Оптимальное восстановление разделенных разностей по неточно заданной последовательности

Светлана Александровна Унучек[1,*]

[1] *Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики, г. Москва*

В работе рассматривается задача одновременного восстановления нескольких разделенных разностей различного порядка по неточно заданной последовательности с ограниченной разделенной разностью n-го порядка. Построено семейство оптимальных методов восстановления.

1. Введение

Впервые задача оптимального восстановления линейного функционала по значениям других линейных функционалов была поставлена С.А. Смоляком [1]. В основе этой постановки лежали идеи А.Н. Колмогорова, связанные с n-поперечником [2] и квадратурными формулами [3]. Задача об оптимальном восстановлении по неточно заданной информации была поставлена в работе [4]. В данной работе изучается задача восстановления операторов k-ой разделенной разности, $1 \leq k \leq n-1$, в среднеквадратичной норме по неточно заданной последовательности на классе последовательностей с ограниченной n-ой разделенной разностью. Аналогичная задача, когда k-ая разделенная разность восстанавливалась в фиксированной точке, расссматривалась в работе [5]. Некоторый частный случай рассматриваемой задачи был получен в работе [6]. В настоящей работе используется другой метод, позволяющий найти семейство оптимальных методов для одновременного восстановления сразу нескольких операторов разделенной разности любого порядка. Предельным переходом из полученных результатов вытекает непрерывный случай, исследованный в работах [7] и [8].

Перейдем к постановке задачи. Обозначим через $\mathcal{L}_{2,h}(\mathbb{Z})$, $h > 0$, пространство после-

*svun@mail.ru

довательностей $x=\{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ таких, что $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}}|x_j|^2<\infty$, с нормой

$$\|x\|_{\mathcal{L}_{2,h}(\mathbb{Z})}=\left(h\sum_{j\in\mathbb{Z}}\mid x_j\mid^2\right)^{1/2}.$$

Напомним определение оператора разделенных разностей:

$$\Delta_h^1 x=\Delta_h x=\left\{\frac{x_{j+1}-x_j}{h}\right\}_{j\in\mathbb{Z}},\qquad \Delta_h^k x=\Delta_h\big(\Delta_h^{k-1}x\big).$$

Пусть $n\in\mathbf{N}$.Обозначим

$$l_{2,h}^n=\{x\in\mathcal{L}_{2,h}(\mathbb{Z}):\|\Delta_h^n x\|_{\mathcal{L}_{2,h}(\mathbb{Z})}\le 1\}.$$

Рассмотрим задачу одновременного оптимального восстановления операторов всех разностей $(\Delta_h^1 x,\,\Delta_h^2 x,\,\ldots,\,\Delta_h^{n-1}x)$ последовательности $x\in l_{2,h}^n$, при условии, что последовательность x задана неточно, то есть известна последовательность $y\in\mathcal{L}_{2,h}(\mathbb{Z})$ такая, что

$$\|x-y\|_{\mathcal{L}_{2,h}(\mathbb{Z})}\le\delta,\quad \delta>0.$$

В качестве методов восстановления рассмотрим всевозможные отображения

$$m(y)=(m_1(y),\,m_2(y),\,\ldots,\,m_{n-1}(y)),$$

$$m_k(y):\mathcal{L}_{2,h}(\mathbb{Z})\to\mathcal{L}_{2,h}(\mathbb{Z}),\quad 1\le k\le n-1.$$

Погрешностью метода m называется величина

$$e(l_{2,h}^n,\delta,m)=\sup_{\substack{x\in l_{2,h}^n,\ y\in\mathcal{L}_{2,h}(Z)\\ \|x-y\|_{\mathcal{L}_{2,h}(\mathbb{Z})}\le\delta}}\sqrt{\sum_{k=1}^{n-1}p_k\|\Delta_h^k x-m_k(y)\|^2_{\mathcal{L}_{2,h}(Z)}}.$$

Здесь $p=(p_1,p_2,\ldots,p_{n-1})$, $p_k\ge 0$, $1\le k\le n-1$, — весовые коэффициенты, варьируя которые можно отдавать предпочтение более точному восстановлению оператора какой-либо разности.

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(l_{2,h}^n,\delta)=\inf_{m:\,\mathcal{L}_{2,h}(\mathbb{Z})\to\mathcal{L}_{2,h}(\mathbb{Z})}e(l_{2,h}^n,\delta,m).$$

Метод m, на котором достигается нижняя грань, будем называть оптимальным методом.

