К. Ю. Осипенко

О восстановлении аналитических функций, точном на подпространствах целых функций

Построены семейства оптимальных методов восстановления аналитических в полосе функций и их производных по неточно заданному следу преобразования Фурье этих функций на вещественной оси. При этом от методов дополнительно требуется, чтобы они были точны на подпространствах целых функций.

Библиография: 12 названий.

Ключевые слова: классы Харди, оптимальное восстановление, преобразование Фурье, целые функции.

DOI: https://doi.org/10.4213/sm9976

§ 1. Введение

Одна из распространенных идей при построении численных методов состоит в том, что ищутся методы, точные на некотором подпространстве функций. При этом исходят из естественных соображений, основанных на том, что если исходная функция приближается с достаточной точностью элементами этого подпространства, то и соответствующий метод (как правило, являющийся некоторым линейным функционалом или оператором от этой функции) будет иметь приемлемую погрешность. Характерным примером здесь являются квадратурные формулы, построенные из условия их точности на алгебраических многочленах фиксированной степени, а наиболее ярким примером являются квадратурные формулы Гаусса (см., например, [1]).

Другой подход к построению численных методов, а в более широком смысле – к аппроксимации в целом, связан с идеями А. Н. Колмогорова. В этом случае вначале фиксируется некоторая априорная информация о функциях – некоторое множество функций (класс), для которых затем строится оптимальный (наилучший) метод из условия его минимальной погрешности на этом классе функций. Здесь также одним из характерных примеров являются квадратурные формулы, впервые построенные в такой постановке С. М. Никольским (см. [2]).

В работе [3] было предложено совместить эти два подхода: один, идущий от Гаусса и основанный на построении методов, точных на подпространствах, и другой, идущий от А. Н. Колмогорова, который основан на построении методов, оптимальных на данном классе. Иначе говоря, предлагалось искать методы, которые были бы оптимальны на классе и в то же время точны на некотором фиксированном подпространстве. В рамках такого подхода в работах [4] и [5] были решены некоторые задачи о восстановлении решений уравнений математической физики.

В настоящей работе рассматриваются задачи построения оптимальных методов восстановления аналитических в полосе функций и их производных по неточно заданному следу преобразования Фурье этих функций на вещественной оси. Причем от оптимальных методов дополнительно требуется, чтобы они были точны на подпространствах целых функций.

§ 2. Постановка задачи

Пусть X – линейное пространство, Y, Z – линейные нормированные пространства и $A\colon X \to Z$, $I\colon X \to Y$ – линейные операторы. Рассматривается задача об оптимальном восстановлении значений оператора A на множестве $W \subset X$ по неточно заданным значениям оператора I на элементах этого множества. Считается, что для каждого элемента $x \in W$ известно значение $y \in Y$ такое, что $\|Ix - y\|_Y \leqslant \delta$, где $\delta > 0$ – число, характеризующее погрешность исходной информации об элементах множества W. Требуется по значению y восстановить наиболее точным образом значение Ax. Любой метод восстановления представляет из себя отображение $m\colon Y \to Z$, которое элементу $y \in Y$ ставит в соответствие значение $m(y) \in Z$, принимаемое за приближенное значение Ax.

Погрешностью метода m называется величина

$$e(A, W, I, \delta, m) = \sup_{\substack{x \in W,\ y \in Y \\ \|Ix - y\|_Y \leqslant \delta}} \|Ax - m(y)\|_Z.$$

Оптимальной погрешностью восстановления называется величина

$$E(A, W, I, \delta) = \inf_{m\colon Y \to Z} e(A, W, I, \delta, m),$$

а методы, на которых достигается нижняя грань, называются *оптимальными* на множестве W. Сформулированная задача относится к теории оптимального восстановления. Более подробные сведения об этой теории и задачах, рассматриваемых в рамках этой теории, можно найти в обзорной статье [6] и монографиях [7]–[10].

Пусть $L \subset X$ – линейное подпространство X. Будем говорить, что метод $m\colon Y \to Z$ *точен на* L, если $Ax = m(Ix)$ для всех $x \in L$. Рассмотрим множество $\mathcal{E}_L$, состоящее из линейных операторов $m\colon Y \to Z$, точных на L. Положим

$$E_L(A, W, I, \delta) = \inf_{m \in \mathcal{E}_L} e(A, W, I, \delta, m).$$

Методы, на которых достигается нижняя грань в этом равенстве, будем называть *оптимальными* на W среди точных на L.

Под *суммой множеств* A и B из линейного пространства будем понимать множество

$$A + B = \{a + b\colon a \in A,\ b \in B\}.$$

Предложение (см. [4]). *Пусть* $L \subset X$ – *линейное подпространство* X *и* $m^*\colon Y \to Z$ – *линейный оператор, являющийся оптимальным методом восстановления оператора* A *на множестве* $W+L$. *Тогда*

$$E_L(A, W, I, \delta) = E(A, W+L, I, \delta).$$

Если $E_L(A, W+L, I, \delta) < \infty$, *то* m^* – *оптимальный метод на* W *среди точных на* L.

Тем самым для нахождения линейных оптимальных на W методов среди точных на L достаточно найти в множестве оптимальных методов на $W+L$ линейные.

В настоящей работе рассматривается задача оптимального восстановления аналитических в полосе

$$S_\beta = \{z \in \mathbb{C}\colon |\operatorname{Im} z| < \beta\}$$

функций и их производных при условии, что методы восстановления точны на подпространстве целых функций $\mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R})$, являющемся подпространством в $L_2(\mathbb{R})$, образованном сужениями на $\mathbb{R}$ целых функций экспоненциального типа σ.

Перейдем к точной постановке задачи. *Пространством Харди* $\mathcal{H}_2^\beta$ называется множество функций f, аналитических в полосе S_β, для которых

$$\|f\|_{\mathcal{H}_2^\beta} = \left(\sup_{0 \leqslant \eta < \beta} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (|f(t+i\eta)|^2 + |f(t-i\eta)|^2)\, dt\right)^{1/2} < \infty.$$

Через $\mathcal{H}_2^{r,\beta}$ (пространство Харди–Соболева) будем обозначать множество аналитических в полосе S_β функций, для которых $f^{(r)} \in \mathcal{H}_2^\beta$.

Обозначим через $H_2^{r,\beta}$ множество функций $f \in \mathcal{H}_2^{r,\beta} \cap L_2(\mathbb{R})$, для которых $\|f^{(r)}\|_{\mathcal{H}_2^\beta} \leqslant 1$. Если $\sigma > 0$, то через $\mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R})$ обозначим подпространство в $L_2(\mathbb{R})$, образованное сужениями на $\mathbb{R}$ целых функций экспоненциального типа σ. Как хорошо известно, $f \in \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда носитель преобразования Фурье Ff принадлежит отрезку $\Delta_\sigma = [-\sigma, \sigma]$. По определению $\mathcal{B}_{0,2}(\mathbb{R}) = \{0\}$.

Рассмотрим задачу оптимального восстановления k-й производной функции $f \in H_2^{r,\beta} + \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R})$, $k \leqslant r$, по следу на Δ_{σ_1}, $\sigma_1 > 0$, ее преобразования Фурье, заданному с погрешностью в метрике $L_2(\Delta_{\sigma_1})$, т.е. считается, что вместо следа на Δ_{σ_1} функции Ff известна функция $y \in L_2(\Delta_{\sigma_1})$ такая, что

$$\|Ff - y\|_{L_2(\Delta_{\sigma_1})} \leqslant \delta.$$

Требуется по функции y восстановить на $\mathbb{R}$ наилучшим образом функцию $f^{(k)}$. Тем самым речь идет о нахождении величины

$$E(D^k, H_2^{r,\beta} + \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R}), I_{\sigma_1}, \delta) = \inf_{m\colon L_2(\Delta_{\sigma_1}) \to L_2(\mathbb{R})} e(D^k, H_2^{r,\beta} + \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R}), I_{\sigma_1}, \delta, m),$$

где $D^k f = f^{(k)}$, $I_{\sigma_1} f = Ff\big|_{\Delta_{\sigma_1}}$,

$$e(D^k, H_2^{r,\beta} + \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R}), I_{\sigma_1}, \delta, m) = \sup_{\substack{f \in H_2^{r,\beta} + \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R}),\ y \in L_2(\Delta_{\sigma_1}) \\ \|Ff - y\|_{L_2(\Delta_{\sigma_1})} \leqslant \delta}} \|f^{(k)} - m(y)\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Иными словами, мы хотим найти оптимальные методы восстановления k-й производной на классе $H_2^{r,\beta}$ среди точных на подпространстве целых функций $\mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R})$. Без требования точности методов на $\mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R})$ эта задача рассматривалась в работе [11].

