

**МАТИ—МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**
имени К. Э. Циолковского

На правах рукописи

БАЛОВА Елена Александровна

**ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ
ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ТИПА И
ВОССТАНОВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**

(01.01.01—математический анализ)

Д и с с е р т а ц и я
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель—
доктор физико-математических наук,
профессор К. Ю. Осипенко

Москва—2009

Оглавление

Глава 1. Введение	2
1.1. Исторический обзор	2
1.2. Краткое содержание работы	4
1.3. Доклады и публикации	6
Глава 2. Предварительные сведения	7
2.1. Задача об оптимальном восстановлении линейного оператора	7
2.2. Две леммы	12
2.3. Общие сведения	18
Глава 3. Оптимальное восстановление решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа по неточным исходным данным	27
3.1. Оптимальное восстановление решения задачи Дирихле на сфере радиуса r по неточно заданной информации на сферах радиусов R_1 и R_2 , $R_1 < r < R_2$	27
3.2. Оптимальное восстановление решения задачи Дирихле в d -мерном единичном шаре ($d > 2$).	34
3.3. Оптимальное восстановление решения задачи Дирихле в d -мерном шаровом поясе по неточно заданным граничным условиям ($d \geq 2$).	44
Глава 4. Восстановление решения обобщенного уравнения Пуассона	57
4.1. Общая задача оптимального восстановления решения обобщенного уравнения Пуассона	57
4.2. Оптимальное восстановление решения обобщенного уравнения Пуассона в шаре	71
4.3. Оптимальное восстановление решения обобщенного уравнения Пуассона на единичной сфере	75
Литература	80

Введение

1.1. Исторический обзор

В работе рассматривается задача оптимального восстановления решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в d -мерном шаре и d -мерном шаровом поясе по неточно заданным граничным условиям. Кроме этого, решается задача оптимального восстановления решения уравнения Пуассона с нулевыми граничными условиями по неточно заданной правой части уравнения.

В 1965г. С. А. Смоляком была поставлена задача об оптимальном восстановлении линейного функционала x' на некотором подмножестве W из линейного пространства X по значениям линейных функционалов x'_1, \dots, x'_n . Было введено понятие погрешности оптимального восстановления, которая определялась формулой

$$e(x', W, I) = \inf_{\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}} \sup_{x \in W} | \langle x', x \rangle - \varphi(Ix) |,$$

где $Ix := (\langle x'_1, x \rangle, \dots, \langle x'_n, x \rangle)$. Метод φ , на котором достигалась нижняя грань, назывался оптимальным. С. А. Смоляк доказал, что в случае, когда W —выпуклое множество, среди оптимальных методов есть аффинный, а если W —выпуклое уравновешенное множество, то среди оптимальных методов есть линейный. Эта постановка, идейно восходящая к работам А.Н.Колмогорова, послужила началом направления, которое в дальнейшем стало называться теорией оптимального восстановления.

Приблизительно в это же время С. Б. Стечкиным была поставлена близкая к рассматриваемой задача о приближении неограниченного оператора ограниченным. Исследования задачи Стечкина, проведенные В. В. Арестовым и В. Н. Габушиным, выявили её тесную связь с оптимальным восстановлением по приближённой информации. В 1976г. К. Ю. Осипенко обобщил теорему Смоляка на комплексный случай и решил ряд конкретных задач оптимального восстановления на классах ограниченных аналитических функций. С конца 70-х годов оптимальным восстановлением активно занимались американские математики Ч. Мичелли и Т. Ривлин, значительно расширившие исходную постановку, специалисты по оптимальным алгоритмам Дж. Трауб, Х. Вожняковский и др.

В начале этого десятилетия в работах Г. Г. Магарил-Ильяева и К. Ю. Осипенко был разработан метод оптимального восстановления линейного оператора по неточным исходным данным. Эта проблематика тесно связана решением некоторых экстремальных задач, берущих начало от одной экстремальной задачи, известной как теорема Адамара о трёх кругах. Имеется голоморфная функция $f(z)$, определенная в кольце $r_1 < r < r_2$. Пусть

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Тогда $\ln M(r)$ есть выпуклая функция от $\ln r$, и результат теоремы можно сформулировать в виде неравенства

$$M(r) \leq M(r_1)^{\frac{\ln(r_2/r)}{\ln(r_2/r_1)}} M(r_2)^{\frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}},$$

справедливое для любых трёх концентрических окружностей радиусов $r_1 < r < r_2$.

Теорема, известная как теорема Адамара о трёх кругах, была сформулирована и доказана Дж. Е. Литтлвудом в 1912г., но он не упоминал о её авторстве, рассматривая как известный факт. Г. Бор и Е. Ландау утверждали, что теорема впервые была сформулирована Д. Адамаром в 1896г., хотя Адамар не опубликовал её доказательства.

Теорема о трёх кругах даёт значение следующей экстремальной задачи

$$M(r) \rightarrow \max, \quad M(r_1) \leq \delta_1, \quad M(r_2) \leq \delta_2.$$

Точное решение этой задачи, выраженное через эллиптические функции, было получено Р. М. Робинсоном в 1943г.

В 1913г. Е. Ландау рассмотрел похожую задачу, где роль кругов выполняли производные, и показал, что для любых функций f , $f \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$, с первой производной, локально абсолютно непрерывной на \mathbb{R}_+ , и $f'' \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$, имеет место неравенство

$$\|x'\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \leq 2 \|x\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}^{1/2} \|x''\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}^{1/2}.$$

Таким образом, было найдено точное решение экстремальной задачи

$$\|x'\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \rightarrow \max, \quad \|x\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \leq \delta_1, \quad \|x''\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \leq \delta_2.$$

В 1914г. Адамар решил аналогичную задачу для \mathbb{R} .

В 1938г. А. Н. Колмогоров получил общий результат в этой области, построив точное решение экстремальной задачи

$$\|x^{(k)}\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \rightarrow \max, \quad \|x\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq \delta_1, \quad \|x^{(m)}\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \leq \delta_2, \quad 1 \leq k < m.$$

Этот класс экстремальных задач известен как неравенства Ландау-Колмогорова для производных, и эти задачи подобны задаче Адамара о трёх кругах.

Экстремальные задачи типа теоремы Адамара о трёх кругах тесно связаны с задачами оптимального восстановления. Оказывается, что почти с каждой такой задачей можно связать некоторую задачу об оптимальном восстановлении оператора. И наоборот, задачи оптимального восстановления линейного оператора, как правило, сводятся к решению некоторой экстремальной задачи типа теоремы Адамара о трёх кругах.

1.2. Краткое содержание работы

Во 2-й главе рассматривается общая постановка задачи оптимального восстановления линейного оператора: для векторного пространства X , нормированного пространства Z и линейного оператора T требуется восстановить значения T на некотором множестве $W \subset X$ по неточной информации о каждом элементе $x \in W$, задаваемой с помощью некоторого информационного отображения $I(x)$, вообще говоря, многозначного, из W в векторное пространство Y . Даются определения понятий погрешности восстановления для данного метода φ , погрешности оптимального восстановления и оптимального метода восстановления. Описывается метод оптимального восстановления линейного оператора по информации, заданной с погрешностью, разработанный в работах Г. Г. Магарил-Ильяева и К. Ю. Осипенко. Сформулирован ряд результатов этих авторов, показывающий, что существенной частью построения оптимального метода является решение экстремальных задач типа теоремы о трёх кругах Адамара, а выражение для погрешности оптимального метода является значением задачи такого типа. Эти результаты были использованы при решении задач, рассмотренных в **главах 3 и 4**.

Далее, в пункте 2.2, рассмотрены две экстремальные задачи, представляющие из себя задачи линейного программирования, и сформулированы и доказаны **леммы 1 и 2**, дающие точные решения этих задач. Эти результаты используются в **главе 4** данной работы.

В пункте 2.3 приведены сведения, обосновывающие правомерность тех подходов, которые использованы в третьей и четвёртой главах при решении задач оптимального восстановления решений уравнений Лапласа и Пуассона по неточной исходной информации. Указаны классы, которым принадлежат обобщённые решения этих задач, приведены формулировки теорем, позволяющие искать решения в виде соответствующих рядов. Приводится краткая информация о сферических функциях, которые используются при решении задач в **главах 3 и 4**.

В 3-й главе рассматриваются три задачи оптимального восстановления решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа по неточной информации о граничных функциях.

В пункте 3.1 рассматривается задача о восстановлении решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в d -мерном единичном шаре на сфере радиуса r по следам решения на сферах радиусов R_1 и R_2 , заданным приближённо, $0 < R_1 < r < R_2 \leq 1$. Предполагается, что приближённо заданные следы принадлежат пространству $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, где \mathbb{S}^{d-1} —единичная $(d-1)$ -мерная сфера в пространстве \mathbb{R}^d . Для данной задачи сформулирована и доказана теорема 10, которая позволяет вычислить оптимальную погрешность восстановления. Кроме того, предложен метод оптимального восстановления, имеющий линейную структуру.

В пунктах 3.2 и 3.3 сформулированы задачи оптимального восстановления решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в d -мерном шаре B^d ($d > 2$) и в d -мерном шаровом поясе ($d \geq 2$) по неточно заданным граничным функциям. Предполагается, что функции принадлежат некоторому классу из $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ и известно конечное число коэффициентов их разложений в ряды Фурье по шаровым функциям, причём эти коэффициенты известны с погрешностями. Рассмотрены два случая определения погрешностей (в среднеквадратичной и равномерной метриках), для каждого из этих случаев сформулированы и доказаны теоремы 11—12 и 13—14, позволяющие вычислить величины оптимальных погрешностей восстановления, а также предложены оптимальные методы восстановления.

В 4-й главе решается задача об оптимальном восстановлении решения обобщённого уравнения Пуассона.

В пункте 3.1 рассматривается задача оптимального восстановления решения обобщённого уравнения Пуассона для ограниченной области Q с нулевым граничным условием на границе области ∂Q . Правая часть уравнения представлена своим разложением в ряд Фурье по собственным функциям линейного дифференциального оператора левой части уравнения для области Q . Предполагается, что функция, описывающая правую часть уравнения, принадлежит некоторому классу $W(\partial Q)$, и известно конечное число коэффициентов её разложения, причём эти коэффициенты заданы с погрешностями. Рассмотрены два случая задания погрешности (в евклидовой и равномерной метриках,) сформулированы и доказаны теоремы 15 и 16, соответствующие этим случаям. Построены формулы для вычисления значений погрешностей оптимального восстановления и предложены оптимальные методы восстановления.

В пункте 4.2 приведён пример применения результатов, полученных в пункте 4.1. Здесь рассматривается задача оптимального восстановления решения задачи Дирихле с нулевым граничным условием для уравнения Пуассона в единичном d -мерном шаре, когда левая часть уравнения есть обобщённый оператор Лапласа.

Пункт 4.3 посвящён задаче восстановления решения уравнения Пуассона на единичной $(d - 1)$ -мерной сфере с левой частью, представляющей из себя обобщённый оператор Бельтрами-Лапласа. Правая часть уравнения представлена функцией, ортогональной единице, которая разложена в ряд Фурье по сферическим функциям, являющимися собственными функциями для оператора Бельтрами-Лапласа. Предполагается, что функция из правой части уравнения принадлежит некоторому классу $W(S^{d-1})$ и задана конечным числом коэффициентов своего ряда Фурье, которые определены неточно. Как и в предыдущих задачах, погрешности рассмотрены в двух метриках, среднеквадратичной и равномерной. Для каждого из этих случаев сформулированы и доказаны теоремы 17 и 18, вычислены погрешности оптимального восстановления и построены оптимальные методы восстановления.

1.3. Доклады и публикации

Основные результаты, представленные в работе, были доложены на:

Международной конференции "Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования", Владикавказ, 14-18 июня 2006г.;

Международной школе-семинаре по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова, Абрау-Дюрсо, 2006 г.;

Международной конференции EPCoRA-2007, Москва, 2007 г.;

3-й Международной конференции "Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования", Москва, 2008 г.;

научном семинаре кафедры "Высшая математика" МАТИ-РГТУ им. К. Э. Циолковского;

научном семинаре кафедры "Общие проблемы управления" механико-математического факультета МГУ

и отражены в пяти публикациях [18]–[22].

Предварительные сведения

2.1. Задача об оптимальном восстановлении линейного оператора

В главах 3 и 4 рассматриваются задачи оптимального восстановления решений задачи Дирихле для уравнений Лапласа и Пуассона по неточным исходным данным. Метод оптимального восстановления линейного оператора по неточной исходной информации, используемый при решении этих задач, был разработан Г. Г. Магарил-Ильяевым и К. Ю. Осипенко. При этом авторы метода в значительной степени использовали лагранжев подход к решению экстремальных задач, более подробно изложенный в работе [8]. Начнём с общей постановки задачи.

Пусть X —линейное пространство, Y_1, \dots, Y_n — пространства с полускалярными произведениями $(\cdot, \cdot)_{Y_j}$ и соответствующими нормами $\|\cdot\|_{Y_j}$, $j = 1, \dots, n$, пусть $I_j : X \rightarrow Y_j$, $j = 1, \dots, n$ — линейные операторы, а Z —линейное нормированное пространство. Рассмотрим задачу оптимального восстановления линейного оператора $T : X \rightarrow Z$ на множестве

$$W_k = \{x \in X : \|I_j x\|_{Y_j} \leq \delta_j, \quad j = 1, \dots, k\}, \quad 0 \leq k \leq n$$

по значениям операторов I_{k+1}, \dots, I_n , заданным с погрешностями (при $k = 0$ положим $W_0 = X$). Будем считать, что для каждого $x \in W_k$ нам известен вектор $y = (y_{k+1}, \dots, y_n) \in Y = Y_{k+1} \times \dots \times Y_n$ такой, что $\|I_j x - y_j\|_{Y_j} \leq \delta_j$, $j = k+1, \dots, n$.

В качестве методов восстановления оператора T рассматриваются всевозможные операторы $\varphi : Y \rightarrow Z$.

Погрешностью восстановления для данного метода φ называется величина

$$e(T, W_k, I, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x \in W_k, y \in Y \\ \|I_j x - y_j\| \leq \delta_j, j=k+1, \dots, n}} \|Tx - \varphi(y)\|_Z,$$

где $I = (I_{k+1}, \dots, I_n)$, $\delta = (\delta_{k+1}, \dots, \delta_n)$.

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(T, W_k, I, \delta) = \inf_{\varphi : Y \rightarrow Z} e(T, W_k, I, \delta, \varphi),$$

а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным.

Рассмотрим экстремальную задачу

$$(2.1) \quad \|Tx\|_Z^2 \rightarrow \max, \quad \|I_j x\|_{Y_j}^2 \leq \delta_j^2, \quad j = 1, \dots, n, \quad x \in X,$$

которая, как будет показано ниже, тесно связана с рассматриваемой задачей восстановления.

ТЕОРЕМА 1. Пусть существуют $\hat{\lambda}_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$ такие, что значение задачи (2.1) совпадает со значением задачи

$$(2.2) \quad \|Tx\|_Z^2 \rightarrow \max, \quad \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \|I_j x\|_{Y_j}^2 \leq \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \delta_j^2, \quad x \in X,$$

и пусть для любого $y = (y_{k+1}, \dots, y_n) \in \tilde{Y} = \tilde{Y}_{k+1} \times \dots \times \tilde{Y}_n$, где \tilde{Y}_j есть всюду плотные множества в Y_j , $j = k+1, \dots, n$, существует $x_y \in X$, являющийся решением экстремальной задачи

$$(2.3) \quad \sum_{j=1}^k \hat{\lambda}_j \|I_j x\|_{Y_j}^2 + \sum_{j=k+1}^n \hat{\lambda}_j \|I_j x - y_j\|_{Y_j}^2 \rightarrow \min, \quad x \in X.$$

Пусть, кроме того, имеется непрерывный линейный оператор $A : Y \rightarrow Z$ с нормой в Y , определённой формулой

$$\|y\|_Y = \left(\sum_{j=k+1}^n \|y_j\|_{Y_j}^2 \right)^{1/2},$$

и для каждого $y = (y_{k+1}, \dots, y_n) \in \tilde{Y}$ выполнено

$$Ay = Tx_y.$$

Тогда

$$E(T, W_k, I, \delta) = \sup_{\substack{x \in X, \\ \|I_j x\|_{Y_j} \leq \delta_j, j=1, \dots, n}} \|Tx\|_Z,$$

и метод

$$(2.4) \quad \varphi_0(y) = Ay$$

является оптимальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала получим оценку снизу. Пусть φ — произвольный метод восстановления и $x \in X$ такое, что

$$\|I_j x\|_{Y_j} \leq \delta_j, \quad j = 1, \dots, k,$$

(то есть x и $(-x)$ принадлежат W_k). Тогда, взяв $y = (y_{k+1}, \dots, y_n) = (0, \dots, 0)$, имеем

$$2\|Tx\|_Z \leq \|Tx - \varphi(0)\|_Z + \|T(-x) - \varphi(0)\|_Z \leq 2e(T, W_k, I, \delta, \varphi).$$

Для выбранного метода φ , после перехода к верхней грани, получим

$$e(T, W_k, I, \delta, \varphi) \geq \sup_{\substack{x \in X, \\ \|I_j x\|_{Y_j} \leq \delta_j, j=1, \dots, n}} \|Tx\|_Z.$$

Следовательно,

$$(2.5) \quad E(T, W_k, I, \delta) = \inf_{\varphi: Y_{k+1} \times \dots \times Y_n \rightarrow Z} e(T, W_k, I, \delta, \varphi) \geq \sup_{\substack{x \in X, \\ \|I_j x\|_{Y_j} \leq \delta_j, j=1, \dots, n}} \|Tx\|_Z.$$

Получим оценку сверху и докажем оптимальность метода (2.4). Рассмотрим линейное пространство $E = Y_1 \times \dots \times Y_n$ с полу-скалярным произведением

$$(y^{(1)}, y^{(2)})_E = \sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j (y_j^{(1)}, y_j^{(2)})_{Y_j},$$

где $y^{(1)} = (y_1^{(1)}, \dots, y_n^{(1)})$, $y^{(2)} = (y_1^{(2)}, \dots, y_n^{(2)})$. Тогда экстремальную задачу (2.3) можно переписать в виде

$$\|\widetilde{I}x - \widehat{y}\|_E^2 \rightarrow \min, \quad x \in X,$$

где $\widetilde{I}x = (I_1 x, \dots, I_n x)$ и $\widehat{y} = (0, \dots, 0, y_{k+1}, \dots, y_n) \in E$. Если x_y является решением этой новой задачи, то, как нетрудно показать, для любого $x \in X$ выполнено равенство

$$(\widetilde{I}x_y - \widehat{y}, \widetilde{I}x)_E = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \|\widetilde{I}x - \widehat{y}\|_E^2 &= \|\widetilde{I}x - \widetilde{I}x_y + \widetilde{I}x_y - \widehat{y}\|_E^2 = \\ &= \|\widetilde{I}x - \widetilde{I}x_y\|_E^2 + 2\operatorname{Re}(\widetilde{I}x - \widetilde{I}x_y, \widetilde{I}x_y - \widehat{y})_E + \|\widetilde{I}x_y - \widehat{y}\|_E^2 = \\ &= \|\widetilde{I}x - \widetilde{I}x_y\|_E^2 + \|\widetilde{I}x_y - \widehat{y}\|_E^2. \end{aligned}$$

Следовательно, для всех $x \in X$

$$(2.6) \quad \|\widetilde{I}x - \widetilde{I}x_y\|_E^2 \leq \|\widetilde{I}x - \widehat{y}\|_E^2 = \sum_{j=1}^k \widehat{\lambda}_j \|I_j x\|_{Y_j}^2 + \sum_{j=k+1}^n \widehat{\lambda}_j \|I_j x - y_j\|_{Y_j}^2.$$

Пусть $x \in W_k$ и $y = (y_{k+1}, \dots, y_n) \in Y_{k+1} \times \dots \times Y_n$ таковы, что $\|I_j x - y_j\|_{Y_j} \leq \delta_j$, $j = k+1, \dots, n$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\widetilde{y} = (\widetilde{y}_{k+1}, \dots, \widetilde{y}_n) \in \widetilde{Y}$ такое, что $\|y_j - \widetilde{y}_j\|_{Y_j} \leq \varepsilon$, $j = k+1, \dots, n$, и

$$(2.7) \quad \|I_j x - \widetilde{y}_j\|_{Y_j} \leq \|I_j x - y_j\|_{Y_j} + \|y_j - \widetilde{y}_j\|_{Y_j} \leq \delta_j + \varepsilon, \quad j = k+1, \dots, n.$$

Положив $z = x - x_y$, с учётом (2.6) и (2.7), мы получаем неравенство

$$(2.8) \quad \sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j \|I_j z\|_{Y_j}^2 \leq \sum_{j=1}^n \widetilde{\delta}_j^2 \widehat{\lambda}_j,$$

где

$$\tilde{\delta}_j = \begin{cases} \delta_j, & 1 \leq j \leq k, \\ \delta_j + \varepsilon, & k+1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

Введём обозначения

$$S = \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \delta_j^2, \quad \tilde{S} = \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \tilde{\delta}_j^2.$$

Нетрудно увидеть, положив $z = (\tilde{S}/S)^{1/2}x$, что

$$(2.9) \quad \sup_{\substack{z \in X \\ \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \|I_j z\|_{Y_j}^2 \leq \tilde{S}}} \|Tz\|_Z = \sqrt{\frac{\tilde{S}}{S}} \sup_{\substack{x \in X \\ \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \|I_j x\|_{Y_j}^2 \leq S}} \|Tx\|_Z.$$

Для оценки погрешности метода $\varphi_0(y) = Ay$ имеем

$$\|Tx - Ay\|_Z \leq \|Tx - A\tilde{y}\|_Z + \|A(\tilde{y} - y)\|_Z \leq \|Tx - Tx_{\tilde{y}}\|_Z + \|A\|(n-k)\varepsilon.$$

Отсюда, учитывая (2.8), (2.9), а также то, что $A\tilde{y} = Tx_{\tilde{y}}$ и значения задач (2.1) и (2.2) совпадают, имеем

$$\begin{aligned} \|Tx - Tx_{\tilde{y}}\|_Z &= \|Tz\|_Z \leq \sup_{\substack{z \in X \\ \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \|I_j z\|_{Y_j}^2 \leq \tilde{S}}} \|Tz\|_Z = \\ &= \sqrt{\frac{\tilde{S}}{S}} \sup_{\substack{x \in X \\ \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \|I_j x\|_{Y_j}^2 \leq S}} \|Tx\|_Z = \sqrt{\frac{\tilde{S}}{S}} \sup_{\substack{x \in X \\ \|I_j x\|_{Y_j} \leq \delta_j, j=1, \dots, n}} \|Tx\|_Z. \end{aligned}$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то устремляя ε к нулю, получаем

$$\|Tx - Ay\|_Z \leq \sup_{\substack{x \in X \\ \|I_j x\|_{Y_j} \leq \delta_j, j=1, \dots, n}} \|Tx\|_Z.$$

Учитывая оценку (2.5), приходим к равенству

$$E(T, W_k, I, \delta) = \sup_{\substack{x \in X, \\ \|I_j x\|_{Y_j} \leq \delta_j, j=1, \dots, n}} \|Tx\|_Z.$$

Отсюда и из предыдущего неравенства следует, что метод φ_0 является оптимальным. \square

Формулировка и схема доказательства этой теоремы были сообщены автору работы К.Ю. Осипенко.

Для проверки совпадений значений задач (2.1) и (2.2) удобно использовать следующую теорему

ТЕОРЕМА 2. Пусть

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = -\|Tx\|_Z^2 + \sum_{j=1}^n \lambda_j \|I_j x\|_{Y_j}^2$$

— функция Лагранжа задачи (2.1), где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ — множители Лагранжа. Пусть существуют $\hat{\lambda}_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$ и допустимый в задаче (2.1) элемент \hat{x} такие, что

$$(a) \quad \min_{x \in X} \mathcal{L}(x, \hat{\lambda}) = \mathcal{L}(\hat{x}, \hat{\lambda}), \quad \hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_n),$$

$$(b) \quad \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j (\|I_j \hat{x}\|_{Y_j}^2 - \delta_j^2) = 0.$$

Тогда \hat{x} — решение задачи (2.1) и

$$\sup_{\substack{x \in X, \\ \|I_j x\|_{Y_j}^2 \leq \delta_j^2, j=1, \dots, n}} \|Tx\|_Z^2 = \sup_{\substack{x \in X, \\ \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \|I_j x\|_{Y_j}^2 \leq \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \delta_j^2, \\ j=1, \dots, n}} \|Tx\|_Z^2 = \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \delta_j^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$S = \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \delta_j^2.$$

Пусть x — допустимый элемент в (2.1). Тогда, с учётом (a) и (b), имеем

$$\begin{aligned} -\|Tx\|_Z^2 &\geq -\|Tx\|_Z^2 + \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j (\|I_j x\|_{Y_j}^2 - \delta_j^2) = \mathcal{L}(x, \hat{\lambda}) - S \geq \\ &\geq \mathcal{L}(\hat{x}, \hat{\lambda}) - S = -\|T\hat{x}\|_Z^2 + \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j (\|I_j \hat{x}\|_{Y_j}^2 - \delta_j^2) = -\|T\hat{x}\|_Z^2, \end{aligned}$$

то есть \hat{x} — решение задачи (2.1). Аналогично можно показать, что \hat{x} является одновременно и решением задачи (2.2).

Покажем, что $\mathcal{L}(\hat{x}, \hat{\lambda}) = 0$. Действительно, предположив, что $\mathcal{L}(\hat{x}, \hat{\lambda}) > 0$, и положив $x_0 = \alpha \hat{x}$, где $|\alpha| < 1$, имеем

$$\mathcal{L}(x_0, \hat{\lambda}) = \alpha^2 \mathcal{L}(\hat{x}, \hat{\lambda}) < \mathcal{L}(\hat{x}, \hat{\lambda}),$$

что противоречит (a). Если же $\mathcal{L}(\hat{x}, \hat{\lambda}) < 0$, то для $x_0 = \alpha \hat{x}$, где $|\alpha| > 1$, опять имеем

$$\mathcal{L}(x_0, \hat{\lambda}) = \alpha^2 \mathcal{L}(\hat{x}, \hat{\lambda}) < \mathcal{L}(\hat{x}, \hat{\lambda}),$$

и снова приходим к противоречию. Следовательно, $\mathcal{L}(\hat{x}, \hat{\lambda}) = 0$ и

$$\sup_{\substack{x \in X, \\ \|I_j x\|_{Y_j}^2 \leq \delta_j^2, j=1, \dots, n}} \|Tx\|_Z^2 = \|T\hat{x}\|_Z^2 = -\mathcal{L}(\hat{x}, \hat{\lambda}) + S = S.$$

□

При решении довольно большого числа задач оптимального восстановления можно использовать следующую теорему, более простую по сравнению с **теоремой 1**.

ТЕОРЕМА 3. Пусть

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = -\|Tx\|_Z^2 + \sum_{j=1}^n \lambda_j \|I_j x\|_{Y_j}^2$$

— функция Лагранжа задачи (2.1), где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ — множители Лагранжа. Пусть $\hat{\lambda}_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$ и допустимый в (2.1) элемент \hat{x} таковы, что выполнены условия:

$$(a) \quad \min_{x \in X} \mathcal{L}(x, \hat{\lambda}) = \mathcal{L}(\hat{x}, \hat{\lambda}), \quad \hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_n),$$

$$(b) \quad \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j (\|I_j \hat{x}\|_{Y_j}^2 - \delta_j^2) = 0.$$

Тогда значение экстремальной задачи (2.1) равно

$$\sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \delta_j^2.$$

Если при этом для всех $y = (y_{k+1}, \dots, y_n) \in Y_{k+1} \times \dots \times Y_n$ существует x_y — решение экстремальной задачи

$$(2.10) \quad \sum_{j=1}^k \hat{\lambda}_j \|I_j x\|_{Y_j}^2 + \sum_{j=k+1}^n \hat{\lambda}_j \|I_j x - y_j\|_{Y_j}^2 \rightarrow \min, \quad x \in X,$$

то

$$(2.11) \quad \hat{\varphi}(y) = Tx_y$$

— оптимальный метод восстановления и

$$(2.12) \quad E(T, W_k, I, \delta) = \sqrt{\sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \delta_j^2}.$$

Более подробно формулировки и доказательства **теорем 2 и 3** изложены в работах Г.Г. Магарил-Ильяева и К.Ю. Осипенко (см., например, [7]).

