{\eta}_1 \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda^\beta_k \sum_{j=1}^{a_k} c^2_{kj} + \widehat{\eta}_2 \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda^\beta_k \sum_{j=1}^{a_k} d^2_{kj} \to \min,$$
$$f_1(x'), f_2(x') \in W^\beta_2(\mathbb{S}^{d-1}),$$

то погрешность оптимального восстановления можно вычислить по формуле

$$E_{N,\infty}(W^\beta_2(\mathbb{S}^{d-1}), \delta, \delta) = \sqrt{\delta^2 \sum_{k=0}^{k_0} \sum_{j=1}^{a_k} \widehat{\mu}_{kj} + \delta^2 \sum_{k=0}^{k_0} \sum_{j=1}^{a_k} \widehat{\zeta}_{kj} + \widehat{\eta}_1 + \widehat{\eta}_2}\ .$$

В качестве оптимального метода здесь можно выбрать метод, задаваемый формулой (3.28) при $f_1(x') = \widehat{f_1}(x'), f_2(x') = \widehat{f_2}(x')$. Дифференцируя оптимизируемое выражение по c_{kj} и d_{kj} и приравнивая частные производные нулю, а также учитывая выпуклость рассматриваемой задачи, получаем систему для искомых коэффициентов

$$\widehat{c}_{kj} = \frac{\widehat{\mu}_{kj}}{\widehat{\mu}_{kj} + \widehat{\eta}_1 \Lambda_k^\beta}\, y_{kj}^{(1)},\ \widehat{d}_{kj} = \frac{\widehat{\zeta}_{kj}}{\widehat{\zeta}_{kj} + \widehat{\eta}_2 \Lambda_k^\beta}\, y_{kj}^{(2)},$$
$$k = 0, 1, \ldots, k^* - 1,\ j = 1, \ldots, a_k,$$
$$\widehat{c}_{kj} = \widehat{d}_{kj} = 0,\ k \geq k^*,\ j = 1, \ldots, a_k.$$

Подставляя полученные значения $\widehat{c}_{kj}$ и $\widehat{d}_{kj}$ в формулу (3.28), получим, что метод

$$\varphi(\widetilde{f}_1^N, \widetilde{f}_2^N)(x) = \\ = \sum_{k=0}^{k^*-1} \sum_{j=1}^{a_k} \left(\frac{\widehat{\mu}_{kj}}{\widehat{\mu}_{kj} + \widehat{\eta}_1 \Lambda_k^\beta}\, y_{kj}^{(1)} F_{1k} + \frac{\widehat{\zeta}_{kj}}{\widehat{\zeta}_{kj} + \widehat{\eta}_2 \Lambda_k^\beta}\, y_{kj}^{(2)} F_{2k} \right) Y_j^{(k)}(x'),$$

является оптимальным. Подставляя в формулу для вычисления погрешности оптимального восстановления значения $\widehat{\mu}_{kj}, \widehat{\zeta}_{kj}, \widehat{\eta}_1$ и $\widehat{\eta}_2$, получаем, что

$$E_{N,\infty}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta, \delta) = \\ = \sqrt{\delta^2 \sum_{k=0}^{k^*-1} a_k(\alpha_k + \beta_k + 2\gamma_k) + \frac{\alpha_{k^*} + \beta_{k^*} + 2\gamma_{k^*}}{\Lambda_{k^*}^\beta} \big(1 - \delta^2 \sum_{k=1}^{k^*-1} a_k \Lambda_k^\beta\big)}.$$

Здесь имеет место эффект насыщения, заключающийся в том, что коэффициенты $y_{kj}^{(1)}$ и $y_{kj}^{(2)}$ при $k \geq k^*$ при построении оптимального метода не используются, то есть увеличение числа коэффициентов Фурье граничных функций, известных с той же погрешностью δ, не приводит к уменьшению погрешности оптимального восстановления. Тем самым при фиксированном δ набор из $N_1 = \sum_{k=0}^{k^*-1} a_k$ коэффициентов Фурье каждой из граничных функций позволяет максимально точно восстановить решение рассматриваемой задачи Дирихле. $\square$

Глава 4

Восстановление решения обобщенного уравнения Пуассона

В этой главе рассматривается задача оптимального восстановления решения обобщённого уравнения Пуассона в ограниченной области Q с нулевыми граничными условиями, а также на единичной d—мерной сфере $\mathbb{S}^{d-1}$, когда правая часть уравнения задана неточно. Предполагается, что правые части уравнений принадлежат обобщённым классам Соболева $W_2^{\beta}(Q)$ и $W_2^{\beta}(\mathbb{S}^{d-1})$ и известно конечное число коэффициентов Фурье правых частей уравнений, заданных с погрешностью в среднеквадратичной и равномерной метриках. Рассматривается случай произвольного выбора коэффициентов.

Для каждой из рассмотренных задач найдены значения погрешности оптимального восстановления и предложены методы оптимального восстановления, имеющие линейную структуру. В качестве конкретного примера рассмотрена задача оптимального восстановления решения уравнения Пуассона в d-мерном шаре $\mathbb{B}^d$.

4.1. Общая задача оптимального восстановления решения обобщенного уравнения Пуассона

Пусть Q—область в пространстве $\mathbb{R}^d$, ограниченная замкнутой кусочно-гладкой $(d-1)$—мерной поверхностью ∂Q, $x = (x_1, \ldots, x_d) \in Q$, $f(x) \in L_2(Q)$, $a(x) \in C(\overline{Q})$, $k(x) \in C^1(Q)$. Рассмотрим уравнение Пуассона

$$-(\operatorname{div}(k(x)\nabla u(x)) - a(x)u(x)) = f(x), \tag{4.1}$$

с нулевым граничным условием

$$u\,|_{\partial Q} = 0. \tag{4.2}$$

Известно, что если $k(x) \geq k_0 > 0$, $a(x) \geq 0$, то существует полная в $L_2(Q)$ ортонормированная система $\{\varphi_s(x)\}_1^{\infty}$ из собственных функций первой краевой задачи для оператора

$$\mathfrak{L} = -(\operatorname{div}(k(x)\nabla - a(x)).$$

Собственные значения этой задачи обладают следующими свойствами: $\lambda_s > 0,\ s = 1, 2, \ldots,\ \lambda_s \to \infty,\ l \to \infty$. При этом различным собственным значениям соответствует конечное (равное кратности собственного значения) число функций из системы $\{\varphi_s(x)\}_1^\infty$. Если

$$f(x) = \sum_{s=1}^{\infty} a_s \varphi_s(x),$$

где

$$a_s = \int_Q f(x)\varphi_s(x)dx$$

—коэффициенты Фурье функции $f(x)$, то решение задачи (4.1),(4.2) может быть записано в виде

$$u(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s^{-1} a_s \varphi_s(x).$$

Пусть функция $g(x) \in L_2(Q)$,

$$g(x) = \sum_{s=1}^{\infty} g_s \varphi_s(x),$$

где g_s—коэффициенты Фурье функции $g(x)$. Положим по определению

$$\mathfrak{L}^{\alpha/2} g(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s^{\alpha/2} g_s \varphi_s(x),$$

где α—произвольное положительное число. Рассмотрим так называемое обобщённое уравнение Пуассона

$$\mathfrak{L}^{\alpha/2} u(x) = f(x) \tag{4.3}$$

с нулевым граничным условием

$$u \mid_{\partial Q} = 0. \tag{4.4}$$

Нетрудно увидеть, что решение задачи (4.3)—(4.4) можно записать в виде

$$u(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s^{-\alpha/2} a_s \varphi_s(x).$$

В связи с тем, что среди собственных значений оператора $\mathfrak{L}$ могут быть кратные, введем новые обозначения. Обозначим через $\widetilde{\lambda}_k$ различные значения $\lambda_s, 0 < \widetilde{\lambda}_1 < \widetilde{\lambda}_2 < \ldots < \widetilde{\lambda}_k \ldots$. Положим

$$t_k = \sum_{i=1}^{k} r_i,$$

где r_i—кратность $\widetilde{\lambda}_i$. Перенумеруем функции $\varphi_{t_{k-1}+1}(x), \ldots, \varphi_{t_k}(x)$, относящиеся к $\widetilde{\lambda}_k$, следующим образом:

$$\varphi_{t_{k-1}+1} = \widetilde{\varphi}_{k1},\ \varphi_{t_{k-1}+2} = \widetilde{\varphi}_{k2}, \ldots,\ \varphi_{t_{k-1}+r_k} = \widetilde{\varphi}_{kr_k}.$$

Аналогично проводится перенумерация коэффициентов Фурье a_s функции $f(x)$:

$$a_{t_{k-1}+j} = \widetilde{a}_{kj}, \ j = 1, \dots, r_k$$

Теперь выражение для $f(x)$ принимает вид

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{r_k} \widetilde{a}_{kj} \widetilde{\varphi}_{kj}(x), \tag{4.5}$$

а решение задачи (4.3)—(4.4) можно записать в виде

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{\lambda}_k^{-\alpha/2} \sum_{j=1}^{r_k} \widetilde{a}_{kj} \widetilde{\varphi}_{kj}(x). \tag{4.6}$$