§ 3. Основные результаты

Рассмотрим функцию $y = s(x)$, $x \geqslant 0$, которая задается параметрически

$$\begin{cases} x = t^{2r} \operatorname{ch} 2\beta t, \\ y = t^{2k}, \end{cases} \qquad t \geqslant 0,$$

$k, r \in \mathbb{N}$, $r \geqslant k$, $\beta > 0$. В силу того, что при $t > 0$ производная этой функции положительна:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{kt^{2(k-r)}}{r \operatorname{ch} 2\beta t + t\beta \operatorname{sh} 2\beta t} > 0,$$

и монотонно убывает, s – вогнутая и монотонно возрастающая функция.

Прямая, соединяющая точку $(x(t), y(t))$ с началом координат, имеет вид $y = \lambda_2 x$, где

$$\lambda_2 = \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{1}{t^{2(r-k)} \operatorname{ch} 2\beta t}.$$

В силу вогнутости функции s найдется точка t_0 такая, что касательная к s в точке $(x(t_0), y(t_0))$ будет параллельна прямой $y = \lambda_2 x$. Тем самым точка t_0 находится из уравнения

$$\frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} = \lambda_2.$$

Это уравнение можно записать в виде

$$\frac{kt_0^{2(k-r)}}{r \operatorname{ch} 2\beta t_0 + t_0\beta \operatorname{sh} 2\beta t_0} = \frac{1}{t^{2(r-k)} \operatorname{ch} 2\beta t}. \tag{3.1}$$

Сама касательная, проходящая через точку $(x(t_0), y(t_0))$, будет иметь вид $y = \lambda_1 + \lambda_2 x$, где

$$\lambda_1 = t_0^{2k}\left(1 - \frac{k}{r + t_0\beta \operatorname{th} 2\beta t_0}\right). \tag{3.2}$$

Обозначим через $h(t)$ точку, для которой $y(h(t)) = \lambda_1$ (рис. 1). Тем самым

$$h(t) = t_0\left(1 - \frac{k}{r + t_0\beta \operatorname{th} 2\beta t_0}\right)^{1/(2k)}.$$

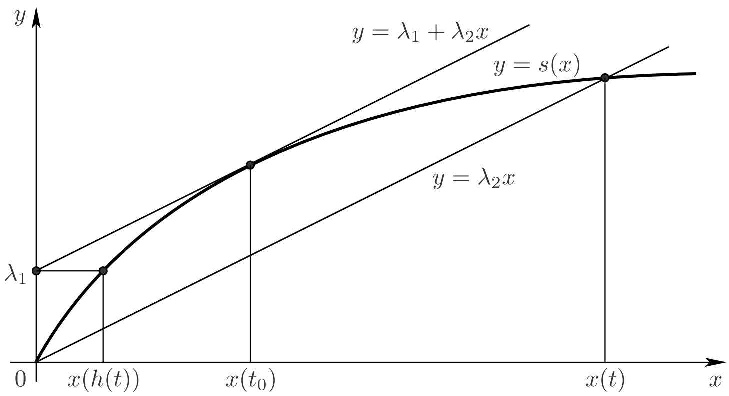

Рис. 1

В силу того, что функция в правой части (3.2) при $t_0 \in [0, +\infty)$ монотонно возрастает от нуля до $+\infty$, для любого числа $\lambda_1 > 0$ найдется точка $t_0 > 0$ такая, что касательная к s в точке $(x(t_0), y(t_0))$ будет проходить через точку $(0, \lambda_1)$. Обозначим такую точку t_0 через $h_1(\lambda_1)$.

Функция $t^r\sqrt{\operatorname{ch} 2\beta t}$ монотонно возрастает при $t \in \mathbb{R}_+$ от 0 до $+\infty$. Поэтому для любого $x \in \mathbb{R}_+$ существует единственное решение уравнения

$$t^r\sqrt{\operatorname{ch} 2\beta t} = x,$$

принадлежащее интервалу $[0, +\infty)$. Обозначим его через $\mu_{r\beta}(x)$.

Через $\widehat{\sigma}_1$ обозначим значение параметра t, при котором $t_0 = \widehat{t}_0 = \mu_{r\beta}(\sqrt{2\pi}/\delta)$, т.е. $x(\widehat{t}_0) = 2\pi/\delta^2$. Положим $\widehat{\sigma} = h(\widehat{\sigma}_1)$. Уравнение касательной, проходящей через точку $(x(\widehat{t}_0), y(\widehat{t}_0))$, будет иметь вид $y = \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 x$, где

$$\widehat{\lambda}_1 = \widehat{t}_0^{\,2k}\biggl(1 - \frac{k}{r + \widehat{t}_0\beta \operatorname{th} 2\beta\widehat{t}_0}\biggr), \qquad \widehat{\lambda}_2 = \frac{k\widehat{t}_0^{\,2(k-r)}}{r \operatorname{ch} 2\beta\widehat{t}_0 + \widehat{t}_0\beta \operatorname{sh} 2\beta\widehat{t}_0}.$$

Таким образом,

$$\widehat{\sigma} = \widehat{\lambda}_1^{1/(k)}, \qquad \widehat{\sigma}_1 = \mu_{r-k,\beta}\biggl(\frac{1}{\sqrt{\widehat{\lambda}_2}}\biggr)$$

(рис. 2).

Рассмотрим следующие четыре области на плоскости $\mathbb{R}^2$ (рис. 3):

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &= \bigl\{(\sigma_1, \sigma) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < h(\sigma_1) \leqslant \sigma \leqslant \sigma_1\bigr\},\\
\Sigma_2 &= \bigl\{(\sigma_1, \sigma) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leqslant \sigma \leqslant h(\sigma_1),\ 0 < \sigma_1 \leqslant \widehat{\sigma}_1\bigr\},\\
\Sigma_3 &= \bigl\{(\sigma_1, \sigma) \in \mathbb{R}^2 \colon \sigma_1 \geqslant \widehat{\sigma}_1,\ 0 \leqslant \sigma \leqslant \widehat{\sigma}\bigr\},\\
\Sigma_4 &= \bigl\{(\sigma_1, \sigma) \in \mathbb{R}^2 \colon \widehat{\sigma} \leqslant \sigma \leqslant h(\sigma_1)\bigr\}.
\end{aligned}$$