2.2. Две леммы

При решении некоторых классов задач оптимального восстановления возникают задачи, связанные с нахождением максимальных значений сумм вида $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k u_k$ при некоторых специальных видах ограничений на u_k . Ниже сформулированы и доказаны две леммы, связанные с исследованием таких сумм. Полученные результаты используются в третьей главе.

2.2.1. Первая лемма.

Пусть k_0 — некоторое фиксированное натуральное число, и имеются две последовательности положительных чисел

$$\{\mu_k\}_1^\infty, \mu_{k+1} < \mu_k, 1 \leq k \leq k_0, \mu_k \leq \mu_{k_0}, k > k_0,$$

$$\{\gamma_k\}_1^\infty, \gamma_k < \gamma_{k+1}, 1 \leq k \leq k_0, \gamma_{k_0} \leq \gamma_k, k > k_0.$$

Пусть $u = \{u_k\}_1^\infty$, $u_k \geq 0$, $J = \{1, \dots, k_0\}$, и $A \subseteq J$.

Рассмотрим следующую экстремальную задачу:

$$(2.13) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k u_k \rightarrow \max, \quad \sum_{k \in A} u_k \leq \delta^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k u_k \leq 1,$$

$$u_k \geq 0, k \geq 1.$$

Функция Лагранжа для задачи (2.13) имеет вид

$$\mathcal{L}_1(u, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{k=1}^{\infty} (-\mu_k + \lambda_2 \gamma_k) u_k + \lambda_1 \sum_{k \in A} u_k,$$

где λ_1 и λ_2 — множители Лагранжа. Согласно **теореме 2**, если найдутся неотрицательные $\hat{\lambda}_1$ и $\hat{\lambda}_2$, а также допустимая в задаче (2.13) последовательность \hat{u} такие, что выполняются условия

$$(a) \quad \mathcal{L}_1(\hat{u}, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) = \min_{u_k \geq 0} \mathcal{L}_1(u, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2),$$

$$(b) \quad \hat{\lambda}_1 \left(\sum_{k \in A} \hat{u}_k - \delta^2 \right) + \hat{\lambda}_2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \hat{u}_k - 1 \right) = 0,$$

то \hat{u} — решение этой задачи.

Положим

$$k^* = \begin{cases} \min(k : k \in \mathbb{N} \setminus A), & \delta^2 < \gamma_1^{-1}, \\ 1, & \delta^2 \geq \gamma_1^{-1}. \end{cases}$$

ЛЕММА 1. Пусть $\delta > 0$. Тогда

1) если $k^* = 1$, то

$$\hat{\lambda}_1 = 0, \quad \hat{\lambda}_2 = \frac{\mu_1}{\gamma_1}$$

и последовательность \hat{u} , задаваемая соотношениями

$$(*) \quad \hat{u}_1 = \frac{1}{\gamma_1}, \quad \hat{u}_k = 0, \quad k > 1,$$

является решением задачи (2.13);

2) если $k^* > 1$, то

$$\hat{\lambda}_1 = \mu_1 - \frac{\gamma_1 \mu_{k^*}}{\gamma_{k^*}}, \quad \hat{\lambda}_2 = \frac{\mu_{k^*}}{\gamma_{k^*}}$$

и последовательность \hat{u} , задаваемая соотношениями

$$(**) \quad \hat{u}_1 = \delta^2, \quad \hat{u}_{k^*} = \frac{1 - \delta^2 \gamma_1}{\gamma_{k^*}}, \quad \hat{u}_k = 0, \quad k \geq 2, k \neq k^*,$$

— решение задачи (2.13).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $k^* = 1$. Тогда для последовательности \hat{u} , заданной соотношениями (*), имеем

$$\hat{u}_k \geq 0, \quad k \geq 1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \hat{u}_k = 1.$$

Условие

$$\sum_{k \in A} \hat{u}_k \leq \delta^2$$

тоже выполняется, так как или $\hat{u}_1 = \gamma_1^{-1} \leq \delta^2$, или 1 не принадлежит множеству A и \hat{u}_1 не входит в эту сумму, следовательно, последовательность \hat{u} допустима в (2.13). Покажем, что условия (a) и (b) также выполнены. В этом случае

$$\hat{\lambda}_1 = 0, \quad \hat{\lambda}_2 = \frac{\mu_1}{\gamma_1},$$

и в силу того, что $\mu_k < \mu_1$ и $\gamma_k > \gamma_1$ при $k > 1$, получаем, что

$$\mathcal{L}_1(u, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) = \sum_{k=1}^{\infty} (-\mu_k + \frac{\mu_1}{\gamma_1} \gamma_k) u_k \geq 0$$

для произвольных неотрицательных u_k , в том числе и для допустимых в нашей задаче. Легко убедиться в том, что $\mathcal{L}_1(\hat{u}, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) = 0$, то есть условие (a) выполнено. Выполнение условия (b) проверяется непосредственной подстановкой. Таким образом, получаем, что последовательность \hat{u} , заданная соотношениями (*), является решением задачи (2.13).

2) Рассмотрим теперь случай, когда $k^* > 1$. Допустимость последовательности \hat{u} , задаваемой соотношениями (**), следует из определения k^* , так как на \hat{u}_{k^*} не распространяется ограничение

$$\sum_{k \in A} u_k \leq \delta^2,$$

поэтому остается показать, что выполнены условия (a) и (b). Подставив в функцию Лагранжа $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$, имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(u, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) &= \\ &= \sum_{k \in A} \left(\mu_1 - \frac{\mu_{k^*}}{\gamma_{k^*}} \gamma_1 \right) u_k + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\mu_k + \frac{\mu_{k^*}}{\gamma_{k^*}} \gamma_k \right) u_k = \\ &= \sum_{k \in A} \left(-\mu_k + \mu_1 - \frac{\mu_{k^*}}{\gamma_{k^*}} \gamma_1 + \frac{\mu_{k^*}}{\gamma_{k^*}} \gamma_k \right) u_k + \\ &+ \sum_{k \in J \setminus A} \left(-\mu_k + \frac{\mu_{k^*}}{\gamma_{k^*}} \gamma_k \right) u_k + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(-\mu_k + \frac{\mu_{k^*}}{\gamma_{k^*}} \gamma_k \right) u_k \geq 0 \end{aligned}$$

для всех неотрицательных u_k , так как во второй и третьей суммах $k \geq k^*$ в силу определения k^* , а μ_k и γ_k монотонно убывают и возрастают соответственно. Подставляя \widehat{u} в функцию Лагранжа, получаем

$$\mathcal{L}_1(\widehat{u}, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = 0,$$

то есть условие (a) выполнено. Условие (b) проверяется непосредственной подстановкой. \square

2.2.2. Вторая лемма.

Пусть есть $\{r_k\}_1^\infty$ —последовательность натуральных чисел. Пусть дана последовательность множеств

$$\{J_k\}, \quad k \geq 1, \quad J_k = \{1, \dots, r_k\},$$

и имеется набор множеств A_k , $1 \leq k \leq k_0$, $A_{k_0} \neq \emptyset$, где A_k —произвольные подмножества множеств J_k и k_0 —заданное натуральное число.

Пусть даны две последовательности положительных чисел

$$\{\mu_k\}_1^\infty : \mu_k > \mu_{k+1}, \quad 1 \leq k \leq k_0 + 1, \quad \mu_k \leq \mu_{k_0+1}, \quad k > k_0 + 1$$

и

$$\{\gamma_k\}_1^\infty : \gamma_k < \gamma_{k+1}, \quad 1 \leq k \leq k_0 + 1, \quad \gamma_{k_0+1} \leq \gamma_k, \quad k > k_0 + 1.$$

Рассмотрим экстремальную задачу

$$(2.14) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \sum_{j=1}^{r_k} b_{kj} \rightarrow \max, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \sum_{j=1}^{r_k} b_{kj} \leq 1,$$

$$b_{kj} \leq \delta^2, \quad k = 1, \dots, k_0, \quad j \in A_k,$$

$$b_{kj} \geq 0, \quad k \geq 1, \quad j = 1, \dots, r_k,$$

где δ —произвольное положительное число. Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид

$$\mathcal{L}_2(b, \lambda, \zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{r_k} (-\mu_k + \zeta \gamma_k) b_{kj} + \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{j \in A_k} \lambda_{kj} b_{kj},$$

где $b = \{b_{kj}\}, k \geq 1, j = 1, \dots, r_k, \lambda = \{\lambda_{kj}\}, k = 1, \dots, k_0, j \in A_k$, где λ_{kj} и ζ —множители Лагранжа. Из **теоремы 2** вытекает, что если найдутся неотрицательные $\widehat{\lambda}_{kj}$ и $\widehat{\zeta}$, а также допустимые в задаче (2.14) \widehat{b} такие, что выполняются условия

$$(c) \quad \mathcal{L}_2(\widehat{b}, \widehat{\lambda}, \widehat{\zeta}) = \min_{b_{kj} \geq 0} \mathcal{L}_2(b, \widehat{\lambda}, \widehat{\zeta}),$$

$$(d) \quad \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{j \in A_k} \widehat{\lambda}_{kj} (\widehat{b}_{kj} - \delta^2) + \widehat{\zeta} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \sum_{j=1}^{r_k} \widehat{b}_{kj} - 1 \right) = 0,$$

то \widehat{b} —решение этой задачи.

Положим

$$A_{k_0+1} = \emptyset.$$

Введем множество

$$\{q_k\}, \quad k = 1, \dots, k_0 + 1,$$

где q_k —число элементов A_k . Положим

$$k^* = \min(k : A_k \neq J_k, 1 \leq k \leq k_0 + 1),$$

$$\widetilde{k} = \begin{cases} 0, & \delta^2 \geq (\gamma_1 r_1)^{-1}, \\ \max(k : \delta^2 \sum_{i=1}^k \gamma_i r_i < 1, 1 \leq k), & \delta^2 < (\gamma_1 r_1)^{-1}, \end{cases}$$

$$m = \begin{cases} \widetilde{k} + 1, & \widetilde{k} + 1 < k^*, \\ k^*, & \widetilde{k} + 1 \geq k^*. \end{cases}$$

Для задачи (2.14) имеет место следующая

ЛЕММА 2. Пусть $\delta > 0$ —произвольное положительное число.

Тогда

1. Если $m = 1$, то

$$\widehat{\lambda}_{kj} = 0, \quad 1 \leq k \leq k_0, j \in A_k, \quad \widehat{\zeta} = \frac{\mu_1}{\gamma_1}$$

и последовательность $\{\widehat{b}_{kj}\}$, задаваемая соотношениями:

$$\widehat{b}_{kj} = 0, \quad k \geq 2, j = 1, \dots, r_k;$$

и если $k^* = 1$, то

$$\widehat{b}_{1j} = \begin{cases} (\gamma_1(r_1 - q_1))^{-1}, & k = 1, j \in J_1 \setminus A_1, \\ 0, & k = 1, j \in A_1; \end{cases}$$

если $k^* > 1$, то

$$\widehat{b}_{1j} = (\gamma_1 r_1)^{-1}, \quad j = 1, \dots, r_1;$$

является решением задачи (2.14).

2. Если $m > 1$, то

$$\begin{aligned}\widehat{\lambda}_{kj} &= \mu_k - \frac{\mu_m}{\gamma_m} \gamma_k, \quad k = 1, \dots, m-1, j = 1, \dots, r_k, \\ \widehat{\lambda}_{kj} &= 0, \quad m \leq k \leq k_0, j \in A_k, \quad \widehat{\zeta} = \frac{\mu_m}{\gamma_m},\end{aligned}$$

а последовательность $\{\widehat{b}_{kj}\}$, задаваемая соотношениями

$$\widehat{b}_{kj} = \begin{cases} \delta^2, & k = 1, \dots, m-1, j = 1, \dots, r_k, \\ 0, & k > m, j = 1, \dots, r_k, \end{cases}$$

и

$$\widehat{b}_{mj} = \left(1 - \delta^2 \sum_{k=1}^{m-1} \gamma_k r_k\right) (\gamma_m r_m)^{-1}, \quad j = 1, \dots, r_m,$$

если $m = \widetilde{k} + 1$,

$$\widehat{b}_{mj} = \begin{cases} \left(1 - \delta^2 \sum_{k=1}^{m-1} \gamma_k r_k\right) (\gamma_m (r_m - q_m))^{-1}, & j \in J_m \setminus A_m, \\ 0, & j \in A_m, \end{cases}$$

если $m = k^*$,

является решением задачи (2.14).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем доказательство леммы с пункта 1, когда $m = 1$. Сначала покажем допустимость последовательности $\widehat{b} = \{\widehat{b}_{kj}\}$, $k \geq 1, j = 1, \dots, r_k$. Все $\widehat{b}_{kj} \geq 0$, что следует из их определения. Если $k^* > 1$, то $\widetilde{k} = 0$ и элементы последовательности \widehat{b} равны 0 при $k \geq 2$, а $\widehat{b}_{1j} = (\gamma_1 r_1)^{-1} \leq \delta^2$, $j = 1, \dots, r_1$, и последовательность \widehat{b} допустима. Если же $k^* = 1$, то $r_1 - q_1 \neq 0$, а на b_{1j} , $j \in J_1 \setminus A_1$, условия $b_{kj} \leq \delta^2$ не накладываются. Следовательно, и в этом случае последовательность \widehat{b} допустима. Осталось проверить выполнение условий (c) и (d). Подставив в функцию Лагранжа $\widehat{\lambda}$ и $\widehat{\zeta}$, получаем, что

$$\mathcal{L}_2(\widehat{b}, \widehat{\lambda}, \widehat{\zeta}) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{r_k} \left(-\mu_k + \frac{\mu_1}{\gamma_1} \gamma_k\right) b_{kj} \geq 0$$

для любых $b_{kj} \geq 0$, так как $\mu_1 > \mu_k$, $\gamma_1 < \gamma_k$ для всех $k > 1$. С другой стороны, $\mathcal{L}_2(\widehat{b}, \widehat{\lambda}, \widehat{\zeta}) = 0$, следовательно, условие (c) выполнено. Выполнение условия (d) легко проверяется непосредственной подстановкой.

Перейдем к случаю 2. Как и в случае 1, начнем доказательства допустимости последовательности \widehat{b} . Для этого изучим поведение \widehat{b}_{mj} , так как все остальные \widehat{b}_{kj} равны 0 или δ^2 .

Пусть $m = k^*$. В этом случае $J_m \setminus A_m \neq \emptyset$, $(r_m - q_m) \neq 0$, $\widehat{b}_{mj} \geq 0$, и при $j \in J_m \setminus A_m$ значения \widehat{b}_{mj} можно, как и выше, задавать, не учитывая ограничений $b_{kj} \leq \delta^2$.

Для случая $m = \tilde{k} + 1$ покажем, что $\widehat{b}_{mj} \leq \delta^2$. Предположим противное: пусть выполнено неравенство

$$\frac{1}{\gamma_m r_m} \left(1 - \delta^2 \sum_{k=1}^{m-1} \gamma_k r_k \right) > \delta^2.$$

После несложных преобразований имеем

$$1 - \delta^2 \sum_{k=1}^{m-1} \gamma_k r_k - \delta^2 \gamma_m r_m = 1 - \delta^2 \sum_{k=1}^m \gamma_k r_k > 0,$$

а это противоречит определению \tilde{k} , так как мы получили, что

$$\delta \sum_{k=1}^{\tilde{k}+1} \gamma_k r_k < 1.$$

Теперь перейдем к доказательству выполнения условий (c) и (d). Подставим в функцию Лагранжа $\widehat{\lambda}$ и $\widehat{\zeta}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2(b, \widehat{\lambda}, \widehat{\zeta}) &= \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{r_k} \left(-\mu_k + \frac{\mu_m}{\gamma_m} \gamma_k + \mu_k - \frac{\mu_m}{\gamma_m} \gamma_k \right) b_{kj} + \\ &+ \sum_{j=1}^{r_m} \left(-\mu_m + \frac{\mu_m}{\gamma_m} \gamma_m \right) b_{kj} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{r_k} \left(-\mu_k + \frac{\mu_m}{\gamma_m} \gamma_k \right) b_{kj}. \end{aligned}$$

Две первые суммы в полученном выражении равны нулю всегда, скобка $(-\mu_k + \frac{\mu_m}{\gamma_m} \gamma_k)$ в третьей сумме неотрицательна, так как $\mu_k < \mu_m$, $\gamma_k > \gamma_m$ для $k > m$. Следовательно, $\mathcal{L}_2(b, \widehat{\lambda}, \widehat{\zeta}) \geq 0$ для всех неотрицательных b_{kj} . Несложно проверить с помощью непосредственной подстановки, что $\mathcal{L}_2(\widehat{b}, \widehat{\lambda}, \widehat{\zeta}) = 0$, то есть и в этом случае условие (c) выполнено. Проверка выполнения условия (d) также не представляет большого труда. Из всего выше сказанного следует, что построенная последовательность \widehat{b} есть решение задачи (2.14). \square

2.3. Общие сведения

В задачах, рассматриваемых в главах 3 и 4, восстановление решений уравнений Лапласа и Пуассона проводится на пространствах L_2 . Ниже приводятся сведения, касающиеся обобщённых решений уравнений Лапласа и Пуассона, а также свойств этих решений (см., например, [9], [10], [15]).

2.3.1. Пространства $L_{2, \log}(Q)$, $H_{\log}^k(Q)$, $H^{\circ k}(Q)$ и $H^k(Q)$.

Пусть Q —ограниченная область в d -мерном пространстве, x —элемент Q , ∂Q —кусочно-гладкая $(d - 1)$ -мерная поверхность, ограничивающая Q , x' —элемент ∂Q . Множество интегрируемых в Q функций, квадрат модуля которых интегрируем по любой строго внутренней подобласти $Q'(\rho(Q, Q') > 0)$, обозначим через $L_{2, \log}(Q)$. Ясно, что $L_{2, \log}(Q)$ есть линейное пространство, и $L_2(Q) \subset L_{2, \log}(Q)$.

Множество функций из $L_{2, \log}(Q)$, имеющих все обобщённые производные до порядка k , $k \in \mathbb{N}$ включительно, принадлежащих пространству $L_{2, \log}(Q)$, обозначим через $H_{\log}^k(Q)$. Через $H^k(Q)$ обозначим подмножество $H_{\log}^k(Q)$, элементы которого вместе со всеми обобщёнными производными до порядка k включительно принадлежат $L_2(Q)$. Ясно, что $H_{\log}^k(Q)$ и $H^k(Q)$ являются линейными пространствами и $H^k(Q) \subset H_{\log}^k(Q)$. Пространство $H^k(Q)$, кроме того, представляет из себя гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f, g)_{H^k(Q)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_Q D^\alpha f D^\alpha \bar{g} dx$$

и нормой

$$\|f\|_{H^k(Q)} = \sqrt{\sum_{|\alpha| \leq k} \int_Q |D^\alpha f|^2 dx}.$$

Подмножество $\dot{C}_{\partial Q}^k(\bar{Q})$ функций из $\dot{C}^k(\bar{Q})$, обращающихся в ноль в пересечении Q с некоторой окрестностью ∂Q , является линейным многообразием в $H^k(Q)$. Замыкание $\dot{C}_{\partial Q}^k(\bar{Q})$ в норме $H^k(Q)$ является подпространством пространства $H^k(Q)$. Обозначим его через $H^{\circ k}(Q)$.

2.3.2. Классические и обобщённые решения задачи Дирихле.

Рассмотрим в d -мерной области Q ($d \geq 2$) общее уравнение Пуассона

$$(2.15) \quad \mathfrak{L}u \equiv -(\operatorname{div}(k(x)\nabla u(x)) - a(x)u(x)) = f(x),$$

где $k(x) \in C^1(Q)$, $k(x) \geq K > 0$, $a(x) \in C(\bar{Q})$. Функция $u(x) \in C^2(Q) \cap C(\bar{Q})$ называется классическим решением первой краевой задачи (задачи Дирихле) для (2.15), если $u(x)$ удовлетворяет в Q уравнению (2.15), а на границе области ∂Q —граничному условию

$$(2.16) \quad u|_{\partial Q} = \varphi(x'), \quad x' \in \partial Q.$$

Пусть $u(x)$ —классическое решение задачи (2.15)—(2.16) в Q . Умножим обе части уравнения (2.15) на некоторую функцию $\bar{v}(x) \in$

$\dot{C}^1(Q)$, где $\dot{C}^1(Q)$ — множество финитных функций в $C^1(Q)$. Интегрируя теперь равенство по Q и используя формулу Гаусса-Остроградского, получим

$$(2.17) \quad \int_Q (k\nabla u \nabla \bar{v} + au\bar{v})dx = \int_Q f\bar{v}dx.$$

Если предположить, что $u_{x_i} \in L_2(Q)$, $i = 1, \dots, d$, то есть $u(x) \in H^1(Q)$, и $f(x) \in L_2(Q)$, то (2.17) будет выполняться не только для всех $v(x) \in \dot{C}^1(Q)$, но и для всех $v(x) \in H^{\circ 1}Q$. Следовательно, если $f(x) \in L_2(Q)$, то классическое решение задачи Дирихле $u(x) \in H^1(Q)$ удовлетворяет (2.17) при всех $v(x) \in H^{\circ 1}(Q)$.

Функция $u(x) \in H^1(Q)$ называется обобщённым решением (из класса $H^1(Q)$) задачи Дирихле при $f(x) \in L_2(Q)$, если она удовлетворяет интегральному равенству (2.17) при всех $v(x) \in H^{\circ 1}(Q)$, а также граничному условию (2.16). В граничном условии равенство понимается как равенство элементов из $L_2(\partial Q)$, где $u|_{\partial Q}$ —след функции $u(x)$ из $L_2(Q)$ на ∂Q .

Условия существования и единственности обобщённого решения задачи Дирихле с нулевым граничным условием даёт следующая теорема:

ТЕОРЕМА 4. *Если $a(x) \geq 0$ в Q , то для любой $f(x) \in L_2(Q)$ существует единственное обобщённое решение $u(x) \in H^{\circ 1}(Q)$ задачи (2.15),(2.16) при $u|_{\partial Q} \equiv 0$.*

2.3.3. Собственные функции и собственные значения оператора \mathfrak{L} .

Функция $u(x)$, не равная тождественно нулю, называется классической собственной функцией первой краевой задачи для оператора

$$\mathfrak{L} \equiv -(\operatorname{div}(k(x)\nabla) - a(x)),$$

если существует число λ такое, что $u(x)$ является классическим решением задачи

$$(2.18) \quad -(\operatorname{div}(k(x)\nabla u(x)) - a(x)u(x)) = \lambda u(x), \quad u|_{\partial Q} = 0.$$

Число λ называют собственным значением, соответствующим $u(x)$. Так как $cu(x)$ — тоже собственная функция, то можно считать, что $\|u\|_{L_2(Q)} = 1$.

2.3.4. Обобщённые собственные функции.

Пусть λ —собственное значение, $u(x)$ —соответствующая λ собственная функция первой краевой задачи для оператора \mathfrak{L} , и пусть $u(x) \in H^{\circ 1}(Q)$. Умножим (2.18) на $\bar{v}(x) \in H^{\circ 1}(Q)$ и проинтегрируем по Q :

$$(2.19) \quad \int_Q (k\nabla u \nabla \bar{v} + au\bar{v})dx = \lambda \int_Q u\bar{v}dx.$$

Это равенство выполнено при любых $v(x) \in H^0(Q)$.

Не равная нулю функция $u(x) \in H^0(Q)$ называется обобщённой собственной функцией (из $H^1(Q)$) первой краевой задачи для оператора \mathfrak{L} , если существует число λ такое, что $u(x)$ при всех $v(x) \in H^0(Q)$ удовлетворяет интегральному равенству (2.19). Число λ называют собственным значением, соответствующим u . Функцию $u(x)$ можно нормировать: $\|u(x)\|_{L_2(Q)} = 1$.

Показано, что у первой краевой задачи для оператора \mathfrak{L} существует не более чем счетное множество собственных значений, оно не содержит конечных предельных точек, все собственные значения вещественны. Каждому собственному значению соответствует конечное число (равное кратности значения) взаимно ортогональных в $H^0(Q)(H^1(Q))$ собственных функций, собственные функции, соответствующие разным собственным значениям, также ортогональны в $H^0(Q)(H^1(Q))$.

Обобщённые собственные функции $u_1(x), u_2(x), \dots, u_s(x), \dots$ образуют ортонормированный базис в $L_2(Q)$, то есть любая функция $f(x) \in L_2(Q)$ может быть разложена в ряд Фурье по этим функциям, сходящийся в $L_2(Q)$. При этом имеет место равенство Парсеваля-Стеклова

$$\|f\|_{L_2(Q)}^2 = \sum_{s=1}^{\infty} |f_s|^2,$$

где $f_s = (f, u_s)$ —коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Если $f(x) \in H^0(Q)$, то ряд по обобщённым собственным функциям сходится в $H^0(Q)$.

Если $a(x) \geq 0$, то имеет место следующая

ТЕОРЕМА 5. *Собственные значения λ_s первой краевой задачи для оператора $\mathfrak{L} \equiv -(\operatorname{div}(k(x)\nabla) - a(x))$ вещественны, $\lambda_s > 0$ для $s = 1, 2, \dots$ и $\lambda_s \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$.*

Обобщённые собственные функции этой задачи $u_1(x), u_2(x), \dots, u_s(x), \dots$ образуют ортонормированный базис в $L_2(Q)$, то есть любая функция $f(x) \in L_2(Q)$ может быть разложена в ряд Фурье

$$\sum_{s=1}^{\infty} f_s u_s(x)$$

по этим функциям, сходящийся в $L_2(Q)$. Для функции $f(x) \in H^0(Q)$ ряд по обобщённым собственным функциям сходится в $H^0(Q)$.

2.3.5. Разрешимость первой краевой задачи (задачи Дирихле).

Приведём формулировки теорем о разрешимости задачи Дирихле в достаточно общих постановках:

ТЕОРЕМА 6. При любой $f(x) \in L_2(Q)$ существует единственное обобщенное решение $u(x)$ первой краевой задачи для уравнения (2.15) при нулевых граничных условиях (2.16) ($\varphi = 0$), если нуль не является собственным значением соответствующей краевой задачи для оператора \mathfrak{L} .

Для неоднородных граничных условий имеет место

ТЕОРЕМА 7. Если $a(x) \geq 0$, а функция φ является граничным значением некоторой функции из $H^1(Q)$, то существует единственное обобщенное решение $u(x)$ задачи Дирихле (2.15)–(2.16).

Достаточным условием того, что функция $\varphi(x) \in L_2(\partial Q)$ есть граничное значение (след) некоторой функции из $H^1(Q)$, является условие принадлежности ее $C^1(\partial Q)$. Если область Q —единичный круг в \mathbb{R}^2 , то имеет место следующая теорема

ТЕОРЕМА 8. Для того, чтобы функция $\varphi(\theta)$ из $L_2(0, 2\pi)$ была следом на окружности $\{|x| = 1\}$ некоторой функции из $H^1(|x| < 1)$, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(a_k^2 + b_k^2),$$

где a_k и b_k —коэффициенты Фурье функции $\varphi(\theta)$.