Перейдем к задаче восстановления. Рассмотрим задачу (4.3)—(4.4). Требуется наилучшим образом восстановить функцию $u(x)$, когда правая часть уравнения (4.3) задана с погрешностью. Будем считать, что для любой функции $f(x) \in L_2(Q)$ известен вектор $\widetilde{f}^N \in l_p^N$, задаваемый следующим образом. Пусть дано некоторое фиксированное натуральное число $k_0 \geq 1$ и имеется набор множеств J_k и A_k, где $J_k = \{1, \dots, r_k\}$, $k = 1, \dots, k_0$, $A_k \subseteq J_k$, $k = 1, \dots, k_0$—произвольные подмножества J_k, q_k—число элементов множества A_k, и

$$N = \sum_{k=1}^{k_0} q_k.$$

Предполагается, что для произвольного вектора

$$\widetilde{f}^N = \{y_{kj}\}, k = 1, \dots, k_0, j \in A_k$$

и для произвольного фиксированного $\delta > 0$ выполняется неравенство

$$\|\widetilde{f}^N - f^N\|_{l_p^N} \leq \delta \ ,$$

где $\|a\|_{l_p^N} = \|(a_1, \dots, a_N)\|_{l_p^N}$ определена формулой (3.14), а

$$f^N = \{\widetilde{a}_{kj}\} \ , \quad k = 1, ..., k_0, \quad j \in A_k.$$

Задача оптимального восстановления заключается в том, чтобы по информации о векторе $\widetilde{f}^N$ восстановить решение задачи (4.3),(4.4) в метрике $L_2(Q)$. Будем предполагать, что функция $f(x)$ принадлежит обобщённому соболевскому классу

$$W_2^\beta(Q) = \left\{ f(x) \in L_2(Q) : \ \|\mathfrak{L}^{\beta/2} f\|_{L_2(Q)} \leq 1 \right\},$$

$\beta > 0$—фиксированное действительное число. В качестве методов восстановления рассмотрим всевозможные операторы $\psi : l_p^N \to L_2(Q)$.

Назовем погрешностью восстановления метода ψ величину

$$e_{N,p}(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta, \psi) =$$

$$= \sup_{f\in W_2^\beta(Q)} \sup_{\substack{\widetilde{f}^N\in\, l_p^N:\\ \|f^N-\widetilde{f}^N\|_{l_p^N}\le\delta}} \|u(x)-\psi(\widetilde{f}_N)(x)\|_{L_2(Q)}.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E_{N,\,p}(W_2^\beta(Q),\alpha,\delta) = \inf_{\psi:\ l_p^N\to L_2(Q)} e_{N,\,p}(W_2^\beta(Q),\alpha,\delta,\psi),$$

а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным.

При доказательстве теорем этого раздела будут использоваться результаты **теоремы** 3. Установим соответствие между задачей, рассмотренной в этой теореме, и задачей, сформулированной выше. Рассмотрим пространство $X = \{f(x)\in L_2(Q) : \|\mathfrak{L}^{\beta/2}f\|_{L_2(Q)} < \infty\}$, в качестве пространства Z выберем $L_2(Q)$. Линейный оператор $T : X\to L_2(Q)$, подлежащий восстановлению, определен равенством

$$Tf(x) = u(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{\lambda}_k^{-\alpha/2}\sum_{j=1}^{r_k}\widetilde{a}_{kj}\widetilde{\varphi}_{kj}(x).$$

Имеются два линейных оператора I_1 и I_2. Первый из них определяет множество $W = W_2^\beta(Q)$,

$$I_1 = \mathfrak{L}^{\beta/2} : X\to L_2(Q).$$

Второй оператор $I_2 : X\to l_p^N$ определен соотношением

$$I_2 f = \{\widetilde{a}_{kj}\},\ k=1,\dots,k_0,\ j\in A_k,$$

где $\{\widetilde{a}_{kj}\}$—коэффициенты разложения (4.5) функции $f(x)$.

Сначала рассмотрим случай $p=2$. Положим

$$A = \{k : A_k = J_k,\ 1\le k\le k_0\},$$

$$J = \{1,2,\dots,k_0\},$$

$$k^* = \begin{cases}\min\bigl(k:\ k\in\mathbb{N}\backslash A\bigr), & \delta^2 < \widetilde{\lambda}_1^{-\beta},\\ 1, & \delta^2 \ge \widetilde{\lambda}_1^{-\beta},\end{cases}$$

В этом случае верна

Теорема 15. *Пусть δ,α и β—произвольные положительные числа.*

Тогда

$$E_{N,\,2}(W_2^\beta(Q),\alpha,\delta) = \sqrt{\frac{1}{\widetilde{\lambda}_{k^*}^{\alpha+\beta}} + \frac{\delta^2}{\widetilde{\lambda}_1^{\alpha}}\left[1-\left(\frac{\widetilde{\lambda}_1}{\widetilde{\lambda}_{k^*}}\right)^{(\alpha+\beta)}\right]}\quad ,$$

а метод $\widehat{\psi}(x)$, *задаваемый соотношениями*

$$\widehat{\psi}(x)=\begin{cases}0, & k^*=1,\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{k^*-1}\frac{1}{\widetilde{\lambda}_k^{\alpha/2}}\left[1+\frac{\widetilde{\lambda}_k^{\beta}\widetilde{\lambda}_1^{\alpha}}{\widetilde{\lambda}_{k^*}^{\alpha+\beta}-\widetilde{\lambda}_1^{\alpha+\beta}}\right]^{-1}\sum_{j=1}^{r_k}y_{kj}\widetilde{\varphi}_{kj}(x), & k^*>1\end{cases}$$

является оптимальным.

Доказательство. Следуя **теореме** 3, рассмотрим экстремальную задачу

$$\|u(x)\|^2_{L_2(Q)}\to\max,\quad \|f^N\|^2_{l_2^N}\le\delta^2,\qquad \|\mathfrak{L}^{\beta/2}f(x)\|^2_{L_2(Q)}\le 1. \tag{4.7}$$

Используя равенство Парсеваля, перепишем задачу (4.7) для данного случая в виде

$$\begin{gathered}\|u(x)\|^2_{L_2(Q)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\widetilde{\lambda}_k^{\alpha}}\sum_{j=1}^{r_k}\widetilde{a}_{kj}^2\to\max,\\ \|f^N\|^2_{l_2^N}=\sum_{k=1}^{k_0}\sum_{j\in A_k}\widetilde{a}_{kj}^2\le\delta^2,\\ \|\mathfrak{L}^{\beta/2}f(x)\|^2_{L_2(Q)}=\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{\lambda}_k^{\beta}\sum_{j=1}^{r_k}\widetilde{a}_{kj}^2\le 1.\end{gathered}\tag{4.8}$$

Введем обозначения

$$v_k=\sum_{j=1}^{r_k}\widetilde{a}_{kj}^2,\ \ k\ge 1,$$

$$v_k'=\sum_{j\in A_k}\widetilde{a}_{kj}^2,\ \ k=1,\dots,k_0.$$

Из определения v_k' вытекает, что $v_k'=v_k$, если $J_k=A_k$. Теперь задачу (4.8) можно записать в виде

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{v_k}{\widetilde{\lambda}_k^{\alpha}}\to\max,\quad \sum_{k\in A}v_k+\sum_{k\in\ J\setminus A}v_k'\le\delta^2,\\ \sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{\lambda}_k^{\beta}v_k\le 1,\quad v_k\ge 0,\ \ k\ge 1,\\ v_k\ge\ v_k'\ge 0, k=1,\dots,k_0,\ \ v_k'=v_k,\ \ k\in A.\end{gathered}\tag{4.9}$$

Напишем функцию Лагранжа для задачи (4.9)

$$\mathcal{L}(v,v',\eta_1,\eta_2)=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(-\frac{1}{\widetilde{\lambda}_k^{\alpha}}+\eta_2\widetilde{\lambda}_k^{\beta}\Big)v_k+\eta_1\Big(\sum_{k\in A}v_k+\sum_{k\in\ J\setminus A}v_k'\Big),$$

где $v = \{v_k\}_{k=1}^{\infty}$, $v' = \{v'_k\}_{k=1}^{k_0}$, η_1, η_2—множители Лагранжа. Из **теоремы** 3 следует, что если существуют неотрицательные $\widehat{\eta}_1$, $\widehat{\eta}_2$ и допустимые в (4.9) $\widehat{v}$ и $\widehat{v}'_k$ такие, что выполнены условия

$$(aaa) \quad \mathcal{L}(\widehat{v}, \widehat{v}', \widehat{\eta}_1, \widehat{\eta}_2) = \min\{\mathcal{L}(v, v', \widehat{\eta}_1, \widehat{\eta}_2 : \ v_k \geq v'_k \geq 0, \\ k = 1, \dots, k_0, \ v_k \geq 0, k \in \mathbb{N}\},$$

$$(bbb) \quad \widehat{\eta}_1\big(\sum_{k \in A} \widehat{v}_k + \sum_{k \in \ J \setminus A} \widehat{v}'_k - \delta^2\big) + \widehat{\eta}_2\big(\sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{\lambda}_k^{\beta} \widehat{v}_k - 1\big) = 0,$$

то $\widehat{v}$ и $\widehat{v}'$ - решение задачи (4.9). Из результатов, полученных в **теореме** 3, следует, что если одновременно с этим для всех $\widetilde{f}^N \in l_2^N$ существует решение $\widehat{f}(x)$ экстремальной задачи

$$(4.10) \qquad \widehat{\eta}_1 \|f^N - \widetilde{f}^N\|_{l_2^N}^2 + \widehat{\eta}_2 \|(\mathfrak{L})^{\beta/2} f(x)\|_{L_2(Q)}^2 \to \min, \\ f(x) \in W_2^{\beta}(Q) \ ,$$

то

$$E_{N,\,2}(W_2^{\beta}(Q), \alpha, \delta) = \sqrt{\widehat{\eta}_1 \delta^2 + \widehat{\eta}_2} \ ,$$

а метод, определенный формулой (4.6) для $f(x) = \widehat{f}(x)$, является оптимальным.