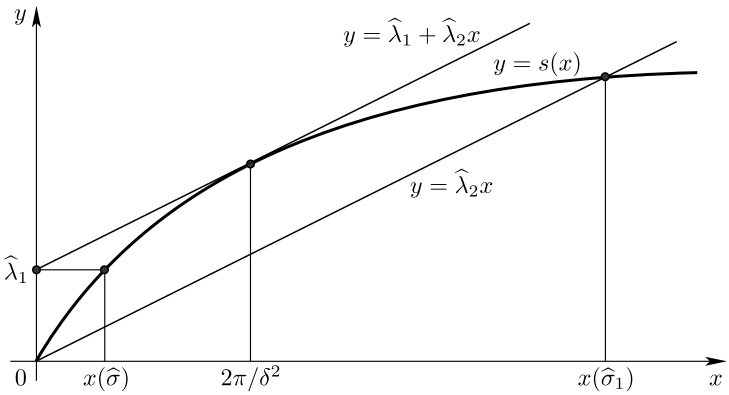

Рис. 2

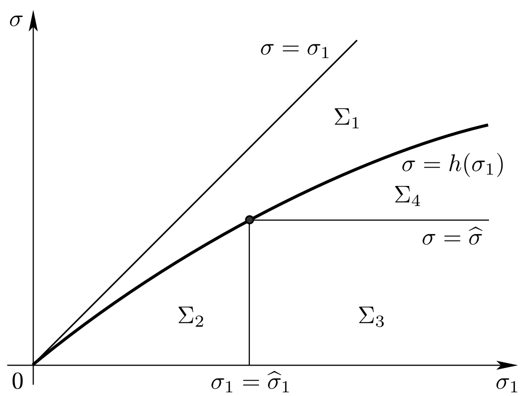

Рис. 3

Положим

$$(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{cases} \left(\sigma^{2k}, \dfrac{1}{\sigma_1^{2(r-k)} \operatorname{ch} 2\beta\sigma_1}\right), & (\sigma_1, \sigma) \in \Sigma_1, \\ \left(h^{2k}(\sigma_1), \dfrac{1}{\sigma_1^{2(r-k)} \operatorname{ch} 2\beta\sigma_1}\right), & (\sigma_1, \sigma) \in \Sigma_2, \\ \left(\widehat{\sigma}^{2k}, \dfrac{1}{\widehat{\sigma}_1^{2(r-k)} \operatorname{ch} 2\beta\widehat{\sigma}_1}\right), & (\sigma_1, \sigma) \in \Sigma_3, \\ \left(\sigma^{2k}, \dfrac{h_1^{2k}(\sigma^{2k}) - \sigma^{2k}}{h_1^{2r}(\sigma^{2k}) \operatorname{ch}(2\beta h_1(\sigma^{2k}))}\right), & (\sigma_1, \sigma) \in \Sigma_4. \end{cases} \tag{3.3}$$

Через $\Theta(\sigma, \sigma_1)$ обозначим множество измеримых функций θ на $[-\sigma_1, -\sigma) \cup (\sigma, -\sigma_1]$, для которых $|\theta(t)| \leqslant 1$ для п.в. $\sigma < |t| \leqslant \sigma_1$.

Теорема. *Пусть k, r целые, $0 \leqslant k \leqslant r$.*

1) *Если $\sigma > \sigma_1$, то $E(D^k, H_2^{r,\beta} + \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R}), I_{\sigma_1}, \delta) = \infty$.*

2) *Если $k \geqslant 1$, то для всех $\sigma_1 > 0$, $\sigma \geqslant 0$ таких, что $\sigma \leqslant \sigma_1$, имеет место равенство*

$$E(D^k, H_2^{r,\beta} + \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R}), I_{\sigma_1}, \delta) = \sqrt{\lambda_1 \frac{\delta^2}{2\pi} + \lambda_2} \tag{3.4}$$

и для каждой функции $\theta \in \Theta(\sigma, \sigma_1)$ метод

$$\widehat{m}_\theta(y)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} (it)^k y(t) e^{itx}\, dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma < |t| \leqslant \sigma_1} (it)^k a_\theta(t) y(t) e^{itx}\, dt,$$

где

$$a_\theta(t) = \frac{\lambda_1 + \theta(t)|t|^{r-k}\sqrt{\lambda_1\lambda_2 \operatorname{ch} 2\beta t}\,\sqrt{-t^{2k} + \lambda_1 + \lambda_2 t^{2r} \operatorname{ch} 2\beta t}}{\lambda_1 + \lambda_2 t^{2r} \operatorname{ch} 2\beta t}, \tag{3.5}$$

является оптимальным.

3) *Если $k = 0$, то для всех $\sigma_1 > 0$, $\sigma \geqslant 0$ таких, что $\sigma \leqslant \sigma_1$, имеет место равенство*

$$E(D^0, H_2^{r,\beta} + \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R}), I_{\sigma_1}, \delta) = \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi} + \frac{1}{\sigma_1^{2r} \operatorname{ch} 2\beta\sigma_1}}$$

и для каждой функции $\theta \in \Theta(\sigma, \sigma_1)$ метод

$$\widehat{m}_\theta(y)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} y(t) e^{itx}\, dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma < |t| \leqslant \sigma_1} a_\theta(t) y(t) e^{itx}\, dt,$$

где

$$a_\theta(t) = \frac{\sigma_1^{2r} \operatorname{ch} 2\beta\sigma_1 + \theta(t) t^{2r} \operatorname{ch} 2\beta t}{\sigma_1^{2r} \operatorname{ch} 2\beta\sigma_1 + t^{2r} \operatorname{ch} 2\beta t}, \tag{3.6}$$

является оптимальным.

Доказательство. По основной теореме о представлении аналитических функций над трубчатыми областями (см. [12]) следует, что $f \in \mathcal{H}_2^\beta$ в том и только том случае, если она имеет вид

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{izt}\, dt, \tag{3.7}$$

где g – функция, удовлетворяющая условию

$$\sup_{|y|<\beta} \int_{\mathbb{R}} |g(t)|^2 e^{-2yt}\, dt < \infty$$

(g – преобразование Фурье функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$). Из теоремы Планшереля вытекает тогда, что

$$\|f\|^2_{\mathcal{H}_2^\beta} = \frac{1}{2\pi} \sup_{0 \leqslant y < \beta} \int_{\mathbb{R}} |Ff(t)|^2 \operatorname{ch} 2yt\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |Ff(t)|^2 \operatorname{ch} 2\beta t\, dt. \tag{3.8}$$

Докажем, что $f \in \mathcal{H}_2^{r,\beta} \cap L_2(\mathbb{R})$ принадлежит классу $H_2^{r,\beta} + \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|t|>\sigma} t^{2r} |Ff(t)|^2 \operatorname{ch} 2\beta t\, dt \leqslant 1. \tag{3.9}$$

Действительно, если $f \in H_2^{r,\beta} + \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R})$, то $f = f_1 + f_2$, где $f_1 \in H_2^{r,\beta}$, а $f_2 \in \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R})$. Тогда, учитывая, что Ff_2 сосредоточено на отрезке Δ_σ, имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|t|>\sigma} t^{2r}|Ff(t)|^2 \operatorname{ch} 2\beta t\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|>\sigma} t^{2r}|Ff_1(t)|^2 \operatorname{ch} 2\beta t\,dt \leqslant 1.$$

Обратно, пусть $f \in \mathcal{H}_2^{r,\beta} \cap L_2(\mathbb{R})$ такова, что выполнено неравенство (3.9). Обозначим через $f_2 \in L_2(\mathbb{R})$ функцию, для которой $Ff_2 = \chi_\sigma Ff$, где χ_σ – характеристическая функция отрезка Δ_σ. Тогда ясно, что $f_2 \in \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R})$. Положим $f_1 = f - f_2$. Очевидно, что $f_1 \in \mathcal{H}_2^{r,\beta} \cap L_2(\mathbb{R})$, и в силу (3.8) (учитывая, что $Ff_1 = 0$ на Δ_σ) будем иметь

$$\|f_1^{(r)}\|^2_{\mathcal{H}_2^\beta} = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|>\sigma} t^{2r}|Ff_1(t)|^2 \operatorname{ch} 2\beta t\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|>\sigma} t^{2r}|Ff(t)|^2 \operatorname{ch} 2\beta t\,dt \leqslant 1,$$

т.е. $f = f_1 + f_2 \in H_2^{r,\beta} + \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R})$.