2. Основные результаты

Образом Фурье последовательности $x = \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{L}_{2,h}(\mathbb{Z})$ является функция

$$Fx(\omega) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} x_j e^{-ij\omega} \in \mathbb{L}_2([-\pi;\pi]).$$

Теорема 1. *Пусть $k, n \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le n-1$ и $\delta > 0$. Тогда*

$$E(l_{2,h}^n, \delta) = \begin{cases} \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \delta^{\frac{2(n-k)}{n}}\right)^{1/2}, & \delta \ge \left(\dfrac{h}{2}\right)^n, \\ \delta\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \left(\dfrac{2}{h}\right)^{2k}\right)^{1/2}, & \delta < \left(\dfrac{h}{2}\right)^n. \end{cases}$$

При $\delta < \left(\dfrac{h}{2}\right)^n$ метод $\widehat{m}(y) = \Delta_h^k y$ является оптимальным. При $\delta \ge \left(\dfrac{h}{2}\right)^n$ все методы $\widehat{m}_k(y) = \Delta_h^k F^{-1}\big(a_k(\omega)Fy(\omega)\big)$, где

$$a_k(\omega) = \frac{\widehat{\lambda}_1 + \theta_k(\omega)}{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2\omega_h^n}, \tag{1}$$

а $\theta_k(\cdot)$ для почти всех ω удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^{n-1} p_k\omega_h^k|\theta_k(\omega)|^2 \le \widehat{\lambda}_1\widehat{\lambda}_2\omega_h^n\left(\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2\omega_h^n - \sum_{k=1}^{n-1} p_k\omega_h^k\right), \tag{2}$$

в котором

$$\omega_h = \frac{4\sin^2(\omega/2)}{h^2}, \quad \widehat{\lambda}_1 = \sum_{k=1}^{n-1} p_k\delta^{-2\frac{k}{n}}\left(1 - \frac{k}{n}\right), \quad \widehat{\lambda}_2 = \sum_{k=1}^{n-1} p_k\frac{k}{n}\delta^{2\frac{n-k}{n}},$$

являются оптимальными.

3. Доказательство

Докажем сначала, что

$$E(l_{2,h}^n, \delta) \ge \sup_{\substack{x\in l_{2,h}^n \\ \|x\|_{\mathcal{L}_{2,h}(Z)}\le\delta}} \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} p_k\|\Delta_h^k x\|^2_{\mathcal{L}_{2,h}(Z)}}. \tag{3}$$

Для любой последовательности $x \in l^n_{2,h}$ такой, что $\|x\|_{\mathcal{L}_{2,h}(Z)} \le \delta$, и для любого метода m имеем

$$\left(2\sum_{k=1}^{n-1} p_k \|\Delta_h^k x\|^2_{\mathcal{L}_{2,h}(Z)}\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n-1} p_k \|\Delta_h^k(x) - \Delta_h^k(-x) + m(0) - m(0)\|^2_{\mathcal{L}_{2,h}(Z)}\right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(\sum_{k=1}^{n-1} p_k \|\Delta_h^k(x) - m(0)\|^2_{\mathcal{L}_{2,h}(Z)}\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n-1} p_k \|\Delta_h^k(-x) - m(0)\|^2_{\mathcal{L}_{2,h}(Z)}\right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(2\sum_{k=1}^{n-1} \sup_{\substack{x\in l^n_{2,h} \\ \|x\|_{\mathcal{L}_{2,h}(Z)}\le\delta}} p_k \|\Delta_h^k x\|^2_{\mathcal{L}_{2,h}(Z)}\right)^{1/2} \le \left(2e^2(l^n_{2,h}, \delta, m)\right)^{1/2}.$$

То есть, для любого метода m

$$e(l^n_{2,h}, \delta, m) \ge \sup_{\substack{x\in l^n_{2,h} \\ \|x\|_{\mathcal{L}_{2,h}(Z)}\le\delta}} \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} p_k \|\Delta_h^k x\|^2_{\mathcal{L}_{2,h}(Z)}}.$$

Отсюда следует неравенство (3).