Рассмотрим еще одну экстремальную задачу

$$(4.11) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k}{\widetilde{\lambda}_k^{\alpha}} \to \max, \quad \sum_{k \in A} v_k \leq \delta^2, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{\lambda}_k^{\beta} v_k \leq 1, v_k \geq 0, \ k \geq 1,$$

где v_k определены выше. Введем новые обозначения

$$\mu_k = \widetilde{\lambda}_k^{-\alpha}, \ \gamma_k = \widetilde{\lambda}_k^{\beta},$$

тогда задача (4.11) примет вид

$$(4.12) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k v_k \to \max, \quad \sum_{k \in A} v_k \leq \delta^2, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k v_k \leq 1, \ v_k \geq 0, \ k \geq 1.$$

Последовательность $\{\mu_k\}$ монотонно убывает, последовательность $\{\gamma_k\}$ монотонно возрастает (в силу своего определения), следовательно, задача (4.12) совпадает с задачей, рассмотренной в **лемме** 1.

Пусть последовательности $\widehat{v}$ и $\widehat{v'}$ являются решением задачи (4.9), тогда последовательность $\widehat{v}$ является одной из допустимых в задаче (4.11). Из этого следует, что если некоторая последовательность $\widetilde{v}$ есть решение задачи (4.11), то выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\widetilde{v}_k}{\widetilde{\lambda}_k^{\alpha}} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\widehat{v}_k}{\widetilde{\lambda}_k^{\alpha}}. \tag{4.13}$$

Решение $\widetilde{v}$ задачи (4.11) и соответствующие этому случаю $\widehat{\eta}_1$ и $\widehat{\eta}_2$ дает **лемма** 1. Учитывая, что

$$\gamma_k = \widetilde{\lambda}_k^{\beta},\ \mu_k = \widetilde{\lambda}_k^{-\alpha},$$

получаем:

1) если $k^* = 1$, то

$$\widetilde{v}_1 = \frac{1}{\widetilde{\lambda}_1^{\beta}},\ \widetilde{v}_k = 0,\ k > 1,\ \widehat{\eta}_1 = 0,\ \widehat{\eta}_2 = \frac{1}{\widetilde{\lambda}_1^{\alpha+\beta}}\ ;$$

2) если $k^* > 1$, то

$$\widetilde{v}_1 = \delta^2,\ \widetilde{v}_{k^*} = \frac{1-\delta^2\widetilde{\lambda}_1^{\beta}}{\widetilde{\lambda}_{k^*}^{\beta}},\ \widetilde{v}_k = 0,\ k \geq 2, k \neq k^*,$$

$$\widehat{\eta}_1 = \frac{1}{\widetilde{\lambda}_1^{\alpha}} - \frac{\widetilde{\lambda}_1^{\beta}}{\widetilde{\lambda}_{k^*}^{\alpha+\beta}}\ ,\quad \widehat{\eta}_2 = \frac{1}{\widetilde{\lambda}_{k^*}^{\alpha+\beta}}\ ,$$

где

$$k^* = \min(k:\ k \in \mathbb{N}\backslash A).$$

Положим

$$\widehat{v} = \widetilde{v},\ \widehat{v}'_k = 0,\ k \in J\backslash A.$$

Последовательности $\widehat{v}$ и $\widehat{v}'$ допустимы в задаче (4.9), следовательно, в силу выполнения неравенства (4.13), они являются решением этой задачи. Проверим теперь, что $\widehat{v}$, $\widehat{v}'$, $\widehat{\eta}_1$ и $\widehat{\eta}_2$, определенные выше, удовлетворяют условиям (*aaa*) и (*bbb*).

Если $k^* = 1$, то для всех неотрицательных v_k

$$\mathcal{L}(v, v', \widehat{\eta}_1, \widehat{\eta}_2) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{\widetilde{\lambda}_k^{\alpha}} + \frac{\widetilde{\lambda}_k^{\beta}}{\widetilde{\lambda}_1^{\alpha+\beta}}\right)v_k \geq 0,$$

так как $\widetilde{\lambda}_k$ монотонно возрастают, а

$$\mathcal{L}(\widehat{v}, \widehat{v}', \widehat{\eta}_1, \widehat{\eta}_2) = 0,$$

то есть условие (aaa) выполняется. Условие (bbb) также выполнено, что легко проверяется непосредственной подстановкой.

Теперь проверим выполнение условий (*aaa*) и (*bbb*) для случая, когда $k^* > 1$. Подставляя в функцию Лагранжа значения $\widehat{\eta}_1$ и $\widehat{\eta}_2$, а также учитывая то, что $\widetilde{\lambda}_k$ монотонно возрастают, коэффициент при v_{k^*} в первой сумме равен нулю и k^* не принадлежит множеству A, получаем, что

$$\mathcal{L}(v, v', \widehat{\eta}_1, \widehat{\eta}_2) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{\widetilde{\lambda}_k^{\alpha}} + \frac{\widetilde{\lambda}_k^{\beta}}{\widetilde{\lambda}_{k^*}^{\alpha+\beta}}\right)v_k +$$

$$+\left(\frac{1}{\widetilde{\lambda}_1^{\ \alpha}} - \frac{\widetilde{\lambda}_1^{\beta}}{\widetilde{\lambda}_{k^*}^{\alpha+\beta}}\right)\left(\sum_{k\in A} v_k + \sum_{k\in\ J\setminus A} v_k^{'}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{k^*-1}\left(-\frac{1}{\widetilde{\lambda}_k^{\alpha}} + \frac{\widetilde{\lambda}_k^{\beta}}{\widetilde{\lambda}_{k*}^{\alpha+\beta}} + \frac{1}{\widetilde{\lambda}_1^{\alpha}} - \frac{\widetilde{\lambda}_1^{\beta}}{\widetilde{\lambda}_{k*}^{\alpha+\beta}}\right)v_k + \sum_{k^*+1}^{\infty}\left(-\frac{1}{\widetilde{\lambda}_k^{\alpha}} + \frac{\widetilde{\lambda}_k^{\beta}}{\widetilde{\lambda}_{k^*}^{\alpha+\beta}}\right)v_k +$$

$$+\left(\frac{1}{\widetilde{\lambda}_1^{\alpha}} - \frac{\widetilde{\lambda}_1^{\beta}}{\widetilde{\lambda}_{k^*}^{\alpha+\beta}}\right)\left(\sum_{\substack{k\in A\\ k>k^*}} v_k + \sum_{k\in\ J\setminus A} v_k^{'}\right) \geq 0$$

для любых $v_k \geq 0,\ v_k' \geq 0$.

Учитывая, что $\mathcal{L}(\widehat{v}, \widehat{v}', \widehat{\eta}_1, \widehat{\eta}_2) = 0$ (это легко проверяется непосредственной подстановкой), убеждаемся в том, что и в этом случае условие (aaa) выполнено. Условие (bbb) принимает вид

$$\widehat{\eta}_1(\delta^2 - \delta^2) + \widehat{\eta}_2\left(\delta^2\widetilde{\lambda}_1^{\beta} + \frac{1-\delta^2\widetilde{\lambda}_1^{\beta}}{\widetilde{\lambda}_{k^*}^{\beta}}\widetilde{\lambda}_{k^*}^{\beta} - 1\right) = 0,$$

то есть оно тоже выполняется.

Теперь перейдем к экстремальной задаче (4.10). Используя равенство Парсеваля, перепишем ее в виде

$$\widehat{\eta}_1 \sum_{k=1}^{k_0}\sum_{j\in A_k}(\widetilde{a}_{kj} - y_{kj})^2 + \widehat{\eta}_2\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{\lambda}_k^{\beta}\sum_{j=1}^{r_k}\widetilde{a}_{kj}^2 \to \min, \tag{4.14}$$

$$f(x) \in W_2^{\beta}(Q).$$

Для решения этой задачи воспользуемся стандартным методом поиска точек экстремума для функций многих переменных. Дифференцируя исследуемое выражения по $\widetilde{a}_{kj}$, получим систему

$$\widehat{\eta}_1(\widetilde{a}_{kj} - y_{kj}) + \widehat{\eta}_2\widetilde{\lambda}_k^{\beta}\widetilde{a}_{kj} = 0,\ k = 1,\dots,k_0,\ j\in A_k;$$

$$\widetilde{a}_{kj} = 0,\ k = 1,\dots,k_0,\ j \in (J_k\setminus A_k),$$

$$k > k_0,\ j = 1,\dots,a_k.$$

Решением этой системы являются коэффициенты

$$\widehat{a}_{kj} = \frac{\widehat{\eta}_1 y_{kj}}{\widehat{\eta}_1 + \widehat{\eta}_2\widetilde{\lambda}_k^{\beta}}\ ,\ k = 1,\dots,k_0,\ j\in A_k;$$

$$\widehat{a}_{kj} = 0,\ k = 1,\dots,k_0,\ j\in(J_k\setminus A_k),$$

$$\widehat{a}_{kj} = 0, \quad k > k_0,\ j = 1,\dots,a_k,$$

а решением задачи (4.10)—функция

$$\widehat{f}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{r_k} \widehat{a}_{kj} \widetilde{\varphi}_{kj}(x).$$

Подставляя коэффициенты $\widehat{a}_{kj}$ в формулу (4.6), получаем, что метод

$$\widehat{\psi}_1(x) = \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\widehat{\eta}_1 \widetilde{\lambda}_k^{-\alpha/2}}{\widehat{\eta}_1 + \widehat{\eta}_2 \widetilde{\lambda}_k^{\beta}} \sum_{j \in A_k} y_{kj} \widetilde{\varphi}_{kj}(x)$$