Пусть $f \in \mathcal{H}_2^{r,\beta} \cap L_2(\mathbb{R})$ такова, что $\|Ff\|_{L_2(\Delta_{\sigma_1})} \leqslant \delta$, и выполнено неравенство (3.9). Для любого метода $m\colon L_2(\Delta_{\sigma_1}) \to L_2(\mathbb{R})$ имеем

$$\begin{aligned} 2\|f^{(k)}\|_{L_2(\mathbb{R})} &= \|f^{(k)} - m(0) - (-f^{(k)} - m(0))\|_{L_2(\mathbb{R})} \\ &\leqslant \|f^{(k)} - m(0)\|_{L_2(\mathbb{R})} + \|-f^{(k)} - m(0)\|_{L_2(\mathbb{R})} \\ &\leqslant 2e(D^k, H_2^{r,\beta} + \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R}), I_{\sigma_1}, \delta, m). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} &\sup_{\substack{f\in\mathcal{H}_2^{r,\beta}\cap L_2(\mathbb{R}),\ \|Ff\|_{L_2(\Delta_{\sigma_1})}\leqslant\delta \\ \frac{1}{2\pi}\int_{|t|>\sigma} t^{2r}|Ff(t)|^2 \operatorname{ch} 2\beta t\,dt\leqslant 1}} \|f^{(k)}\|_{L_2(\mathbb{R})} \\ &\qquad\leqslant e(D^k, H_2^{r,\beta} + \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R}), I_{\sigma_1}, \delta, m) \leqslant E(D^k, H_2^{r,\beta} + \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R}), I_{\sigma_1}, \delta). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Рассмотрим экстремальную задачу в левой части (3.10). Переходя для удобства к квадратам, ее можно записать в виде

$$\begin{gathered} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} t^{2k}|Ff(t)|^2\,dt \to \max, \\ \int_{|t|\leqslant\sigma_1} |Ff(t)|^2\,dt \leqslant \delta^2, \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{|t|>\sigma} t^{2r}|Ff(t)|^2 \operatorname{ch} 2\beta t\,dt \leqslant 1, \\ f \in \mathcal{H}_2^{r,\beta} \cap L_2(\mathbb{R}). \end{gathered} \tag{3.11}$$

1) Предположим, что $\sigma > \sigma_1$. Пусть функция f_0 такова, что

$$Ff_0(t) = \begin{cases} c, & t \in (\sigma_1, \sigma), \\ 0, & t \notin (\sigma_1, \sigma), \end{cases}$$

где $c > 0$. Тогда f_0 – допустимая функция в задаче (3.11) и

$$\|f_0^{(k)}\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \frac{c^2}{2\pi}\int_{\sigma_1}^{\sigma} t^{2k}\,dt.$$

Устремляя c к бесконечности, получаем из (3.10), что

$$E(D^k, H_2^{r,\beta} + \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R}), I_{\sigma_1}, \delta) = \infty.$$

2) Пусть $k \geqslant 1$. Докажем, что в каждой из областей Σ_j, $j = 1, 2, 3, 4$, выполнена оценка

$$E(D^k, H_2^{r,\beta} + \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R}), I_{\sigma_1}, \delta) \geqslant \sqrt{\lambda_1 \frac{\delta^2}{2\pi} + \lambda_2}. \tag{3.12}$$

Пусть $(\sigma_1, \sigma) \in \Sigma_1$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ такого, что $1/n < \sigma$, рассмотрим функцию f_n, для которой

$$Ff_n(t) = \begin{cases} \delta\sqrt{n}, & \sigma - \dfrac{1}{n} < t < \sigma, \\ \sqrt{2\pi n}\left(\sigma_1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-r} \operatorname{ch}^{-1/2}\left(2\beta\left(\sigma_1 + \dfrac{1}{n}\right)\right), & \sigma_1 < t < \sigma_1 + \dfrac{1}{n}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{3.13}$$

Имеем

$$\|Ff_n\|^2_{L_2(\Delta_{\sigma_1})} = \int_{\sigma-1/n}^{\sigma} \delta^2 n\, dt = \delta^2,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|t|>\sigma} t^{2r}|Ff_n(t)|^2 \operatorname{ch} 2\beta t\, dt = \frac{n}{(\sigma_1 + 1/n)^{2r}\operatorname{ch}(2\beta(\sigma_1 + 1/n))}\int_{\sigma_1}^{\sigma_1+1/n} t^{2r}\operatorname{ch} 2\beta t\, dt \leqslant 1.$$

Следовательно, функции f_n являются допустимыми в задаче (3.11). В силу (3.10) получаем

$$\begin{aligned} E^2(D^k, &H_2^{r,\beta} + \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R}), I_{\sigma_1}, \delta) \\ &\geqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} t^{2k}|Ff_n(t)|^2\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma-1/n}^{\sigma} t^{2k}\delta^2 n\, dt + \frac{n}{(\sigma_1 + 1/n)^{2r}\operatorname{ch}(2\beta(\sigma_1 + 1/n))}\int_{\sigma_1}^{\sigma_1+1/n} t^{2k}\, dt \\ &= \frac{\delta^2 n(\sigma^{2k+1} - (\sigma - 1/n)^{2k+1})}{2\pi(2k+1)} \\ &\qquad + \frac{n}{(\sigma_1 + 1/n)^{2r}\operatorname{ch}(2\beta(\sigma_1 + 1/n))}\,\frac{(\sigma_1 + 1/n)^{2k+1} - \sigma_1^{2k+1}}{2k+1}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$E^2(D^k, H_2^{r,\beta} + \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R}), I_{\sigma_1}, \delta) \geqslant \frac{\delta^2\sigma^{2k}}{2\pi} + \frac{1}{\sigma_1^{2(r-k)}\operatorname{ch} 2\beta\sigma_1} = \lambda_1\frac{\delta^2}{2\pi} + \lambda_2.$$

Пусть теперь $(\sigma_1, \sigma) \in \Sigma_2$. Прямая, соединяющая точку $(x(\sigma_1), y(\sigma_1))$ с началом координат, имеет вид $y = \lambda_2 x$, где

$$\lambda_2 = \frac{y(\sigma_1)}{x(\sigma_1)} = \frac{1}{\sigma_1^{2(r-k)}\operatorname{ch} 2\beta\sigma_1}.$$

Как было отмечено, в силу вогнутости функции s найдется точка t_0 такая, что касательная к s в точке $(x(t_0), y(t_0))$ будет параллельна прямой $y = \lambda_2 x$. Сама касательная, проходящая через точку $(x(t_0), y(t_0))$, будет иметь вид $y = \lambda_1 + \lambda_2 x$, где

$$\lambda_1 = t_0^{2k} - \lambda_2 t_0^{2r} \operatorname{ch} 2\beta t_0 = t_0^{2k} \left(1 - \frac{t_0^{2(r-k)} \operatorname{ch} 2\beta t_0}{\sigma_1^{2(r-k)} \operatorname{ch} 2\beta\sigma_1}\right) = h^{2k}(\sigma_1).$$

Из того, что $\sigma_1 \leqslant \widehat{\sigma}_1$, вытекает, что $t_0 \leqslant \widehat{t}_0$. Следовательно, $t_0^{2r} \operatorname{ch} 2\beta t_0 \leqslant 2\pi/\delta^2$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ такого, что $h(\sigma_1) < t_0 - 1/n$, рассмотрим функцию f_n, для которой

$$Ff_n(t) = \begin{cases} \delta\sqrt{n}, & t_0 - \dfrac{1}{n} < t < t_0, \\ \dfrac{\sqrt{n(2\pi - \delta^2 t_0^{2r} \operatorname{ch} 2\beta t_0)}}{(\sigma_1 + 1/n)^r \sqrt{\operatorname{ch}(2\beta(\sigma_1 + 1/n))}}, & \sigma_1 < t < \sigma_1 + \dfrac{1}{n}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Имеем

$$\|Ff_n\|^2_{L_2(\Delta_{\sigma_1})} = \int_{t_0-1/n}^{t_0} \delta^2 n\, dt = \delta^2,$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{|t|>\sigma} t^{2r} |Ff_n(t)|^2 \operatorname{ch} 2\beta t\, dt \\ &\quad = \frac{\delta^2 n}{2\pi} \int_{t_0-1/n}^{t_0} t^{2r} \operatorname{ch} 2\beta t\, dt \\ &\qquad + \frac{n(2\pi - \delta^2 t_0^{2r} \operatorname{ch} 2\beta t_0)}{2\pi(\sigma_1 + 1/n)^{2r} \operatorname{ch}(2\beta(\sigma_1 + 1/n))} \int_{\sigma_1}^{\sigma_1+1/n} t^{2r} \operatorname{ch} 2\beta t\, dt \\ &\quad \leqslant \frac{\delta^2}{2\pi} t_0^{2r} \operatorname{ch} 2\beta t_0 + 1 - \frac{\delta^2}{2\pi} t_0^{2r} \operatorname{ch} 2\beta t_0 = 1. \end{aligned}$$