Это означает, что квадрат погрешности оптимального восстановления не меньше значения экстремальной задачи

$$\sum_{k=1}^{n-1} p_k \|\Delta_h^k x\|^2_{\mathcal{L}_{2,h}(Z)} \to \max, \ \|\Delta_h^n x\|_{\mathcal{L}_{2,h}(Z)} \le 1, \ \|x\|_{\mathcal{L}_{2,h}(Z)} \le \delta. \tag{4}$$

Перейдем к преобразованию Фурье. Найдем образы Фурье для операторов разделенных разностей:

$$F(\Delta_h^1 x)(\omega) = \sum_{j\in Z} \frac{x_{j+1} - x_j}{h} e^{-ij\omega} =$$

$$= \frac{1}{h}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} x_{j+1} e^{-i(j+1)\omega} e^{i\omega} - \sum_{j\in Z} x_j e^{-ij\omega}\right) =$$

$$= \frac{e^{i\omega}}{h} \sum_{j\in\mathbb{Z}} x_{j+1} e^{-i(j+1)\omega} - \frac{1}{h}\sum_{j\in Z} x_j e^{-ij\omega} = \frac{e^{i\omega} - 1}{h} Fx(\omega).$$

Следовательно,

$$F(\Delta_h^k x)(\omega) = \frac{(e^{i\omega} - 1)^k}{h^k} Fx(\omega).$$

По теореме Планшереля имеем:

$$\|\Delta_h^m x\|^2_{\mathcal{L}_{2,h}(Z)} = \frac{h}{2\pi}\|F(\Delta_h^m x)(\omega)\|^2_{\mathbb{L}_2(-[\pi;\pi])},$$

$$\|\Delta_h^m x\|^2_{\mathcal{L}_{2,h}(Z)} = \frac{h}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\left|e^{i\omega}-1\right|^{2m}}{h^{2m}}\left|Fx(\omega)\right|^2 d\omega.$$

Задача (4) принимает вид:

$$\frac{h}{2\pi}\sum_{k=1}^{n-1} p_k \int\limits_{-\pi}^{\pi} \omega_h^k \left|Fx(\omega)\right|^2 d\omega \to \max,$$

$$\frac{h}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|Fx(\omega)\right|^2 d\omega \le \delta^2, \quad \frac{h}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\omega_h^n\left|Fx(\omega)\right|^2 d\omega \le 1. \quad (5)$$

Покажем, что значение задачи (5) не менее, чем

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \delta^{\frac{2(n-k)}{n}}, & \delta \ge \left(\frac{h}{2}\right)^n, \\ \delta^2 \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \left(\dfrac{2}{h}\right)^{2k}, & \delta < \left(\dfrac{h}{2}\right)^n. \end{cases} \quad (6)$$

Пусть

$$\omega_0 = \begin{cases} 2\arcsin\left(\dfrac{h}{2}\delta^{-\frac{1}{n}}\right), & \delta \ge \left(\dfrac{h}{2}\right)^n \\ \pi, & \delta < \left(\dfrac{h}{2}\right)^n \end{cases}.$$

Рассмотрим последовательность функций $x_m(\cdot)$, для которых

$$(Fx_m)(\omega) = \begin{cases} D, & \omega \in [\omega_0 - \frac{1}{m};\omega_0], \\ 0, & \omega \notin [\omega_0 - \frac{1}{m};\omega_0]. \end{cases}$$

Положим $D = \delta\sqrt{\dfrac{2\pi m}{h}}$. Тогда

$$\frac{h}{2\pi}\int\limits_{\omega_0-\frac{1}{m}}^{\omega_0} D^2\, d\omega = \frac{hD^2}{2\pi m} = \delta^2.$$

Кроме того,

$$\frac{h}{2\pi}\int\limits_{\omega_0-\frac{1}{m}}^{\omega_0}\omega_h^n D^2 d\omega = \frac{\delta^2 m}{h^{2n}}\int\limits_{\omega_0-\frac{1}{m}}^{\omega_0}\left(4\sin^2\frac{\omega}{2}\right)^n d\omega \le \frac{\delta^2 2^{2n}\sin^{2n}\dfrac{\omega_0}{2}}{h^{2n}} \le 1.$$

Тем самым функции $x_m(\cdot)$ допустимы в задаче (5). Следовательно, значение этой задачи не менее величины

$$\frac{h}{2\pi}\sum_{k=1}^{n-1}p_k\int\limits_{\omega_0-\frac{1}{m}}^{\omega_0}\omega_h^kD^2d\mu(\omega)=\delta^2m\sum_{k=1}^{n-1}p_k\int\limits_{\omega_0-\frac{1}{m}}^{\omega_0}\frac{4^k}{h^{2k}}\sin^{2k}\frac{\omega}{2}\,d\mu(\omega)$$

$$\geq\sum_{k=1}^{n-1}p_k\frac{\delta^2 2^{2k}\sin^{2k}\frac{\omega_0-\frac{1}{m}}{2}}{h^{2k}}$$