является оптимальным, а значение $E_{N,\,2}(W_2^{\beta}(Q), \alpha, \delta)$ находится по формуле

$$E_{N,2}(W_2^{\beta}(Q), \alpha, \delta) = \sqrt{\frac{1}{\widetilde{\lambda}_{k^*}^{(\alpha+\beta)}} + \frac{\delta^2}{\widetilde{\lambda}_1^{\alpha}} \left[1 - \left(\frac{\widetilde{\lambda}_1}{\widetilde{\lambda}_{k^*}} \right)^{(\alpha+\beta)} \right]} \quad .$$

Покажем, что существует другой оптимальный метод, использующий только часть коэффициентов вектора $\widetilde{f}^N$. Пусть

$$N_1 = \sum_{k=1}^{k^*-1} r_k,$$

где k^* определено выше. Рассмотрим новую задачу восстановления, в которой для приближения функции $f(x)$ из правой части уравнения Пуассона взят вектор $\widetilde{f}^{N_1}$, координатами которого являются координаты

$$\widetilde{a}_{kj}, \; k = 1, \ldots, k^* - 1, j = 1, \ldots, r_k,$$

вектора $\widetilde{f}^N$. Из того, что вектор $\widetilde{f}^{N_1}$ есть частный вариант вектора $\widetilde{f}^N$,

$$k_0 = k^* - 1, \; A_k = J_k, \; k = 1, \ldots, k^* - 1, \; J = A = \{1, \ldots, k^* - 1\}$$

и

$$\min(k : \; \mathbb{N} \backslash A) = k^*,$$

следует, что значения $\widehat{\eta}_1$ и $\widehat{\eta}_2$ имеют тот же вид, что и в задаче с вектором $\widetilde{f}^N$. Коэффициенты $\widehat{a}_{kj}$, являющиеся решением второй экстремальной задачи (4.14), для этого случая задаются соотношениями

$$\widehat{a}_{kj} = \frac{\widehat{\eta}_1 y_{kj}}{\widehat{\eta}_1 + \widehat{\eta}_2 \widetilde{\lambda}_k^{\beta}} \;, \; k = 1, \ldots, k^* - 1, \; j = 1, \ldots, a_k,$$

$$\widehat{a}_{kj} = 0, \; k \geq k^*, \; j = 1, \ldots, r_k.$$

Следовательно, значение оптимальной погрешности восстановления вычисляется по формуле

$$E_{N_1,2}(W_2^{\beta}(Q), \alpha, \delta) = \sqrt{\frac{1}{\widetilde{\lambda}_{k^*}^{(\alpha+\beta)}} + \frac{\delta^2}{\widetilde{\lambda}_1^{\alpha}} \left[1 - \left(\frac{\widetilde{\lambda}_1}{\widetilde{\lambda}_{k^*}} \right)^{(\alpha+\beta)} \right]} \quad ,$$

а в качестве оптимального можно взять метод

$$\widehat{\psi}(x) = \sum_{k=1}^{k^*-1} \frac{\widehat{\eta}_1 \widetilde{\lambda}_k^{-\alpha/2}}{\widehat{\eta}_1 + \widehat{\eta}_2 \widetilde{\lambda}_k^{\beta}} \sum_{j=1}^{r_k} y_{kj} \widetilde{\varphi}_{kj}(x).$$

Используя определение оптимального метода и погрешности оптимального восстановления, а также учитывая, что

$$\|f^{N_1} - \widetilde{f}^{N_1}\|_{l_2^{N_1}} \le \|f^N - \widetilde{f}^N\|_{l_2^N},$$

метод $\widehat{\psi}(x)$—оптимальный для задачи с вектором $\widetilde{f}^{N_1}$ и

$$\widehat{\psi}(\widetilde{f}^{N_1})(x) \equiv \widehat{\psi}(\widetilde{f}^N)(x),$$

имеем

$$\begin{aligned} &E_{N_1,2}(W_2^\beta(Q),\alpha,\delta) = \\ &\quad = \sup_{f(x)\in W_2^\beta(Q)} \sup_{\substack{\widehat{f}^{N_1}\in\ l_2^{N_1} \\ \|f^{N_1}-\widehat{f}^{N_1}\|_{l_2^{N_1}}\le\delta}} \|u(x) - \widehat{\psi}(\widehat{f}^{N_1})(x)\|_{L_2(Q)} \ge \\ &\qquad\qquad \ge \sup_{f(x)\in W_2^\beta(Q)} \sup_{\substack{\widehat{f}^{N}\in\ l_2^{N} \\ \|f^{N}-\widehat{f}^{N}\|_{l_2^{N}}\le\delta}} \|u(x) - \widehat{\psi}(\widehat{f}^{N})(x)\|_{L_2(Q)}. \end{aligned}$$

С другой стороны, так как метод $\widehat{\psi}_1(x)$ является оптимальным для задачи с вектором $\widetilde{f}^N$, получаем, что выполнено еще одно неравенство

$$\begin{aligned} &\sup_{f(x)\in W_2^\beta(Q)} \sup_{\substack{\widehat{f}^{N}\in\ l_2^{N} \\ \|f^{N}-\widehat{f}^{N}\|_{l_2^{N}}\le\delta}} \|u(x) - \widehat{\psi}(\widehat{f}^{N})(x)\|_{L_2(Q)} \ge \\ &\qquad \ge \sup_{f(x)\in W_2^\beta(Q)} \sup_{\substack{\widetilde{f}^{N}\in\ l_2^{N}: \\ \|f^{N}-\widetilde{f}^{N}\|_{l_2^{N}}\le\delta}} \|u(x) - \widehat{\psi}_1(\widetilde{f}^{N})(x)\|_{L_2(Q)} = \\ &\qquad\qquad\qquad = E_{N,2}(W_2^\beta(Q),\alpha,\delta). \end{aligned}$$

Из этих неравенств и из того, что

$$E_{N_1,2}(W_2^\beta(Q),\alpha,\delta) = E_{N,2}(W_2^\beta(Q),\alpha,\delta),$$

вытекает, что метод $\widehat{\psi}(x)$ является оптимальным. $\square$

Рассмотрим теперь случай равномерной метрики $p = \infty$. Положим

$$A_{k_0+1} = \emptyset,\ J_{k_0+1} = \{1, \ldots, r_{k_0+1}\},$$

$$k^* = \min(k:\ J_k \ne A_k,\ 1 \le k \le k_0 + 1),$$

$$\widetilde{k} = \begin{cases} 0, & \delta^2 \geq (\widetilde{\lambda}_1^{\beta} r_1)^{-1}, \\ \max(k : \delta^2 \sum\limits_{l=1}^{k} \widetilde{\lambda}_l^{\beta} r_k < 1, 1 \leq k), & \delta^2 < (\widetilde{\lambda}_1^{\beta} r_1)^{-1}, \end{cases}$$

$$m = \begin{cases} \widetilde{k} + 1, & \widetilde{k} + 1 < k^*, \\ k^*, & \widetilde{k} + 1 \geq k^*. \end{cases}$$

Теорема 16. *Пусть α, β и δ—произвольные положительные числа. Тогда*

1) *если $m = 1$, то*

$$E_{N,\infty}(W_2^{\beta}(Q), \alpha, \delta) = \frac{1}{\widetilde{\lambda}_1^{(\alpha+\beta)/2}}$$

и метод

$$u(x) \approx \widehat{\psi}(\widetilde{f}^N)(x) \equiv 0;$$

является оптимальным;

2) *если $m > 1$, то*

$$E_{N,\infty}(W_2^{\beta}(Q), \alpha, \delta) = \sqrt{\delta^2 \sum_{j=1}^{m-1} \left(\frac{1}{\widetilde{\lambda}_k^{\alpha}} - \frac{\widetilde{\lambda}_k^{\beta}}{\widetilde{\lambda}_m^{\alpha+\beta}} \right) r_k + \frac{1}{\widetilde{\lambda}_m^{\alpha+\beta}}}\ ,$$

а метод

$$u(x) \approx \widehat{\psi}(\widetilde{f}^N)(x) = \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{r_k} \left[1 - \left(\frac{\widetilde{\lambda}_k}{\widetilde{\lambda}_m} \right)^{\alpha+\beta} \right] y_{kj}\, \widetilde{\varphi}_{kj}(x)$$

является оптимальным.