Следовательно, функции f_n являются допустимыми в задаче (3.11). В силу (3.10) получаем

$$\begin{aligned} &E^2(D^k, H_2^{r,\beta} + \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R}), I_{\sigma_1}, \delta) \\ &\quad \geqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} t^{2k} |Ff_n(t)|^2\, dt \\ &\quad = \frac{1}{2\pi} \int_{t_0-1/n}^{t_0} t^{2k} \delta^2 n\, dt + \frac{n(2\pi - \delta^2 t_0^{2r} \operatorname{ch} 2\beta t_0)}{2\pi(\sigma_1 + 1/n)^{2r} \operatorname{ch}(2\beta(\sigma_1 + 1/n))} \int_{\sigma_1}^{\sigma_1+1/n} t^{2k}\, dt \\ &\quad = \frac{\delta^2 n(t_0^{2k+1} - (t_0 - 1/n)^{2k+1})}{2\pi(2k+1)} \\ &\qquad + \frac{n(2\pi - \delta^2 t_0^{2r} \operatorname{ch} 2\beta t_0)((\sigma_1 + 1/n)^{2k+1} - \sigma_1^{2k+1})}{2\pi(2k+1)(\sigma_1 + 1/n)^{2r} \operatorname{ch}(2\beta(\sigma_1 + 1/n))}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\begin{aligned} &E^2(D^k, H_2^{r,\beta} + \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R}), I_{\sigma_1}, \delta) \\ &\quad \geqslant \frac{\delta^2 t_0^{2k}}{2\pi} + \frac{2\pi - \delta^2 t_0^{2r} \operatorname{ch} 2\beta t_0}{2\pi \sigma_1^{2(r-k)} \operatorname{ch} 2\beta\sigma_1} \\ &\quad = \frac{\delta^2 t_0^{2k}}{2\pi}\left(1 - \frac{t_0^{2(r-k)} \operatorname{ch} 2\beta t_0}{\sigma_1^{2(r-k)} \operatorname{ch} 2\beta\sigma_1}\right) + \frac{1}{\sigma_1^{2(r-k)} \operatorname{ch} 2\beta\sigma_1} \\ &\quad = \lambda_1 \frac{\delta^2}{2\pi} + \lambda_2. \end{aligned}$$

Пусть $(\sigma_1, \sigma) \in \Sigma_3$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ такого, что $\sigma < \widehat{t}_0 - 1/n$, рассмотрим функцию f_n, для которой

$$Ff_n(t) = \begin{cases} \delta\sqrt{n}, & \widehat{t}_0 - \dfrac{1}{n} < t < \widehat{t}_0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Имеем

$$\|Ff_n\|^2_{L_2(\Delta_{\sigma_1})} = \int_{\widehat{t}_0 - 1/n}^{\widehat{t}_0} \delta^2 n \, dt = \delta^2,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{|t|>\sigma} t^{2r} |Ff_n(t)|^2 \operatorname{ch} 2\beta t \, dt &= \frac{\delta^2 n}{2\pi} \int_{\widehat{t}_0 - 1/n}^{\widehat{t}_0} t^{2r} \operatorname{ch} 2\beta t \, dt \\ &\leqslant \frac{\delta^2}{2\pi} \widehat{t}_0^{\,2r} \operatorname{ch} 2\beta \widehat{t}_0 = 1. \end{aligned}$$

Следовательно, функции f_n являются допустимыми в задаче (3.11). В силу (3.10) получаем

$$\begin{aligned} &E^2(D^k, H_2^{r,\beta} + \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R}), I_{\sigma_1}, \delta) \\ &\quad \geqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} t^{2k} |Ff_n(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\widehat{t}_0 - 1/n}^{\widehat{t}_0} t^{2k} \delta^2 n \, dt \\ &\quad = \frac{\delta^2 n (\widehat{t}_0^{\,2k+1} - (\widehat{t}_0 - 1/n)^{2k+1})}{2\pi(2k+1)}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$E^2(D^k, H_2^{r,\beta} + \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R}), I_{\sigma_1}, \delta) \geqslant \frac{\delta^2 \widehat{t}_0^{\,2k}}{2\pi} = \lambda_1 \frac{\delta^2}{2\pi} + \lambda_2.$$

Пусть $(\sigma_1, \sigma) \in \Sigma_4$, а t_0 – точка, которая определялась при рассмотрении случая, когда $(\sigma_1, \sigma) \in \Sigma_2$. Положим $\xi = h_1(\sigma^{2k})$. В силу того, что $\sigma \leqslant h(\sigma_1)$, получаем, что $\xi \leqslant t_0 < \sigma_1$. Кроме того, так как $\sigma \geqslant \widehat{\sigma}$, то $\xi \geqslant \widehat{t}_0$. Следовательно, $\xi^{2r} \operatorname{ch} 2\beta\xi \geqslant 2\pi/\delta^2$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ такого, что $1/n < \sigma$ и

$\xi - 1/n > \sigma$, рассмотрим функцию f_n, для которой

$$Ff_n(t) = \begin{cases} \sqrt{n}\sqrt{\delta^2 - \dfrac{2\pi}{\xi^{2r}\operatorname{ch} 2\beta\xi}}, & \sigma - \dfrac{1}{n} < t < \sigma, \\ \dfrac{\sqrt{2\pi n}}{\xi^r \sqrt{\operatorname{ch} 2\beta\xi}}, & \xi - \dfrac{1}{n} < t < \xi, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Имеем

$$\|Ff_n\|^2_{L_2(\Delta_{\sigma_1})} = \int_{\sigma-1/n}^{\sigma} n\biggl(\delta^2 - \frac{2\pi}{\xi^{2r}\operatorname{ch} 2\beta\xi}\biggr)\,dt + \int_{\xi-1/n}^{\xi} \frac{2\pi n}{\xi^{2r}\operatorname{ch} 2\beta\xi}\,dt = \delta^2,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|t|>\sigma} t^{2r}|Ff_n(t)|^2 \operatorname{ch} 2\beta t\,dt = \frac{n}{\xi^{2r}\operatorname{ch} 2\beta\xi}\int_{\xi-1/n}^{\xi} t^{2r}|Ff_n(t)|^2 \operatorname{ch} 2\beta t\,dt \leqslant 1.$$

Тем самым функции f_n являются допустимыми в задаче (3.11). В силу (3.10) получаем

$$\begin{aligned} &E^2(D^k, H_2^{r,\beta} + \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R}), I_{\sigma_1}, \delta) \\ &\quad\geqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} t^{2k}|Ff_n(t)|^2\,dt \\ &\quad= \frac{n}{2\pi}\biggl(\delta^2 - \frac{2\pi}{\xi^{2r}\operatorname{ch} 2\beta\xi}\biggr)\int_{\sigma-1/n}^{\sigma} t^{2k}\,dt + \frac{n}{\xi^{2r}\operatorname{ch} 2\beta\xi}\int_{\xi-1/n}^{\xi} t^{2k}\,dt \\ &\quad= \frac{n}{2\pi}\biggl(\delta^2 - \frac{2\pi}{\xi^{2r}\operatorname{ch} 2\beta\xi}\biggr)\frac{\sigma^{2k+1} - (\sigma - 1/n)^{2k+1}}{2k+1} \\ &\qquad\quad + \frac{n}{\xi^{2r}\operatorname{ch} 2\beta\xi}\,\frac{\xi^{2k+1} - (\xi - 1/n)^{2k+1}}{2k+1}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\begin{aligned} E^2(D^k, H_2^{r,\beta} + \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R}), I_{\sigma_1}, \delta) &\geqslant \frac{\sigma^{2k}}{2\pi}\biggl(\delta^2 - \frac{2\pi}{\xi^{2r}\operatorname{ch} 2\beta\xi}\biggr) + \frac{\xi^{2k}}{\xi^{2r}\operatorname{ch} 2\beta\xi} \\ &= \lambda_1\frac{\delta^2}{2\pi} + \lambda_2. \end{aligned}$$