2.3.6. Обобщённые решения задачи Дирихле с неоднородными краевыми условиями.

Из определения обобщённого решения вытекает естественное условие на граничную функцию φ . Нужно требовать, чтобы её можно было продолжить в область Q функцией из пространства $H^1(Q)$, если это требование не выполнено, то обобщённое решение задачи (2.15), (2.16) не может существовать. Если $\varphi \in C^1(\partial Q)$, то такое продолжение существует. Если же $\varphi \in L_2(\partial Q)$, то такое продолжение может не существовать.

Введем более широкое понятие решения—решения из пространства $H_{loc}^1(Q)$. Ниже будет определено, в каком смысле будет пониматься удовлетворение функцией из $H_{loc}^1(Q)$ граничному условию и в каком смысле функция из $H_{loc}^1(Q)$ является решением уравнения. Все функции далее считаются вещественнозначными.

Пусть для простоты область Q есть d -мерный единичный шар $Q = \{|x| < 1\}$, а $\partial Q = \{|x'| = 1\}$ есть $(d-1)$ -мерная единичная сфера. Будем говорить, что функция $u(x) \in H_{loc}^1(Q)$ удовлетворяет граничному условию

$$(2.20) \quad u|_{\partial Q} = \varphi$$

где $\varphi(x') \in L_2(\partial Q)$, в среднем, если

$$(2.21) \quad \lim_{r \rightarrow 1-0} \int_{\partial Q} (u(rx') - \varphi(x'))^2 dx' = 0.$$

Рассмотрим в шаре $Q = \{|x| < 1\}$ уравнение

$$(2.22) \quad -(\operatorname{div}(k(x)\nabla u(x)) - a(x)u(x)) = f(x),$$

где $k(x) \in C^1(Q)$, $\min_{x \in \bar{Q}} k(x) \geq K > 0$, $a(x) \in C(\bar{Q})$, $a(x) \geq 0$, $f(x) \in L_2(Q)$.

Функция $u(x) \in H_{loc}^1(Q)$ называется решением из $H_{loc}^1(Q)$ уравнения (2.22), если для любой финитной в Q функции $v(x)$ из $H^1(Q)$ имеет место равенство

$$(2.23) \quad \int_Q (k\nabla u \nabla v + auv) dx = \int_Q f v dx.$$

Функцию $u(x) \in H_{loc}^1(Q)$ будем называть решением из $H_{loc}^1(Q)$ задачи Дирихле (2.15)–(2.16), если она является решением из $H_{loc}^1(Q)$ уравнения (2.22) и удовлетворяет граничному условию (2.20) в среднем, т.е. в смысле равенства (2.21). Это определение естественным образом можно обобщить для случая произвольной области Q .

2.3.7. Разрешимость задачи Дирихле с граничной функцией из $L_2(\partial Q)$.

Обозначим через $\tilde{H}(Q)$ множество всех функций $u(x)$ из $L_2(Q)$, имеющих в Q обобщённые производные первого порядка, для которых

$$\int_Q |\nabla u|^2 (1 - |x|^2) dx < \infty.$$

Множество $\tilde{H}(Q)$ есть гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u, v)_{\tilde{H}(Q)} = \int_Q [(\nabla u \nabla v)(1 - |x|^2) + uv] dx$$

и с нормой

$$(2.24) \quad \|u\|_{\tilde{H}(Q)} = \left(\int_Q [|\nabla u|^2 (1 - |x|^2) + u^2] dx \right)^{1/2}.$$

Очевидно, что $H^1(Q) \subset \tilde{H}(Q) \subset L_2(Q)$. Кроме того, пространство $\tilde{H}(Q)$ есть пополнение $H^1(Q)$ по норме (2.24). Пусть функции $a(x)$, $k(x)$ удовлетворяют ограничениям

$$\min_{x \in \bar{Q}} k(x) \geq K > 0, \quad a(x) \geq 0.$$

В этом случае имеет место

ТЕОРЕМА 9. *Для любых $\varphi \in L_2(\partial Q)$ и $f \in L_2(Q)$ задача (2.15), (2.16) имеет единственное решение $u(x)$ из $H_{loc}^1(Q)$, и это решение принадлежит пространству $\tilde{H}(Q)$.*

1. Сферические функции суть полиномы от синусов и косинусов угловых координат.

2. $X_{0,d}(x') = \text{const}$.

3. Сферические функции различных порядков ортогональны на единичной сфере:

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} X_{k,d}(x') X_{k',d}(x') dx' = 0, \quad k' \neq k.$$

4. Если $k \neq 0$, то существует a_k линейно-независимых сферических функций данного порядка k . Обозначим эти функции через $Y_j^{(k)}(x')$, $j = 1, \dots, a_k$.

5. При данном k функции $Y_j^{(k)}(x')$ можно ортогонализировать. Тогда система функций

$$(2.27) \quad \{Y_j^{(k)}(x')\}, \quad k = 0, 1, \dots, j = 1, \dots, a_k$$

ортонормирована по единичной сфере \mathbb{S}^{d-1} :

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} Y_j^{(k)}(x') Y_i^{(l)}(x') dx = \begin{cases} 0, & (k \neq l) \vee (j \neq i), \\ 1, & (k = l) \wedge (j = i). \end{cases}$$

6. Система сферических функций (2.27) полна в $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Из этого следует, что любая функция, определённая почти всюду на единичной сфере \mathbb{S}^{d-1} и на ней квадратично суммируемая, может быть разложена по сферическим функциям, и на сфере \mathbb{S}^{d-1} этот ряд будет сходиться в среднем к данной функции. Разложение функции $f(x') \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ в ряд по сферическим функциям имеет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x'),$$

где

$$c_{kj} = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(x') Y_j^{(k)}(x') dx'$$

—коэффициенты Фурье функции $f(x')$.

7. Если $d = 2$, то существуют две ортогональные функции порядка $k > 0$. За такие функции можно взять $\cos k\theta$ и $\sin k\theta$, где θ —полярный угол в двумерной плоскости.

8. Функции

$$r^k Y_j^{(k)}(x'), \quad \frac{Y_j^{(k)}(x')}{r^{d+k-2}}, \quad k \geq 0$$

гармоничны: первая—в любой конечной области, вторая—в любой области, не содержащей начала координат.

9. Сферический лапласиан или оператор Бельтрами-Лапласа, определяется для функций, заданных на единичной сфере \mathbb{S}^{d-1} ,

следующим образом

$$\Delta_S Y(x') = \Delta Y \left(\frac{x}{|x|} \right) \Big|_{x=x'}.$$

Собственные значения Λ оператора Δ_S , отвечающие условию

$$\Delta_S Y = -\Lambda Y,$$

задаются соотношениями

$$\Lambda_k = k(k + d - 2), \quad k = 0, 1, \dots$$

Собственными функциями оператора Бельтрами-Лапласа, соответствующими собственному значению Λ_k , являются сферические функции $Y_j^{(k)}(x')$, $j = 1, \dots, a_k$, $x' \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Оптимальное восстановление решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа по неточным исходным данным

В этой главе рассматривается задача оптимального восстановления решения задачи Дирихле в d -мерном шаре на сфере радиуса r по неточно заданным следам решения на сферах радиусов R_1 и R_2 , $R_1 < r < R_2$. Изучаются также задачи оптимального восстановления решения задачи Дирихле в d -мерном шаре и d -мерном шаровом слое по конечному набору коэффициентов Фурье граничных функций, заданных с погрешностью в среднеквадратичной и равномерной метриках; предполагается, что граничные функции принадлежат соболевскому классу $W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1})$.

Для каждой из рассматриваемых задач найдены значения погрешностей оптимального восстановления, а также построены оптимальные методы восстановления, имеющие линейную структуру.

3.1. Оптимальное восстановление решения задачи Дирихле на сфере радиуса r по неточно заданной информации на сферах радиусов R_1 и R_2 , $R_1 < r < R_2$

Пусть

$$\mathbb{B}^d = \left\{ x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : |x|^2 = \sum_{j=1}^d x_j^2 < 1 \right\}$$

— единичный d -мерный шар,

$$\mathbb{S}^{d-1} = \{ x' = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : |x'| = 1 \}$$

— единичная $(d - 1)$ -мерная сфера, $d \geq 2$, при $d = 2$ сфера вырождается в \mathbb{T} — отрезок $[-\pi, \pi]$ с идентифицированными концами.

Рассмотрим в шаре \mathbb{B}^d задачу Дирихле

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \Delta u &= 0, \\ u|_{\mathbb{S}^{d-1}} &= f(x'), \end{aligned}$$

где $u(x) \in L_2(\mathbb{B}^d)$ — искомая функция, $f(x') \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$.

Известно, что $L_2(\mathbb{S}^{d-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k$, где \mathcal{H}_k — множество сферических гармоник порядка k , $\dim \mathcal{H}_0 = a_0 = 1$,

$$\dim \mathcal{H}_k = a_k = (2k + d - 2) \frac{(k + d - 3)!}{(d - 2)! k!}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Выберем в \mathcal{H}_k ортонормированный базис $\{Y_j^{(k)}(x')\}_{j=1}^{a_k}$, $k = 0, 1, \dots$. Если функция $f(x')$ задана своим рядом Фурье

$$f(x') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x'),$$

то решение задачи (3.1) можно записать в виде

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x'),$$

где $x = rx'$, $0 \leq r \leq 1$, $x' \in \mathbb{S}^{d-1}$. Будем считать, что известны две функции $y_1(x'), y_2(x') \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, такие, что

$$\begin{aligned} \|u(R_1 x') - y_1(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} &\leq \delta_1, \quad 0 < R_1 < R_2 \leq 1, \\ \|u(R_2 x') - y_2(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} &\leq \delta_1, \quad 0 < R_1 < R_2 \leq 1. \end{aligned}$$

Требуется по информации о функциях $y_1(x')$ и $y_2(x')$ наилучшим образом восстановить решение $u(x)$ задачи (3.1) на сфере радиуса r , где $R_1 < r < R_2$. В качестве методов восстановления будем рассматривать всевозможные отображения $\varphi: L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \times L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \rightarrow L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Погрешностью данного метода φ назовем величину

$$\begin{aligned} e_r(R_1, R_2, \delta_1, \delta_2, \varphi) \\ = \sup_{\substack{f(x'), y_1(x'), y_2(x') \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \\ \|u(R_i x') - y_i(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta_j, \quad j=1,2}} \|u(rx') - \varphi(y_1, y_2)(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}. \end{aligned}$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E_r(R_1, R_2, \delta_1, \delta_2) = \inf_{\varphi: L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \times L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \rightarrow L_2(\mathbb{S}^{d-1})} e_r(R_1, R_2, \delta_1, \delta_2, \varphi),$$

а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным.

Установим связь между рассматриваемой задачей и **теоремой 1**. Пространство X здесь совпадает с $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, $Z = L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, линейный оператор T_r , подлежащий восстановлению, действует из $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ в пространство $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, является следом решения на сфере радиуса r , и определён равенством

$$T_r f(x') = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x').$$

Имеются два линейных оператора T_{R_1} и T_{R_2} , приближённые значения которых задают информацию. Пространства Y_1 и Y_2 совпадают с $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Пусть \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2 — подмножества $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, содержащие все функции $f(x') \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ вида

$$f(x') = \sum_{k=0}^n \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x'),$$

где $n = 0, 1, \dots$. Очевидно, что \tilde{Y}_1 и \tilde{Y}_2 являются всюду плотными подмножествами $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$.

Для данной задачи восстановления имеет место

ТЕОРЕМА 10. Пусть $0 < R_1 < r < R_2 < 1$, $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$. Положим

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \hat{\lambda}_1 &= \begin{cases} \left(\frac{r}{R_1}\right)^{2(m-1)} \frac{R_2^2 - r^2}{R_2^2 - R_1^2}, & \delta_1 < \delta_2, \\ 0, & \delta_1 \geq \delta_2, \end{cases} \\ \hat{\lambda}_2 &= \begin{cases} \left(\frac{r}{R_2}\right)^{2(m-1)} \frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}, & \delta_1 < \delta_2, \\ 1, & \delta_1 \geq \delta_2, \end{cases} \end{aligned}$$

где m — натуральное число, удовлетворяющее неравенству

$$\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^m \leq \frac{\delta_1}{\delta_2} < \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{m-1}.$$

Тогда

$$E_r(R_1, R_2, \delta_1, \delta_2) = \sqrt{\hat{\lambda}_1 \delta_1^2 + \hat{\lambda}_2 \delta_2^2},$$

а метод

$$\varphi(y_1, y_2)(x') = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \sum_{j=0}^{a_k} \frac{\hat{\lambda}_1 R_1^k y_{kj}^{(1)} + \hat{\lambda}_2 R_2^k y_{kj}^{(2)}}{\hat{\lambda}_1 R_1^{2k} + \hat{\lambda}_2 R_2^{2k}} Y_j^{(k)}(x'),$$

где

$$y_{kj}^{(i)} = \int_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} y_i(x') Y_j^{(k)}(x') dx', \quad i = 1, 2,$$

является оптимальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим экстремальную задачу

$$(3.3) \quad \|u(rx')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 \rightarrow \max, \quad \|u(R_i x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 \leq \delta_i^2, \quad i = 1, 2, \\ f(x') \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}),$$

где $u(x)$ — решение задачи (3.1). Если

$$(3.4) \quad f(x') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x'),$$

то решение задачи (3.1) записывается в виде

$$(3.5) \quad u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x'),$$

где $r = |x|$, $x = rx'$, $x' \in \mathbb{S}^{d-1}$. Используя равенство Парсеваля, сведем задачу (3.3) к следующему виду

$$(3.6) \quad \sum_{k=0}^{\infty} r^{2k} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 \rightarrow \max, \quad \sum_{k=0}^{\infty} R_i^{2k} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 \leq \delta_i^2, \quad i = 1, 2.$$

Положим

$$u_k = \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2.$$

Теперь задача (3.6) описывается следующими соотношениями:

$$(3.7) \quad \sum_{k=0}^{\infty} r^{2k} u_k \rightarrow \max, \quad \sum_{k=0}^{\infty} R_i^{2k} u_k \leq \delta_i^2, \quad i = 1, 2,$$

$$u_k \geq 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Рассмотрим функцию Лагранжа для этой новой задачи

$$\mathcal{L}(u, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{k=0}^{\infty} (-r^{2k} + \lambda_1 R_1^{2k} + \lambda_2 R_2^{2k}) u_k,$$

где $u = \{u_k\}_{k=0}^{\infty}$, λ_1, λ_2 — множители Лагранжа. Из **теоремы 2** вытекает, что если найдутся такие $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2 \geq 0$, что для допустимой в задаче (3.7) последовательности $\hat{u} = \{\hat{u}_k\}_{k=0}^{\infty}$ выполнены условия

$$(a) \quad \min_{u_k \geq 0} \mathcal{L}(u, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) = \mathcal{L}(\hat{u}, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2),$$

$$(b) \quad \sum_{i=1}^2 \hat{\lambda}_i \left(\sum_{k=0}^{\infty} R_i^{2k} \hat{u}_k - \delta_i^2 \right) = 0,$$

то \hat{u} — решение задачи (3.7), а ее значение равно $\hat{\lambda}_1 \delta_1^2 + \hat{\lambda}_2 \delta_2^2$. Запишем функцию Лагранжа в виде

$$\mathcal{L}(u, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{k=0}^{\infty} r^{2k} g(k) u_k,$$

где

$$g(t) = -1 + \lambda_1 \left(\frac{R_1}{r} \right)^{2t} + \lambda_2 \left(\frac{R_2}{r} \right)^{2t}.$$

Пусть $\delta_1 < \delta_2$ и $m \in \mathbb{N}$ таково, что

$$\left(\frac{R_1}{R_2} \right)^m \leq \frac{\delta_1}{\delta_2} < \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{m-1}.$$

Нетрудно проверить, что для $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$, определенных равенствами (3.2), функция $g(t)$ при $t = m - 1, m$ равна нулю. Так как функция $g(t)$ является выпуклой ($g''(t) > 0$ при $\lambda_1 = \widehat{\lambda}_1, \lambda_2 = \widehat{\lambda}_2 \forall t$), то $g(k) \geq 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, при всех $u_k \geq 0, k = 0, 1, \dots$ выполнено неравенство

$$\mathcal{L}(u, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) \geq 0.$$

Положим

$$\begin{aligned} \widehat{u}_k &= 0, \quad k \neq m - 1, m, \\ \widehat{u}_{m-1} &= R_1^2 R_2^2 \frac{\delta_1^2 R_1^{-2m} - \delta_2^2 R_2^{-2m}}{R_2^2 - R_1^2}, \\ \widehat{u}_m &= \frac{\delta_2^2 R_2^{-2(m-1)} - \delta_1^2 R_1^{-2(m-1)}}{R_2^2 - R_1^2}. \end{aligned}$$

Последовательность \widehat{u} допустима в задаче (3.7). Действительно, \widehat{u}_{m-1} и \widehat{u}_m неотрицательны, что следует из их определения и определения числа m , и выполнено условие

$$\sum_{k=0}^{\infty} R_i^{2k} \widehat{u}_k \leq \delta_i^2, \quad i = 1, 2,$$

что легко проверяется непосредственной подстановкой. Равенство

$$\mathcal{L}(\widehat{u}, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = 0,$$

также выполнено, и, следовательно, выполнено условие (a). Непосредственной проверкой можно убедиться, что условия (b) также выполняются. Тем самым доказано, что \widehat{u} — решение задачи (3.7).

Если $\delta_1 \geq \delta_2$, то положим

$$\widehat{\lambda}_1 = 0, \quad \widehat{\lambda}_2 = 1, \quad \widehat{u}_0 = \delta^2, \quad \widehat{u}_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Нетрудно проверить, что определенные так $\widehat{u}, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2$ удовлетворяют условиям (a), (b) и \widehat{u} — допустимая в (3.7) последовательность, а, следовательно, \widehat{u} — решение задачи (3.7). Из **теоремы 2** в этом случае также следует, что построенная последовательность \widehat{u} будет решением и задачи

$$(3.8) \quad \sum_{k=0}^{\infty} r^{2k} u_k \rightarrow \max, \quad \sum_{i=1}^2 \widehat{\lambda}_i \sum_{k=0}^{\infty} R_i^{2k} u_k \leq \sum_{i=1}^2 \widehat{\lambda}_i \delta_i^2, \quad u_k \geq 0,$$

и значения задач (3.7) и (3.8) совпадают. Таким образом, мы можем применить **теорему 1**.

Согласно **теореме 1** рассмотрим новую экстремальную задачу

$$(3.9) \quad \begin{aligned} &\widehat{\lambda}_1 \|u(R_1 x') - \widetilde{y}_1(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 \\ &+ \widehat{\lambda}_2 \|u(R_2 x') - \widetilde{y}_2(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 \rightarrow \min, \quad f(x') \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}), \end{aligned}$$

(где по-прежнему $u(rx')$ — решение задачи (3.1)), $\tilde{y}_1 \in \tilde{Y}_1$, $\tilde{y}_2 \in \tilde{Y}_2$
и

$$\tilde{y}_i = \sum_{k=0}^{n_i} \sum_{j=1}^{a_k} y_{kj}^{(i)} Y_j^{(k)}(x'), \quad i = 1, 2,$$

n_1 и n_2 — некоторые натуральные числа. Перейдем к решению задачи (3.9). Она может быть записана в виде

$$\begin{aligned} & \hat{\lambda}_1 \left(\sum_{k=0}^{n_1} \sum_{j=1}^{a_k} (R_1^k c_{kj} - y_{kj}^{(1)})^2 + \sum_{k=n_1+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} R_1^{2k} c_{kj}^2 \right) + \\ & + \hat{\lambda}_2 \left(\sum_{k=0}^{n_2} \sum_{j=1}^{a_k} (R_2^k c_{kj} - y_{kj}^{(2)})^2 + \sum_{k=n_2+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} R_2^{2k} c_{kj}^2 \right) \rightarrow \min, \\ & f(x') \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}), \end{aligned}$$

где c_{kj} — коэффициенты Фурье функции $f(x')$ (см. (3.4)). Дифференцируя выражение по c_{kj} и приравнявая производные к нулю, получим систему для нахождения коэффициентов \hat{c}_{kj} . Решая эту систему, имеем

$$(3.10) \quad \hat{c}_{kj} = \frac{\hat{\lambda}_1 R_1^k y_{kj}^{(1)} + \hat{\lambda}_2 R_2^k y_{kj}^{(2)}}{\hat{\lambda}_1 R_1^{2k} + \hat{\lambda}_2 R_2^{2k}}, \quad 1 \leq k \leq \max(n_1, n_2), \quad j = 1, \dots, a_k,$$

$$\hat{c}_{kj} = 0, \quad k > \max(n_1, n_2), \quad j = 1, \dots, a_k.$$

Из выпуклости минимизируемой функции вытекает, что найденное решение действительно реализует минимум. Следовательно, решением задачи (3.9) является функция

$$f_{\tilde{y}_1, \tilde{y}_2} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \hat{c}_{kj} Y_j^{(k)}(x'),$$

и задача (3.9) имеет решение для любого $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \in \tilde{Y}_1 \times \tilde{Y}_2$. Применив оператор T_r к $f_{\tilde{y}_1, \tilde{y}_2}$, получаем

$$T_r f_{y_1, y_2} = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \sum_{j=1}^{a_k} \frac{\hat{\lambda}_1 R_1^k y_{kj}^{(1)} + \hat{\lambda}_2 R_2^k y_{kj}^{(2)}}{\hat{\lambda}_1 R_1^{2k} + \hat{\lambda}_2 R_2^{2k}} Y_j^{(k)}(x').$$

Следуя **теореме 1**, рассмотрим линейный оператор $\mathcal{A} : Y_1 \times Y_2 \rightarrow Z$, действующий по формуле

$$\mathcal{A}(y_1, y_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k}{\hat{\lambda}_1 R_1^{2k} + \hat{\lambda}_2 R_2^{2k}} \sum_{j=1}^{a_k} (\hat{\lambda}_1 R_1^k y_{kj}^{(1)} + \hat{\lambda}_2 R_2^k y_{kj}^{(2)}) Y_j^{(k)}(x').$$

Нетрудно убедиться в том, что для любого $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \in \tilde{Y}_1 \times \tilde{Y}_2$ выполнено равенство

$$\mathcal{A}(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) = T_r f_{\tilde{y}_1, \tilde{y}_2}.$$

Пусть $y = (y_1, y_2) \in Y = L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \times L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ и норма в пространстве Y определяется как

$$\|y\|_Y = \sqrt{\|y_1\|_{Y_1}^2 + \|y_2\|_{Y_2}^2} = \sqrt{\|y_1\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 + \|y_2\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2}.$$

Покажем, что \mathcal{A} —непрерывный оператор. Для этого достаточно показать, что $\|\mathcal{A}\|$ конечна, где

$$\|\mathcal{A}\| = \sup_{\substack{y \in Y \\ \|y\|_Y \leq 1}} \|\mathcal{A}(y)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}.$$

Так как $y_i \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, то

$$\|y_i\|_{Y_i}^2 = \|y_i\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} (y_{kj}^{(i)})^2.$$

Перейдем к доказательству непрерывности оператора \mathcal{A} .

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}\|^2 &= \sup_{\substack{y \in Y \\ \|y\|_Y \leq 1}} \|\mathcal{A}(y)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{2k}}{(\widehat{\lambda}_1 R_1^{2k} + \widehat{\lambda}_2 R_2^{2k})^2} \sum_{j=1}^{a_k} (\widehat{\lambda}_1 R_1^k y_{kj}^{(1)} + \widehat{\lambda}_2 R_2^k y_{kj}^{(2)})^2 \leq \\ &\leq 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{2k}}{(\widehat{\lambda}_1 R_1^{2k} + \widehat{\lambda}_2 R_2^{2k})^2} \sum_{j=1}^{a_k} [\widehat{\lambda}_1^2 R_1^{2k} (y_{kj}^{(1)})^2 + \widehat{\lambda}_2^2 R_2^{2k} (y_{kj}^{(2)})^2]. \end{aligned}$$

Учитывая, что $R_1 < r < R_2 \leq 1$ и $\|y\|_Y \leq 1$, для второго слагаемого имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{2k}}{(\widehat{\lambda}_1 R_1^{2k} + \widehat{\lambda}_2 R_2^{2k})^2} \sum_{j=1}^{a_k} \widehat{\lambda}_2^2 R_2^{2k} (y_{kj}^{(2)})^2 &= \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \frac{r^{2k} (y_{kj}^{(2)})^2}{\left(1 + \frac{\widehat{\lambda}_1 R_1^{2k}}{\widehat{\lambda}_2 R_2^{2k}}\right)^2} &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} (y_{kj}^{(2)})^2 \leq 1. \end{aligned}$$

Если $\widehat{\lambda}_1 \neq 0$, то аналогично рассматривается первое слагаемое. Следовательно, $\|\mathcal{A}\| \leq \sqrt{2}$ и оператор \mathcal{A} непрерывен. Из **теорем** 1 и 2 в этом случае вытекает, что метод

$$\varphi(y_1, y_2)(x') = \mathcal{A}(y_1, y_2) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \sum_{j=1}^{a_k} \frac{\widehat{\lambda}_1 R_1^k y_{kj}^{(1)} + \widehat{\lambda}_2 R_2^k y_{kj}^{(2)}}{\widehat{\lambda}_1 R_1^{2k} + \widehat{\lambda}_2 R_2^{2k}} Y_j^{(k)}(x')$$

является оптимальным, а значение погрешности оптимального восстановления может быть вычислено по формуле

$$E_r(R_1, R_2, \delta_1, \delta_2) = \sqrt{\widehat{\lambda}_1 \delta_1^2 + \widehat{\lambda}_2 \delta_2^2}.$$

Заметим, что если $\delta_1 \geq \delta_2$, то

$$f_{y_1, y_2}(x') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \frac{y_{kj}^{(2)}}{R_2^k} Y_j^{(k)}(x'),$$

$$E_r(R_1, R_2, \delta_1, \delta_2) = \delta_2,$$

а в качестве оптимального можно взять метод

$$\varphi(y_1, y_2)(x') = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \sum_{j=1}^{a_k} \frac{y_{kj}^{(2)}}{R_2^k} Y_j^{(k)}(x').$$

□

3.2. Оптимальное восстановление решения задачи Дирихле в d -мерном единичном шаре ($d > 2$).

Рассмотрим задачу Дирихле

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \Delta u &= 0, \\ u|_{\mathbb{S}^{d-1}} &= f(x'), \end{aligned}$$

в единичном шаре \mathbb{B}^d , где

$$\mathbb{B}^d = \left\{ x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : |x|^2 = \sum_{j=1}^d x_j^2 < 1 \right\}$$

и

$$\mathbb{S}^{d-1} = \{ x' = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : |x'| = 1 \}$$

—единичная $(d-1)$ -мерная сфера.