Доказательство. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\|u(x)\|^2_{L_2(Q)} \to \max, \quad \|f^N\|^2_{l^N_\infty} \leq \delta^2, \qquad \|(\mathfrak{L})^{\beta/2} f(x)\|^2_{L_2(Q)} \leq 1. \tag{4.15}$$

Используя равенство Парсеваля, перепишем экстремальную задачу (4.15) для данного случая в виде

$$\begin{gathered} \|u(x)\|^2_{L_2(Q)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\widetilde{\lambda}_k^{\alpha}} \sum_{j=1}^{r_k} \widetilde{a}_{kj}^2 \to \max, \\ \widetilde{a}_{kj}^2 \leq \delta^2, \ k = 1, \dots, k_0, \ j \in A_k, \\ \|(\mathfrak{L})^{\beta/2} f(x)\|^2_{L_2(Q)} = \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{\lambda}_k^{\beta} \sum_{j=1}^{r_k} \widetilde{a}_{kj}^2 \leq 1. \end{gathered} \tag{4.16}$$

Введем функцию Лагранжа для задачи (4.16)

$$\mathcal{L}_1(a, \eta, \zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{r_k} \big(-\widetilde{\lambda}_k^{-\alpha} + \zeta \widetilde{\lambda}_k^{\beta}\big) \widetilde{a}_{kj}^2 + \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{j \in A_k} \eta_{kj} \widetilde{a}_{kj}^2,$$

где

$$a = \{\widetilde{a}_{kj}^2\}, k \geq 1, j = 1, \dots, r_k,$$
$$\zeta,\ \eta = \{\eta_{kj}\}, k = 1, \dots, k_0, j \in A_k -$$

множители Лагранжа. Будем искать последовательность $\widehat{a} = \{\widehat{a}_{kj}\}$ и такие неотрицательные $\widehat{\eta}_{kj},\ \widehat{\zeta}$, чтобы были выполнены условия

$$(ccc) \quad \mathcal{L}_1(\widehat{a}, \widehat{\eta}, \widehat{\zeta}) = \min_{a_{kj} \in \mathbb{R}} \mathcal{L}_1(a, \widehat{\eta}, \widehat{\zeta}),$$

$$(ddd) \quad \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{j \in A_k} \widehat{\eta}_{kj} \big(\widehat{a}_{kj}^2 - \delta^2\big) + \widehat{\zeta}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{r_k} \widetilde{\lambda}_k^{\beta} \widehat{a}_{kj}^2 - 1\Big) = 0,$$

тогда $\widehat{a}$ будет решением задачи (4.16). Введем новые обозначения

$$\mu_k = \widetilde{\lambda}_k^{-\alpha},\ \gamma_k = \widetilde{\lambda}_k^{\beta},\ k \geq 1,$$
$$b_{kj} = \widetilde{a}_{kj}^2,\ k \geq 1, j = 1, \dots, r_k$$

и перепишем задачу (4.16) в виде

$$(4.17) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \sum_{j=1}^{r_k} b_{kj} \to \max, \quad b_{kj} \leq \delta^2,\ k = 1, ..., k_0,\ j \in A_k,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \sum_{j=1}^{r_k} b_{kj} \leq 1, \quad b_{kj} \geq 0,\ k \geq 1,\ j = 1, ..., r_k.$$

Так как $\widetilde{\lambda}_k$ монотонно возрастают, $\mu_{k+1} < \mu_k,\ \gamma_{k+1} > \gamma_k,\ k = 1, 2, \dots,$ то тем самым получаем экстремальную задачу из **леммы** 2. Следовательно, решением задачи (4.16) будет последовательность $\widehat{a}$, задаваемая соотношениями:

1) если $m = 1$, то

$$\widehat{a}_{kj}^{\,2} = 0,\ k \geq 2,\ j = 1, \dots, r_k,$$

и при $k^* = 1$

$$\widehat{a}_{1j}^{\,2} = \begin{cases} (\widetilde{\lambda}_1^{\beta}(r_k - q_k))^{-1}, & j \in J_1 \backslash A_1, \\ 0, & j \in A_1, \end{cases}$$

при $k^* > 1$

$$\widehat{a}_{1j}^{\,2} = (\widetilde{\lambda}_1^{\beta} r_1)^{-1},\ j = 1, \dots, r_1;$$

2) если $m > 1$, то

$$\widehat{a}_{kj}^{\,2} = \begin{cases} \delta^2, & k = 1, \dots, m-1, j = 1, \dots, r_k, \\ 0, & k > m, j = 1, \dots, r_k, \end{cases}$$

и при $m = \widetilde{k} + 1$

$$\widehat{a}_{mj}^{\,2} = \left(1 - \delta^2 \sum_{k=1}^{m-1} \widetilde{\lambda}_k^{\beta} r_k\right) \big(\widetilde{\lambda}_m^{\beta} r_m\big)^{-1}, j = 1, \dots, r_m,$$

при $m = k^*$

$$\widehat{a}_{mj}^{\,2} = \begin{cases} \left(1 - \delta^2 \sum\limits_{k=1}^{m-1} \widetilde{\lambda}_k^{\beta} r_k\right) \left(\widetilde{\lambda}_m^{\beta}(r_m - q_m)\right)^{-1}, & j \in J_m \backslash A_m, \\ 0, & j \in A_m. \end{cases}$$

Значения $\widehat{\eta}_{kj}$ и $\widehat{\zeta}$, удовлетворяющие условиям (ccc) и (ddd), задаются формулами

1. Если $m = 1$, то

$$\widehat{\eta}_{kj} = 0, \ 1 \le k \le k_0, j \in A_k, \ \widehat{\zeta} = \frac{1}{\widetilde{\lambda}_1^{\alpha+\beta}} \ ,$$

2. Если $m > 1$, то

$$\widehat{\eta}_{kj} = \frac{1}{\widetilde{\lambda}_k^{\alpha}} - \frac{\widetilde{\lambda}_k^{\beta}}{\widetilde{\lambda}_m^{\alpha+\beta}} \ , \ k = 1, \dots, m-1, j = 1, \dots, r_k,$$

$$\widehat{\eta}_{kj} = 0, \ m \le k \le k_0, j \in A_k, \quad \widehat{\zeta} = \frac{1}{\widetilde{\lambda}_m^{\alpha+\beta}} \ .$$

Из результатов, полученных в **теореме** 3, следует, что если экстремальная задача

$$\sum_{k=1}^{k_0} \sum_{j \in A_k} \widehat{\eta}_{kj} \big(\widetilde{a}_{kj} - y_{kj}\big)^2 + \widehat{\zeta} \|(\mathfrak{L})^{\beta/2} f(x)\|^2_{L_2(Q)} \to \min, \quad f(x) \in W_2^{\beta}(Q), \tag{4.18}$$

имеет решение $\widehat{f}(x) \in W_2^{\beta}(Q)$ для любых $\widetilde{f}^N \in l_\infty^N$, то величину оптимальной погрешности можно найти по формуле

$$E_{N,2}(W_2^{\beta}(Q), \alpha, \delta) = \sqrt{\sum_{k=1}^{k_0} \sum_{j \in A_k} \widehat{\eta}_{kj} \delta^2 + \widehat{\zeta}} \ , \tag{4.19}$$

а в качестве оптимального можно выбрать метод

$$\widehat{\psi}(\widetilde{f}^N)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{\lambda}_k^{-\alpha/2} \sum_{j=1}^{r_k} \widehat{a}_{kj} \widetilde{\varphi}_{kj}(x), \tag{4.20}$$

где $\widehat{a}_{kj}$—коэффициенты Фурье функции $\widehat{f}(x)$, являющейся решением задачи (4.18). Используя равенство Парсеваля, перепишем эту задачу в виде

$$\sum_{k=1}^{k_0} \sum_{j \in A_k} \widehat{\eta}_{kj} \big(\widetilde{a}_{kj} - y_{kj}\big)^2 + \widehat{\zeta} \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{\lambda}_k^{\beta} \sum_{j=1}^{r_k} \widetilde{a}_{kj}^{\,2} \to \min, \quad f(x) \in W_2^{\beta}(Q). \tag{4.21}$$

Дифференцируя сумму по $\widetilde{a}_{kj}$ и учитывая, что $\widehat{\eta}_{kj} = 0,\ m \le k \le k_0, j \in A_k$, получим систему уравнений для $\widehat{a}_{kj}$:

$$\widehat{\eta}_{kj}(\widehat{a}_{kj} - y_{kj}) + \widehat{\zeta}\widetilde{\lambda}_k^{\beta}\widehat{a}_{kj} = 0,$$
$$k = 1, \dots, m-1,\ j = 1, \dots, r_k,$$

$$\widehat{a}_{kj}^{\,2} = 0,\ k \ge m,\ \ j = 1, \dots, r_k,$$

откуда получаем выражения для $\widehat{a}_{kj}$

$$\widehat{a}_{kj} = \frac{\widehat{\eta}_{kj}}{\widehat{\eta}_{kj} + \widehat{\zeta}\widetilde{\lambda}_k^{\beta}}\ y_{kj},$$
$$k = 1, \dots, m-1,\ j = 1, \dots, r_k,$$
$$\widehat{a}_{kj} = 0, k \ge m, j = 1, \dots, r_k.$$

Из выпуклости задачи следует, что найденное решение есть точка минимума. Следовательно, задача (4.18) имеет решение для любого вектора $\widetilde{f}^N \in l_\infty^N$.

Подставляя в формулу (4.20) значения $\widehat{a}_{kj}$ и учитывая вид $\widehat{\eta}_{kj}$ и $\widehat{\zeta}$, получаем, что метод

$$u(x) \approx \widehat{\psi}(\widetilde{f}^N)(x) = \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{r_k}\left[1 - \left(\frac{\widetilde{\lambda}_k}{\widetilde{\lambda}_m}\right)^{\alpha+\beta}\right] y_{kj}\widetilde{\varphi}_{kj}(x)$$

является оптимальным.