Будем искать оптимальные методы восстановления $m_a\colon L_2(\Delta_{\sigma_1}) \to L_2(\mathbb{R})$ среди отображений, которые в образах Фурье представляются в виде

$$Fm_a(y)(t) = \begin{cases} (it)^k a(t) y(t), & t \in \Delta_{\sigma_1}, \\ 0, & t \notin \Delta_{\sigma_1}. \end{cases} \tag{3.14}$$

Для оценки погрешности такого метода нужно оценить значение экстремальной задачи

$$\begin{gathered} \|f^{(k)} - m_a(y)\|_{L_2(\mathbb{R})} \to \max, \\ \|Ff - y\|_{L_2(\Delta_{\sigma_1})} \leqslant \delta, \qquad f \in H_2^{r,\beta} + \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R}). \end{gathered} \tag{3.15}$$

Переходя к образам Фурье в максимизируемом функционале, получим по теореме Планшереля, что квадрат значения задачи (3.15) равен значению такой задачи

$$\begin{gathered}\frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} t^{2k}|Ff(t)-a(t)y(t)|^2\,dt+\frac{1}{2\pi}\int_{|t|>\sigma_1} t^{2k}|Ff(t)|^2\,dt\to\max,\\ \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1}|Ff(t)-y(t)|^2\,dt\leqslant\delta^2,\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\geqslant\sigma} t^{2r}|Ff(t)|^2\operatorname{ch}2\beta t\,dt\leqslant 1.\end{gathered}\tag{3.16}$$

Заметим, что на допустимых в этой задаче парах (f,y), где $f\in\mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R})$ и $y=Ff$, максимизируемый функционал имеет вид

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma} t^{2k}|Ff(t)|^2|1-a(t)|^2\,dt.$$

Отсюда следует, что если функция a не равна п.в. единице на Δ_σ, то, поскольку $\mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R})$ – линейное пространство, значение задачи (3.16) (и тем самым задачи (3.15)) равно бесконечности, т.е. погрешность метода с таким a бесконечна.

Пусть $a\equiv 1$ на Δ_σ. Оценим сверху максимизируемый функционал в (3.16), представив его для этого в виде суммы трех слагаемых:

$$\begin{aligned}I_1&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma} t^{2k}|Ff(t)-y(t)|^2\,dt,\\ I_2&=\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma<|t|\leqslant\sigma_1} t^{2k}|Ff(t)-a(t)y(t)|^2\,dt,\\ I_3&=\frac{1}{2\pi}\int_{|t|>\sigma_1} t^{2k}|Ff(t)|^2\,dt.\end{aligned}$$

Покажем, что

$$I_1\leqslant\frac{\lambda_1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma}|Ff(t)-y(t)|^2\,dt\tag{3.17}$$

во всех областях Σ_j, $j=1,2,3,4$. Действительно, неравенство

$$I_1\leqslant\frac{\sigma^{2k}}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma}|Ff(t)-y(t)|^2\,dt$$

очевидно. Так как $\sigma^{2k}=\lambda_1$ в Σ_1 и Σ_4, то для этих областей (3.17) выполняется. Если $(\sigma_1,\sigma)\in\Sigma_2$, то

$$\lambda_1=h^{2k}(\sigma_1)\geqslant\sigma^{2k},$$

а если $(\sigma_1,\sigma)\in\Sigma_3$, то

$$\lambda_1=\widehat{\sigma}^{2k}\geqslant\sigma^{2k},$$

так что оценка (3.17) выполняется для всех областей.

Оценим теперь величину I_2. Используя неравенство Коши–Буняковского, будем иметь

$$\begin{aligned}
&t^{2k}|Ff(t)-a(t)y(t)|^2\\
&\quad= t^{2k}|(1-a(t))Ff(t)+a(t)(Ff(t)-y(t))|^2\\
&\quad\leqslant t^{2k}\left(\frac{|1-a(t)|^2}{\lambda_2 t^{2r}\operatorname{ch}2\beta t}+\frac{|a(t)|^2}{\lambda_1}\right)(\lambda_2 t^{2r}|Ff(t)|^2\operatorname{ch}2\beta t+\lambda_1|Ff(t)-y(t)|^2).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Положим

$$S_a=\operatorname*{vraimax}_{\sigma<|t|\leqslant\sigma_1} t^{2k}\left(\frac{|1-a(t)|^2}{\lambda_2 t^{2r}\operatorname{ch}2\beta t}+\frac{|a(t)|^2}{\lambda_1}\right).$$

Тогда, интегрируя (3.18), получаем следующую оценку для величины I_2:

$$I_2\leqslant\frac{S_a}{2\pi}\int_{\sigma<|t|\leqslant\sigma_1}(\lambda_2 t^{2r}|Ff(t)|^2\operatorname{ch}2\beta t+\lambda_1|Ff(t)-y(t)|^2)\,dt. \tag{3.19}$$

Покажем теперь, что для I_3 справедлива оценка

$$I_3\leqslant\frac{\lambda_2}{2\pi}\int_{|t|>\sigma_1} t^{2r}|Ff(t)|^2\operatorname{ch}2\beta t\,dt \tag{3.20}$$

во всех областях Σ_j, $j=1,2,3,4$. Имеем

$$I_3=\frac{1}{2\pi}\int_{|t|>\sigma_1} t^{2(k-r)}t^{2r}|Ff(t)|^2\,dt\leqslant\frac{\sigma_1^{2(k-r)}}{2\pi\operatorname{ch}2\beta\sigma_1}\int_{|t|>\sigma_1} t^{2r}|Ff(t)|^2\operatorname{ch}2\beta t\,dt.$$

Поскольку в областях Σ_1 и Σ_2

$$\lambda_2=\frac{\sigma_1^{2(k-r)}}{\operatorname{ch}2\beta\sigma_1},$$

то в этих областях неравенство (3.20) выполняется. Если $(\sigma_1,\sigma)\in\Sigma_3$, то $\sigma_1\geqslant\widehat{\sigma}_1$. Поэтому

$$\lambda_2=\frac{1}{\widehat{\sigma}_1^{2(r-k)}\operatorname{ch}2\beta\widehat{\sigma}_1}\geqslant\frac{\sigma_1^{2(k-r)}}{\operatorname{ch}2\beta\sigma_1}.$$

Пусть $(\sigma_1,\sigma)\in\Sigma_4$. Тогда λ_2 – угловой коэффициент касательной к s в точке $(x(\xi),y(\xi))$, а величина $\sigma_1^{2(k-r)}\operatorname{ch}^{-1}2\beta\sigma_1$ – угловой коэффициент касательной к s в точке $(x(t_0),y(t_0))$ (точка t_0 определялась при рассмотрении оценки снизу для случая $(\sigma_1,\sigma)\in\Sigma_2$). Поскольку $\xi\leqslant t_0$, а функция s вогнутая, то

$$\lambda_2\geqslant\frac{\sigma_1^{2(k-r)}}{\operatorname{ch}2\beta\sigma_1}.$$

Таким образом, оценка (3.20) справедлива во всех областях.

