

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ ПО НЕТОЧНО ЗАДАНЫМ КОЭФФИЦИЕНТАМ ФУРЬЕ

К.Ю. Осипенко

МАТИ-РГТУ им. К.Э. Циолковского

Пусть с фиксированной погрешностью известен конечный набор коэффициентов Фурье некоторой периодической функции. Что можно сказать о самой функции и о ее производных на основании этой информации? Вопрос достаточно естественный и далеко не новый. Как поступают на практике? Высоко-частотные коэффициенты Фурье отбрасывают, а остальные фильтруют, т.е. умножают на некоторые сглаживающие коэффициенты. С математической точки зрения эта задача может быть решена с помощью метода регуляризации. Однако при этом возникает ряд вопросов, которые не решаются при использовании этого метода.

Мы будем использовать другой подход. Пользуясь некоторой априорной информацией о принадлежности функции некоторому множеству (классу), мы будем искать в определенном смысле самый лучший метод, перебирая все возможные методы. На первый взгляд эта задача кажется очень сложной - как же перебрать все методы? Наша цель - показать, что во многих случаях и, в частности, в задаче восстановления функции по неточно заданным коэффициентам Фурье, такая постановка позволяет прийти до конкретных методов.

Перейдем к точным формулировкам. Положим

$$X_p = \left\{ x = (x_0, x_1, \dots) : \sum_{j=0}^{\infty} n_j |x_j|^p < \infty \right\}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

где $x_j \in K$, $K = R$ или $K = C$, а $n_j \geq 0$, причем лишь конечное число n_j обращается в ноль. Если $n_0 = n_1 = \dots = 1$, то соответствующее пространство X_p обычно обозначают через l_p , при этом

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=0}^{\infty} |x_j|^p \right)^{1/p}. \quad (1)$$

Пусть задан оператор $T : X_p \rightarrow l_p$

$$Tx = (m_0 x_0, m_1 x_1, \dots),$$

где $m_j \in K$, а последовательность $|m_j|^p / n_j$ для достаточно больших j ограничена (из этого условия вытекает, что $Tx \in l_p$ для всех $x \in X$).

Рассматривается задача об оптимальном восстановлении значений оператора T на множестве

$$W_p = \left\{ x \in X_p : \sum_{j=0}^{\infty} n_j |x_j|^p \leq 1 \right\}$$

по неточно заданным координатам x_0, \dots, x_N . Точнее, предполагается, что для любого $x \in W_p$ известен вектор $y = (y_0, \dots, y_N)$, $y_j \in K$, $j = 0, \dots, N$, такой, что

$\|I^N x - y\|_{l_p^N} \leq d$, где $I^N x = (x_0, \dots, x_N)$, а $\|\cdot\|_{l_p^N}$ определяется равенством (1), в котором суммирование ведется до N . По вектору y надо восстановить наиболее точно значение Tx .

Под методами восстановления понимаются всевозможные отображения $m: K^N \rightarrow l_p$. Для данного метода m его погрешностью называется величина

$$e_N(T, W_p, d, m) = \sup_{\substack{x \in W_p, y \in K^N \\ \|I^N x - y\|_{l_p^N} \leq d}} \|Tx - m(y)\|_p.$$

Величина

$$E_N(T, W_p, d) = \inf_{m: K^N \rightarrow l_p} e_N(T, W_p, d, m)$$

называется погрешностью оптимального восстановления, а метод, на котором достигается нижняя, – оптимальным.

Будем предполагать, что $n_j > 0$ для всех $j \geq N + 1$. Положим

$$A = \sup_{j \geq N+1} \frac{|m_j|^p}{n_j},$$

$$M = co\{(0, 0) \cup \{(|m_j|^p, n_j)\}_{j \in \square_+}\} + \{(t, tA) \mid t \geq 0\},$$

где $co\Omega$ --- выпуклая оболочка множества Ω . Определим функцию $q(\cdot)$ на $[0, \infty)$ по правилу: $q(t) = \max\{x \mid (t, x) \in M\}$. Ясно, что $q(\cdot)$ – вогнутая ломаная.

Теорема. При всех $d > 0$

$$E_N(T, W_p, d) = dq^{1/p}(d^{-p}).$$

Пусть d^{-p} принадлежит тому промежутку на \square_+ , где $q(\cdot)$ задается уравнением $q(t) = \hat{I}_1 + \hat{I}_2 t$. Если $\hat{I}_1, \hat{I}_2 > 0$, то для всех a_j , $0 \leq j \leq N$, удовлетворяющих условию

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{|m_j - a_j|^q}{n_j^{q/p} \hat{I}_2^{q/p}} + \frac{|a_j|^q}{\hat{I}_1^{q/p}} \leq 1, \quad 1 < p < \infty, 1/p + 1/q = 1, \\ \frac{|m_j - a_j|}{n_j \hat{I}_2} \leq 1, \quad \frac{|a_j|}{\hat{I}_1} \leq 1, \quad p = 1, \end{array} \right. \quad (2)$$

методы

$$\hat{m}(y) = \sum_{j=0}^N a_j y_j e_j, \quad (3)$$

где $\{e_j\}_{j \in \mathbb{Z}_+}$ – стандартный базис, являются оптимальными. Если $\hat{I}_1 = 0$, то

$\hat{m}(y) = 0$ – оптимальный метод, а если $\hat{I}_2 = 0$, то

$$\hat{m}(y) = \sum_{j=0}^N m_j y_j e_j$$

– оптимальный метод.

Частный случай приведенного здесь результата рассмотрен в работе [1], а его непрерывный аналог, т.е. для функций, заданных на прямой, исследован в [2].

1. Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко. Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью. // Матем. сб. – 2002. – Т. 193, вып.3 – С.79–100.

2. Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко. Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных. // Функц. анализ и его прилож. – 2003. – Т. 37. – С. 51–64.