Пусть $\{Y_j^{(k)}(x')\}$, $k = 0, 1, \dots$, $j = 1, \dots, a_k$ —ортонормированный базис пространства $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, состоящий из сферических гармоник, $f(x') \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ и

$$(3.12) \quad f(x') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x').$$

Тогда решение задачи (3.11) можно записать в виде

$$(3.13) \quad u(x) = u(rx') = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x').$$

где $r = |x|$, $x = rx'$, $x' \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Рассмотрим ситуацию, когда известен конечный набор неточно заданных коэффициентов Фурье граничной функции $f(x')$. Пусть фиксировано $\delta > 0$ и имеются два числа: $n_0 \in \mathbb{N}$ и целое число $0 \leq J_{n_0} < a_{n_0}$. Положим

$$N = \sum_{j=0}^{n_0-1} a_j + J_{n_0}.$$

Предполагается, что для любой функции $f(x') \in \mathbb{S}^{d-1}$ известен некоторый вектор \tilde{f}^N :

$$\begin{aligned} \tilde{f}^N &= \{y_{kj}\}, \quad k = 0, 1, \dots, n_0 - 1, \quad j = 1, \dots, a_k, \\ &\quad k = n_0, \quad j = 1, \dots, J_{n_0}, \end{aligned}$$

такой, что

$$\|\tilde{f}^N - f^N\|_{l_p^N} \leq \delta,$$

где

$$\begin{aligned} f^N &= \{c_{kj}\}, \quad k = 0, 1, \dots, n_0 - 1, \quad j = 1, \dots, a_k, \\ &\quad k = n_0, \quad j = 1, \dots, J_{n_0}, \end{aligned}$$

c_{kj} — коэффициенты Фурье функции $f(x')$ и для $a = (a_1, \dots, a_N)$

$$(3.14) \quad \|a\|_{l_p^N} = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^N |a_k|^p \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \max_{k=1, \dots, N} |a_k|, & p = \infty. \end{cases}$$

Наша задача заключается в том, чтобы по информации о векторе \tilde{f}^N восстановить решение задачи (3.11). Будем предполагать, что функция $f(x')$ принадлежит обобщенному соболевскому классу

$$W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}) = \{f(x') \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}) : \|(-\Delta_S)^{\beta/2} f(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq 1\},$$

где для произвольного $\beta > 0$ и $g(x') \in \mathbb{S}^{d-1}$,

$$g(x') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} g_{kj} Y_j^{(k)}(x'),$$

оператор $(-\Delta_S)^{\beta/2}$ определяется равенством

$$(-\Delta_S)^{\beta/2} g(x') = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^{\beta/2} \sum_{j=1}^{a_k} g_{kj} Y_j^{(k)}(x'),$$

$\Lambda_k = k(k + d - 2)$ — собственные числа оператора Бельтрами-Лапласа $(-\Delta_S)$. В качестве методов восстановления рассмотрим всевозможные операторы $\varphi: l_p^N \rightarrow L_2(\mathbb{B}^d)$. Назовем погрешностью восстановления метода φ величину

$$\begin{aligned} e_{N,p}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta, \varphi) &= \sup_{f(x') \in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1})} \sup_{\substack{\tilde{f}^N \in l_p^N \\ \|f^N - \tilde{f}^N\|_{l_p^N} \leq \delta}} \|u(x) - \varphi(\tilde{f}^N)(x)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}. \end{aligned}$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E_{N,p}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta) = \inf_{\varphi: l_p^N \rightarrow L_2(\mathbb{B}^d)} e_{N,p}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta, \varphi),$$

а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным.

Установим соответствие между данной задачей и **теоремой 3**. Определим пространство X :

$$X = \{f(x') \in L(\mathbb{S}^{d-1}) : \|(-\Delta_S)^{\beta/2} f\|_{L(\mathbb{S}^{d-1})} < \infty\}.$$

Пространство Z совпадает с $L_2(\mathbb{B}^d)$, линейный оператор T , подлежащий восстановлению, действует из X в пространство $L_2(\mathbb{B}^d)$ и определён равенством

$$Tf = u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} r^k \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x').$$

Имеются два линейных оператора I_1 и I_2 . Первый из них определяет множество $W = W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1})$,

$$I_1 = (-\Delta_S)^{\beta/2} : X \rightarrow L_2(\mathbb{S}^{d-1}).$$

Второй оператор $I_2 : X \rightarrow l_p^N$ определен равенством

$$I_2 f = f^N,$$

где вектор f^N определён выше.

Рассмотрим сначала случай $p = 2$. Здесь имеет место

ТЕОРЕМА 11. Пусть δ и β — произвольные положительные числа, $N = a_0 + \dots + a_{n_0-1} + J_{n_0}$, $0 \leq J_{n_0} < a_{n_0}$, $n_0 > 0$. Тогда

$$E_{N,2}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta) = \sqrt{\frac{\delta^2}{d} + \frac{1}{\Lambda_{n_0}^\beta(2n_0 + d)}},$$

а метод

$$\varphi(\tilde{f}^N)(x) = \sum_{k=0}^{n_0-1} r^k \left(1 + \frac{d}{2n_0 + d} \left(\frac{\Lambda_k}{\Lambda_{n_0}}\right)^\beta\right)^{-1} \sum_{j=1}^{a_k} y_{kj} Y_j^{(k)}(x')$$

является оптимальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим экстремальную задачу

$$(3.15) \quad \|u(x)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}^2 \rightarrow \max, \quad \|f^N\|_{l_2^N}^2 \leq \delta^2, \\ \|(-\Delta_S)^{\beta/2} f(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 \leq 1,$$

где $u(x)$ — решение задачи (3.11). Используя равенство Парсеваля и учитывая, что

$$\|u(x)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}^2 = \int_{\mathbb{B}^d} |u(x)|^2 dx = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 \int_0^1 r^{2k} r^{d-1} dr,$$

перепишем задачу (3.15) в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+d} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 \rightarrow \max, \quad \sum_{k=0}^{n_0-1} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 + \sum_{j=1}^{J_{n_0}} c_{n_0j}^2 \leq \delta^2,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^\beta \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 \leq 1.$$

Введем обозначения

$$u_k = \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2, \quad k = 0, 1, \dots, \quad u'_{n_0} = \sum_{j=1}^{J_{n_0}} c_{n_0j}^2.$$

В новых обозначениях получим

$$(3.16) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k}{2k+d} \rightarrow \max, \quad \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + u'_{n_0} \leq \delta^2,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^\beta u_k \leq 1, \quad u_k \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad u_{n_0} \geq u'_{n_0} \geq 0.$$

Введем для задачи (3.16) функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(\{u_k\}_0^\infty, u'_{n_0}, \mu_1, \mu_2) = \sum_{k=0}^{n_0-1} \left(-\frac{1}{2k+d} + \mu_1 + \mu_2 \Lambda_k^\beta \right) u_k +$$

$$+ \mu_1 u'_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2k+d} + \mu_2 \Lambda_k^\beta \right) u_k,$$

где μ_1, μ_2 — множители Лагранжа. Из **теоремы 3** следует, что если найдутся неотрицательные $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$ и допустимые в (3.16) $\{\hat{u}_k\}_0^\infty, \hat{u}'_{n_0}$ такие, что

$$(a) \quad \min_{u_k \geq 0, u_{n_0} \geq u'_{n_0} \geq 0} \mathcal{L}(\{u_k\}_0^\infty, u'_{n_0}, \hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2) = \mathcal{L}(\{\hat{u}_k\}_0^\infty, \hat{u}'_{n_0}, \hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2),$$

$$(b) \quad \hat{\mu}_1 \left(\sum_{k=0}^{n_0-1} \hat{u}_k + \hat{u}'_{n_0} - \delta^2 \right) + \hat{\mu}_2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^\beta \hat{u}_k - 1 \right) = 0,$$

то $\{\hat{u}_k\}_0^\infty, \hat{u}'_{n_0}$ — решение задачи (3.16). Если при этом для любого фиксированного вектора $\tilde{f}^N \in l_2^N$ существует решение $\hat{f}(x')$ экстремальной задачи

$$(3.17) \quad \hat{\mu}_1 \|f^N - \tilde{f}^N\|_{l_2^N}^2 + \hat{\mu}_2 \|(-\Delta_S)^{\beta/2} f\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 \rightarrow \min,$$

$$f(x') \in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}),$$

то метод, задаваемый формулой (3.13) при $f(x') = \hat{f}(x')$, является оптимальным, а для погрешности оптимального восстановления

имеет место равенство

$$(3.18) \quad E_{N,2}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta) = \sqrt{\widehat{\mu}_1 \delta^2 + \widehat{\mu}_2}.$$

Положим

$$\widehat{\mu}_1 = \frac{1}{d}, \quad \widehat{\mu}_2 = \frac{1}{\Lambda_{n_0}^\beta(2n_0 + d)}, \quad \widehat{u}_0 = \delta^2, \quad \widehat{u}_{n_0} = \frac{1}{\Lambda_{n_0}^\beta}, \quad \widehat{u}'_{n_0} = 0, \\ \widehat{u}_k = 0, \quad k \geq 1, k \neq n_0.$$

Нетрудно убедиться в том, что определенные так $\widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2, \{\widehat{u}_k\}_0^\infty, \widehat{u}'_{n_0}$ удовлетворяют условию (b). Подставляя в функцию Лагранжа $\widehat{\mu}_1$ и $\widehat{\mu}_2$ и учитывая, что $\Lambda_0 = 0, \Lambda_{k+1} > \Lambda_k, k \geq 1$, получаем, что

$$\mathcal{L}(\{u_k\}_0^\infty, u'_{n_0}, \widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2) = \sum_{k=0}^{n_0-1} \left(-\frac{1}{2k+d} + \frac{1}{d} + \frac{\Lambda_k^\beta}{\Lambda_{n_0}^\beta(2n_0+d)} \right) u_k + \\ + \frac{u'_{n_0}}{d} + \sum_{k=n_0}^\infty \left(-\frac{1}{2k+d} + \frac{\Lambda_k^\beta}{\Lambda_{n_0}^\beta(2n_0+d)} \right) u_k \geq 0$$

для всех $\{u_k\}_0^\infty, u_k \geq 0$ и $u'_{n_0} \geq 0$, а $\mathcal{L}(\{\widehat{u}_k\}_0^\infty, \widehat{u}'_{n_0}, \widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2) = 0$, то есть и условие (a) тоже выполнено.

Для построения оптимального метода решим экстремальную задачу (3.17), которая может быть представлена в виде

$$\widehat{\mu}_1 \left(\sum_{k=0}^{n_0-1} \sum_{j=1}^{a_k} (c_{kj} - y_{kj})^2 + \sum_{j=1}^{J_{n_0}} (c_{n_0j} - y_{n_0j})^2 \right) + \widehat{\mu}_2 \sum_{k=1}^\infty \Lambda_k^\beta \sum_{j=1}^\infty c_{kj}^2 \rightarrow \min, \\ f(x') \in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}).$$

В силу выпуклости исследуемого выражения достаточные условия экстремума совпадают с необходимыми. Дифференцируя минимизируемое выражение по c_{kj} и приравнявая полученные производные нулю, получим систему уравнений для нахождения коэффициентов c_{kj} :

$$\widehat{\mu}_1(c_{kj} - y_{kj}) + \widehat{\mu}_2 \Lambda_k^\beta c_{kj} = 0,$$

$$k = 0, 1, \dots, n_0 - 1, \quad j = 1, \dots, a_k, \quad k = n_0, \quad j = 1, \dots, J_{n_0};$$

$$\widehat{c}_{kj} = 0, \quad k = n_0, \quad j = J_{n_0+1}, \dots, a_{n_0}, \quad k \geq n_0 + 1, \quad j = 1, \dots, a_k.$$

Решив эту систему, после подстановки значений $\widehat{\mu}_1$ и $\widehat{\mu}_2$ получаем, что

$$\widehat{c}_{kj} = \left(1 + \frac{\Lambda_k^\beta}{\Lambda_{n_0}^\beta(2n_0+d)} \right)^{-1} y_{kj}$$

для $k = 0, 1, \dots, n_0 - 1, j = 1, \dots, a_k, k = n_0, j = 1, \dots, J_{n_0}$ и $\widehat{c}_{kj} = 0$, когда $k = n_0, j = J_{n_0+1}, \dots, a_{n_0}, k \geq n_0 + 1, j = 1, \dots, a_k$.

Следовательно, решением задачи (3.17) является функция

$$\widehat{f}(x') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \widehat{c}_{kj} Y_j^{(k)}(x').$$

Подставляя коэффициенты \widehat{c}_{kj} в формулу (3.13), получаем, что метод

$$\begin{aligned} \varphi_1(\widetilde{f}^N)(x) = & \sum_{k=0}^{n_0-1} r^k \left(1 + \frac{d}{2n_0 + d} \left(\frac{\Lambda_k}{\Lambda_{n_0}} \right)^\beta \right)^{-1} \sum_{j=1}^{a_k} y_{kj} Y_j^{(k)}(x') + \\ & + r^{n_0} \frac{2n_0 + d}{2(n_0 + d)} \sum_{j=1}^{J_{n_0}} y_{n_0j} Y_j^{(n_0)}(x') \end{aligned}$$

является оптимальным. Подставляя в формулу (3.18) $\widehat{\mu}_1$ и $\widehat{\mu}_2$, получаем

$$E_{N,2}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta) = \sqrt{\frac{\delta^2}{d} + \frac{1}{\Lambda_{n_0}^\beta(2n_0 + d)}}.$$

Покажем, что другой метод

$$\varphi(\widetilde{f}^N)(x) = \sum_{k=0}^{n_0-1} r^k \left(1 + \frac{d}{2n_0 + d} \left(\frac{\Lambda_k}{\Lambda_{n_0}} \right)^\beta \right)^{-1} \sum_{j=1}^{a_k} y_{kj} Y_j^{(k)}(x'),$$

использующий меньший объем информации, также является оптимальным. Положим

$$N_1 = \sum_{k=0}^{n_0-1} a_k.$$

Рассмотрим задачу восстановления с вектором \widetilde{f}^{N_1} , когда $J_{n_0} = 0$. По доказанному выше метод

$$\varphi(\widetilde{f}^{N_1})(x) = \sum_{k=0}^{n_0-1} r^k \left(1 + \frac{d}{2n_0 + d} \left(\frac{\Lambda_k}{\Lambda_{n_0}} \right)^\beta \right)^{-1} \sum_{j=1}^{a_k} y_{kj} Y_j^{(k)}(x')$$

является оптимальным для этого случая и

$$E_{N_1,2}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta) = \sqrt{\frac{\delta^2}{d} + \frac{1}{\Lambda_{n_0}^\beta(2n_0 + d)}}.$$

Используя определение оптимального метода и погрешности оптимального восстановления, применяя метод φ к вектору \widetilde{f}^N , а также учитывая, что

$$\|f^{N_1} - \widetilde{f}^{N_1}\|_{l_2^{N_1}} \leq \|f^N - \widetilde{f}^N\|_{l_2^N}$$

и

$$\varphi(\widetilde{f}^{N_1})(x) \equiv \varphi(\widetilde{f}^N)(x),$$

имеем

$$\begin{aligned}
E_{N_1, 2}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta) &= \\
&= \sup_{f \in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1})} \sup_{\substack{\tilde{f}^{N_1} \in l_2^{N_1} \\ \|f^{N_1} - \tilde{f}^{N_1}\|_{l_2^{N_1}} \leq \delta}} \|u(x) - \varphi(\tilde{f}^{N_1})(x)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)} \\
&\geq \sup_{f \in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1})} \sup_{\substack{\tilde{f}^N \in l_2^N \\ \|f^N - \tilde{f}^N\|_{l_2^N} \leq \delta}} \|u(x) - \varphi(\tilde{f}^N)(x)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)} \\
&\geq \sup_{f \in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1})} \sup_{\substack{\tilde{f}^N \in l_2^N: \\ \|f^N - \tilde{f}^N\|_{l_2^N} \leq \delta}} \|u(x) - \varphi_1(\tilde{f}^N)(x)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)} = \\
&= E_{N, 2}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta).
\end{aligned}$$

В силу равенства

$$E_{N_1, 2}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta) = E_{N, 2}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta),$$

получаем, что метод $\varphi(\tilde{f}^N)(x)$ является оптимальным. \square

Из доказанной теоремы следует, что можно построить оптимальный метод, не использующий коэффициенты $y_{n_0 j}$, $j = 1, \dots, J_{n_0}$, если $0 < J_{n_0} < a_{n_0}$ (то есть количество коэффициентов в последней группе меньше размерности H_{n_0} .)

Перейдем к случаю равномерной метрики ($p = \infty$). Положим

$$\begin{aligned}
m_0 &= \max \left\{ m \in \mathbb{N} : \delta^2 \sum_{k=1}^{m-1} a_k \Lambda_k^\beta < 1 \right\}, \\
\hat{m} &= \begin{cases} m_0, & m_0 \leq n_0, \\ n_0, & m_0 > n_0. \end{cases}
\end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 12. Пусть δ и β — произвольные положительные числа. Тогда

$$\begin{aligned}
(3.19) \quad E_{N, \infty}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta) &= \\
&= \sqrt{\delta^2 \sum_{k=0}^{\hat{m}-1} \left(\frac{1}{2k+d} - \left(\frac{\Lambda_k}{\Lambda_{\hat{m}}} \right)^\beta \frac{1}{2\hat{m}+d} \right) a_k + \frac{1}{\Lambda_{\hat{m}}^\beta (2\hat{m}+d)}},
\end{aligned}$$

а метод

$$(3.20) \quad \varphi(\tilde{f}^N)(x) = \sum_{k=0}^{\hat{m}-1} r^k \sum_{j=1}^{a_k} \left(1 - \frac{2k+d}{2\hat{m}+d} \left(\frac{\Lambda_k}{\Lambda_{\hat{m}}} \right)^\beta \right) y_{kj} Y_j^{(k)}(x')$$

является оптимальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим экстремальную задачу

$$(3.21) \quad \|u\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}^2 \rightarrow \max, \quad \|f^N\|_{l_\infty^N}^2 \leq \delta^2, \quad \|(-\Delta_S)^{\beta/2} f\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 \leq 1.$$

Используя равенство Парсеваля, перепишем ее в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+d} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 \rightarrow \max, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^\beta \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 \leq 1,$$

$$c_{kj}^2 \leq \delta^2, \quad k = 0, 1, \dots, n_0 - 1, j = 1, \dots, a_k, \quad k = n_0, j = 1, \dots, J_{n_0}.$$

Введем обозначения $c_{kj}^2 = v_{kj}$. Задача (3.21) в этих переменных имеет вид

$$(3.22) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+d} \sum_{j=1}^{a_k} v_{kj} \rightarrow \max, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^\beta \sum_{j=1}^{a_k} v_{kj} \leq 1, \\ v_{kj} \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots, j = 1, \dots, a_k, \\ v_{kj} \leq \delta^2, \quad k = 0, 1, \dots, n_0 - 1, j = 1, \dots, a_k, \quad k = n_0, j = 1, \dots, J_{n_0}.$$

Рассмотрим функцию Лагранжа для этой задачи

$$\mathcal{L}(v, \mu, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2k+d} + \lambda \Lambda_k^\beta \right) \sum_{j=1}^{a_k} v_{kj} + \sum_{k=0}^{n_0-1} \sum_{j=1}^{a_k} \mu_{kj} v_{kj} \\ + \sum_{j=1}^{J_{n_0}} \mu_{n_0j} v_{n_0j},$$

где

$$v = \{v_{kj}\}, \quad k = 0, 1, \dots, j = 1, \dots, a_k, \\ \mu = \{\mu_{kj}\}, \quad k = 0, 1, \dots, n_0 - 1, j = 1, \dots, a_k, \quad k = n_0, j = 1, \dots, J_{n_0}.$$

Используя те же общие результаты **теоремы 3**, что и в предыдущем доказательстве, будем искать неотрицательные $\hat{\mu}_{kj}$, $\hat{\lambda}$ и допустимые в задаче (3.22) \hat{v}_{kj} такие, что

$$(a) \quad \min_{v_{kj} \geq 0} \mathcal{L}(v, \hat{\mu}, \hat{\lambda}) = \mathcal{L}(\hat{v}, \hat{\mu}, \hat{\lambda}), \\ (b) \quad \sum_{k=0}^{n_0-1} \sum_{j=1}^{a_k} \hat{\mu}_{kj} (\hat{v}_{kj} - \delta^2) + \sum_{j=1}^{J_{n_0}} \hat{\mu}_{n_0j} (\hat{v}_{n_0j} - \delta^2) \\ + \hat{\lambda} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^\beta \sum_{j=1}^{a_k} \hat{v}_{kj} - 1 \right) = 0.$$

Если при этом для любого фиксированного вектора $\tilde{f}^N \in l_\infty^N$ можно найти решение $\hat{f}(x')$ экстремальной задачи

$$(3.23) \quad \sum_{k=0}^{n_0-1} \sum_{j=1}^{a_k} \hat{\mu}_{kj} (c_{kj} - y_{kj})^2 + \sum_{j=1}^{J_{n_0}} \hat{\mu}_{n_0j} (c_{n_0j} - y_{n_0j})^2 \\ + \hat{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_k^\beta \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 \rightarrow \min, \\ f(x') \in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}),$$

где c_{kj} — коэффициенты Фурье функции $f(x')$, то метод, задаваемый формулой (3.13) при $f(x') = \hat{f}(x')$, будет оптимальным и

$$(3.24) \quad E_{N, \infty}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta) = \sqrt{\delta^2 \left(\sum_{k=0}^{n_0-1} \sum_{j=1}^{a_k} \hat{\mu}_{kj} + \sum_{j=1}^{J_{n_0}} \hat{\mu}_{n_0j} \right) + \hat{\lambda}}.$$

Положим

$$\hat{v}_{kj} = \delta^2, \quad k = 0, 1, \dots, \hat{m} - 1, \quad j = 1, \dots, a_k, \\ \hat{v}_{kj} = 0, \quad k > \hat{m}, \quad j = 1, \dots, a_k.$$

Значения для $\hat{v}_{\hat{m}j}$ зададим формулами:

если $m_0 \leq n_0$, то $\hat{m} = m_0$ и

$$\hat{v}_{\hat{m}j} = \hat{v}_{m_0j} = \frac{1}{a_{m_0} \Lambda_{m_0}^\beta} \left(1 - \delta^2 \sum_{k=1}^{m_0-1} a_k \Lambda_k^\beta \right), \quad j = 1, \dots, a_{m_0};$$

если $m_0 > n_0$, то $\hat{m} = n_0$ и

$$\hat{v}_{\hat{m}j} = \hat{v}_{n_0j} = \begin{cases} \delta^2, & j = 1, \dots, J_{n_0}, \\ \frac{1 - \delta^2 \left(\sum_{k=1}^{n_0-1} a_k \Lambda_k^\beta + J_{n_0} \Lambda_{n_0}^\beta \right)}{a_{n_0} - J_{n_0}}, & j = J_{n_0} + 1, \dots, a_{n_0}. \end{cases}$$

Докажем допустимость последовательности \hat{v} . Если $\hat{m} = n_0$, то из определения \hat{m} и m_0 следует, что $m_0 > n_0$ и

$$\delta^2 \sum_{k=1}^{n_0} a_k \Lambda_k^\beta < 1.$$

Следовательно, можно взять $\hat{v}_{n_0j} = \delta^2$ при $j = 1, \dots, J_{n_0}$, а на оставшиеся коэффициенты \hat{v}_{n_0j} условия $\hat{v}_{kj} \leq \delta^2$ не распространяются. При таком задании \hat{v}_{kj} выполнено равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \hat{v}_{kj} \Lambda_k^\beta = 1.$$

В случае, когда $\widehat{m} = m_0 < n_0$, достаточно показать, что выполняются неравенства $\widehat{v}_{m_0j} \leq \delta^2, j = 1, \dots, a_{m_0}$. Предполагая противное, имеем

$$\frac{1 - \delta^2 \sum_{k=1}^{m_0-1} a_k \Lambda_k^\beta}{a_{m_0} \Lambda_{m_0}^\beta} > \delta^2.$$

Отсюда вытекает, что

$$\delta^2 \sum_{k=1}^{m_0} a_k \Lambda_k^\beta < 1,$$

что противоречит определению m_0 . Положим

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{\Lambda_{\widehat{m}}^\beta (2\widehat{m} + d)}, \quad \widehat{\mu}_{kj} = \frac{1}{2k + d} - \frac{1}{2\widehat{m} + d} \left(\frac{\Lambda_k}{\Lambda_{\widehat{m}}} \right)^\beta, \\ k = 0, 1, \dots, \widehat{m} - 1, \quad j = 1, \dots, a_k.$$

Остальные $\widehat{\mu}_{kj}$ положим равными 0. Подставляя в функцию Лагранжа $\widehat{\mu}$ и $\widehat{\lambda}$ и учитывая, что Λ_k монотонно возрастают, нетрудно проверить, что для всех v таких, что $v_{kj} \geq 0$, выполняется неравенство

$$\mathcal{L}(v, \widehat{\mu}, \widehat{\lambda}) \geq 0$$

Выполнение равенства $\mathcal{L}(\widehat{v}, \widehat{\mu}, \widehat{\lambda}) = 0$ также легко проверяется. Следовательно, условие (a) выполнено. Непосредственная проверка показывает, что условие (b) тоже выполнено, и \widehat{v} —решение задачи (3.22).

Перейдем к построению оптимального метода. Для этого рассмотрим задачу (3.23). Продифференцируем выражение по c_{kj} . Приравнявая производные нулю, с учётом вида $\widehat{\mu}_{kj}$, получим систему для определения \widehat{c}_{kj} , которые в силу выпуклости задачи являются решением задачи на минимум:

$$\widehat{\mu}_{kj}(\widehat{c}_{kj} - y_{kj}) + \widehat{\lambda} \Lambda_k^\beta \widehat{c}_{kj} = 0, \\ 0 \leq k \leq \widehat{m} - 1, j = 1, \dots, a_k; \\ \widehat{c}_{kj} = 0, \quad k \geq \widehat{m}, j = 1, \dots, a_k.$$

Ее решением будут коэффициенты

$$\widehat{c}_{kj} = \frac{\widehat{\mu}_{kj}}{\widehat{\mu}_{kj} + \widehat{\lambda} \Lambda_k^\beta} y_{kj}, \quad k = 0, 1, \dots, \widehat{m} - 1, \quad j = 1, \dots, a_k, \\ \widehat{c}_{kj} = 0, \quad k \geq \widehat{m}, \quad j = 1, \dots, a_k.$$

Подставляя эти коэффициенты в формулу (3.13) и учитывая вид $\widehat{\mu}_{kj}$ и $\widehat{\lambda}$, получаем, что метод (3.20) является оптимальным. Подставляя $\widehat{\mu}_{kj}$ и $\widehat{\lambda}$ в формулу (3.24), получаем, что

$$E_{N, \infty}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta) = \sqrt{\delta^2 \sum_{k=0}^{\widehat{m}-1} \left(\frac{1}{2k+d} - \left(\frac{\Lambda_k}{\Lambda_{\widehat{m}}} \right)^\beta \frac{1}{2\widehat{m}+d} \right) a_k + \frac{1}{\Lambda_{\widehat{m}}^\beta (2\widehat{m}+d)}}.$$

□

Пусть фиксирована погрешность $\delta > 0$ вычисления коэффициентов Фурье граничной функции $f(x')$ в задаче Дирихле. Из **теоремы 12** вытекает, что при $m_0 < n_0$ для максимально точного восстановления решения задачи Дирихле по приближенным значениям коэффициентов Фурье функции $f(x')$ требуется знание только первых $N_2 = \sum_{k=0}^{m_0-1} a_k$ коэффициентов. Вычисление следующих коэффициентов Фурье (при условии, что они вычисляются с той же погрешностью,) не приводит к уменьшению погрешности оптимального восстановления. Аналогичный эффект насыщения наблюдается в задачах оптимального восстановления производных по неточным коэффициентам Фурье (см. [4]) и при оптимальном восстановлении решения уравнения теплопроводности по неточной информации о начальной температуре (см. [6]).

Данная задача оптимального восстановления для случая $d = 2$ рассмотрена К.Ю.Осипенко в работе [11].

3.3. Оптимальное восстановление решения задачи Дирихле в d -мерном шаровом поясе по неточно заданным граничным условиям ($d \geq 2$).