Если предположить, что функция a такова, что $S_a \leqslant 1$, то, складывая неравенства (3.17), (3.19) и (3.20), получаем следующую оценку для максимизируемого функционала в задаче (3.16):

$$\begin{aligned}
&\frac{\lambda_1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma}|Ff(t)-y(t)|^2\,dt\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma<|t|\leqslant\sigma_1}(\lambda_2 t^{2r}|Ff(t)|^2\operatorname{ch}2\beta t+\lambda_1|Ff(t)-y(t)|^2)\,dt\\
&\qquad\qquad+\frac{\lambda_2}{2\pi}\int_{|t|>\sigma_1}t^{2r}|Ff(t)|^2\operatorname{ch}2\beta t\,dt\\
&\qquad=\frac{\lambda_1}{2\pi}\int_{-\sigma_1}^{\sigma_1}|Ff(t)-y(t)|^2\,dt+\frac{\lambda_2}{2\pi}\int_{|t|>\sigma}t^{2r}|Ff(t)|^2\operatorname{ch}2\beta t\,dt\\
&\qquad\leqslant\lambda_1\frac{\delta^2}{2\pi}+\lambda_2.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$e(D^k,H_2^{r,\beta}+\mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R}),I_{\sigma_1},\delta,m_a)\leqslant\sqrt{\lambda_1\frac{\delta^2}{2\pi}+\lambda_2}.$$

Учитывая (3.12), получаем, что

$$E(D^k,H_2^{r,\beta}+\mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R}),I_{\sigma_1},\delta)=\sqrt{\lambda_1\frac{\delta^2}{2\pi}+\lambda_2},$$

а методы m_a оптимальные.

Покажем, что функции a, для которых $S_a \leqslant 1$, существуют. Заметим ("выделяя полный квадрат"), что условие $S_a \leqslant 1$ равносильно тому, что для п.в. $\sigma < |t| \leqslant \sigma_1$ выполнено неравенство

$$\left|a(t)-\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2 t^{2r}\operatorname{ch}2\beta t}\right|^2\leqslant\frac{\lambda_1\lambda_2 t^{2(r-k)}\operatorname{ch}2\beta t(-t^{2k}+\lambda_1+\lambda_2 t^{2r}\operatorname{ch}2\beta t)}{(\lambda_1+\lambda_2 t^{2r}\operatorname{ch}2\beta t)^2}.$$

Если

$$-t^{2k}+\lambda_1+\lambda_2 t^{2r}\operatorname{ch}2\beta t\geqslant 0 \tag{3.21}$$

при $\sigma < |t| \leqslant \sigma_1$, то такие a, очевидно, существуют и описываются равенством (3.5).

Если $(\sigma_1,\sigma)\in\Sigma_1$, то прямая $y=\lambda_1+\lambda_2 x$ параллельна касательной, проведенной к s в точке $(x(t_0),y(t_0))$, где t_0 определяется равенством

$$\frac{kt_0^{2(k-r)}}{r\operatorname{ch}2\beta t_0+t_0\beta\operatorname{sh}2\beta t_0}=\frac{1}{\sigma_1^{2(r-k)}\operatorname{ch}2\beta\sigma_1}$$

(см. (3.1)), и в силу условия $\sigma \geqslant h(\sigma_1)$ проходит не ниже касательной. Следовательно, в силу вогнутости s для всех $x \geqslant 0$ выполняется неравенство $\lambda_1+\lambda_2 x \geqslant s(x)$. Отсюда вытекает условие (3.21). В остальных трех случаях прямые $y=\lambda_1+\lambda_2 x$ являются касательными к s, и по тем же соображениям условие (3.21) выполнено.

3) Пусть $k=0$, $\sigma_1>0$, $\sigma\geqslant 0$ и $\sigma\leqslant\sigma_1$. Как было показано выше, функции f_n, определенные равенством (3.13), являются допустимыми в задаче (3.11). Следовательно,

$$\begin{aligned}
&E^2(D^0,H_2^{r,\beta}+\mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R}),I_{\sigma_1},\delta)\\
&\quad\geqslant\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}|Ff_n(t)|^2\,dt\\
&\quad=\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma-1/n}^{\sigma}\delta^2 n\,dt+\frac{n}{(\sigma_1+1/n)^{2r}\operatorname{ch}(2\beta(\sigma_1+1/n))}\int_{\sigma_1}^{\sigma_1+1/n}dt\\
&\quad=\frac{\delta^2}{2\pi}+\frac{1}{(\sigma_1+1/n)^{2r}\operatorname{ch}2\beta(\sigma_1+1/n)}.
\end{aligned}$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$, получаем

$$E^2(D^0,H_2^{r,\beta}+\mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R}),I_{\sigma_1},\delta)\geqslant\frac{\delta^2}{2\pi}+\widetilde{\lambda},\qquad \widetilde{\lambda}=\frac{1}{\sigma_1^{2r}\operatorname{ch}2\beta\sigma_1}.\tag{3.22}$$

Будем искать оптимальные методы восстановления $m_a\colon L_2(\Delta_{\sigma_1})\to L_2(\mathbb{R})$ среди отображений, которые в образах Фурье представляются в виде (3.14) с $k=0$. Рассуждая по той же схеме, которая была приведена выше, считаем, что $a\equiv 1$ на Δ_σ, и будем оценивать сверху максимизируемый функционал в (3.16) (при $k=0$), представив его для этого в виде суммы трех слагаемых:

$$\begin{aligned}
I_1&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma}|Ff(t)-y(t)|^2\,dt,\\
I_2&=\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma<|t|\leqslant\sigma_1}|Ff(t)-a(t)y(t)|^2\,dt,\\
I_3&=\frac{1}{2\pi}\int_{|t|>\sigma_1}|Ff(t)|^2\,dt.
\end{aligned}$$

Оценим I_2. Используя неравенство Коши–Буняковского, будем иметь

$$\begin{aligned}
&|Ff(t)-a(t)y(t)|^2\\
&\quad=|(1-a(t))Ff(t)+a(t)(Ff(t)-y(t))|^2\\
&\quad\leqslant\biggl(\frac{|1-a(t)|^2}{\widetilde{\lambda}t^{2r}\operatorname{ch}2\beta t}+|a(t)|^2\biggr)\bigl(\widetilde{\lambda}t^{2r}|Ff(t)|^2\operatorname{ch}2\beta t+|Ff(t)-y(t)|^2\bigr).
\end{aligned}\tag{3.23}$$

Положим

$$\widetilde{S}_a=\operatorname*{vraimax}_{\sigma<|t|\leqslant\sigma_1}\biggl(\frac{|1-a(t)|^2}{\widetilde{\lambda}t^{2r}\operatorname{ch}2\beta t}+|a(t)|^2\biggr).$$

Тогда, интегрируя (3.23), получаем следующую оценку для величины I_2:

$$I_2\leqslant\frac{\widetilde{S}_a}{2\pi}\int_{\sigma<|t|\leqslant\sigma_1}(\widetilde{\lambda}t^{2r}|Ff(t)|^2\operatorname{ch}2\beta t+|Ff(t)-y(t)|^2)\,dt.$$

Для I_3 имеем

$$I_3\leqslant\frac{\widetilde{\lambda}}{2\pi}\int_{|t|>\sigma_1}t^{2r}|Ff(t)|^2\operatorname{ch}2\beta t\,dt.$$

Если предположить, что функция a такова, что $\widetilde{S}_a \leqslant 1$, то, учитывая оценки, полученные для I_2 и I_3, получаем следующую оценку для максимизируемого функционала в задаче (3.16) (при $k = 0$):

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma}|Ff(t)-y(t)|^2\,dt \\
&\qquad+\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma<|t|\leqslant\sigma_1}(\widetilde{\lambda}t^{2r}|Ff(t)|^2\operatorname{ch}2\beta t+|Ff(t)-y(t)|^2)\,dt \\
&\qquad+\frac{\widetilde{\lambda}}{2\pi}\int_{|t|>\sigma_1}t^{2r}|Ff(t)|^2\operatorname{ch}2\beta t\,dt \\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma_1}^{\sigma_1}|Ff(t)-y(t)|^2\,dt+\frac{\widetilde{\lambda}}{2\pi}\int_{|t|>\sigma}t^{2r}|Ff(t)|^2\operatorname{ch}2\beta t\,dt \\
&\leqslant\frac{\delta^2}{2\pi}+\widetilde{\lambda}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$e(D^0,H_2^{r,\beta}+\mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R}),I_{\sigma_1},\delta,m_a)\leqslant\sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi}+\widetilde{\lambda}}.$$

Учитывая (3.22), получаем, что

$$E(D^0,H_2^{r,\beta}+\mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R}),I_{\sigma_1},\delta)=\sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi}+\widetilde{\lambda}},$$

а методы m_a оптимальные.