Величина, стоящая в правой части этого неравенства при $m\to\infty$ стремится к величине (6). Таким образом, доказано, что

$$E(l_{2,h}^n,\delta)\geq\begin{cases}\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}p_k\delta^{\frac{2(n-k)}{n}}\right)^{1/2}, & \delta\geq\left(\dfrac{h}{2}\right)^n,\\ \delta\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}p_k\left(\dfrac{2}{h}\right)^{2k}\right)^{1/2}, & \delta<\left(\dfrac{h}{2}\right)^n.\end{cases}$$

Займемся теперь построением оптимальных методов. Пусть $\delta\geq(h/2)^n$. Будем искать оптимальные методы среди методов вида $m_k(y)=\Lambda_ky$, где $\Lambda_k:\mathcal{L}_{2,h}(Z)\to\mathcal{L}_{2,h}(Z)$ - линейный непрерывный оператор, действие которого в образах Фурье имеет вид:

$$F(\Lambda_ky)(\omega)=\frac{\left(e^{i\omega}-1\right)^k}{h^k}a_k(\omega)Fy(\omega),$$

где $a_k(\omega)\in\mathbb{L}_\infty[-\pi;\pi]$ - периодическая функция, $1\leq k\leq n-1$.

Для оценки погрешности таких методов рассмотрим экстремальную задачу

$$\sum_{k=1}^{n-1}p_k\parallel\Delta_h^kx-\Lambda_ky\parallel^2_{\mathcal{L}_{2,h}(Z)}\to\max,\quad\|x-y\|_{\mathcal{L}_{2,h}(Z)}\leq\delta,$$

$$x\in l_{2,h}^n(Z),\ y\in\mathcal{L}_{2,h}(Z)$$

Перепишем эту задачу в образах Фурье

$$\frac{h}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}p_k\omega_h^k\Big|Fx(\omega)-a_k(\omega)Fy(\omega)\Big|^2d\omega\to\max,$$

$$\frac{h}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big|Fx(\omega)-Fy(\omega)\big|^2d\omega\leq\delta^2,\quad\frac{h}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\omega_h^n\big|Fx(\omega)\big|^2d\omega\leq1.\quad(7)$$

Используя неравенство Коши-Буняковского, получаем

$$\begin{aligned}
&|Fx(\omega)-a_k(\omega)Fy(\omega)|^2\\
&\qquad=|Fx(\omega)(1-a_k(\omega))+a_k(\omega)(Fx(\omega)-Fy(\omega))|^2\\
&\qquad=\left|\frac{a_k(\omega)\sqrt{\widehat{\lambda}_1}}{\sqrt{\widehat{\lambda}_1}}\big(Fx(\omega)-Fy(\omega)\big)+\frac{1-a_k(\omega)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_2\omega_h^n}}\sqrt{\widehat{\lambda}_2\omega_h^n}Fx(\omega)\right|^2\\
&\qquad\le q_k(\omega)\left(\widehat{\lambda}_1|Fx(\omega)-Fy(\omega)|^2+\widehat{\lambda}_2\omega_h^n|Fx(\omega)|^2\right),
\end{aligned}$$

где

$$q_k(\omega)=\frac{|a_k(\omega)|^2}{\widehat{\lambda}_1}+\frac{|1-a_k(\omega)|^2}{\widehat{\lambda}_2\omega_h^n}.$$

Учитывая условия в задаче (7), имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{h}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}p_k\omega_h^k\Big|Fx(\omega)-a_k(\omega)Fy(\omega)\Big|^2d\omega\\
&\qquad\le\|Q(\cdot)\|_{L_\infty([-\pi,\pi])}(\widehat{\lambda}_1\delta^2+\widehat{\lambda}_2),
\end{aligned}$$

где

$$Q(\omega)=\sum_{k=1}^{n-1}p_k\omega_h^kq_k(\omega).$$

Если $\|Q(\cdot)\|_{L_\infty([-\pi,\pi])}\le1$, то значение задачи (7) не превосходит

$$\widehat{\lambda}_1\delta^2+\widehat{\lambda}_2=\sum_{k=1}^{n-1}p_k\delta^{2\frac{n-k}{n}}\le E^2(l_{2,h}^n,\delta).\tag{8}$$

Из неравенства (8) следует оценка сверху погрешности оптимального восстановления при $\delta\ge(h/2)^n$:

$$E(l_{2,h}^n,\delta)\le\sqrt{\sum_{k=1}^{n-1}p_k\delta^{2\frac{n-k}{n}}}.$$

Тем самым методы, в которых $a_k(\cdot)$, $k=1,\dots,n-1$, выбраны так, что $\|Q(\cdot)\|_{L_\infty([-\pi,\pi])}\le1$, будут оптимальными.