Для вычисления величины оптимальной погрешности, после подстановки $\widehat{\eta}_{kj}$ и $\widehat{\zeta}$ в (4.19), получим формулу

$$E_{N,\infty}(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta) = \sqrt{\delta^2\sum_{j=1}^{m-1}\left(\frac{1}{\widetilde{\lambda}_k^\alpha} - \frac{\widetilde{\lambda}_k^\beta}{\widetilde{\lambda}_m^{\alpha+\beta}}\right) r_k + \frac{1}{\widetilde{\lambda}_m^{\alpha+\beta}}}\ .$$

Если $m = 1$, то оптимальный метод принимает вид

$$u(x) \approx \widehat{\psi}(\widetilde{f}^N)(x) \equiv 0,$$

а

$$E_{N,\infty}(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta) = \widetilde{\lambda}_1^{-(\alpha+\beta)/2}\ .$$

$\square$

Пусть

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{r_k}\widetilde{a}_{kj}\widetilde{\varphi}_{kj}(x).$$

Назовем k—пачкой группу коэффициентов $\widetilde{a}_{kj},\ j = 1, \dots, r_k$, где r_k—размерность подпространства $\Phi_k \in L_2(Q)$, базисом которого являются функции $\widetilde{\varphi}_{k1}(x), \dots, \widetilde{\varphi}_{kr_k}(x)$, соответствующие собственному значению $\widetilde{\lambda}_k$.

Пусть $\widetilde{f}^N = \{y_{kj}\},\ k = 1, \dots, k_0,\ j \in A_k$—вектор, приближённо описывающий функцию $f(x)$ из правой части уравнения (4.3).

Из результатов, полученных в **теоремах** 15 и 16, можно сделать следующие выводы.

1) Если в k-пачке среди коэффициентов $y_{kj},\ 1 \le k \le k_0,\ j \in A_k$, отсутствует хотя бы один коэффициент y_{kj}, (что соответствует выполнению условия $A_k \neq J_k$), то ни один из коэффициентов этой пачки, равно как и ни один из коэффициентов всех следующих пачек (по возрастанию k), входящих в вектор $\widetilde{f}^N$, при построении оптимального метода не используются.

2) В случае, когда $p = \infty$, количество коэффициентов, необходимых для построения оптимального метода, может быть еще уменьшено, если $\widetilde{k} < k^* - 1$, где k^*—номер первой по порядку неполной пачки. Тогда в построении оптимального метода участвуют только k-пачки с номерами от 1 до $\widetilde{k}$ включительно. Здесь присутствует эффект так называемого информационного насыщения.

4.2. Оптимальное восстановление решения обобщенного уравнения Пуассона в шаре

Здесь рассмотрен пример применения результатов, полученных в разделе 4.1, в случае, когда область Q есть d-мерный шар.

Пусть

$$\mathbb{B}^d = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : |x| < 1\} -$$

единичный d—мерный шар,

$$\mathbb{S}^{d-1} = \{x' \in \mathbb{R}^d :\ |x'| = 1\} -$$

единичная $(d-1)$-мерная сфера, где

$$|x| = (\sum_{i=1}^{d} x_i^2)^{1/2}.$$

Пусть $Y_j^{(k)}(x'),\ k = 0, 1, \dots,\ j = 1, \dots, a_k$—ортонормированный базис в $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ из сферических функций, $\mu_s^{(p)}$—s-й корень функции Бесселя первого рода $J_{(p)}(x),\ p = k + d/2 - 1,\ x \in \mathbb{B}^d$. Функции

$$Z_{skj}(x) = \frac{J_{(p)}(\mu_s^{(p)} r)}{r^{d/2-1}} Y_j^{(k)}(x'), s = 1, 2, \dots,\ k = 0, 1, \dots,\ j = 1, \dots, a_k$$

являются собственными функциями оператора Лапласа $(-\Delta)$ в $\mathbb{B}^d$ с собственными значениями $(\mu_s^{(p)})^2$ и образуют ортогональный базис в $L_2(\mathbb{B}^d)$. Его можно нормировать, положив

$$Y_{skj}(x) = \frac{Z_{skj}(x)}{\|Z_{skj}(x)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}}\ .$$

Пусть $f \in L_2(\mathbb{B}^d)$ и ее разложение в ряд Фурье по системе $\{Y_{skj}(x)\}$ имеет вид

$$f(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{skj} Y_{skj}(x).$$

Рассмотрим уравнение Пуассона в шаре $\mathbb{B}^d$

$$-\Delta u(x) = f(x)$$

с нулевым граничным условием

$$u|_{\mathbb{S}^{d-1}} = 0.$$

Решение этого уравнения может быть записано в виде

$$u(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (\mu_s^{(p)})^{-2} \sum_{j=1}^{a_k} c_{skj} Y_{skj}(x).$$

Определим оператор $(-\Delta)^{\alpha/2}$ следующим образом

$$(-\Delta)^{\alpha/2} f = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (\mu_s^{(p)})^{\alpha} \sum_{j=1}^{a_k} c_{skj} Y_{skj}(x).$$

где α—фиксированное положительное число. Рассмотрим в шаре $\mathbb{B}^d$ обобщённое уравнение Пуассона

$$(-\Delta)^{\alpha/2} u(x) = f(x) \tag{4.22}$$

с нулевым граничным условием

$$u|_{\mathbb{S}^{d-1}} = 0. \tag{4.23}$$

Если $f(x)$ задана своим рядом Фурье

$$f(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{skj} Y_{skj}(x), \tag{4.24}$$

то решение задачи (4.22),(4.23) можно записать в виде

$$u(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (\mu_s^{(p)})^{-\alpha} \sum_{j=1}^{a_k} c_{skj} Y_{skj}(x).$$

Известно, что числа $\mu_s^{(p)}$ обладают следующими свойствами:

$\mu_s^{(p)} > 0,\ s \in \mathbb{N},\ p = d + k/2 - 1, k = 0, 1, \dots;$

$\mu_s^{(p)}$ монотонно возрастают по s и по k и стремятся к ∞;

функции $J_{(m)}(t)$ и $J_{(m+n)}(t)$ при $m = 1, 2, \dots,$ и $n = 1/2, 3/2, 5/2, \dots,$ не имеют общих корней.

Перенумеруем $\mu_s^{(p)}$, расположив их в порядке возрастания, и введем новые обозначения

$$\widetilde{\mu}_l = \mu_s^{(p)},\ 0 < \widetilde{\mu}_1 < \widetilde{\mu}_2 < \ldots < \widetilde{\mu}_l < \ldots,$$
$$l = 1, 2, \ldots.$$

Каждому значению $\widetilde{\mu}_l$ соответствует пара индексов (s_l, k_l), задаваемая по правилу

$$\widetilde{\mu}_l = \mu_{s_l}^{(p_l)},\ p_l = d + \frac{k_l}{2} - 1.$$

Введем новую нумерацию и новые обозначения для $Y_{skj}(x)$ и c_{skj} :

$$\widetilde{Y}_{lj}(x) = Y_{s_l k_l j}(x),\ j = 1, \ldots, a_{k_l},$$

$$\widetilde{c}_{lj} = c_{s_l k_l j},\ j = 1, \ldots, a_{k_l}.$$

Теперь разложения для $f(x)$ и $u(x)$ можно записать в виде

$$f(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_{k_l}} \widetilde{c}_{lj} \widetilde{Y}_{lj}(x), \tag{4.25}$$

$$u(x) = \sum_{l=1}^{\infty} (\widetilde{\mu}_l)^{-\alpha} \sum_{j=1}^{a_{k_l}} \widetilde{c}_{lj} \widetilde{Y}_{lj}(x). \tag{4.26}$$

Рассмотрим задачу оптимального восстановления (4.22),(4.23) при условии, что правая часть уравнения (4.22) задана неточно. Предполагается, что в разложении (4.24) функции $f(x)$ известно N коэффициентов Фурье $\{y_{lj}\}$, причем эти коэффициенты даны с некоторой погрешностью.

Введем вектор $\widetilde{f}^N$, координатами которого являются числа $\{y_{lj}\} \approx \widetilde{c}_{lj}$. Учитывая результаты, полученные в предыдущем параграфе, зададим $\widetilde{f}^N$ следующим образом:

$$\widetilde{f}^N = \{y_{lj}\},\ l = 1, \ldots, l_0,\ j = 1, \ldots, a_{k_l},\ N = \sum_{l=1}^{l_0} a_{k_l},$$

то есть приближенные коэффициенты $\{y_{lj}\}$ образуют полные пачки.

Предполагается, что для произвольного фиксированного вектора $\widetilde{f}^N \in l_p^N$ выполнено неравенство

$$\|\widetilde{f}^N - f^N\|_{l_p^N} \le \delta,$$

где δ—фиксированное положительное число, и

$$f^N = \{\widetilde{c}_{lj}\}, l = 1, \ldots, l_0, j = 1, \ldots, a_{l_0}.$$

Задача заключается в том, чтобы по информации о векторе $\widetilde{f}^N$ восстановить решение задачи (4.22) в метрике $L_2(\mathbb{B}^d)$. Будем предполагать, что функция $f(x)$ принадлежит обобщённому соболевскому классу

$$W_2^\beta(\mathbb{B}^d) = \left\{ f(x) \in L_2(\mathbb{B}^d) :\ \|(-\Delta)^{\beta/2} f(x)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)} \le 1 \right\},$$

где $\beta > 0$—заданное число. В качестве методов восстановления рассмотрим всевозможные операторы $\varphi : l_p^N \to L_2(\mathbb{B}^d)$. Назовем погрешностью восстановления метода φ величину

$$e_{N,\,p}(W_2^\beta(\mathbb{B}^d), \alpha, \delta, \varphi) =$$
$$= \sup_{f \in W_2^\beta(\mathbb{B}^d)} \sup_{\substack{\widetilde{f}^N \in\ l_p^N: \\ \|f^N - \widetilde{f}^N\|_{l_p^N} \le \delta}} \|u(x) - \varphi(\widetilde{f}_N)(x)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E_{N,\,p}(W_2^\beta(\mathbb{B}^d), \alpha, \delta) = \inf_{\varphi\colon\ l_p^N \to L_2(\mathbb{B}^d)} e_{N,\,p}(W_2^\beta(\mathbb{B}^d), \alpha, \delta, \varphi),$$

а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным.