Пусть имеется область D_1 , представляющая из себя d -мерный шаровой пояс

$$D_1 = \{x \in \mathbb{R}^d : 0 < R < |x| < 1\},$$

и

$$\mathbb{S}^{d-1} = \{x' \in \mathbb{R}^d : |x'| = 1\}$$

единичная $(d-1)$ -мерная сфера, $d \geq 2$.

Выберем в $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ ортонормированный базис $\{Y_j^{(k)}(x')\}_{j=1}^{a_k}$, $k = 0, 1, \dots$, состоящий из сферических функций, и рассмотрим в области D_1 задачу Дирихле

$$(3.25) \quad \begin{aligned} \Delta u &= 0, \\ u|_{|x|=R} &= f_1(x'), \quad u|_{|x|=1} = f_2(x'), \quad 0 < R < 1, \end{aligned}$$

где функции $f_1(x'), f_2(x') \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ и заданы своими рядами Фурье

$$(3.26) \quad f_1(x') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x'), \quad f_2(x') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} d_{kj} Y_j^{(k)}(x').$$

Известно, (см., например, [10],) что решение этой задачи может быть записано в виде

$$(3.27) \quad u(x) = A(r) Y_1^{(0)}(x') + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \left(\frac{c_{kj} R_2^{2-d-k} - d_{kj} R_1^{2-d-k}}{R_1^k R_2^{2-d-k} - R_2^k R_1^{2-d-k}} r^k + \frac{d_{kj} R_1^k - c_{kj} R_2^k}{R_1^k R_2^{2-d-k} - R_2^k R_1^{2-d-k}} r^{2-d-k} \right) Y_j^{(k)}(x'),$$

где R_1 и R_2 суть внутренний и внешний радиусы шарового пояса, $x = rx', r = |x|, x' \in \mathbb{S}^{d-1}$, и

$$A(r) = \begin{cases} \frac{c_{01} R_2^{2-d} - d_{01} R_1^{2-d}}{R_2^{2-d} - R_1^{2-d}} + \frac{d_{01} - c_{01}}{R_2^{2-d} - R_1^{2-d}} r^{2-d}, & d \geq 3, \\ \frac{d_{01} - c_{01}}{\ln R_2 - \ln R_1} \ln r + \frac{c_{01} \ln R_2 - d_{01} \ln R_1}{\ln R_2 - \ln R_1}, & d = 2. \end{cases}$$

Учитывая, что в рассматриваемой задаче $R_1 = R, R_2 = 1$, после небольшой перегруппировки слагаемых выражение для $u(x)$ можно представить в виде

$$(3.28) \quad u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} (F_{1k}(r) c_{kj} + F_{2k}(r) d_{kj}) Y_j^{(k)}(x'),$$

где коэффициенты $F_{1k}(r)$ и $F_{2k}(r)$ задаются формулами:

1) если $d = 2$ и $k = 0$, то

$$F_{10}(r) = \frac{\ln r}{\ln R}, \quad F_{20}(r) = 1 - \frac{\ln r}{\ln R};$$

2) в остальных случаях

$$F_{1k}(r) = \frac{r^k - r^{2-k-d}}{R^k - R^{2-k-d}}, \quad F_{2k}(r) = \frac{R^k r^{2-k-d} - R^{2-k-d} r^k}{R^k - R^{2-k-d}}.$$

Теперь сформулируем задачу оптимального восстановления. Нам надо восстановить решение задачи (3.25), когда известен конечный набор приближенно заданных коэффициентов Фурье граничных функций. Более точно, предположим, что для любых функций $f_1(x'), f_2(x') \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ известны векторы

$$\tilde{f}_i^N = \{y_{kj}^{(i)}\}, \quad k = 0, 1, \dots, k_0, \quad j = 1, \dots, a_k, \quad N = \sum_{k=0}^{k_0} a_k, \quad i = 1, 2$$

такие, что

$$\|\tilde{f}_i^N - f_i^N\|_{l_p^N} \leq \delta_i, \quad i = 1, 2,$$

где $\|(a_1, \dots, a_N)\|_{l_p^N}$ определена соотношениями (3.14), $\delta_i > 0$ — произвольные числа, $k_0 \geq 0$ — фиксированное целое число,

$$f_1^N = \{c_{kj}\}, f_2^N = \{d_{kj}\}, k = 0, 1, \dots, k_0, j = 1, \dots, a_k.$$

Наша задача заключается в том, чтобы по информации о векторах $\tilde{f}_1^N, \tilde{f}_2^N$ восстановить решение задачи (3.25). Будем предполагать, что функции $f_i(x')$, $i = 1, 2$, принадлежат обобщённому соболевскому классу

$$W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}) = \{f(x') \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}) : \|(-\Delta_S)^{\beta/2} f(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq 1\},$$

где для произвольного $\beta > 0$ и $g(x') \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, заданной своим рядом Фурье

$$g(x') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} g_{kj} Y_j^{(k)}(x'),$$

оператор $(-\Delta_S)^{\beta/2}$ определяется равенством

$$(-\Delta_S)^{\beta/2} g(x') = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^{\beta/2} \sum_{j=1}^{a_k} g_{kj} Y_j^{(k)}(x'),$$

а $\Lambda_k = k(k + d - 2)$ — собственные числа оператора Бельтрами-Лапласа $(-\Delta_S)$. В качестве методов восстановления рассмотрим всевозможные операторы $\varphi: l_p^N \times l_p^N \rightarrow L_2(D_1)$. Назовем погрешностью восстановления метода φ величину

$$\begin{aligned} & e_{N,p}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta_1, \delta_2, \varphi) \\ &= \sup_{\substack{f_i(x') \in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \\ i=1,2}} \sup_{\substack{\tilde{f}_i^N \in l_p^N, \\ \|f_i^N - \tilde{f}_i^N\|_{l_p^N} \leq \delta_i, i=1,2}} \|u(x) - \varphi(\tilde{f}_1^N, \tilde{f}_2^N)(x)\|_{L_2(D_1)}. \end{aligned}$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E_{N,p}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta_1, \delta_2) = \inf_{\varphi: l_p^N \times l_p^N \rightarrow L_2(D_1)} e_{N,p}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta_1, \delta_2, \varphi),$$

а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным. Для решения здесь будет использоваться **теорема 3**, поэтому установим соответствие между этой теоремой и данной задачей восстановления. Пространство X здесь совпадает с $Y \times Y$, где

$$Y = \{f(x') \in L(\mathbb{S}^{d-1}) : \|(-\Delta_S)^{\beta/2} f\|_{L(\mathbb{S}^{d-1})} < \infty\}$$

пространство $Z = L_2(D_1)$, линейный оператор T , подлежащий восстановлению, действует из X в пространство $L_2(D_1)$ и определён формулой (3.28).

Имеются четыре линейных оператора I_1, I_2, I_3 и I_4 . Первый и второй определяют множество $W = W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1})$,

$$I_j : X \rightarrow L_2(\mathbb{S}^{d-1}),$$

$$I_j(f_1, f_2) = -(\Delta_S)^{\beta/2} f_j, \delta_j = 1, j = 1, 2.$$

Третий и четвёртый операторы

$$I_j : X \rightarrow l_p^N, \quad j = 3, 4,$$

определены равенствами

$$I_3(f_1, f_2) = f_1^N = \{c_{kj}\}, \quad I_4(f_1, f_2) = f_2^N = \{d_{kj}\},$$

$$k = 1, \dots, n_0, \quad j = 1, \dots, a_k.$$

Положим

$$(3.29) \quad \alpha_k = \int_R^1 F_{1k}^2(r) r^{d-1} dr,$$

$$\beta_k = \int_R^1 F_{2k}^2(r) r^{d-1} dr,$$

$$\gamma_k = \int_R^1 F_{1k}(r) F_{2k}(r) r^{d-1} dr.$$

Теперь перейдем к формулировке и доказательству основных результатов для рассматриваемой задачи восстановления. Сначала рассмотрим случай $p = 2$. Здесь имеет место следующая

ТЕОРЕМА 13. Пусть δ_1, δ_2 — произвольные положительные числа. Положим

$$\hat{\mu}_1 = \alpha_0 + \frac{\delta_2}{\delta_1} \gamma_0, \quad \hat{\mu}_2 = \beta_0 + \frac{\delta_1}{\delta_2} \gamma_0,$$

$$\hat{\zeta}_1 = \frac{\alpha_{k_0+1} + \gamma_{k_0+1}}{\Lambda_{k_0+1}^\beta}, \quad \hat{\zeta}_2 = \frac{\beta_{k_0+1} + \gamma_{k_0+1}}{\Lambda_{k_0+1}^\beta},$$

Тогда

$$(3.30) \quad E_{N,2}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta_1, \delta_2) =$$

$$= \sqrt{\alpha_0 \delta_1^2 + \beta_0 \delta_2^2 + 2\gamma_0 \delta_1 \delta_2 + \frac{\alpha_{k_0+1} + \beta_{k_0+1} + 2\gamma_{k_0+1}}{\Lambda_{k_0+1}^\beta}},$$

а метод

$$(3.31) \quad \varphi(\tilde{f}_1^N, \tilde{f}_2^N)(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{k_0} \sum_{j=1}^{a_k} \left(\frac{\hat{\mu}_1}{\hat{\mu}_1 + \hat{\zeta}_1 \Lambda_k^\beta} y_{kj}^{(1)} F_{1k}(r) + \frac{\hat{\mu}_2}{\hat{\mu}_2 + \hat{\zeta}_2 \Lambda_k^\beta} y_{kj}^{(2)} F_{2k}(r) \right) Y_j^{(k)}(x'),$$

является оптимальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим экстремальную задачу

$$(3.32) \quad \|u(x)\|_{L_2(D_1)}^2 \rightarrow \max, \quad \|f_i^N\|_{l_2^N}^2 \leq \delta_i^2,$$

$$\|(-\Delta_S)^{\beta/2} f_i(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 \leq 1, \quad i = 1, 2,$$

где $u(x)$ — решение задачи (3.25). Используя равенство Парсеваля, запишем ее в виде

$$(3.33) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \left(\alpha_k c_{kj}^2 + \beta_k d_{kj}^2 + 2\gamma_k c_{kj} d_{kj} \right) \rightarrow \max,$$

$$\sum_{k=0}^{k_0} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 \leq \delta_1^2, \quad \sum_{k=0}^{k_0} \sum_{j=1}^{a_k} d_{kj}^2 \leq \delta_2^2,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^\beta \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 \leq 1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^\beta \sum_{j=1}^{a_k} d_{kj}^2 \leq 1,$$

где $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ определены выше. Покажем, что $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ — монотонно убывающие последовательности положительных чисел. Для этого достаточно показать, что $F_{1k}(r)$ и $F_{2k}(r)$ положительны и монотонно убывают по k для всех $r \in (R, 1)$. Начнем со случая, когда $(d, k) \neq (2, 0)$.

Перепишем $F_{1k}(r)$ в виде

$$F_{1k}(r) = \left(\frac{r}{R} \right)^{1-d/2} \frac{\left(\frac{1}{r} \right)^t - \left(\frac{1}{r} \right)^{-t}}{\left(\frac{1}{R} \right)^t - \left(\frac{1}{R} \right)^{-t}} > 0,$$

где $t = k + d/2 - 1 > 0$ и $R < r < 1$. Введем обозначения

$$\left(\frac{1}{r} \right)^t = \exp at, \quad a = \ln \left(\frac{1}{r} \right), \quad \left(\frac{1}{R} \right)^t = \exp bt, \quad b = \ln \left(\frac{1}{R} \right), \quad 0 < a < b.$$

Теперь выражение для F_{1k} можно записать в виде

$$F_{1k} = \left(\frac{r}{R} \right)^{1-d/2} \frac{\exp at - \exp(-at)}{\exp bt - \exp(-bt)} = \left(\frac{r}{R} \right)^{1-d/2} \frac{\operatorname{sh} at}{\operatorname{sh} bt},$$

$$t > 0, \quad 0 < a < b.$$

Рассмотрим функцию

$$\psi(t) = \frac{\operatorname{sh} at}{\operatorname{sh} bt}$$

при $t \in (0, \infty)$ и $a < b$. Имеем

$$\psi'(t) = \frac{\varphi(t)}{\operatorname{sh}^2 bt}, \quad \varphi(t) = a \operatorname{ch} at \operatorname{sh} bt - b \operatorname{sh} at \operatorname{ch} bt.$$

Поскольку при всех $t \in (0, \infty)$

$$\varphi'(t) = (a^2 - b^2) \operatorname{sh} at \operatorname{sh} bt \leq 0,$$

а $\varphi(0) = 0$, то $\varphi(t) \leq 0$ для всех $t \in (0, \infty)$. Поэтому $\psi'(t) \leq 0$ при $t \in (0, \infty)$. Отсюда следует монотонное убывание функции $\psi(t)$, следовательно, $F_{1k}(r)$ монотонно убывает при увеличении k для любого $r \in (R, 1)$.

Представляя $F_{2k}(r)$ в виде

$$F_{2k}(r) = r^{1-d/2} \frac{\left(\frac{R}{r}\right)^t - \left(\frac{R}{r}\right)^{-t}}{\left(\frac{1}{R}\right)^t - \left(\frac{1}{R}\right)^{-t}},$$

где $t = k + d/2 - 1 > 0$, и вводя обозначения

$$\left(\frac{R}{r}\right)^t = \exp at, \quad a = \ln\left(\frac{R}{r}\right), \quad \left(\frac{1}{R}\right)^t = \exp bt, \quad b = \ln\left(\frac{1}{R}\right), \quad 0 < a < b,$$

получаем аналогичный результат для $F_{2k}(r)$.

Осталось показать, что

$$F_{10}(r) \geq F_{11}(r), \quad F_{20}(r) \geq F_{21}(r), \quad r \in (R, 1)$$

для случая, когда $d = 2$.

Начнем с первого неравенства. Рассмотрим функцию

$$\psi_1(r) = F_{10}(r) - F_{11}(r) = \frac{\ln r}{\ln R} - \frac{(1-r^2)R}{(1-R^2)r}, \quad R < r < 1.$$

Так как функция $\psi_1(r)$ непрерывно дифференцируема в $(R, 1)$, $\psi_1(R) = \psi_1(1) = 0$ и $\psi_1(r)$ не является тождественным нулем на $(R, 1)$, то на этом интервале существует по крайней мере одна точка экстремума функции $\psi_1(r)$, где $\psi_1(r) \neq 0$ и $\psi_1'(r) = 0$. Покажем, что это точка строгого максимума и других экстремумов у $\psi_1(r)$ в $(R, 1)$ нет. Дифференцируя $\psi_1(r)$, имеем

$$\psi_1'(r) = \frac{1}{r \ln R} + \frac{R}{1-R^2} \left(1 + \frac{1}{r^2}\right) = \frac{\varphi_1(r)}{r},$$

где

$$\varphi_1(r) = \frac{1}{\ln R} + \frac{R}{1-R^2} \left(r + \frac{1}{r}\right).$$

Вычислим производную функции $\varphi_1(r)$

$$\varphi_1'(r) = \frac{R}{1-R^2} \left(1 - \frac{1}{r^2}\right).$$

Знак $\varphi_1'(r) < 0$ на $(R, 1)$, следовательно, функция $\varphi_1(r)$ монотонно убывает на $(R, 1)$. Из монотонности $\varphi_1(r)$ и из того, что функция $\psi_1'(r)$ имеет на $(R, 1)$ хотя бы одну корневую точку, вытекает, что функция $\varphi_1(r)$ имеет интервале $(R, 1)$ ровно один корень r^* , $R < r^* < 1$, и функция $\psi_1'(r) = \frac{\varphi_1(r)}{r}$ меняет знаки с "+" на "-" при переходе через r^* . Следовательно, функция $\psi_1(r)$ имеет на интервале $(R, 1)$ один экстремум, и это максимум. Отсюда вытекает, что

$$\psi_1(r) = F_{10}(r) - F_{11}(r) \geq 0, \quad r \in (R, 1).$$

Аналогично доказывается выполнение неравенства

$$F_{20}(r) \geq F_{21}(r), \quad r \in (R, 1).$$

Выписывая функцию Лагранжа для задачи (3.33), имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(c, d, \mu_1, \mu_2, \zeta_1, \zeta_2) &= (-\alpha_0 + \mu_1)c_{01}^2 + (-\beta_0 + \mu_2)d_{01}^2 - 2\gamma_0 c_{01}d_{01} + \\ &+ \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{j=1}^{a_k} \left[-(\alpha_k c_{kj}^2 + \beta_k d_{kj}^2 + 2\gamma_k c_{kj}d_{kj}) + (\mu_1 + \zeta_1 \Lambda_k^\beta) c_{kj}^2 + (\mu_2 + \zeta_2 \Lambda_k^\beta) d_{kj}^2 \right] + \\ &+ \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \left[-(\alpha_k c_{kj}^2 + \beta_k d_{kj}^2 + 2\gamma_k c_{kj}d_{kj}) + \zeta_1 \Lambda_k^\beta c_{kj}^2 + \zeta_2 \Lambda_k^\beta d_{kj}^2 \right], \end{aligned}$$

где

$$c = \{c_{kj}\}, \quad d = \{d_{kj}\}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad j = 1, \dots, a_k,$$

а μ_1, μ_2, ζ_1 и ζ_2 —множители Лагранжа. Для рассматриваемого случая из **теоремы 3** следует, что если найдутся неотрицательные $\widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2, \widehat{\zeta}_1, \widehat{\zeta}_2$ и допустимые в (3.33) \widehat{c}, \widehat{d} такие, что

$$(a) \quad \min_{c, d} \mathcal{L}(c, d, \widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2, \widehat{\zeta}_1, \widehat{\zeta}_2) = \mathcal{L}(\widehat{c}, \widehat{d}, \widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2, \widehat{\zeta}_1, \widehat{\zeta}_2),$$

$$(b) \quad \widehat{\mu}_1 \left(\sum_{k=0}^{k_0} \sum_{j=1}^{a_k} \widehat{c}_{kj}^2 - \delta_1^2 \right) + \widehat{\mu}_2 \left(\sum_{k=0}^{k_0} \sum_{j=1}^{a_k} \widehat{d}_{kj}^2 - \delta_2^2 \right) + \\ + \widehat{\zeta}_1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \Lambda_k^\beta \widehat{c}_{kj}^2 - 1 \right) + \widehat{\zeta}_2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \Lambda_k^\beta \widehat{d}_{kj}^2 - 1 \right) = 0,$$

то \widehat{c} и \widehat{d} — решение задачи (3.33). Если при этом для любых фиксированных векторов $\widetilde{f}_1^N, \widetilde{f}_2^N \in l_2^N$ существует решение $\widehat{f}_1(x')$ и $\widehat{f}_2(x')$ экстремальной задачи

$$(3.34) \quad \widehat{\mu}_1 \|f_1^N - \widetilde{f}_1^N\|_{l_2^N}^2 + \widehat{\mu}_2 \|f_2^N - \widetilde{f}_2^N\|_{l_2^N}^2 + \\ + \widehat{\zeta}_1 \|(-\Delta_S)^{\beta/2} f_1\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 + \widehat{\zeta}_2 \|(-\Delta_S)^{\beta/2} f_2\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 \rightarrow \min, \\ f_1(x'), f_2(x') \in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}),$$

то метод, задаваемый формулой (3.28) при $f_1(x') = \widehat{f}_1(x'), f_2(x') = \widehat{f}_2(x')$, является оптимальным, а для погрешности оптимального восстановления имеет место равенство

$$(3.35) \quad E_{N,2}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta_1, \delta_2) = \sqrt{\widehat{\mu}_1 \delta_1^2 + \widehat{\mu}_2 \delta_2^2 + \widehat{\zeta}_1 + \widehat{\zeta}_2}.$$

Начнем с проверки условий (a) – (b). Положим

$$\widehat{c}_{01} = \delta_1, \quad \widehat{d}_{01} = \delta_2, \\ \widehat{c}_{k_0+1,j} = \widehat{d}_{k_0+1,j} = \left(\frac{1}{a_{k_0+1} \Lambda_{k_0+1}^\beta} \right)^{1/2}, \quad j = 1, \dots, a_{k_0+1};$$

$$\begin{aligned}\widehat{c}_{kj} &= \widehat{d}_{kj} = 0, \quad k \geq 1, k \neq k_0 + 1, \quad j = 1, \dots, a_k; \\ \widehat{\mu}_1 &= \alpha_0 + \frac{\delta_2}{\delta_1} \gamma_0, \quad \widehat{\mu}_2 = \beta_0 + \frac{\delta_1}{\delta_2} \gamma_0, \\ \widehat{\zeta}_1 &= \frac{\alpha_{k_0+1} + \gamma_{k_0+1}}{\Lambda_{k_0+1}^\beta}, \quad \widehat{\zeta}_2 = \frac{\beta_{k_0+1} + \gamma_{k_0+1}}{\Lambda_{k_0+1}^\beta}.\end{aligned}$$

Подставляя в $\mathcal{L}(c, d, \mu_1, \mu_2, \zeta_1, \zeta_2)$ значения $\widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2, \widehat{\zeta}_1, \widehat{\zeta}_2$, получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(c, d, \widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2, \widehat{\zeta}_1, \widehat{\zeta}_2) &= \gamma_0 \delta_1 \delta_2 \left(\frac{c_{01}}{\delta_1} - \frac{d_{01}}{\delta_2} \right)^2 + \\ &+ \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{j=1}^{a_k} \left[(\alpha_0 - \alpha_k) c_{kj}^2 + (\beta_0 - \beta_k) d_{kj}^2 + \gamma_0 \delta_1 \delta_2 \left(\frac{c_{kj}^2}{\delta_1^2} + \frac{d_{kj}^2}{\delta_2^2} - 2 \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \frac{c_{kj}}{\delta_1} \frac{d_{kj}}{\delta_2} \right) + \right. \\ &+ (\alpha_{k_0+1} + \gamma_{k_0+1}) \left(\frac{\Lambda_k}{\Lambda_{k_0+1}} \right)^\beta c_{kj}^2 + (\beta_{k_0+1} + \gamma_{k_0+1}) \left(\frac{\Lambda_k}{\Lambda_{k_0+1}} \right)^\beta d_{kj}^2 \left. \right] + \\ &+ \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \left[\left(-\alpha_k + \frac{\alpha_{k_0+1} \Lambda_k^\beta}{\Lambda_{k_0+1}^\beta} \right) c_{kj}^2 + \left(-\beta_k + \frac{\beta_{k_0+1} \Lambda_k^\beta}{\Lambda_{k_0+1}^\beta} \right) d_{kj}^2 + \right. \\ &\left. + \frac{\gamma_{k_0+1} \Lambda_k^\beta}{\Lambda_{k_0+1}^\beta} \left(c_{kj}^2 + d_{kj}^2 - 2 \frac{\gamma_k \Lambda_{k_0+1}^\beta}{\gamma_{k_0+1} \Lambda_k^\beta} c_{kj} d_{kj} \right) \right].\end{aligned}$$

Покажем, что $\mathcal{L}(c, d, \widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2, \widehat{\zeta}_1, \widehat{\zeta}_2) \geq 0$ для произвольных c, d . Действительно, $(\alpha_0 - \alpha_k)$ и $(\beta_0 - \beta_k)$ неотрицательны в силу монотонного убывания α_k и β_k при возрастании k ,

$$\left(\frac{c_{kj}^2}{\delta_1^2} + \frac{d_{kj}^2}{\delta_2^2} - 2 \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \frac{c_{kj}}{\delta_1} \frac{d_{kj}}{\delta_2} \right) \geq \left(\frac{c_{kj}^2}{\delta_1^2} + \frac{d_{kj}^2}{\delta_2^2} - 2 \frac{c_{kj}}{\delta_1} \frac{d_{kj}}{\delta_2} \right) \geq 0,$$

так как $\gamma_k/\gamma_0 \leq 1$ в силу монотонного убывания γ_k . Скобки

$$\left(-\alpha_k + \frac{\alpha_{k_0+1} \Lambda_k^\beta}{\Lambda_{k_0+1}^\beta} \right), \quad \left(-\beta_k + \frac{\beta_{k_0+1} \Lambda_k^\beta}{\Lambda_{k_0+1}^\beta} \right)$$

неотрицательны, так как в соответствующей сумме $k \geq k_0 + 1$ и последовательность Λ_k монотонно возрастает, а

$$\left(c_{kj}^2 + d_{kj}^2 - 2 \frac{\gamma_k \Lambda_{k_0+1}^\beta}{\gamma_{k_0+1} \Lambda_k^\beta} c_{kj} d_{kj} \right) \geq \left(c_{kj}^2 + d_{kj}^2 - 2 c_{kj} d_{kj} \right) \geq 0,$$

поскольку $(\gamma_k \Lambda_{k_0+1}^\beta)/(\gamma_{k_0+1} \Lambda_k^\beta) \leq 1$. Нетрудно проверить, что

$$\mathcal{L}(\widehat{c}, \widehat{d}, \widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2, \widehat{\zeta}_1, \widehat{\zeta}_2) = 0,$$

то есть условие (a) выполнено. Выполнение условия (b) также легко проверяется непосредственно.