Покажем. что условие $\|Q(\cdot)\|_{L_\infty([-\pi,\pi])}\le1$ эквивалентно выражению (1) в условии теоремы. Имеем

$$\begin{aligned}
&Q(\omega)=\sum_{k=1}^{n-1}p_k\omega_h^kq_k(\omega)\\
&\qquad=\sum_{k=1}^{n-1}p_k\omega_h^k\left(\frac{\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2\omega_h^n}{\widehat{\lambda}_1\widehat{\lambda}_2\omega_h^n}\cdot\left|a_k(\omega)-\frac{\widehat{\lambda}_1}{\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2\omega_h^n}\right|^2+\frac{1}{\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2\omega_h^n}\right).
\end{aligned}$$

Положим
$$\theta_k(\omega) = a_k(\omega)(\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 \omega_h^n) - \widehat{\lambda}_1.$$
Тогда условие $\|Q(\cdot)\|_{L_\infty([-\pi,\pi])} \le 1$ эквивалентно условию (2).

Покажем, что выражение, стоящее в правой части неравенства (2), неотрицательно. Рассмотрим функцию
$$g(t) = -\sum_{k=1}^{n-1} p_k t^k + \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 t^n, \quad t \in [0, 4/h^2],$$
и параметрически заданную кривую (см. рис. 1):
$$\begin{cases} x = t^n, \\ y = \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k t^k. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что функция $y(x) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k x^{k/n}$ возрастает и вогнута при $x \in [0, +\infty)$. В силу вогнутости функции выполняется неравенство $y \le \widetilde{y}$, где $\widetilde{y} = kx + b$ - касательная к графику вогнутой функции $y(x)$ в некоторой точке $x_0 \le (2/h)^{2n}$. Если построить касательную в точке $x_0 = \delta^{-2}$, то значения коэффициентов касательной равны $k = y'(x_0) = \widehat{\lambda}_2$, $b = \widetilde{y}(0) = \widehat{\lambda}_1$. Это означает, что $g(t) \ge 0$. Так как $\widehat{\lambda}_1 > 0, \widehat{\lambda}_2 > 0$, правая часть неравенства (2) неотрицательна.

При $\delta < (h/2)^n$ рассмотрим метод $\widehat{m}(y) = \Delta_h^k y$. Тогда
$$F\widehat{m}(\omega) = \frac{\left(e^{i\omega} - 1\right)^k}{h^k} Fy(\omega).$$
Оценим его погрешность. Переходя к образам Фурье, аналогично (7) получаем следующую задачу
$$\frac{h}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} p_k \omega_h^k \Big| Fx(\omega) - Fy(\omega) \Big|^2 d\omega \to \max,$$
$$\frac{h}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \big| Fx(\omega) - Fy(\omega) \big|^2 d\omega \le \delta^2, \quad \frac{h}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \omega_h^n \big| Fx(\omega) \big|^2 d\omega \le 1. \quad (9)$$
Учитывая условия в задаче (9), получаем
$$\frac{h}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} p_k \omega_h^k \Big| Fx(\omega) - Fy(\omega) \Big|^2 d\omega \le \delta^2 \sum_{k=1}^{n-1} p_k \omega_h^k$$
$$\le \delta^2 \sum_{k=1}^{n-1} p_k \left(\frac{2}{h}\right)^{2k} = E^2(l_{2,h}^n, \delta).$$

То есть верхняя и нижняя оценки погрешности совпадают, что доказывает оптимальность метода.

Автор выражает искреннюю благодарность К.Ю. Осипенко за внимание к работе и полезные обсуждения.

[1] Смоляк С. А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них, Канд. дисс. М.: МГУ, 1965.

[2] Колмогоров А. Н. Избранные труды. Математика и механика. М.: Наука, 1985. - 470 с.