Так как эта задача является частным случаем общей задачи, рассмотренной в разделе 4.1, где

$$\mathfrak{L} = (-\Delta)^{\alpha/2},\ k(x) \equiv 1,\ a(x) \equiv 0,$$
$$Q = \mathbb{B}^d,\ \partial Q = \mathbb{S}^{d-1},\ \widetilde{\lambda}_l = \widetilde{\mu}_l,\ r_l = a_{k_l},$$
$$\widetilde{\varphi}_{lj}(x) = \widetilde{Y}_{lj}(x),\ l = 1, 2, \ldots,\ j = 1, \ldots, a_{k_l}.$$
$$\widetilde{\mu}_l = (\mu_{s_l}^{(p_l)})^2,\ p_l = d + \frac{k_l}{2} - 1,$$

то, применяя к данной задаче восстановления **теоремы** 15 и 16, получаем следующие результаты:

1) если $p = 2$, то имеет место следующее

Следствие 1. *Если* $\delta^2 < \dfrac{1}{\widetilde{\mu}_1^{2\beta}}$, *то*

$$E_{N,\,2}(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta) = \sqrt{\frac{1}{\widetilde{\mu}_{l_0+1}^{2(\alpha+\beta)}} + \frac{\delta^2}{\widetilde{\mu}_1^{2\alpha}}\left[1 - \left(\frac{\widetilde{\mu}_1}{\widetilde{\mu}_{l_0+1}}\right)^{2(\alpha+\beta)}\right]}\quad,$$

а метод

$$u(x) \approx \sum_{l=1}^{l_0} \frac{1}{\widetilde{\mu}_l^\alpha}\left[1 + \frac{\widetilde{\mu}_l^{2\beta}\widetilde{\mu}_1^{2\alpha}}{\widetilde{\mu}_{l_0+1}^{2(\ \alpha+\beta)} - \widetilde{\mu}_1^{2(\alpha+\beta)}}\right]^{-1} \sum_{j=1}^{a_{k_l}} y_{lj}\widetilde{Y}_{lj}(x)$$

является оптимальным.

Если же $\delta^2 \ge \dfrac{1}{\widetilde{\mu}_1^{2\beta}}$, *то*

$$E_{N,\,2}(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta) = \frac{1}{\widetilde{\mu}_1^{\alpha+\beta}}\ ,$$

а в качестве оптимального можно выбрать метод

$$u(x) \approx 0.$$

2) при $p = \infty$ справедливо

Следствие 2. *Пусть α, β и δ—произвольные положительные числа. Положим*

$$\widetilde{l} = \max(l: \ \delta^2 \sum_{i=1}^{l} \widetilde{\mu}_i^{2\beta} a_{k_i} < 1, \ 1 \le l \le l_0),$$

Тогда

$$E_{N,\infty}(W_2^\beta(\mathbb{B}^d), \alpha, \delta) = \sqrt{\delta^2 \sum_{l=1}^{\widetilde{l}} \left(\frac{1}{\widetilde{\mu}_l^{2\alpha}} - \frac{\widetilde{\mu}_l^{2\beta}}{\widetilde{\mu}_{\widetilde{l}+1}^{2(\alpha+\beta)}} \right) a_{k_l} + \frac{1}{\widetilde{\mu}_{\widetilde{l}+1}^{2(\alpha+\beta)}}} \ ,$$

а метод

$$u(x) \approx \widehat{\psi}(\widetilde{f}^N)(x) = \sum_{l=1}^{\widetilde{l}} \sum_{j=1}^{a_{k_l}} \left[1 - \left(\frac{\widetilde{\mu}_l}{\widetilde{\mu}_{\widetilde{l}+1}} \right)^{2(\alpha+\beta)} \right] y_{lj} \widetilde{Y}_{lj}(x)$$

является оптимальным.

4.3. Оптимальное восстановление решения обобщенного уравнения Пуассона на единичной сфере

Рассмотрим единичную сферу

$$\mathbb{S}^{d-1} = \{x' = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^d: \ |x| = 1\}, \ d \ge 2,$$

где

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_n^2 \right)^{1/2}.$$

Пусть $Y_j^{(k)}(x')$—собственные функции оператора Лапласа-Бельтрами $(-\Delta_S)$, соответствующие собственным значениям

$$\Lambda_k = k(k + d - 2)$$

и такие, что

$$\|Y_j^{(k)}(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} = 1.$$

Рассмотрим обобщённое уравнение Пуассона на единичной сфере $\mathbb{S}^{d-1}$

$$(-\Delta_S)^{\alpha/2} u(x') = f(x') \ , \tag{4.27}$$

где оператор $(-\Delta_S)^{\alpha/2}$ определён ранее в разделе 3.2, функция $f(x')$ принадлежит $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ и разложение $f(x')$ не содержит константы. Если

$$f(x') = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x'), \tag{4.28}$$

то решение задачи (4.27) может быть записано в виде

$$u(x') = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^{-\alpha/2} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x') \ , \tag{4.29}$$

где c_{kj}—коэффициенты Фурье функции $f(x')$.

Рассмотрим задачу оптимального восстановления решения уравнения (4.27). Требуется наилучшим образом восстановить функцию $u(x')$, когда правая часть уравнения (4.27) задана неточно. Считаем, что для любой функции $f(x') \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ известен вектор $\widetilde{f}^N \in l_p^N$, задаваемый следующим образом: пусть дано некоторое фиксированное натуральное число $k_0 \geq 1$ и имеется набор множеств J_k и A_k, где $J_k = \{1, \ldots, a_k\},\ k = 1, \ldots, k_0,\ a_k$—размерность пространства $\mathcal{H}_k,\ \{A_k\}_1^{k_0},\ A_k \subseteq J_k$—произвольные подмножества $J_k,\ q_k$—число элементов множества A_k и

$$N = \sum_{k=1}^{k_0} q_k.$$

Предполагается, что для вектора

$$\widetilde{f}^N = \{y_{kj}\}, k = 1, \ldots, k_0, j \in A_k$$

и для произвольного фиксированного $\delta > 0$ выполняется неравенство

$$\|\widetilde{f}^N - f^N\|_{l_p^N} \leq \delta \ ,$$

где

$$f^N = \{c_{kj}\} \ , \quad k = 1, ..., k_0, \quad j \in A_k.$$

Наша задача заключается в том, чтобы по информации о векторе $\widetilde{f}^N$ восстановить решение задачи (4.27) в метрике $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Будем предполагать, что функция $f(x')$ принадлежит классу

$$\widetilde{W}_2^{\beta}(\mathbb{S}^{d-1}) = \left\{ f(x') \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}) : \ \|(-\Delta_S)^{\beta/2} f\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq 1,\ f \perp 1 \right\}.$$

В качестве методов восстановления рассмотрим всевозможные операторы $\varphi : l_p^N \to L_2(\mathbb{S}^{d-1})$.

Назовем погрешностью восстановления метода φ величину

$$e_{N,\,p}(\widetilde{W}_2^{\beta}(\mathbb{S}^{d-1}), \alpha, \delta, \varphi) =$$

$$= \sup_{f(x') \in \widetilde{W}_2^{\beta}(\mathbb{S}^{d-1}),\, f \perp 1} \ \sup_{\substack{\widetilde{f}^N \in\, l_p^N: \\ \|f^N - \widetilde{f}^N\|_{l_p^N} \leq \delta}} \|u(x') - \varphi(\widetilde{f}_N)(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E_{N,\,p}(\widetilde{W}_2^{\beta}(\mathbb{S}^{d-1}), \alpha, \delta) = \inf_{\varphi : l_p^N \to L_2(\mathbb{S}^{d-1})} e_{N,\,p}(\widetilde{W}_2^{\beta}(\mathbb{S}^{d-1}), \alpha, \delta, \varphi),$$

а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным.

Установим связь между **теоремой** 3 и данной задачей. Пространство $X = \{f(x') \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}),\ \|(-\Delta_S)^{\beta/2} f\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} < \infty\}$, пространство $Z = L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, линейный оператор $T : X \to L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, подлежащий восстановлению, определен равенством

$$Tf(x') = u(x') = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^{-\alpha/2} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x').$$

Имеются два линейных оператора I_1 и I_2. Первый из них определяет множество $W = \widetilde{W}_2^{\beta}(\mathbb{S}^{d-1})$,

$$I_1 = (-\Delta_S)^{\beta/2} : X \to L_2(\mathbb{S}^{d-1}).$$

Второй оператор $I_2 : X \to l_p^N$ определен равенством

$$I_2 f = f^N = \{c_{kj}\},\ k = 1, \dots, k_0, \quad j \in A_k,$$

где $\{c_{kj}\}$—коэффициенты разложения (4.28) функции $f(x')$.