Рассмотрим теперь экстремальную задачу (3.34). Перепишем ее в виде

$$\begin{aligned} & \widehat{\mu}_1 \sum_{k=0}^{k_0} \sum_{j=1}^{a_k} (c_{kj} - y_{kj}^{(1)})^2 + \widehat{\mu}_2 \sum_{k=0}^{k_0} \sum_{j=1}^{a_k} (d_{kj} - y_{kj}^{(2)})^2 + \\ & + \widehat{\zeta}_1 \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^\beta \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 + \widehat{\zeta}_2 \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^\beta \sum_{j=1}^{a_k} d_{kj}^2 \rightarrow \min, \\ & f_1(x'), f_2(x') \in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}). \end{aligned}$$

Для определения коэффициентов c_{kj} и d_{kj} , после дифференцирования по c_{kj} и d_{kj} , получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} & \widehat{\mu}_1 (c_{kj} - y_{kj}^{(1)}) + \widehat{\zeta}_1 \Lambda_k^\beta c_{kj} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, k_0, \quad j = 1, \dots, a_k, \\ & \widehat{\mu}_2 (d_{kj} - y_{kj}^{(2)}) + \widehat{\zeta}_2 \Lambda_k^\beta d_{kj} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, k_0, \quad j = 1, \dots, a_k, \\ & \widehat{\zeta}_1 \Lambda_k^\beta c_{kj} = 0, \quad \widehat{\zeta}_2 \Lambda_k^\beta d_{kj} = 0, \quad k \geq k_0 + 1, \quad j = 1, \dots, a_k. \end{aligned}$$

Решение системы имеет вид

$$\begin{aligned} \widehat{c}_{kj} &= \frac{\widehat{\mu}_1}{\widehat{\mu}_1 + \widehat{\zeta}_1 \Lambda_k^\beta} y_{kj}^{(1)}, \quad \widehat{d}_{kj} = \frac{\widehat{\mu}_2}{\widehat{\mu}_2 + \widehat{\zeta}_2 \Lambda_k^\beta} y_{kj}^{(2)}, \\ & k = 0, 1, \dots, k_0, j = 1, \dots, a_k, \\ \widehat{c}_{kj} &= 0, \quad \widehat{d}_{kj} = 0, \quad k \geq k_0 + 1, \quad j = 1, \dots, a_k. \end{aligned}$$

Из выпуклости задачи вытекает, что найденное решение реализует минимум. Подставляя полученные значения коэффициентов \widehat{c}_{kj} и \widehat{d}_{kj} в формулу (3.28), а выражения для $\widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2, \widehat{\zeta}_1$ и $\widehat{\zeta}_2$ в формулу (3.35), получаем значение погрешности оптимального восстановления и метод, сформулированные в теореме. \square

Перейдем к случаю равномерной метрики ($p = \infty$). Положим

$$k^* = \max \left(k : \delta^2 \sum_{l=1}^{k-1} a_l \Lambda_l^\beta < 1, \quad 1 \leq k \leq k_0 + 1 \right).$$

Здесь имеет место

ТЕОРЕМА 14. Пусть δ —произвольное положительное число. Тогда

$$\begin{aligned} & E_{N, \infty}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta, \delta) = \\ & = \sqrt{\delta^2 \sum_{k=0}^{k^*-1} a_k (\alpha_k + \beta_k + 2\gamma_k) + \frac{\alpha_{k^*} + \beta_{k^*} + 2\gamma_{k^*}}{\Lambda_{k^*}^\beta} \left(1 - \delta^2 \sum_{k=1}^{k^*-1} a_k \Lambda_k^\beta\right)} \end{aligned}$$

и метод

$$\begin{aligned} \varphi(\tilde{f}_1^N, \tilde{f}_2^N)(x) &= \\ &= \sum_{k=0}^{k^*-1} \sum_{j=1}^{a_k} \left(\frac{\hat{\mu}_{kj}}{\hat{\mu}_{kj} + \hat{\eta}_1 \Lambda_k^\beta} y_{kj}^{(1)} F_{1k} + \frac{\hat{\zeta}_{kj}}{\hat{\zeta}_{kj} + \hat{\eta}_2 \Lambda_k^\beta} y_{kj}^{(2)} F_{2k} \right) Y_j^{(k)}(x'), \end{aligned}$$

где

$$\hat{\eta}_1 = \frac{\alpha_{k^*} + \gamma_{k^*}}{\Lambda_{k^*}^\beta}, \quad \hat{\eta}_2 = \frac{\beta_{k^*} + \gamma_{k^*}}{\Lambda_{k^*}^\beta},$$

$$\hat{\mu}_{kj} = \alpha_k + \gamma_k - \frac{\alpha_{k^*} + \gamma_{k^*}}{\Lambda_{k^*}^\beta} \Lambda_k^\beta, \quad \hat{\zeta}_{kj} = \beta_k + \gamma_k - \frac{\beta_{k^*} + \gamma_{k^*}}{\Lambda_{k^*}^\beta} \Lambda_k^\beta,$$

является оптимальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем использовать тот же метод, что и в предыдущей теореме. Рассмотрим экстремальную задачу

$$(3.36) \quad \|u(x)\|_{L_2(D)}^2 \rightarrow \max, \quad \|f_i^N\|_{l_i^N}^2 \leq \delta^2, \\ \|(-\Delta_S)^{\beta/2} f_i(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 \leq 1, \quad i = 1, 2,$$

где $u(x)$ — решение (3.25). Перепишем задачу (3.36) в виде

$$(3.37) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \left(\alpha_k c_{kj}^2 + \beta_k d_{kj}^2 + 2\gamma_k c_{kj} d_{kj} \right) \rightarrow \max, \\ c_{kj}^2 \leq \delta^2, \quad d_{kj}^2 \leq \delta^2, \quad 0 \leq k \leq k_0, \quad j = 1, \dots, a_k, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^\beta \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 \leq 1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^\beta \sum_{j=1}^{a_k} d_{kj}^2 \leq 1.$$

Функция Лагранжа здесь имеет вид

$$(3.38) \quad \mathcal{L}(c, d, \mu, \zeta, \eta_1, \eta_2) = (-\alpha_0 + \mu_{01})c_{01}^2 + (-\beta_0 + \zeta_{01})d_{01}^2 - 2\gamma_0 c_{01} d_{01} + \\ + \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{j=1}^{a_k} \left[(-\alpha_k + \mu_{kj} + \eta_1 \Lambda_k^\beta) c_{kj}^2 + (-\beta_k + \zeta_{kj} + \eta_2 \Lambda_k^\beta) d_{kj}^2 - 2\gamma_k c_{kj} d_{kj} \right] + \\ + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \left[(-\alpha_k + \eta_1 \Lambda_k^\beta) c_{kj}^2 + (-\beta_k + \eta_2 \Lambda_k^\beta) d_{kj}^2 - 2\gamma_k c_{kj} d_{kj} \right],$$

где

$$c = \{c_{kj}\}, \quad d = \{d_{kj}\}, \quad k \geq 0, \quad j = 1, \dots, a_k,$$

а $\mu = \{\mu_{kj}\}$, $\zeta = \{\zeta_{kj}\}$, $k = 0, \dots, k_0$, $j = 1, \dots, a_k$, η_1, η_2 — множители Лагранжа. Будем искать неотрицательные $\hat{\mu}_{kj}, \hat{\zeta}_{kj}, \hat{\eta}_1$ и $\hat{\eta}_2$, а

также допустимые в задаче (3.37) \widehat{c} и \widehat{d} такие, чтобы выполнялись условия

$$(a) \quad \min_{c, d} \mathcal{L}(c, d, \widehat{\mu}, \widehat{\zeta}, \widehat{\eta}_1, \widehat{\eta}_2) = \mathcal{L}(\widehat{c}, \widehat{d}, \widehat{\mu}, \widehat{\zeta}, \widehat{\eta}_1, \widehat{\eta}_2),$$

$$(b) \quad \sum_{k=0}^{k_0} \sum_{j=1}^{a_k} \widehat{\mu}_{kj} (\widehat{c}_{kj}^2 - \delta^2) + \sum_{k=0}^{k_0} \sum_{j=1}^{a_k} \widehat{\zeta}_{kj} (\widehat{d}_{kj}^2 - \delta^2) + \widehat{\eta}_1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \Lambda_k^\beta \widehat{c}_{kj}^2 - 1 \right) + \widehat{\eta}_2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \Lambda_k^\beta \widehat{d}_{kj}^2 - 1 \right) = 0.$$

Тогда \widehat{c}, \widehat{d} —решение задачи (3.37). Положим

$$\widehat{c}_{kj} = \widehat{d}_{kj} = \delta, \quad k = 0, \dots, k^* - 1, \quad j = 1, \dots, a_k;$$

$$\widehat{c}_{k^*j} = \widehat{d}_{k^*j} = \left[\frac{1}{a_{k^*} \Lambda_{k^*}^\beta} \left(1 - \delta^2 \sum_{k=1}^{k^*-1} a_k \Lambda_k^\beta \right) \right]^{1/2}, \quad j = 1, \dots, a_{k^*};$$

$$\widehat{c}_{k^*j} = \widehat{d}_{k^*j} = 0, \quad k > k^*, \quad j = 1, \dots, a_k.$$

Эта последовательность допустима в задаче (3.37). Действительно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^\beta \sum_{j=1}^{a_k} \widehat{c}_{kj}^2 = 1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^\beta \sum_{j=1}^{a_k} \widehat{d}_{kj}^2 = 1.$$

Что касается условий вида

$$c_{kj}^2 \leq \delta^2, \quad d_{kj}^2 \leq \delta^2, \quad k \geq 0, \quad j = 1, \dots, a_k,$$

то для случая $k^* > k_0$ они, очевидно, выполнены. Если же $k^* \leq k_0$, то достаточно доказать, что

$$\widehat{c}_{k^*j}^2 \leq \delta^2, \quad \widehat{d}_{k^*j}^2 \leq \delta^2, \quad j = 1, \dots, a_{k^*}.$$

Предположим, что $\widehat{c}_{k^*j}^2 > \delta^2$. Тогда имеем

$$\widehat{c}_{k^*j}^2 = \frac{1}{a_{k^*} \Lambda_{k^*}^\beta} \left(1 - \delta^2 \sum_{k=1}^{k^*-1} a_k \Lambda_k^\beta \right) > \delta^2,$$

откуда вытекает, что

$$\delta^2 \sum_{k=1}^{k^*} a_k \Lambda_k^\beta < 1,$$

а это противоречит определению k^* . Допустимость \widehat{d} доказывается аналогично.

Положим

$$\widehat{\eta}_1 = \frac{\alpha_{k^*} + \gamma_{k^*}}{\Lambda_{k^*}^\beta}, \quad \widehat{\eta}_2 = \frac{\beta_{k^*} + \gamma_{k^*}}{\Lambda_{k^*}^\beta}, \quad \widehat{\mu}_{01} = \alpha_0 + \gamma_0, \quad \widehat{\zeta}_{01} = \beta_0 + \gamma_0,$$

$$\widehat{\mu}_{kj} = \alpha_k + \gamma_k - \frac{\alpha_{k^*} + \gamma_{k^*}}{\Lambda_{k^*}^\beta} \Lambda_k^\beta,$$

$$\begin{aligned}
k &= 1, \dots, k^* - 1, \quad j = 1, \dots, a_k, \\
\widehat{\zeta}_{kj} &= \beta_k + \gamma_k - \frac{\beta_{k^*} + \gamma_{k^*}}{\Lambda_{k^*}^\beta} \Lambda_k^\beta, \\
k &= 1, \dots, k^* - 1, \quad j = 1, \dots, a_k, \\
\widehat{\mu}_{kj} = \widehat{\zeta}_{kj} &= 0, \quad k = k^*, \dots, k_0, \quad j = 1, \dots, a_k.
\end{aligned}$$

Покажем, что условия (a), (b) при так определенных $\widehat{\mu}, \widehat{\zeta}, \widehat{\eta}_1, \widehat{\eta}_2, \widehat{c}$ и \widehat{d} выполнены.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(c, d, \widehat{\mu}, \widehat{\zeta}, \widehat{\eta}_1, \widehat{\eta}_2) &= \gamma_0(c_{01} - d_{01})^2 + \sum_{k=1}^{k^*} \sum_{j=1}^{a_k} \gamma_k (c_{kj} - d_{kj})^2 + \\
&+ \sum_{k=k^*+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \left[\left(-\alpha_k + \frac{\alpha_{k^*} \Lambda_k^\beta}{\Lambda_{k^*}^\beta} \right) c_{kj}^2 + \left(-\beta_k + \frac{\beta_{k^*} \Lambda_k^\beta}{\Lambda_{k^*}^\beta} \right) d_{kj}^2 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\gamma_{k^*} \Lambda_k^\beta}{\Lambda_{k^*}^\beta} (c_{kj}^2 + d_{kj}^2) - 2\gamma_k c_{kj} d_{kj} \right].
\end{aligned}$$

Из монотонности $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \Lambda_k$ и того, что $k > k^*$ во второй сумме, имеем

$$-\alpha_k + \frac{\alpha_{k^*} \Lambda_k^\beta}{\Lambda_{k^*}^\beta} \geq 0, \quad -\beta_k + \frac{\beta_{k^*} \Lambda_k^\beta}{\Lambda_{k^*}^\beta} \geq 0,$$

$$\frac{\gamma_{k^*} \Lambda_k^\beta}{\Lambda_{k^*}^\beta} (c_{kj}^2 + d_{kj}^2) - 2\gamma_k c_{kj} d_{kj} \geq \gamma_k (c_{kj}^2 + d_{kj}^2 - 2c_{kj} d_{kj}) \geq 0.$$

Следовательно, $\mathcal{L}(c, d, \widehat{\mu}, \widehat{\zeta}, \widehat{\eta}_1, \widehat{\eta}_2) \geq 0$ для любых c и d . Подставляя в функцию Лагранжа еще и \widehat{c}, \widehat{d} , убеждаемся, что $\mathcal{L}(\widehat{c}, \widehat{d}, \widehat{\mu}, \widehat{\zeta}, \widehat{\eta}_1, \widehat{\eta}_2) = 0$. Итак, условие (a) выполнено. Выполнение условия (b) проверяется непосредственной подстановкой.

Применяя к данному случаю **теорему 3**, получаем, что если при этом для произвольных фиксированных векторов \widetilde{f}_1^N и \widetilde{f}_2^N существует решение $\widehat{f}_1(x'), \widehat{f}_2(x')$ экстремальной задачи

$$\begin{aligned}
(3.39) \quad & \sum_{k=0}^{k_0} \sum_{j=1}^{a_k} \widehat{\mu}_{kj} (c_{kj} - y_{kj}^{(1)})^2 + \sum_{k=0}^{k_0} \sum_{j=1}^{a_k} \widehat{\zeta}_{kj} (d_{kj} - y_{kj}^{(2)})^2 + \\
& + \widehat{\eta}_1 \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^\beta \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 + \widehat{\eta}_2 \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^\beta \sum_{j=1}^{a_k} d_{kj}^2 \rightarrow \min,
\end{aligned}$$

$$f_1(x'), f_2(x') \in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}),$$

то погрешность оптимального восстановления можно вычислить по формуле

$$E_{N, \infty}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta, \delta) = \sqrt{\delta^2 \sum_{k=0}^{k_0} \sum_{j=1}^{a_k} \widehat{\mu}_{kj} + \delta^2 \sum_{k=0}^{k_0} \sum_{j=1}^{a_k} \widehat{\zeta}_{kj} + \widehat{\eta}_1 + \widehat{\eta}_2}.$$

В качестве оптимального метода здесь можно выбрать метод, задаваемый формулой (3.28) при $f_1(x') = \widehat{f}_1(x')$, $f_2(x') = \widehat{f}_2(x')$. Дифференцируя оптимизируемое выражение по c_{kj} и d_{kj} и приравнивая частные производные нулю, а также учитывая выпуклость рассматриваемой задачи, получаем систему для искомых коэффициентов

$$\begin{aligned} \widehat{c}_{kj} &= \frac{\widehat{\mu}_{kj}}{\widehat{\mu}_{kj} + \widehat{\eta}_1 \Lambda_k^\beta} y_{kj}^{(1)}, \quad \widehat{d}_{kj} = \frac{\widehat{\zeta}_{kj}}{\widehat{\zeta}_{kj} + \widehat{\eta}_2 \Lambda_k^\beta} y_{kj}^{(2)}, \\ k &= 0, 1, \dots, k^* - 1, \quad j = 1, \dots, a_k, \\ \widehat{c}_{kj} &= \widehat{d}_{kj} = 0, \quad k \geq k^*, \quad j = 1, \dots, a_k. \end{aligned}$$

Подставляя полученные значения \widehat{c}_{kj} и \widehat{d}_{kj} в формулу (3.28), получим, что метод

$$\begin{aligned} \varphi(\widetilde{f}_1^N, \widetilde{f}_2^N)(x) &= \\ &= \sum_{k=0}^{k^*-1} \sum_{j=1}^{a_k} \left(\frac{\widehat{\mu}_{kj}}{\widehat{\mu}_{kj} + \widehat{\eta}_1 \Lambda_k^\beta} y_{kj}^{(1)} F_{1k} + \frac{\widehat{\zeta}_{kj}}{\widehat{\zeta}_{kj} + \widehat{\eta}_2 \Lambda_k^\beta} y_{kj}^{(2)} F_{2k} \right) Y_j^{(k)}(x'), \end{aligned}$$

является оптимальным. Подставляя в формулу для вычисления погрешности оптимального восстановления значения $\widehat{\mu}_{kj}$, $\widehat{\zeta}_{kj}$, $\widehat{\eta}_1$ и $\widehat{\eta}_2$, получаем, что

$$\begin{aligned} E_{N, \infty}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta, \delta) &= \\ &= \sqrt{\delta^2 \sum_{k=0}^{k^*-1} a_k (\alpha_k + \beta_k + 2\gamma_k) + \frac{\alpha_{k^*} + \beta_{k^*} + 2\gamma_{k^*}}{\Lambda_{k^*}^\beta} \left(1 - \delta^2 \sum_{k=1}^{k^*-1} a_k \Lambda_k^\beta\right)}. \end{aligned}$$

Здесь имеет место эффект насыщения, заключающийся в том, что коэффициенты $y_{kj}^{(1)}$ и $y_{kj}^{(2)}$ при $k \geq k^*$ при построении оптимального метода не используются, то есть увеличение числа коэффициентов Фурье граничных функций, известных с той же погрешностью δ , не приводит к уменьшению погрешности оптимального восстановления. Тем самым при фиксированном δ набор из $N_1 = \sum_{k=0}^{k^*-1} a_k$ коэффициентов Фурье каждой из граничных функций позволяет максимально точно восстановить решение рассматриваемой задачи Дирихле. \square

Восстановление решения обобщенного уравнения Пуассона

В этой главе рассматривается задача оптимального восстановления решения обобщенного уравнения Пуассона в ограниченной области Q с нулевыми граничными условиями, а также на единичной d -мерной сфере \mathbb{S}^{d-1} , когда правая часть уравнения задана неточно. Предполагается, что правые части уравнений принадлежат обобщенным классам Соболева $W_2^\beta(Q)$ и $W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1})$ и известно конечное число коэффициентов Фурье правых частей уравнений, заданных с погрешностью в среднеквадратичной и равномерной метриках. Рассматривается случай произвольного выбора коэффициентов.

Для каждой из рассмотренных задач найдены значения погрешности оптимального восстановления и предложены методы оптимального восстановления, имеющие линейную структуру. В качестве конкретного примера рассмотрена задача оптимального восстановления решения уравнения Пуассона в d -мерном шаре \mathbb{B}^d .

4.1. Общая задача оптимального восстановления решения обобщенного уравнения Пуассона

Пусть Q —область в пространстве \mathbb{R}^d , ограниченная замкнутой кусочно-гладкой $(d - 1)$ -мерной поверхностью ∂Q , $x = (x_1, \dots, x_d) \in Q$, $f(x) \in L_2(Q)$, $a(x) \in C(\overline{Q})$, $k(x) \in C^1(Q)$. Рассмотрим уравнение Пуассона

$$(4.1) \quad -(\operatorname{div}(k(x)\nabla u(x)) - a(x)u(x)) = f(x),$$

с нулевым граничным условием

$$(4.2) \quad u|_{\partial Q} = 0.$$

Известно, что если $k(x) \geq k_0 > 0$, $a(x) \geq 0$, то существует полная в $L_2(Q)$ ортонормированная система $\{\varphi_s(x)\}_1^\infty$ из собственных функций первой краевой задачи для оператора

$$\mathfrak{L} = -(\operatorname{div}(k(x)\nabla - a(x))).$$

Собственные значения этой задачи обладают следующими свойствами: $\lambda_s > 0$, $s = 1, 2, \dots$, $\lambda_s \rightarrow \infty$, $l \rightarrow \infty$. При этом различным собственным значениям соответствует конечное (равное кратности собственного значения) число функций из системы $\{\varphi_s(x)\}_1^\infty$. Если

$$f(x) = \sum_{s=1}^{\infty} a_s \varphi_s(x),$$

где

$$a_s = \int_Q f(x) \varphi_s(x) dx$$

—коэффициенты Фурье функции $f(x)$, то решение задачи (4.1), (4.2) может быть записано в виде

$$u(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s^{-1} a_s \varphi_s(x).$$

Пусть функция $g(x) \in L_2(Q)$,

$$g(x) = \sum_{s=1}^{\infty} g_s \varphi_s(x),$$

где g_s —коэффициенты Фурье функции $g(x)$. Положим по определению

$$\mathfrak{L}^{\alpha/2} g(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s^{\alpha/2} g_s \varphi_s(x),$$

где α —произвольное положительное число. Рассмотрим так называемое обобщённое уравнение Пуассона

$$(4.3) \quad \mathfrak{L}^{\alpha/2} u(x) = f(x)$$

с нулевым граничным условием

$$(4.4) \quad u|_{\partial Q} = 0.$$

Нетрудно увидеть, что решение задачи (4.3)—(4.4) можно записать в виде

$$u(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s^{-\alpha/2} a_s \varphi_s(x).$$

В связи с тем, что среди собственных значений оператора \mathfrak{L} могут быть кратные, введем новые обозначения. Обозначим через $\tilde{\lambda}_k$ различные значения λ_s , $0 < \tilde{\lambda}_1 < \tilde{\lambda}_2 < \dots < \tilde{\lambda}_k \dots$. Положим

$$t_k = \sum_{i=1}^k r_i,$$

где r_i —кратность $\tilde{\lambda}_i$. Перенумеруем функции $\varphi_{t_{k-1}+1}(x), \dots, \varphi_{t_k}(x)$, относящиеся к $\tilde{\lambda}_k$, следующим образом:

$$\varphi_{t_{k-1}+1} = \tilde{\varphi}_{k1}, \varphi_{t_{k-1}+2} = \tilde{\varphi}_{k2}, \dots, \varphi_{t_{k-1}+r_k} = \tilde{\varphi}_{kr_k}.$$

Аналогично проводится перенумерация коэффициентов Фурье a_s функции $f(x)$:

$$a_{t_{k-1}+j} = \tilde{a}_{kj}, \quad j = 1, \dots, r_k$$

Теперь выражение для $f(x)$ принимает вид

$$(4.5) \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{r_k} \tilde{a}_{kj} \tilde{\varphi}_{kj}(x),$$

а решение задачи (4.3)–(4.4) можно записать в виде

$$(4.6) \quad u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\lambda}_k^{-\alpha/2} \sum_{j=1}^{r_k} \tilde{a}_{kj} \tilde{\varphi}_{kj}(x).$$

Перейдем к задаче восстановления. Рассмотрим задачу (4.3)–(4.4). Требуется наилучшим образом восстановить функцию $u(x)$, когда правая часть уравнения (4.3) задана с погрешностью. Будем считать, что для любой функции $f(x) \in L_2(Q)$ известен вектор $\tilde{f}^N \in l_p^N$, задаваемый следующим образом. Пусть дано некоторое фиксированное натуральное число $k_0 \geq 1$ и имеется набор множеств J_k и A_k , где $J_k = \{1, \dots, r_k\}$, $k = 1, \dots, k_0$, $A_k \subseteq J_k$, $k = 1, \dots, k_0$ — произвольные подмножества J_k , q_k — число элементов множества A_k , и

$$N = \sum_{k=1}^{k_0} q_k.$$

Предполагается, что для произвольного вектора

$$\tilde{f}^N = \{y_{kj}\}, \quad k = 1, \dots, k_0, \quad j \in A_k$$

и для произвольного фиксированного $\delta > 0$ выполняется неравенство

$$\|\tilde{f}^N - f^N\|_{l_p^N} \leq \delta,$$

где $\|a\|_{l_p^N} = \|(a_1, \dots, a_N)\|_{l_p^N}$ определена формулой (3.14), а

$$f^N = \{\tilde{a}_{kj}\}, \quad k = 1, \dots, k_0, \quad j \in A_k.$$

Задача оптимального восстановления заключается в том, чтобы по информации о векторе \tilde{f}^N восстановить решение задачи (4.3), (4.4) в метрике $L_2(Q)$. Будем предполагать, что функция $f(x)$ принадлежит обобщённому соболевскому классу

$$W_2^\beta(Q) = \{f(x) \in L_2(Q) : \|\mathcal{L}^{\beta/2} f\|_{L_2(Q)} \leq 1\},$$

$\beta > 0$ — фиксированное действительное число. В качестве методов восстановления рассмотрим всевозможные операторы $\psi : l_p^N \rightarrow L_2(Q)$.

Назовем погрешностью восстановления метода ψ величину

$$e_{N,p}(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta, \psi) =$$

$$= \sup_{f \in W_2^\beta(Q)} \sup_{\substack{\tilde{f}^N \in l_p^N: \\ \|f^N - \tilde{f}^N\|_{l_p^N} \leq \delta}} \|u(x) - \psi(\tilde{f}^N)(x)\|_{L_2(Q)}.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E_{N,p}(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta) = \inf_{\psi: l_p^N \rightarrow L_2(Q)} e_{N,p}(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta, \psi),$$

а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным.

При доказательстве теорем этого раздела будут использоваться результаты **теоремы 3**. Установим соответствие между задачей, рассмотренной в этой теореме, и задачей, сформулированной выше. Рассмотрим пространство $X = \{f(x) \in L_2(Q) : \|\mathfrak{L}^{\beta/2} f\|_{L_2(Q)} < \infty\}$, в качестве пространства Z выберем $L_2(Q)$. Линейный оператор $T : X \rightarrow L_2(Q)$, подлежащий восстановлению, определен равенством

$$Tf(x) = u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\lambda}_k^{-\alpha/2} \sum_{j=1}^{r_k} \tilde{a}_{kj} \tilde{\varphi}_{kj}(x).$$

Имеются два линейных оператора I_1 и I_2 . Первый из них определяет множество $W = W_2^\beta(Q)$,

$$I_1 = \mathfrak{L}^{\beta/2} : X \rightarrow L_2(Q).$$

Второй оператор $I_2 : X \rightarrow l_p^N$ определен соотношением

$$I_2 f = \{\tilde{a}_{kj}\}, \quad k = 1, \dots, k_0, \quad j \in A_k,$$

где $\{\tilde{a}_{kj}\}$ —коэффициенты разложения (4.5) функции $f(x)$.

Сначала рассмотрим случай $p = 2$. Положим

$$A = \{k : A_k = J_k, \quad 1 \leq k \leq k_0\},$$

$$J = \{1, 2, \dots, k_0\},$$

$$k^* = \begin{cases} \min(k : k \in \mathbb{N} \setminus A), & \delta^2 < \tilde{\lambda}_1^{-\beta}, \\ 1, & \delta^2 \geq \tilde{\lambda}_1^{-\beta}, \end{cases}$$

В этом случае верна

ТЕОРЕМА 15. Пусть δ, α и β —произвольные положительные числа.

Тогда

$$E_{N,2}(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta) = \sqrt{\frac{1}{\tilde{\lambda}_{k^*}^{\alpha+\beta}} + \frac{\delta^2}{\tilde{\lambda}_1^\alpha} \left[1 - \left(\frac{\tilde{\lambda}_1}{\tilde{\lambda}_{k^*}} \right)^{(\alpha+\beta)} \right]},$$

а метод $\widehat{\psi}(x)$, задаваемый соотношениями

$$\widehat{\psi}(x) = \begin{cases} 0, & k^* = 1, \\ \sum_{k=1}^{k^*-1} \frac{1}{\widetilde{\lambda}_k^{\alpha/2}} \left[1 + \frac{\widetilde{\lambda}_k^\beta \widetilde{\lambda}_1^\alpha}{\widetilde{\lambda}_{k^*}^{\alpha+\beta} - \widetilde{\lambda}_1^{\alpha+\beta}} \right]^{-1} \sum_{j=1}^{r_k} y_{kj} \widetilde{\varphi}_{kj}(x), & k^* > 1 \end{cases}$$

является оптимальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следуя **теореме 3**, рассмотрим экстремальную задачу

$$(4.7) \quad \|u(x)\|_{L_2(Q)}^2 \rightarrow \max, \quad \|f^N\|_{l_2^N}^2 \leq \delta^2, \\ \|\mathfrak{L}^{\beta/2} f(x)\|_{L_2(Q)}^2 \leq 1.$$

Используя равенство Парсеваля, перепишем задачу (4.7) для данного случая в виде

$$(4.8) \quad \|u(x)\|_{L_2(Q)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\widetilde{\lambda}_k^\alpha} \sum_{j=1}^{r_k} \widetilde{a}_{kj}^2 \rightarrow \max, \\ \|f^N\|_{l_2^N}^2 = \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{j \in A_k} \widetilde{a}_{kj}^2 \leq \delta^2, \\ \|\mathfrak{L}^{\beta/2} f(x)\|_{L_2(Q)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{\lambda}_k^\beta \sum_{j=1}^{r_k} \widetilde{a}_{kj}^2 \leq 1.$$

Введем обозначения

$$v_k = \sum_{j=1}^{r_k} \widetilde{a}_{kj}^2, \quad k \geq 1, \\ v'_k = \sum_{j \in A_k} \widetilde{a}_{kj}^2, \quad k = 1, \dots, k_0.$$

Из определения v'_k вытекает, что $v'_k = v_k$, если $J_k = A_k$. Теперь задачу (4.8) можно записать в виде

$$(4.9) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k}{\widetilde{\lambda}_k^\alpha} \rightarrow \max, \quad \sum_{k \in A} v_k + \sum_{k \in J \setminus A} v'_k \leq \delta^2, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{\lambda}_k^\beta v_k \leq 1, \quad v_k \geq 0, \quad k \geq 1, \\ v_k \geq v'_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, k_0, \quad v'_k = v_k, \quad k \in A.$$

Напишем функцию Лагранжа для задачи (4.9)

$$\mathcal{L}(v, v', \eta_1, \eta_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{\widetilde{\lambda}_k^\alpha} + \eta_2 \widetilde{\lambda}_k^\beta \right) v_k + \eta_1 \left(\sum_{k \in A} v_k + \sum_{k \in J \setminus A} v'_k \right),$$

где $v = \{v_k\}_{k=1}^{\infty}$, $v' = \{v'_k\}_{k=1}^{k_0}$, η_1, η_2 — множители Лагранжа. Из **теоремы 3** следует, что если существуют неотрицательные $\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2$ и допустимые в (4.9) \hat{v} и \hat{v}'_k такие, что выполнены условия

$$(aaa) \quad \mathcal{L}(\hat{v}, \hat{v}', \hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) = \min \{ \mathcal{L}(v, v', \hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2 : v_k \geq v'_k \geq 0, \\ k = 1, \dots, k_0, v_k \geq 0, k \in \mathbb{N} \},$$

$$(bbb) \quad \hat{\eta}_1 \left(\sum_{k \in A} \hat{v}_k + \sum_{k \in J \setminus A} \hat{v}'_k - \delta^2 \right) + \hat{\eta}_2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\lambda}_k^{\beta} \hat{v}_k - 1 \right) = 0,$$

то \hat{v} и \hat{v}' — решение задачи (4.9). Из результатов, полученных в **теореме 3**, следует, что если одновременно с этим для всех $\hat{f}^N \in l_2^N$ существует решение $\hat{f}(x)$ экстремальной задачи

$$(4.10) \quad \hat{\eta}_1 \|f^N - \hat{f}^N\|_{l_2^N}^2 + \hat{\eta}_2 \|(\mathfrak{L})^{\beta/2} f(x)\|_{L_2(Q)}^2 \rightarrow \min, \\ f(x) \in W_2^{\beta}(Q),$$

то

$$E_{N,2}(W_2^{\beta}(Q), \alpha, \delta) = \sqrt{\hat{\eta}_1 \delta^2 + \hat{\eta}_2},$$

а метод, определенный формулой (4.6) для $f(x) = \hat{f}(x)$, является оптимальным.