[3] Никольский С.М. К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами, УМН, 5, 2, 1950, с. 165–177

[4] Марчук А. Г., Осипенко К. Ю. "Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек", Матем. заметки, 17, 3, 1975,с. 359–368

[5] Введенская Е. В., Осипенко К. Ю. Дискретные аналоги неравенства Л.В. Тайкова и восстановление последовательностей, заданных неточно, Математические заметки, 2012, 92, 4, 18-29.

[6] Чудова С. С. Оптимальное восстановление разностей последовательностей, Вестник ТГУ: Сер. естеств. и техн. науки, 15, 1, 2010, 437-447.

[7] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных, Функциональный анализ и его приложения, 2003, 37, 51-64.

[8] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Неравенство Харди-Литтлвуда-Полиа и восстановление производных по неточной информации. Доклад РАН, 2011, 438, 3, 300-302.

[9] Сивкова Е.О. Восстановление дробных степеней оператора Лапласа функции по ее неточно заданному спектру и неравенства колмогоровского типа, Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-матем. наук, М., РУДН, 2013, 1-70.

[10] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Как наилучшим образом восстановить функцию по неточно заданному спектру? Математические заметки, 2012, 92, 1, 59-67.

OPTIMAL RECOVERY OF DIVIDED DIFFERENCES INACCURATELY SPECIFIED SEQUENCE

S. A. Unuchek

In the paper one approach the problem of simultaneous recovery of several divided differences of different orders inaccurately specified sequence with bounded divided difference of n-order. Family of optimal recovery method was created.

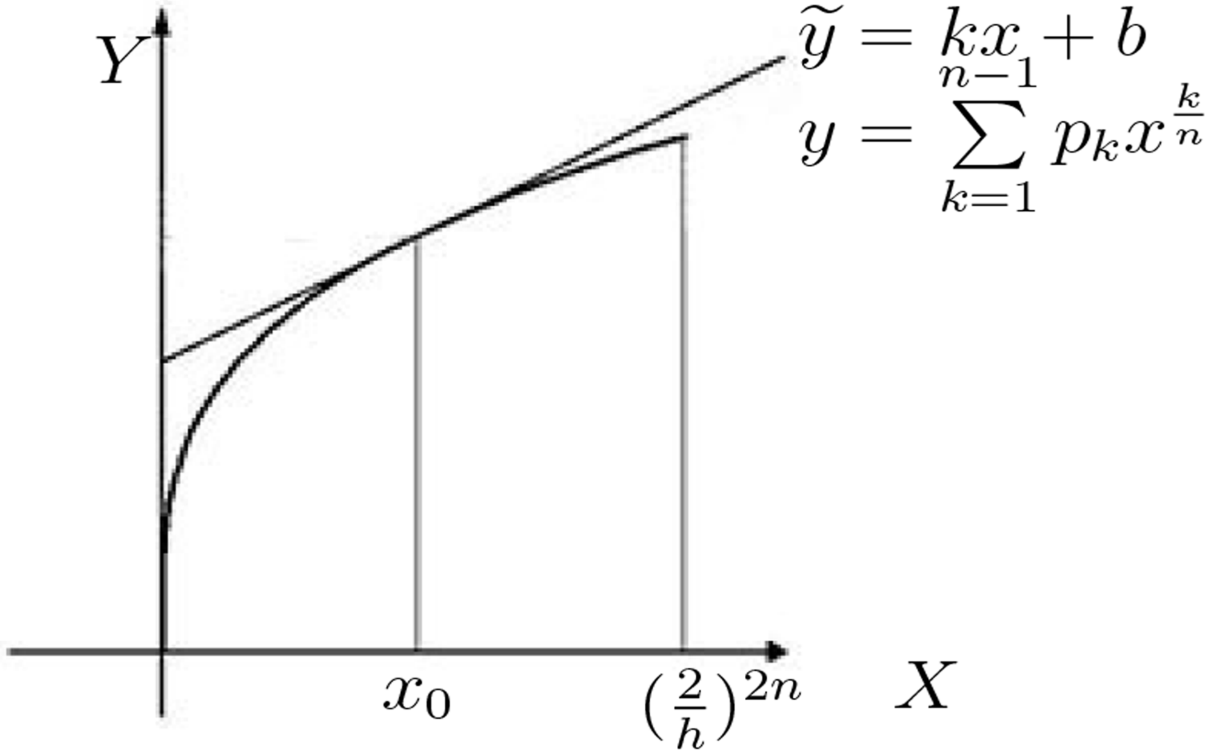

Рис. 1: График функции y(x)