Воспользуемся **теоремой** 3 и рассмотрим эстремальную задачу

$$\begin{aligned} &\|(-\Delta_S)^{\alpha/2} u(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \to \max, \quad \|f^N\|_{l_p^N} \le \delta^2, \\ &\qquad\qquad \|(-\Delta_S)^{\beta/2} f(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \le 1. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Используя равенство Парсеваля, запишем два варианта задачи (4.30) в зависимости от значения p :

1) при $p = 2$

$$\begin{aligned} &\|(-\Delta_S)^{\alpha/2} u(x')\|^2_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\Lambda_k^{\alpha}} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 \to \max, \\ &\|f^N\|^2_{l_2^N} = \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{j \in A_k} c_{kj}^2 \le \delta^2, \\ &\|(-\Delta_S)^{\beta/2} f(x')\|^2_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^{\beta} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 \le 1; \end{aligned} \tag{4.31}$$

2) при $p = \infty$

$$\begin{aligned} &\|(-\Delta_S)^{\alpha/2} u(x')\|^2_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\Lambda_k^{\alpha}} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 \to \max, \\ &c_{kj}^2 \le \delta^2,\ k = 1, \dots, k_0,\ j \in A_k, \\ &\|(-\Delta_S)^{\beta/2} f(x')\|^2_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^{\beta} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 \le 1. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Так как $\{\Lambda_k\}_1^{\infty}$—монотонно возрастающая последовательность, то, полагая $\Lambda_k = \widetilde{\lambda}_k$, сведем задачи (4.31) и (4.32) к задачам (4.8) и (4.16), рассмотренным в разделе 4.1 данной главы. Следовательно, решения и значения множителей Лагранжа для задач (4.31) и

(4.32) совпадают с решениями и значениями множителей Лагранжа для задач (4.8) и (4.16) с учётом замены $\widetilde{\lambda}_k$ на Λ_k.

После этого, следуя **теореме** 3, рассмотрим экстремальные задачи

1)для $p = 2$

$$\widehat{\eta}_1 \| f^N - \widetilde{f}^N \|^2_{l_2^N} + \widehat{\eta}_2 \| (-\Delta_S)^{\beta/2} f \|^2_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} =$$

$$= \widehat{\eta}_1 \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{j \in A_k} (c_{kj} - y_{kj})^2 + \widehat{\eta}_2 \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^{\beta} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 \to \min, \tag{4.33}$$

$$f(x') \in \widetilde{W}_2^{\beta}(\mathbb{S}^{d-1});$$

2) для $p = \infty$

$$\sum_{k=1}^{k_0} \sum_{j \in A_k} \widehat{\eta}_{kj} \big(c_{kj}^2 - \delta^2 \big) + \widehat{\zeta} \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^{\beta} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 \to \min, \tag{4.34}$$

$$f(x') \in \widetilde{W}_2^{\beta}(\mathbb{S}^{d-1}),$$

где $\widehat{\eta}_1, \widehat{\eta}_2, \widehat{\eta}_{kj}, \widehat{\zeta}$—множители Лагранжа, соответствующие задачам (4.31) и (4.32). Эти задачи также совпадают (после переобозначений вида $\widetilde{\lambda}_k = \Lambda_k$) с соответствующими задачами из 4.1. В результате получаем два утверждения:

1)при $p = 2$ положим

$$A = \{k : A_k = J_k,\ 1 \le k \le k_0\},$$

$$J = \{1, 2, \dots, k_0\},$$

$$k^* = \begin{cases} \min\big(k :\ k \in \mathbb{N} \backslash A\big), & \delta^2 < \Lambda_1^{-\beta}, \\ 1, & \delta^2 \ge \Lambda_1^{-\beta}. \end{cases}$$

Здесь имеет место

Теорема 17. *Пусть δ, α и β—произвольные положительные числа.*

Тогда

$$E_{N,2}(W_2^{\beta}(\mathbb{S}^{d-1}), \alpha, \delta) = \sqrt{\frac{1}{\Lambda_{k^*}^{(\alpha+\beta)}} + \frac{\delta^2}{\Lambda_1^{\alpha}} \left[1 - \left(\frac{\Lambda_1}{\Lambda_{k^*}} \right)^{(\alpha+\beta)} \right]} \quad ,$$

а метод

$$u(x') \approx \widehat{\psi}(\widetilde{f}^N)(x') =$$

$$= \begin{cases} 0, & k^* = 1, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{k^*-1} \Lambda_k^{-\alpha/2} \left[1 + \frac{\Lambda_k^{\beta} \Lambda_1^{\alpha}}{\Lambda_{k^*}^{\alpha+\beta} - \Lambda_1^{\alpha+\beta}} \right]^{-1} \sum_{j=1}^{a_k} y_{kj} Y_j^{(k)}(x'), & k^* > 1 \end{cases}$$

является оптимальным.

2) если $p=\infty$, то положим

$$A_{k_0+1}=\emptyset,\ \ J_{k_0+1}=\{1,\dots,a_{k_0+1}\},$$

$$k^*=\min(k:\ \ J_k\neq A_k,\ 1\le k\le k_0+1),$$

$$\widetilde{k}=\begin{cases}0, & \delta^2\ge(\Lambda_1^\beta a_1)^{-1},\\ \max(k:\delta^2\sum\limits_{l=1}^{k}\Lambda_l^\beta a_k<1, 1\le k), & \delta^2<(\Lambda_1^\beta a_1)^{-1},\end{cases}$$

$$m=\begin{cases}\widetilde{k}+1, & \widetilde{k}+1<k^*,\\ k^*, & \widetilde{k}+1\ge k^*.\end{cases}$$

В этом случае верна

Теорема 18. *Пусть α,β и δ—произвольные положительные числа.*

Тогда

1) *если $m=1$, то*

$$E_{N,\infty}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}),\alpha,\delta)=\frac{1}{\Lambda_1^{(\alpha+\beta)/2}}$$

и оптимальным является метод

$$u(x)\approx\widehat{\psi}(\widetilde{f}^N)(x)\equiv 0;$$

2) *если $m>1$, то*

$$E_{N,\infty}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}),\alpha,\delta)=\sqrt{\delta^2\sum_{j=1}^{m-1}\left(\frac{1}{\Lambda_k^\alpha}-\frac{\Lambda_k^\beta}{\Lambda_m^{(\alpha+\beta)}}\right)a_k+\frac{1}{\Lambda_m^{\alpha+\beta}}}\ ,$$

а метод

$$u(x)\approx\widehat{\psi}(\widetilde{f}^N)(x)=\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{a_k}\left[1-\left(\frac{\Lambda_k}{\Lambda_m}\right)^{\alpha+\beta}\right]y_{kj}Y_j^{(k)}(x')$$

является оптимальным.

Литература

[1] *Введенская Е. В.* Об оптимальном восстановлении решения уравнения теплопроводности по неточно заданной температуре в различные моменты времени // Владикавказский мат. журн. 2006. Т. 8, вып. 1. С. 16–21.

[2] *Выск Н. Д.* О решении волнового уравнения при неточно заданных коэффициентах Фурье функции, задающей начальную форму струны // Владикавказский мат. журн. 2006. Т. 8, вып. 4. С. 12–17.

[3] *Выск Н. Д., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление решения волнового уравнения по неточным начальным данным // Матем. заметки. 2006, Т. 81, вып.6, С. 803–815.

[4] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью // Матем. сб. 2002. Т. 193. №3. С. 79–100.

[5] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функ. анализ и его прил. 2003. Т. 37. С. 51–64.

[6] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., Тихомиров В. М.* On optimal recovery of heat equation solutions. In: Approximation Theory: A volume dedicated to B. Bojanov (D. K. Dimitrov, G. Nikolov, and R. Uluchev, Eds.), 163–175, Sofia: Marin Drinov Academic Publishing House, 2004.

[7] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление операторов по неточной информации // Итоги науки. Южный федеральный округ. Математический форум, Т. 2, "Исследования по выпуклому анализу Владикавказ, 2009, С. 158–192.

[8] *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ и его приложения. М., Эдиториал УРСС, 2000.

[9] *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных, М., Наука, 1983г.

[10] *Михлин С. Г.* Курс математической физики, Санкт-Петербург, 2002г.

[11] Осипенко К. Ю. О восстановлении решения задачи Дирихле по неточным исходным данным // Владикавказский мат. журн. 2004. Т. 6, вып. 4. С. 55–62.

[12] *Осипенко К. Ю.* Неравенство Харди–Литтлвуда–Полиа для аналитических функций из пространств Харди–Соболева // Матем. сб. 2006. Т. 197. №3. С. 15–34.

[13] *Смоляк С. А.* Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них, кандид. дисс., МГУ, 1965г.

[14] *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М: Мир, 1974, С. 157–174.

[15] *Стейн И.* Сингулярные интегралы дифференциальные свойства функций. М: Мир, 1973, С. 83–87.

[16] *Трауб Дж., Вожньяковский Х.* Общая теория оптимальных алгоритмов, М.: Мир, 1980, 664 с.

[17] *Miccelli Ch. A., Rivlin Th. J.* Optimal estimations in approximation theory. New York: Plenum Press, 1976, 300 p.

[18] *Балова Е. А.* Об оптимальном восстановлении решения задачи Дирихле в кольце // Владикавказский мат. журн. 2006. Т. 8, вып. 2, С. 15–23.

[19] *Балова Е. А.* О восстановлении решения задачи Дирихле по неточным заданной информации на сферах радиусов R_1 и R_2 // Труды участников школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н.В.Ефимова, Ростов-на Дону, 2006, С. 215–216.

[20] *Балова Е. А.* Об оптимальном восстановлении решений задачи Дирихле по неточным исходным данным // Математические заметки, 2007. Т. 82, вып. 3. С. 323–334.

[21] *Балова Е. А.* О восстановлении решения задачи Дирихле в d-мерном шаровом поясе по неточным граничным условиям // Тезисы докладов третьей международной конференции "Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования", Москва, МФТИ, 2008, С. 226–227.

[22] *Elena Balova* Optimal recovery of the solution of the Poisson equation from inaccurate information // Междунaродая конференция "Extremal Problems in Complex and Real Analysis EPCaRA-2007 ", Book of Abstracts, Moscow, Russia, 2007, С. 10.