Рассмотрим еще одну экстремальную задачу

$$(4.11) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k}{\tilde{\lambda}_k^{\alpha}} \rightarrow \max, \quad \sum_{k \in A} v_k \leq \delta^2, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\lambda}_k^{\beta} v_k \leq 1, v_k \geq 0, k \geq 1,$$

где v_k определены выше. Введем новые обозначения

$$\mu_k = \tilde{\lambda}_k^{-\alpha}, \quad \gamma_k = \tilde{\lambda}_k^{\beta},$$

тогда задача (4.11) примет вид

$$(4.12) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k v_k \rightarrow \max, \quad \sum_{k \in A} v_k \leq \delta^2, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k v_k \leq 1, v_k \geq 0, k \geq 1.$$

Последовательность $\{\mu_k\}$ монотонно убывает, последовательность $\{\gamma_k\}$ монотонно возрастает (в силу своего определения), следовательно, задача (4.12) совпадает с задачей, рассмотренной в **лемме 1**.

Пусть последовательности \hat{v} и \hat{v}' являются решением задачи (4.9), тогда последовательность \hat{v} является одной из допустимых в

задаче (4.11). Из этого следует, что если некоторая последовательность \tilde{v} есть решение задачи (4.11), то выполняется неравенство

$$(4.13) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{v}_k}{\tilde{\lambda}_k^\alpha} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\hat{v}_k}{\tilde{\lambda}_k^\alpha}.$$

Решение \tilde{v} задачи (4.11) и соответствующие этому случаю $\hat{\eta}_1$ и $\hat{\eta}_2$ дает **лемма 1**. Учитывая, что

$$\gamma_k = \tilde{\lambda}_k^\beta, \quad \mu_k = \tilde{\lambda}_k^{-\alpha},$$

получаем:

1) если $k^* = 1$, то

$$\tilde{v}_1 = \frac{1}{\tilde{\lambda}_1^\beta}, \quad \tilde{v}_k = 0, \quad k > 1, \quad \hat{\eta}_1 = 0, \quad \hat{\eta}_2 = \frac{1}{\tilde{\lambda}_1^{\alpha+\beta}};$$

2) если $k^* > 1$, то

$$\tilde{v}_1 = \delta^2, \quad \tilde{v}_{k^*} = \frac{1 - \delta^2 \tilde{\lambda}_1^\beta}{\tilde{\lambda}_{k^*}^\beta}, \quad \tilde{v}_k = 0, \quad k \geq 2, k \neq k^*,$$

$$\hat{\eta}_1 = \frac{1}{\tilde{\lambda}_1^\alpha} - \frac{\tilde{\lambda}_1^\beta}{\tilde{\lambda}_{k^*}^{\alpha+\beta}}, \quad \hat{\eta}_2 = \frac{1}{\tilde{\lambda}_{k^*}^{\alpha+\beta}},$$

где

$$k^* = \min(k : k \in \mathbb{N} \setminus A).$$

Положим

$$\hat{v} = \tilde{v}, \quad \hat{v}'_k = 0, \quad k \in J \setminus A.$$

Последовательности \hat{v} и \hat{v}' допустимы в задаче (4.9), следовательно, в силу выполнения неравенства (4.13), они являются решением этой задачи. Проверим теперь, что \hat{v} , \hat{v}' , $\hat{\eta}_1$ и $\hat{\eta}_2$, определенные выше, удовлетворяют условиям (aaa) и (bbb).

Если $k^* = 1$, то для всех неотрицательных v_k

$$\mathcal{L}(v, v', \hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{\tilde{\lambda}_k^\alpha} + \frac{\tilde{\lambda}_k^\beta}{\tilde{\lambda}_1^{\alpha+\beta}} \right) v_k \geq 0,$$

так как $\tilde{\lambda}_k$ монотонно возрастают, а

$$\mathcal{L}(\hat{v}, \hat{v}', \hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) = 0,$$

то есть условие (aaa) выполняется. Условие (bbb) также выполнено, что легко проверяется непосредственной подстановкой.

Теперь проверим выполнение условий (aaa) и (bbb) для случая, когда $k^* > 1$. Подставляя в функцию Лагранжа значения $\hat{\eta}_1$ и $\hat{\eta}_2$, а также учитывая то, что $\tilde{\lambda}_k$ монотонно возрастают, коэффициент

при v_{k^*} в первой сумме равен нулю и k^* не принадлежит множеству A , получаем, что

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(v, v', \hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{\tilde{\lambda}_k^\alpha} + \frac{\tilde{\lambda}_k^\beta}{\tilde{\lambda}_{k^*}^{\alpha+\beta}} \right) v_k + \\ &\quad + \left(\frac{1}{\tilde{\lambda}_1^\alpha} - \frac{\tilde{\lambda}_1^\beta}{\tilde{\lambda}_{k^*}^{\alpha+\beta}} \right) \left(\sum_{k \in A} v_k + \sum_{k \in J \setminus A} v'_k \right) = \\ &= \sum_{k=1}^{k^*-1} \left(-\frac{1}{\tilde{\lambda}_k^\alpha} + \frac{\tilde{\lambda}_k^\beta}{\tilde{\lambda}_{k^*}^{\alpha+\beta}} + \frac{1}{\tilde{\lambda}_1^\alpha} - \frac{\tilde{\lambda}_1^\beta}{\tilde{\lambda}_{k^*}^{\alpha+\beta}} \right) v_k + \sum_{k^*+1}^{\infty} \left(-\frac{1}{\tilde{\lambda}_k^\alpha} + \frac{\tilde{\lambda}_k^\beta}{\tilde{\lambda}_{k^*}^{\alpha+\beta}} \right) v_k + \\ &\quad + \left(\frac{1}{\tilde{\lambda}_1^\alpha} - \frac{\tilde{\lambda}_1^\beta}{\tilde{\lambda}_{k^*}^{\alpha+\beta}} \right) \left(\sum_{\substack{k \in A \\ k > k^*}} v_k + \sum_{k \in J \setminus A} v'_k \right) \geq 0 \end{aligned}$$

для любых $v_k \geq 0$, $v'_k \geq 0$.

Учитывая, что $\mathcal{L}(\hat{v}, \hat{v}', \hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) = 0$ (это легко проверяется непосредственной подстановкой), убеждаемся в том, что и в этом случае условие (aaa) выполнено. Условие (bbb) принимает вид

$$\hat{\eta}_1(\delta^2 - \delta^2) + \hat{\eta}_2 \left(\delta^2 \tilde{\lambda}_1^\beta + \frac{1 - \delta^2 \tilde{\lambda}_1^\beta}{\tilde{\lambda}_{k^*}^\beta} \tilde{\lambda}_{k^*}^\beta - 1 \right) = 0,$$

то есть оно тоже выполняется.

Теперь перейдем к экстремальной задаче (4.10). Используя равенство Парсеваля, перепишем ее в виде

$$(4.14) \quad \hat{\eta}_1 \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{j \in A_k} (\tilde{a}_{kj} - y_{kj})^2 + \hat{\eta}_2 \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\lambda}_k^\beta \sum_{j=1}^{r_k} \tilde{a}_{kj}^2 \rightarrow \min,$$

$$f(x) \in W_2^\beta(Q).$$

Для решения этой задачи воспользуемся стандартным методом поиска точек экстремума для функций многих переменных. Дифференцируя исследуемое выражения по \tilde{a}_{kj} , получим систему

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_1(\tilde{a}_{kj} - y_{kj}) + \hat{\eta}_2 \tilde{\lambda}_k^\beta \tilde{a}_{kj} &= 0, \quad k = 1, \dots, k_0, \quad j \in A_k; \\ \tilde{a}_{kj} &= 0, \quad k = 1, \dots, k_0, \quad j \in (J_k \setminus A_k), \\ k > k_0, \quad j &= 1, \dots, a_k. \end{aligned}$$

Решением этой системы являются коэффициенты

$$\begin{aligned} \hat{a}_{kj} &= \frac{\hat{\eta}_1 y_{kj}}{\hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2 \tilde{\lambda}_k^\beta}, \quad k = 1, \dots, k_0, \quad j \in A_k; \\ \hat{a}_{kj} &= 0, \quad k = 1, \dots, k_0, \quad j \in (J_k \setminus A_k), \\ \hat{a}_{kj} &= 0, \quad k > k_0, \quad j = 1, \dots, a_k, \end{aligned}$$

а решением задачи (4.10)—функция

$$\widehat{f}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{r_k} \widehat{a}_{kj} \widetilde{\varphi}_{kj}(x).$$

Подставляя коэффициенты \widehat{a}_{kj} в формулу (4.6), получаем, что метод

$$\widehat{\psi}_1(x) = \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\widehat{\eta}_1 \widetilde{\lambda}_k^{-\alpha/2}}{\widehat{\eta}_1 + \widehat{\eta}_2 \widetilde{\lambda}_k^\beta} \sum_{j \in A_k} y_{kj} \widetilde{\varphi}_{kj}(x)$$

является оптимальным, а значение $E_{N, 2}(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta)$ находится по формуле

$$E_{N, 2}(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta) = \sqrt{\frac{1}{\widetilde{\lambda}_{k^*}^{(\alpha+\beta)}} + \frac{\delta^2}{\widetilde{\lambda}_1^\alpha} \left[1 - \left(\frac{\widetilde{\lambda}_1}{\widetilde{\lambda}_{k^*}} \right)^{(\alpha+\beta)} \right]}.$$

Покажем, что существует другой оптимальный метод, использующий только часть коэффициентов вектора \widetilde{f}^N . Пусть

$$N_1 = \sum_{k=1}^{k^*-1} r_k,$$

где k^* определено выше. Рассмотрим новую задачу восстановления, в которой для приближения функции $f(x)$ из правой части уравнения Пуассона взят вектор \widetilde{f}^{N_1} , координатами которого являются координаты

$$\widetilde{a}_{kj}, \quad k = 1, \dots, k^* - 1, \quad j = 1, \dots, r_k,$$

вектора \widetilde{f}^N . Из того, что вектор \widetilde{f}^{N_1} есть частный вариант вектора \widetilde{f}^N ,

$$k_0 = k^* - 1, \quad A_k = J_k, \quad k = 1, \dots, k^* - 1, \quad J = A = \{1, \dots, k^* - 1\}$$

и

$$\min(k : \mathbb{N} \setminus A) = k^*,$$

следует, что значения $\widehat{\eta}_1$ и $\widehat{\eta}_2$ имеют тот же вид, что и в задаче с вектором \widetilde{f}^N . Коэффициенты \widehat{a}_{kj} , являющиеся решением второй экстремальной задачи (4.14), для этого случая задаются соотношениями

$$\widehat{a}_{kj} = \frac{\widehat{\eta}_1 y_{kj}}{\widehat{\eta}_1 + \widehat{\eta}_2 \widetilde{\lambda}_k^\beta}, \quad k = 1, \dots, k^* - 1, \quad j = 1, \dots, r_k,$$

$$\widehat{a}_{kj} = 0, \quad k \geq k^*, \quad j = 1, \dots, r_k.$$

Следовательно, значение оптимальной погрешности восстановления вычисляется по формуле

$$E_{N_1, 2}(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta) = \sqrt{\frac{1}{\widetilde{\lambda}_{k^*}^{(\alpha+\beta)}} + \frac{\delta^2}{\widetilde{\lambda}_1^\alpha} \left[1 - \left(\frac{\widetilde{\lambda}_1}{\widetilde{\lambda}_{k^*}} \right)^{(\alpha+\beta)} \right]},$$

а в качестве оптимального можно взять метод

$$\widehat{\psi}(x) = \sum_{k=1}^{k^*-1} \frac{\widehat{\eta}_1 \widetilde{\lambda}_k^{-\alpha/2}}{\widehat{\eta}_1 + \widehat{\eta}_2 \widetilde{\lambda}_k^\beta} \sum_{j=1}^{r_k} y_{kj} \widetilde{\varphi}_{kj}(x).$$

Используя определение оптимального метода и погрешности оптимального восстановления, а также учитывая, что

$$\|f^{N_1} - \widetilde{f}^{N_1}\|_{l_2^{N_1}} \leq \|f^N - \widetilde{f}^N\|_{l_2^N},$$

метод $\widehat{\psi}(x)$ —оптимальный для задачи с вектором \widetilde{f}^{N_1} и

$$\widehat{\psi}(\widetilde{f}^{N_1})(x) \equiv \widehat{\psi}(\widetilde{f}^N)(x),$$

имеем

$$\begin{aligned} E_{N_1, 2}(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta) &= \\ &= \sup_{f(x) \in W_2^\beta(Q)} \sup_{\substack{\widehat{f}^{N_1} \in l_2^{N_1} \\ \|f^{N_1} - \widehat{f}^{N_1}\|_{l_2^{N_1}} \leq \delta}} \|u(x) - \widehat{\psi}(\widehat{f}^{N_1})(x)\|_{L_2(Q)} \geq \\ &\geq \sup_{f(x) \in W_2^\beta(Q)} \sup_{\substack{\widehat{f}^N \in l_2^N \\ \|f^N - \widehat{f}^N\|_{l_2^N} \leq \delta}} \|u(x) - \widehat{\psi}(\widehat{f}^N)(x)\|_{L_2(Q)}. \end{aligned}$$

С другой стороны, так как метод $\widehat{\psi}_1(x)$ является оптимальным для задачи с вектором \widetilde{f}^N , получаем, что выполнено еще одно неравенство

$$\begin{aligned} &\sup_{f(x) \in W_2^\beta(Q)} \sup_{\substack{\widehat{f}^N \in l_2^N \\ \|f^N - \widehat{f}^N\|_{l_2^N} \leq \delta}} \|u(x) - \widehat{\psi}(\widehat{f}^N)(x)\|_{L_2(Q)} \geq \\ &\geq \sup_{f(x) \in W_2^\beta(Q)} \sup_{\substack{\widehat{f}^N \in l_2^N: \\ \|f^N - \widehat{f}^N\|_{l_2^N} \leq \delta}} \|u(x) - \widehat{\psi}_1(\widehat{f}^N)(x)\|_{L_2(Q)} = \\ &= E_{N, 2}(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta). \end{aligned}$$

Из этих неравенств и из того, что

$$E_{N_1, 2}(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta) = E_{N, 2}(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta),$$

вытекает, что метод $\widehat{\psi}(x)$ является оптимальным. \square

Рассмотрим теперь случай равномерной метрики $p = \infty$. Положим

$$\begin{aligned} A_{k_0+1} &= \emptyset, \quad J_{k_0+1} = \{1, \dots, r_{k_0+1}\}, \\ k^* &= \min(k : J_k \neq A_k, 1 \leq k \leq k_0 + 1), \end{aligned}$$

$$\tilde{k} = \begin{cases} 0, & \delta^2 \geq (\tilde{\lambda}_1^\beta r_1)^{-1}, \\ \max(k : \delta^2 \sum_{l=1}^k \tilde{\lambda}_l^\beta r_k < 1, 1 \leq k), & \delta^2 < (\tilde{\lambda}_1^\beta r_1)^{-1}, \end{cases}$$

$$m = \begin{cases} \tilde{k} + 1, & \tilde{k} + 1 < k^*, \\ k^*, & \tilde{k} + 1 \geq k^*. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 16. Пусть α, β и δ — произвольные положительные числа. Тогда

1) если $m = 1$, то

$$E_{N, \infty}(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta) = \frac{1}{\tilde{\lambda}_1^{(\alpha+\beta)/2}}$$

и метод

$$u(x) \approx \hat{\psi}(\tilde{f}^N)(x) \equiv 0;$$

является оптимальным;

2) если $m > 1$, то

$$E_{N, \infty}(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta) = \sqrt{\delta^2 \sum_{j=1}^{m-1} \left(\frac{1}{\tilde{\lambda}_k^\alpha} - \frac{\tilde{\lambda}_k^\beta}{\tilde{\lambda}_m^{\alpha+\beta}} \right) r_k + \frac{1}{\tilde{\lambda}_m^{\alpha+\beta}}},$$

а метод

$$u(x) \approx \hat{\psi}(\tilde{f}^N)(x) = \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{r_k} \left[1 - \left(\frac{\tilde{\lambda}_k}{\tilde{\lambda}_m} \right)^{\alpha+\beta} \right] y_{kj} \tilde{\varphi}_{kj}(x)$$

является оптимальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим экстремальную задачу

$$(4.15) \quad \|u(x)\|_{L_2(Q)}^2 \rightarrow \max, \quad \|f^N\|_{l_\infty^N}^2 \leq \delta^2,$$

$$\|(\mathcal{L})^{\beta/2} f(x)\|_{L_2(Q)}^2 \leq 1.$$

Используя равенство Парсеваля, перепишем экстремальную задачу (4.15) для данного случая в виде

$$(4.16) \quad \|u(x)\|_{L_2(Q)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\tilde{\lambda}_k^\alpha} \sum_{j=1}^{r_k} \tilde{a}_{kj}^2 \rightarrow \max,$$

$$\tilde{a}_{kj}^2 \leq \delta^2, \quad k = 1, \dots, k_0, \quad j \in A_k,$$

$$\|(\mathcal{L})^{\beta/2} f(x)\|_{L_2(Q)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\lambda}_k^\beta \sum_{j=1}^{r_k} \tilde{a}_{kj}^2 \leq 1.$$

Введем функцию Лагранжа для задачи (4.16)

$$\mathcal{L}_1(a, \eta, \zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{r_k} (-\tilde{\lambda}_k^{-\alpha} + \zeta \tilde{\lambda}_k^\beta) \tilde{a}_{kj}^2 + \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{j \in A_k} \eta_{kj} \tilde{a}_{kj}^2,$$

где

$$a = \{\tilde{a}_{kj}^2\}, k \geq 1, j = 1, \dots, r_k,$$

$$\zeta, \eta = \{\eta_{kj}\}, k = 1, \dots, k_0, j \in A_k -$$

множители Лагранжа. Будем искать последовательность $\hat{a} = \{\hat{a}_{kj}\}$ и такие неотрицательные $\hat{\eta}_{kj}, \hat{\zeta}$, чтобы были выполнены условия

$$(ccc) \quad \mathcal{L}_1(\hat{a}, \hat{\eta}, \hat{\zeta}) = \min_{a_{kj} \in \mathbb{R}} \mathcal{L}_1(a, \hat{\eta}, \hat{\zeta}),$$

$$(ddd) \quad \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{j \in A_k} \hat{\eta}_{kj} (\hat{a}_{kj}^2 - \delta^2) + \hat{\zeta} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{r_k} \tilde{\lambda}_k^\beta \hat{a}_{kj}^2 - 1 \right) = 0,$$

тогда \hat{a} будет решением задачи (4.16). Введем новые обозначения

$$\mu_k = \tilde{\lambda}_k^{-\alpha}, \quad \gamma_k = \tilde{\lambda}_k^\beta, \quad k \geq 1,$$

$$b_{kj} = \tilde{a}_{kj}^2, \quad k \geq 1, j = 1, \dots, r_k$$

и перепишем задачу (4.16) в виде

$$(4.17) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \sum_{j=1}^{r_k} b_{kj} \rightarrow \max, \quad b_{kj} \leq \delta^2, \quad k = 1, \dots, k_0, \quad j \in A_k,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \sum_{j=1}^{r_k} b_{kj} \leq 1, \quad b_{kj} \geq 0, \quad k \geq 1, \quad j = 1, \dots, r_k.$$

Так как $\tilde{\lambda}_k$ монотонно возрастают, $\mu_{k+1} < \mu_k$, $\gamma_{k+1} > \gamma_k$, $k = 1, 2, \dots$, то тем самым получаем экстремальную задачу из **леммы 2**. Следовательно, решением задачи (4.16) будет последовательность \hat{a} , задаваемая соотношениями:

1) если $m = 1$, то

$$\hat{a}_{kj}^2 = 0, \quad k \geq 2, \quad j = 1, \dots, r_k,$$

и при $k^* = 1$

$$\hat{a}_{1j}^2 = \begin{cases} (\tilde{\lambda}_1^\beta (r_k - q_k))^{-1}, & j \in J_1 \setminus A_1, \\ 0, & j \in A_1, \end{cases}$$

при $k^* > 1$

$$\hat{a}_{1j}^2 = (\tilde{\lambda}_1^\beta r_1)^{-1}, \quad j = 1, \dots, r_1;$$

2) если $m > 1$, то

$$\hat{a}_{kj}^2 = \begin{cases} \delta^2, & k = 1, \dots, m-1, j = 1, \dots, r_k, \\ 0, & k > m, j = 1, \dots, r_k, \end{cases}$$

и при $m = \tilde{k} + 1$

$$\hat{a}_{mj}^2 = \left(1 - \delta^2 \sum_{k=1}^{m-1} \tilde{\lambda}_k^\beta r_k \right) (\tilde{\lambda}_m^\beta r_m)^{-1}, \quad j = 1, \dots, r_m,$$

при $m = k^*$

$$\hat{a}_{mj}^2 = \begin{cases} \left(1 - \delta^2 \sum_{k=1}^{m-1} \tilde{\lambda}_k^\beta r_k\right) (\tilde{\lambda}_m^\beta (r_m - q_m))^{-1}, & j \in J_m \setminus A_m, \\ 0, & j \in A_m. \end{cases}$$

Значения $\hat{\eta}_{kj}$ и $\hat{\zeta}$, удовлетворяющие условиям (ccc) и (ddd), задаются формулами

1. Если $m = 1$, то

$$\hat{\eta}_{kj} = 0, \quad 1 \leq k \leq k_0, j \in A_k, \quad \hat{\zeta} = \frac{1}{\tilde{\lambda}_1^{\alpha+\beta}},$$

2. Если $m > 1$, то

$$\hat{\eta}_{kj} = \frac{1}{\tilde{\lambda}_k^\alpha} - \frac{\tilde{\lambda}_k^\beta}{\tilde{\lambda}_m^{\alpha+\beta}}, \quad k = 1, \dots, m-1, j = 1, \dots, r_k,$$

$$\hat{\eta}_{kj} = 0, \quad m \leq k \leq k_0, j \in A_k, \quad \hat{\zeta} = \frac{1}{\tilde{\lambda}_m^{\alpha+\beta}}.$$

Из результатов, полученных в **теореме 3**, следует, что если экстремальная задача

$$(4.18) \quad \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{j \in A_k} \hat{\eta}_{kj} (\tilde{a}_{kj} - y_{kj})^2 + \hat{\zeta} \|(\mathcal{L})^{\beta/2} f(x)\|_{L_2(Q)}^2 \rightarrow \min,$$

$$f(x) \in W_2^\beta(Q),$$

имеет решение $\hat{f}(x) \in W_2^\beta(Q)$ для любых $\tilde{f}^N \in l_\infty^N$, то величину оптимальной погрешности можно найти по формуле

$$(4.19) \quad E_{N,2}(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta) = \sqrt{\sum_{k=1}^{k_0} \sum_{j \in A_k} \hat{\eta}_{kj} \delta^2 + \hat{\zeta}},$$

а в качестве оптимального можно выбрать метод

$$(4.20) \quad \hat{\psi}(\tilde{f}^N)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\lambda}_k^{-\alpha/2} \sum_{j=1}^{r_k} \hat{a}_{kj} \tilde{\varphi}_{kj}(x),$$

где \hat{a}_{kj} —коэффициенты Фурье функции $\hat{f}(x)$, являющейся решением задачи (4.18). Используя равенство Парсеваля, перепишем эту задачу в виде

$$(4.21) \quad \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{j \in A_k} \hat{\eta}_{kj} (\tilde{a}_{kj} - y_{kj})^2 + \hat{\zeta} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\lambda}_k^\beta \sum_{j=1}^{r_k} \tilde{a}_{kj}^2 \rightarrow \min,$$

$$f(x) \in W_2^\beta(Q).$$

Дифференцируя сумму по \tilde{a}_{kj} и учитывая, что $\hat{\eta}_{kj} = 0$, $m \leq k \leq k_0$, $j \in A_k$, получим систему уравнений для \hat{a}_{kj} :

$$\hat{\eta}_{kj}(\hat{a}_{kj} - y_{kj}) + \zeta \tilde{\lambda}_k^\beta \hat{a}_{kj} = 0,$$

$$k = 1, \dots, m-1, j = 1, \dots, r_k,$$

$$\hat{a}_{kj}^2 = 0, k \geq m, j = 1, \dots, r_k,$$

откуда получаем выражения для \hat{a}_{kj}

$$\hat{a}_{kj} = \frac{\hat{\eta}_{kj}}{\hat{\eta}_{kj} + \zeta \tilde{\lambda}_k^\beta} y_{kj},$$

$$k = 1, \dots, m-1, j = 1, \dots, r_k,$$

$$\hat{a}_{kj} = 0, k \geq m, j = 1, \dots, r_k.$$

Из выпуклости задачи следует, что найденное решение есть точка минимума. Следовательно, задача (4.18) имеет решение для любого вектора $\tilde{f}^N \in l_\infty^N$.

Подставляя в формулу (4.20) значения \hat{a}_{kj} и учитывая вид $\hat{\eta}_{kj}$ и $\hat{\zeta}$, получаем, что метод

$$u(x) \approx \hat{\psi}(\tilde{f}^N)(x) = \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{r_k} \left[1 - \left(\frac{\tilde{\lambda}_k}{\tilde{\lambda}_m} \right)^{\alpha+\beta} \right] y_{kj} \tilde{\varphi}_{kj}(x)$$

является оптимальным.