Условие $\widetilde{S}_a \leqslant 1$ равносильно тому, что для п.в. $\sigma < |t| \leqslant \sigma_1$ выполнено неравенство

$$\left|a(t)-\frac{1}{1+\widetilde{\lambda}t^{2r}\operatorname{ch}2\beta t}\right|\leqslant\frac{\widetilde{\lambda}t^{2r}\operatorname{ch}2\beta t}{1+\widetilde{\lambda}t^{2r}\operatorname{ch}2\beta t}.$$

Такие a, очевидно, существуют и описываются равенством (3.6).

Теорема доказана.

§ 4. Обсуждение оптимальных методов

При восстановлении $f^{(k)}$ на классе $H_2^{r,\beta}+\mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R})$ по неточно заданному преобразованию Фурье функции f на отрезке $[-\sigma_1,\sigma_1]$ возникают следующие два вопроса:

- нельзя ли уменьшить отрезок $[-\sigma_1,\sigma_1]$, на котором задается исходная информация о функции f, не увеличивая при этом погрешность оптимального восстановления?
- нельзя ли расширить подпространство $\mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R})$, на котором точен оптимальный метод, также не увеличивая при этом погрешность оптимального восстановления?

Иными словами, нас интересует, не является ли часть информации, которая нам дается о функции f, лишней и нельзя ли среди получаемого семейства оптимальных методов найти тот, который был бы точен на более широком подпространстве и не увеличивал бы погрешность оптимального восстановления?

Будем рассматривать случай, когда $k \geqslant 1$. Ответы на эти вопросы зависят от того, в какую из областей Σ_j, $j = 1, 2, 3, 4$, попадает точка (σ_1, σ).

В случае, когда $(\sigma_1, \sigma) \in \Sigma_1$, из (3.4) видно, что при уменьшении σ_1 или увеличении σ погрешность оптимального восстановления увеличивается. Тем самым ответы на эти вопросы в этом случае отрицательные.

Если $(\sigma_1, \sigma) \in \Sigma_2$, то погрешность оптимального восстановления не изменится для точки $(\sigma_1, h(\sigma_1)$. Это означает, что можно расширить исходное подпространство $\mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R})$ до подпространства $\mathcal{B}_{h(\sigma_1),2}(\mathbb{R})$, не увеличивая при этом погрешность оптимального восстановления.

При $(\sigma_1, \sigma) \in \Sigma_4$ можно уменьшить отрезок, на котором задается информация о функции f, сузив его до отрезка $[-\sigma_1', \sigma_1']$, где σ_1' таково, что $h(\sigma_1') = \sigma$.

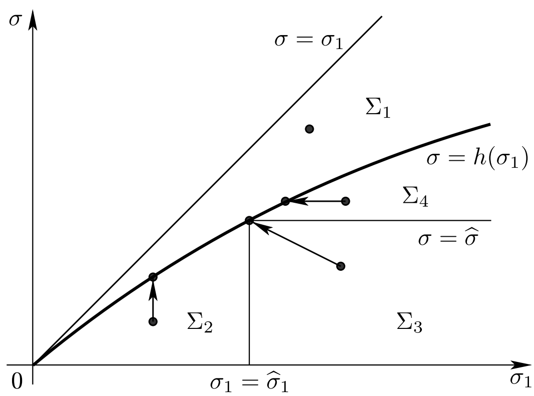

Рис. 4

Наконец, если $(\sigma_1, \sigma) \in \Sigma_3$, то можно и сузить отрезок, на котором задается информация о функции f, до отрезка $[-\widehat{\sigma}_1, \widehat{\sigma}_1]$, и расширить подпространство до $\mathcal{B}_{\widehat{\sigma},2}(\mathbb{R})$.

Схематично эти переходы показаны на рис. 4.

Список литературы

[1] С. М. Никольский, *Квадратурные формулы*, 4-е изд., Наука, М., 1988, 256 с.; исп. пер. 3-го изд.: S. Nikolski, *Fórmulas de cuadratura*, Editorial Mir, Moscow, 1990, 293 pp.

[2] С. М. Никольский, “К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами”, *УМН*, **5**:2(36) (1950), 165–177.

[3] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Точность и оптимальность методов восстановления функций по их спектру”, *Функциональные пространства, теория приближений, смежные разделы математического анализа*, Сборник статей. К 110-летию со дня рождения академика Сергея Михайловича Никольского, Труды МИАН, **293**, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2016, 201–216; англ. пер.: G. G. Magaril-Il'yaev, K. Yu. Osipenko, “Exactness and optimality of methods for

recovering functions from their spectrum", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **293** (2016), 194–208.

[4] Е. А. Балова, К. Ю. Осипенко, "Оптимальные методы восстановления решений задачи Дирихле, точные на подпространствах сферических гармоник", *Матем. заметки*, **104**:6 (2018), 803–811; англ. пер.: E. A. Balova, K. Yu. Osipenko, "Optimal recovery methods for solutions of the Dirichlet problem that are exact on subspaces of spherical harmonics", *Math. Notes*, **104**:6 (2018), 781–788.

[5] С. А. Унучек, "Оптимальные методы восстановления решения уравнения теплопроводности, точные на тригонометрических полиномах", *Матем. заметки*, **113**:1 (2023), 118–131; англ. пер.: S. A. Unuchek, "Optimal recovery methods exact on trigonometric polynomials for the solution of the heat equation", *Math. Notes*, **113**:1 (2023), 116–128.

[6] C. A. Micchelli, T. J. Rivlin, "A survey of optimal recovery", *Optimal estimation in approximation theory* (Freudenstadt, 1976), The IBM Research Symposia Series, Plenum, New York, 1977, 1–54.

[7] Дж. Трауб, Х. Вожьняковский, *Общая теория оптимальных алгоритмов*, Мир, М., 1983, 384 с.; пер. с англ.: J. F. Traub, H. Woźniakowski, *A general theory of optimal algorithms*, ACM Monogr. Ser., Academic Press, Inc., New York–London, 1980, xiv+341 pp.

[8] L. Plaskota, *Noisy information and computational complexity*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996, xii+308 pp.

[9] K. Yu. Osipenko, *Optimal recovery of analytic functions*, Nova Science Publ., Inc., Huntington, NY, 2000, 220 pp.

[10] К. Ю. Осипенко, *Введение в теорию оптимального восстановления*, Лань, СПб., 2022, 388 с.

[11] К. Ю. Осипенко, "Неравенство Харди–Литтлвуда–Полиа для аналитических функций из пространств Харди–Соболева", *Матем. сб.*, **197**:3 (2006), 15–34; англ. пер.: K. Yu. Osipenko, "The Hardy–Littlewood–Pólya inequality for analytic functions in Hardy–Sobolev spaces", *Sb. Math.*, **197**:3 (2006), 315–334.

[12] И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974, 336 с.; пер. с англ.: E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton Math. Ser., **32**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971, x+297 pp.

Константин Юрьевич Осипенко
(Konstantin Yu. Osipenko)
Механико-математический факультет,
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова;
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича Российской академии наук,
г. Москва
E-mail: kosipenko@yahoo.com

Поступила в редакцию
01.07.2023 и 02.12.2023