Для вычисления величины оптимальной погрешности, после подстановки $\hat{\eta}_{kj}$ и $\hat{\zeta}$ в (4.19), получим формулу

$$E_{N, \infty}(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta) = \sqrt{\delta^2 \sum_{j=1}^{m-1} \left(\frac{1}{\tilde{\lambda}_k^\alpha} - \frac{\tilde{\lambda}_k^\beta}{\tilde{\lambda}_m^{\alpha+\beta}} \right) r_k + \frac{1}{\tilde{\lambda}_m^{\alpha+\beta}}}.$$

Если $m = 1$, то оптимальный метод принимает вид

$$u(x) \approx \hat{\psi}(\tilde{f}^N)(x) \equiv 0,$$

а

$$E_{N, \infty}(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta) = \tilde{\lambda}_1^{-(\alpha+\beta)/2}.$$

□

Пусть

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{r_k} \tilde{a}_{kj} \tilde{\varphi}_{kj}(x).$$

Назовем k -пачкой группу коэффициентов \tilde{a}_{kj} , $j = 1, \dots, r_k$, где r_k —размерность подпространства $\Phi_k \in L_2(Q)$, базисом которого являются функции $\tilde{\varphi}_{k1}(x), \dots, \tilde{\varphi}_{kr_k}(x)$, соответствующие собственному значению $\tilde{\lambda}_k$.

Пусть $\tilde{f}^N = \{y_{kj}\}$, $k = 1, \dots, k_0$, $j \in A_k$ —вектор, приближённо описывающий функцию $f(x)$ из правой части уравнения (4.3).

Из результатов, полученных в **теоремах** 15 и 16, можно сделать следующие выводы.

1) Если в k -пачке среди коэффициентов y_{kj} , $1 \leq k \leq k_0$, $j \in A_k$, отсутствует хотя бы один коэффициент y_{kj} , (что соответствует выполнению условия $A_k \neq J_k$), то ни один из коэффициентов этой пачки, равно как и ни один из коэффициентов всех следующих пачек (по возрастанию k), входящих в вектор \tilde{f}^N , при построении оптимального метода не используются.

2) В случае, когда $p = \infty$, количество коэффициентов, необходимых для построения оптимального метода, может быть еще уменьшено, если $\tilde{k} < k^* - 1$, где k^* —номер первой по порядку неполной пачки. Тогда в построении оптимального метода участвуют только k -пачки с номерами от 1 до \tilde{k} включительно. Здесь присутствует эффект так называемого информационного насыщения.

4.2. Оптимальное восстановление решения обобщенного уравнения Пуассона в шаре

Здесь рассмотрен пример применения результатов, полученных в разделе 4.1, в случае, когда область Q есть d -мерный шар.

Пусть

$$\mathbb{B}^d = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : |x| < 1\}$$

единичный d -мерный шар,

$$\mathbb{S}^{d-1} = \{x' \in \mathbb{R}^d : |x'| = 1\}$$

единичная $(d - 1)$ -мерная сфера, где

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^d x_i^2 \right)^{1/2}.$$

Пусть $Y_j^{(k)}(x')$, $k = 0, 1, \dots$, $j = 1, \dots, a_k$ —ортонормированный базис в $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ из сферических функций, $\mu_s^{(p)}$ — s -й корень функции Бесселя первого рода $J_{(p)}(x)$, $p = k + d/2 - 1$, $x \in \mathbb{B}^d$. Функции

$$Z_{skj}(x) = \frac{J_{(p)}(\mu_s^{(p)} r)}{r^{d/2-1}} Y_j^{(k)}(x'), \quad s = 1, 2, \dots, \quad k = 0, 1, \dots, \quad j = 1, \dots, a_k$$

являются собственными функциями оператора Лапласа $(-\Delta)$ в \mathbb{B}^d с собственными значениями $(\mu_s^{(p)})^2$ и образуют ортогональный базис в $L_2(\mathbb{B}^d)$. Его можно нормировать, положив

$$Y_{skj}(x) = \frac{Z_{skj}(x)}{\|Z_{skj}(x)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}}.$$

Пусть $f \in L_2(\mathbb{B}^d)$ и ее разложение в ряд Фурье по системе $\{Y_{skj}(x)\}$ имеет вид

$$f(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{skj} Y_{skj}(x).$$

Рассмотрим уравнение Пуассона в шаре \mathbb{B}^d

$$-\Delta u(x) = f(x)$$

с нулевым граничным условием

$$u|_{\mathbb{S}^{d-1}} = 0.$$

Решение этого уравнения может быть записано в виде

$$u(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (\mu_s^{(p)})^{-2} \sum_{j=1}^{a_k} c_{skj} Y_{skj}(x).$$

Определим оператор $(-\Delta)^{\alpha/2}$ следующим образом

$$(-\Delta)^{\alpha/2} f = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (\mu_s^{(p)})^{\alpha} \sum_{j=1}^{a_k} c_{skj} Y_{skj}(x).$$

где α —фиксированное положительное число. Рассмотрим в шаре \mathbb{B}^d обобщённое уравнение Пуассона

$$(4.22) \quad (-\Delta)^{\alpha/2} u(x) = f(x)$$

с нулевым граничным условием

$$(4.23) \quad u|_{\mathbb{S}^{d-1}} = 0.$$

Если $f(x)$ задана своим рядом Фурье

$$(4.24) \quad f(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{skj} Y_{skj}(x),$$

то решение задачи (4.22),(4.23) можно записать в виде

$$u(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (\mu_s^{(p)})^{-\alpha} \sum_{j=1}^{a_k} c_{skj} Y_{skj}(x).$$

Известно, что числа $\mu_s^{(p)}$ обладают следующими свойствами:

$$\mu_s^{(p)} > 0, \quad s \in \mathbb{N}, \quad p = d + k/2 - 1, \quad k = 0, 1, \dots;$$

$\mu_s^{(p)}$ монотонно возрастают по s и по k и стремятся к ∞ ;

функции $J_{(m)}(t)$ и $J_{(m+n)}(t)$ при $m = 1, 2, \dots$, и $n = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$, не имеют общих корней.

Перенумеруем $\mu_s^{(p)}$, расположив их в порядке возрастания, и введем новые обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_l = \mu_s^{(p)}, \quad 0 < \tilde{\mu}_1 < \tilde{\mu}_2 < \dots < \tilde{\mu}_l < \dots, \\ l = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Каждому значению $\tilde{\mu}_l$ соответствует пара индексов (s_l, k_l) , задаваемая по правилу

$$\tilde{\mu}_l = \mu_{s_l}^{(p_l)}, \quad p_l = d + \frac{k_l}{2} - 1.$$

Введем новую нумерацию и новые обозначения для $Y_{skj}(x)$ и c_{skj} :

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_{lj}(x) &= Y_{s_l k_l j}(x), \quad j = 1, \dots, a_{k_l}, \\ \tilde{c}_{lj} &= c_{s_l k_l j}, \quad j = 1, \dots, a_{k_l}. \end{aligned}$$

Теперь разложения для $f(x)$ и $u(x)$ можно записать в виде

$$(4.25) \quad f(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_{k_l}} \tilde{c}_{lj} \tilde{Y}_{lj}(x),$$

$$(4.26) \quad u(x) = \sum_{l=1}^{\infty} (\tilde{\mu}_l)^{-\alpha} \sum_{j=1}^{a_{k_l}} \tilde{c}_{lj} \tilde{Y}_{lj}(x).$$

Рассмотрим задачу оптимального восстановления (4.22), (4.23) при условии, что правая часть уравнения (4.22) задана неточно. Предполагается, что в разложении (4.24) функции $f(x)$ известно N коэффициентов Фурье $\{y_{lj}\}$, причем эти коэффициенты даны с некоторой погрешностью.

Введем вектор \tilde{f}^N , координатами которого являются числа $\{y_{lj}\} \approx \tilde{c}_{lj}$. Учитывая результаты, полученные в предыдущем параграфе, зададим \tilde{f}^N следующим образом:

$$\tilde{f}^N = \{y_{lj}\}, \quad l = 1, \dots, l_0, \quad j = 1, \dots, a_{k_l}, \quad N = \sum_{l=1}^{l_0} a_{k_l},$$

то есть приближенные коэффициенты $\{y_{lj}\}$ образуют полные пачки.

Предполагается, что для произвольного фиксированного вектора $\tilde{f}^N \in l_p^N$ выполнено неравенство

$$\|\tilde{f}^N - f^N\|_{l_p^N} \leq \delta,$$

где δ —фиксированное положительное число, и

$$f^N = \{\tilde{c}_{lj}\}, \quad l = 1, \dots, l_0, \quad j = 1, \dots, a_{k_l}.$$

Задача заключается в том, чтобы по информации о векторе \tilde{f}^N восстановить решение задачи (4.22) в метрике $L_2(\mathbb{B}^d)$. Будем предполагать, что функция $f(x)$ принадлежит обобщённому соболевскому классу

$$W_2^\beta(\mathbb{B}^d) = \{f(x) \in L_2(\mathbb{B}^d) : \|(-\Delta)^{\beta/2} f(x)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)} \leq 1\},$$

где $\beta > 0$ —заданное число. В качестве методов восстановления рассмотрим всевозможные операторы $\varphi : l_p^N \rightarrow L_2(\mathbb{B}^d)$. Назовем погрешностью восстановления метода φ величину

$$\begin{aligned} e_{N,p}(W_2^\beta(\mathbb{B}^d), \alpha, \delta, \varphi) &= \\ &= \sup_{f \in W_2^\beta(\mathbb{B}^d)} \sup_{\substack{\tilde{f}^N \in l_p^N: \\ \|f^N - \tilde{f}^N\|_{l_p^N} \leq \delta}} \|u(x) - \varphi(\tilde{f}^N)(x)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}. \end{aligned}$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E_{N,p}(W_2^\beta(\mathbb{B}^d), \alpha, \delta) = \inf_{\varphi: l_p^N \rightarrow L_2(\mathbb{B}^d)} e_{N,p}(W_2^\beta(\mathbb{B}^d), \alpha, \delta, \varphi),$$

а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным.

Так как эта задача является частным случаем общей задачи, рассмотренной в разделе 4.1, где

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} &= (-\Delta)^{\alpha/2}, \quad k(x) \equiv 1, \quad a(x) \equiv 0, \\ Q &= \mathbb{B}^d, \quad \partial Q = \mathbb{S}^{d-1}, \quad \tilde{\lambda}_l = \tilde{\mu}_l, \quad r_l = a_{k_l}, \\ \tilde{\varphi}_{l_j}(x) &= \tilde{Y}_{l_j}(x), \quad l = 1, 2, \dots, \quad j = 1, \dots, a_{k_l}. \\ \tilde{\mu}_l &= (\mu_{s_l}^{(p_l)})^2, \quad p_l = d + \frac{k_l}{2} - 1, \end{aligned}$$

то, применяя к данной задаче восстановления **теоремы 15** и **16**, получаем следующие результаты:

1) если $p = 2$, то имеет место следующее

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $\delta^2 < \frac{1}{\tilde{\mu}_1^{2\beta}}$, то

$$E_{N,2}(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta) = \sqrt{\frac{1}{\tilde{\mu}_{l_0+1}^{2(\alpha+\beta)}} + \frac{\delta^2}{\tilde{\mu}_1^{2\alpha}} \left[1 - \left(\frac{\tilde{\mu}_1}{\tilde{\mu}_{l_0+1}} \right)^{2(\alpha+\beta)} \right]},$$

а метод

$$u(x) \approx \sum_{l=1}^{l_0} \frac{1}{\tilde{\mu}_l^\alpha} \left[1 + \frac{\tilde{\mu}_l^{2\beta} \tilde{\mu}_1^{2\alpha}}{\tilde{\mu}_{l_0+1}^{2(\alpha+\beta)} - \tilde{\mu}_1^{2(\alpha+\beta)}} \right]^{-1} \sum_{j=1}^{a_{k_l}} y_{l_j} \tilde{Y}_{l_j}(x)$$

является оптимальным.

Если же $\delta^2 \geq \frac{1}{\tilde{\mu}_1^{2\beta}}$, то

$$E_{N,2}(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta) = \frac{1}{\tilde{\mu}_1^{\alpha+\beta}},$$

а в качестве оптимального можно выбрать метод

$$u(x) \approx 0.$$

2) при $p = \infty$ справедливо

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть α, β и δ —произвольные положительные числа. Положим

$$\tilde{l} = \max(l : \delta^2 \sum_{i=1}^l \tilde{\mu}_i^{2\beta} a_{k_i} < 1, 1 \leq l \leq l_0),$$

Тогда

$$E_{N, \infty}(W_2^\beta(\mathbb{B}^d), \alpha, \delta) = \sqrt{\delta^2 \sum_{l=1}^{\tilde{l}} \left(\frac{1}{\tilde{\mu}_l^{2\alpha}} - \frac{\tilde{\mu}_l^{2\beta}}{\tilde{\mu}_{l+1}^{2(\alpha+\beta)}} \right) a_{k_l} + \frac{1}{\tilde{\mu}_{l+1}^{2(\alpha+\beta)}}},$$

а метод

$$u(x) \approx \hat{\psi}(f^N)(x) = \sum_{l=1}^{\tilde{l}} \sum_{j=1}^{a_{k_l}} \left[1 - \left(\frac{\tilde{\mu}_l}{\tilde{\mu}_{l+1}} \right)^{2(\alpha+\beta)} \right] y_{lj} \tilde{Y}_{lj}(x)$$

является оптимальным.

4.3. Оптимальное восстановление решения обобщенного уравнения Пуассона на единичной сфере

Рассмотрим единичную сферу

$$\mathbb{S}^{d-1} = \{x' = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}, \quad d \geq 2,$$

где

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}.$$

Пусть $Y_j^{(k)}(x')$ —собственные функции оператора Лапласа-Бельтрами $(-\Delta_S)$, соответствующие собственным значениям

$$\Lambda_k = k(k + d - 2)$$

и такие, что

$$\|Y_j^{(k)}(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} = 1.$$

Рассмотрим обобщённое уравнение Пуассона на единичной сфере \mathbb{S}^{d-1}

$$(4.27) \quad (-\Delta_S)^{\alpha/2} u(x') = f(x'),$$

где оператор $(-\Delta_S)^{\alpha/2}$ определён ранее в разделе 3.2, функция $f(x')$ принадлежит $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ и разложение $f(x')$ не содержит константы. Если

$$(4.28) \quad f(x') = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x'),$$

то решение задачи (4.27) может быть записано в виде

$$(4.29) \quad u(x') = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^{-\alpha/2} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x'),$$

где c_{kj} —коэффициенты Фурье функции $f(x')$.

Рассмотрим задачу оптимального восстановления решения уравнения (4.27). Требуется наилучшим образом восстановить функцию $u(x')$, когда правая часть уравнения (4.27) задана неточно. Считаем, что для любой функции $f(x') \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ известен вектор $\tilde{f}^N \in l_p^N$, задаваемый следующим образом: пусть дано некоторое фиксированное натуральное число $k_0 \geq 1$ и имеется набор множеств J_k и A_k , где $J_k = \{1, \dots, a_k\}$, $k = 1, \dots, k_0$, a_k —размерность пространства \mathcal{H}_k , $\{A_k\}_1^{k_0}$, $A_k \subseteq J_k$ —произвольные подмножества J_k , q_k —число элементов множества A_k и

$$N = \sum_{k=1}^{k_0} q_k.$$

Предполагается, что для вектора

$$\tilde{f}^N = \{y_{kj}\}, k = 1, \dots, k_0, j \in A_k$$

и для произвольного фиксированного $\delta > 0$ выполняется неравенство

$$\|\tilde{f}^N - f^N\|_{l_p^N} \leq \delta,$$

где

$$f^N = \{c_{kj}\}, k = 1, \dots, k_0, j \in A_k.$$

Наша задача заключается в том, чтобы по информации о векторе \tilde{f}^N восстановить решение задачи (4.27) в метрике $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Будем предполагать, что функция $f(x')$ принадлежит классу

$$\widetilde{W}_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}) = \{f(x') \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}) : \|(-\Delta_S)^{\beta/2} f\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq 1, f \perp 1\}.$$

В качестве методов восстановления рассмотрим всевозможные операторы $\varphi : l_p^N \rightarrow L_2(\mathbb{S}^{d-1})$.

Назовем погрешностью восстановления метода φ величину

$$\begin{aligned} e_{N,p}(\widetilde{W}_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \alpha, \delta, \varphi) &= \\ &= \sup_{f(x') \in \widetilde{W}_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), f \perp 1} \sup_{\substack{\tilde{f}^N \in l_p^N: \\ \|f^N - \tilde{f}^N\|_{l_p^N} \leq \delta}} \|u(x') - \varphi(\tilde{f}^N)(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}. \end{aligned}$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E_{N,p}(\widetilde{W}_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \alpha, \delta) = \inf_{\varphi: l_p^N \rightarrow L_2(\mathbb{S}^{d-1})} e_{N,p}(\widetilde{W}_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \alpha, \delta, \varphi),$$

а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным.

Установим связь между **теоремой 3** и данной задачей. Пространство $X = \{f(x') \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}), \|(-\Delta_S)^{\beta/2} f\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} < \infty\}$, пространство $Z = L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, линейный оператор $T : X \rightarrow L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, подлежащий восстановлению, определен равенством

$$Tf(x') = u(x') = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^{-\alpha/2} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x').$$

Имеются два линейных оператора I_1 и I_2 . Первый из них определяет множество $W = \widetilde{W}_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1})$,

$$I_1 = (-\Delta_S)^{\beta/2} : X \rightarrow L_2(\mathbb{S}^{d-1}).$$

Второй оператор $I_2 : X \rightarrow l_p^N$ определен равенством

$$I_2 f = f^N = \{c_{kj}\}, \quad k = 1, \dots, k_0, \quad j \in A_k,$$

где $\{c_{kj}\}$ —коэффициенты разложения (4.28) функции $f(x')$.

Воспользуемся **теоремой 3** и рассмотрим экстремальную задачу

$$(4.30) \quad \begin{aligned} \|(-\Delta_S)^{\alpha/2} u(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} &\rightarrow \max, \quad \|f^N\|_{l_p^N} \leq \delta^2, \\ \|(-\Delta_S)^{\beta/2} f(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} &\leq 1. \end{aligned}$$

Используя равенство Парсеваля, запишем два варианта задачи (4.30) в зависимости от значения p :

1) при $p = 2$

$$(4.31) \quad \begin{aligned} \|(-\Delta_S)^{\alpha/2} u(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\Lambda_k^\alpha} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 \rightarrow \max, \\ \|f^N\|_{l_2^N}^2 &= \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{j \in A_k} c_{kj}^2 \leq \delta^2, \\ \|(-\Delta_S)^{\beta/2} f(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^\beta \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 \leq 1; \end{aligned}$$

2) при $p = \infty$

$$(4.32) \quad \begin{aligned} \|(-\Delta_S)^{\alpha/2} u(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\Lambda_k^\alpha} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 \rightarrow \max, \\ c_{kj}^2 &\leq \delta^2, \quad k = 1, \dots, k_0, \quad j \in A_k, \\ \|(-\Delta_S)^{\beta/2} f(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^\beta \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 \leq 1. \end{aligned}$$

Так как $\{\Lambda_k\}_1^\infty$ —монотонно возрастающая последовательность, то, полагая $\Lambda_k = \widetilde{\lambda}_k$, сведем задачи (4.31) и (4.32) к задачам (4.8) и (4.16), рассмотренным в разделе 4.1 данной главы. Следовательно, решения и значения множителей Лагранжа для задач (4.31) и

(4.32) совпадают с решениями и значениями множителей Лагранжа для задач (4.8) и (4.16) с учётом замены $\tilde{\lambda}_k$ на Λ_k .

После этого, следуя **теореме 3**, рассмотрим экстремальные задачи

1) для $p = 2$

$$(4.33) \quad \begin{aligned} & \hat{\eta}_1 \|f^N - \tilde{f}^N\|_{l_2^N}^2 + \hat{\eta}_2 \|(-\Delta_S)^{\beta/2} f\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 = \\ & = \hat{\eta}_1 \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{j \in A_k} (c_{kj} - y_{kj})^2 + \hat{\eta}_2 \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^\beta \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 \rightarrow \min, \\ & f(x') \in \widetilde{W}_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}); \end{aligned}$$

2) для $p = \infty$

$$(4.34) \quad \begin{aligned} & \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{j \in A_k} \hat{\eta}_{kj} (c_{kj}^2 - \delta^2) + \hat{\zeta} \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^\beta \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 \rightarrow \min, \\ & f(x') \in \widetilde{W}_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \end{aligned}$$

где $\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_{kj}, \hat{\zeta}$ — множители Лагранжа, соответствующие задачам (4.31) и (4.32). Эти задачи также совпадают (после переобозначений вида $\tilde{\lambda}_k = \Lambda_k$) с соответствующими задачами из 4.1. В результате получаем два утверждения:

1) при $p = 2$ положим

$$A = \{k : A_k = J_k, 1 \leq k \leq k_0\},$$

$$J = \{1, 2, \dots, k_0\},$$

$$k^* = \begin{cases} \min(k : k \in \mathbb{N} \setminus A), & \delta^2 < \Lambda_1^{-\beta}, \\ 1, & \delta^2 \geq \Lambda_1^{-\beta}. \end{cases}$$

Здесь имеет место

ТЕОРЕМА 17. Пусть δ, α и β — произвольные положительные числа.

Тогда

$$E_{N,2}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \alpha, \delta) = \sqrt{\frac{1}{\Lambda_{k^*}^{(\alpha+\beta)}} + \frac{\delta^2}{\Lambda_1^\alpha} \left[1 - \left(\frac{\Lambda_1}{\Lambda_{k^*}} \right)^{(\alpha+\beta)} \right]},$$

а метод

$$u(x') \approx \hat{\psi}(\tilde{f}^N)(x') =$$

$$= \begin{cases} 0, & k^* = 1, \\ \sum_{k=1}^{k^*-1} \Lambda_k^{-\alpha/2} \left[1 + \frac{\Lambda_k^\beta \Lambda_1^\alpha}{\Lambda_{k^*}^{\alpha+\beta} - \Lambda_1^{\alpha+\beta}} \right]^{-1} \sum_{j=1}^{a_k} y_{kj} Y_j^{(k)}(x'), & k^* > 1 \end{cases}$$

является оптимальным.

2) если $p = \infty$, то положим

$$\begin{aligned} A_{k_0+1} &= \emptyset, \quad J_{k_0+1} = \{1, \dots, a_{k_0+1}\}, \\ k^* &= \min(k : J_k \neq A_k, 1 \leq k \leq k_0 + 1), \\ \tilde{k} &= \begin{cases} 0, & \delta^2 \geq (\Lambda_1^\beta a_1)^{-1}, \\ \max(k : \delta^2 \sum_{l=1}^k \Lambda_l^\beta a_k < 1, 1 \leq k), & \delta^2 < (\Lambda_1^\beta a_1)^{-1}, \end{cases} \\ m &= \begin{cases} \tilde{k} + 1, & \tilde{k} + 1 < k^*, \\ k^*, & \tilde{k} + 1 \geq k^*. \end{cases} \end{aligned}$$

В этом случае верна

ТЕОРЕМА 18. Пусть α, β и δ — произвольные положительные числа.

Тогда

1) если $m = 1$, то

$$E_{N, \infty}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \alpha, \delta) = \frac{1}{\Lambda_1^{(\alpha+\beta)/2}}$$

и оптимальным является метод

$$u(x) \approx \hat{\psi}(\tilde{f}^N)(x) \equiv 0;$$

2) если $m > 1$, то

$$E_{N, \infty}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \alpha, \delta) = \sqrt{\delta^2 \sum_{j=1}^{m-1} \left(\frac{1}{\Lambda_k^\alpha} - \frac{\Lambda_k^\beta}{\Lambda_m^{(\alpha+\beta)}} \right) a_k + \frac{1}{\Lambda_m^{\alpha+\beta}}},$$

а метод

$$u(x) \approx \hat{\psi}(\tilde{f}^N)(x) = \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{a_k} \left[1 - \left(\frac{\Lambda_k}{\Lambda_m} \right)^{\alpha+\beta} \right] y_{kj} Y_j^{(k)}(x')$$

является оптимальным.

Литература

- [1] *Введенская Е. В.* Об оптимальном восстановлении решения уравнения теплопроводности по неточно заданной температуре в различные моменты времени // Владикавказский мат. журн. 2006. Т. 8, вып. 1. С. 16–21.
- [2] *Выск Н. Д.* О решении волнового уравнения при неточно заданных коэффициентах Фурье функции, задающей начальную форму струны // Владикавказский мат. журн. 2006. Т. 8, вып. 4. С. 12–17.
- [3] *Выск Н. Д., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление решения волнового уравнения по неточным начальным данным // Матем. заметки. 2006, Т. 81, вып.6, С. 803–815.
- [4] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью // Матем. сб. 2002. Т. 193. №3. С. 79–100.
- [5] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функ. анализ и его прил. 2003. Т. 37. С. 51–64.
- [6] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., Тихомиров В. М.* On optimal recovery of heat equation solutions. In: Approximation Theory: A volume dedicated to V. Vojanov (D. K. Dimitrov, G. Nikolov, and R. Uluchev, Eds.), 163–175, Sofia: Marin Drinov Academic Publishing House, 2004.
- [7] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление операторов по неточной информации // Итоги науки. Южный федеральный округ. Математический форум, Т. 2, "Исследования по выпуклому анализу Владикавказ, 2009, С. 158–192.
- [8] *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ и его приложения. М., Эдиториал УРСС, 2000.
- [9] *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных, М., Наука, 1983г.
- [10] *Михлин С. Г.* Курс математической физики, Санкт-Петербург, 2002г.
- [11] *Осипенко К. Ю.* О восстановлении решения задачи Дирихле по неточным исходным данным // Владикавказский мат. журн. 2004. Т. 6, вып. 4. С. 55–62.
- [12] *Осипенко К. Ю.* Неравенство Харди–Литтлвуда–Поля для аналитических функций из пространств Харди–Соболева // Матем. сб. 2006. Т. 197. №3. С. 15–34.
- [13] *Смоляк С. А.* Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них, кандид. дисс., МГУ, 1965г.
- [14] *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М: Мир, 1974, С. 157–174.
- [15] *Стейн И.* Сингулярные интегралы дифференциальные свойства функций. М: Мир, 1973, С. 83–87.
- [16] *Трауб Дж., Вожняковский Х.* Общая теория оптимальных алгоритмов, М.: Мир, 1980, 664 с.

- [17] *Miccelli Ch. A., Rivlin Th. J.* Optimal estimations in approximation theory. New York: Plenum Press, 1976, 300 p.
- [18] *Балова Е. А.* Об оптимальном восстановлении решения задачи Дирихле в кольце // Владикавказский мат. журн. 2006. Т. 8, вып. 2, С. 15–23.
- [19] *Балова Е. А.* О восстановлении решения задачи Дирихле по неточным заданной информации на сферах радиусов R_1 и R_2 // Труды участников школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н.В.Ефимова, Ростов-на Дону, 2006, С. 215–216.
- [20] *Балова Е. А.* Об оптимальном восстановлении решений задачи Дирихле по неточным исходным данным // Математические заметки, 2007. Т. 82, вып. 3. С. 323–334.
- [21] *Балова Е. А.* О восстановлении решения задачи Дирихле в d -мерном шаровом поясе по неточным граничным условиям // Тезисы докладов третьей международной конференции "Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования", Москва, МФТИ, 2008, С. 226–227.
- [22] *Elena Balova* Optimal recovery of the solution of the Poisson equation from inaccurate information // Международная конференция "Extremal Problems in Complex and Real Analysis EPCaRA-2007", Book of Abstracts, Moscow, Russia, 2007, С. 10.